



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Estabilidad de sistemas positivos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jair Misael García Juárez

Director de tesis: Dr. Horacio Leyva Castellanos

Hermosillo, Sonora, México,

Mayo de 2021

SINODALES

Dr. Horacio Leyva Castellanos

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro

Dr. Fernando Verduzco Gonzáles

Dr. Daniel Olmos Liceaga

A mi familia y amigos

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Luisa y Fausto, por apoyarme incondicionalmente a cumplir mi sueño de estudiar esta carrera. Por todos los sacrificios que tuvieron que hacer para que yo lograra esta meta. A mi hermana, Alexa, por siempre preocuparse por mí y alegrar mis días cuando estaba triste. A mi hermano, Faustino, por estar conmigo en esta etapa de mi vida.

A los profesores del departamento que me dieron clases, por formarme profesionalmente. En especial quiero agradecer a mi director de tesis el Dr. Horacio Leyva Castellanos por guiarme en la elaboración de este trabajo, por todo el apoyo, el tiempo brindado hasta en vacaciones y la paciencia que me tuvo.

A mis amigos de la infancia que me apoyaron durante la carrera, Ángel de Jesús Espinoza González, Miguel Ángel Balvastro Carrillo, por brindarme su amistad y apoyo durante toda la carrera y brindarme gratos recuerdos durante esta etapa.

En especial a mi amiga Irene Abigail Cruz Rodríguez por ser la persona que más me apoyo incondicionalmente en toda la carrera, tanto académica como personalmente; pues hizo más de lo que cualquier persona puedo hacer por mí.

Finalmente, quiero agradecer a Dios pues él me guio por este camino y me ayudo a terminar la carrera.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes de sistemas positivos	4
2. Politopos invariantes bajo el sistema lineal	13
2.1. Politopos	13
2.2. Politopos positivamente invariantes	16
3. Sistemas positivos lineales	23
4. Estabilización de sistemas positivos	28
4.1. Presentación de un resultado de estabilidad para espacios métricos	31
5. Estabilización a través del control de la función de Lyapunov	40
Bibliografía	59

Notación

La siguiente lista describe varios símbolos que luego se utilizarán a lo largo de esta tesis.

Símbolo	Sentido
R	El campo de los números reales
R_+	El conjunto de números reales no negativos
R^n	El espacio de los vectores de dimensión n de números reales
$R^{n \times n}$	El espacio de $n \times n$ matrices de números reales
$x(t)$	Una trayectoria en R^n al tiempo t
x_i	La i -ésima entrada del vector x en R^n , para $i \in \{1, \dots, n\}$
x_0	Un vector en R^n que generalmente representa la condición inicial
\dot{x}	Representa la derivada $dx(t)/dt$ de una trayectoria $x(t)$ de dimensión n .
\bar{x}	Punto de equilibrio en R^n
$x \geq 0$	Vector en R^n con entradas mayores o iguales a cero
R_+^n	El ortante positivo de R^n , dado por $\{x \in R^n : x \geq 0\}$
A^{-1}	La inversa de una matriz A
A^T	La transpuesta de una matriz A
D	Matriz diagonal con $d_{ii} > 0$

Capítulo 1

Introducción

Diremos que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es un sistema positivo si la correspondiente variable de estado $x(t)$ permanece en el ortante positivo R_+^n para todo tiempo $t \geq 0$. Inicio con una descripción de algunas áreas de aplicaciones que pueden ser representadas de forma natural mediante sistemas positivos. En la sección de antecedentes presento los principales conceptos y teoremas que definen el área de sistemas positivos lineales.

En el segundo capítulo describo los elementos básicos que definen un politopo convexo; la definición de V -politopo; el envolvente convexo de un conjunto de puntos. Así como la definición de H -politopo; la intersección de medios espacios, definidos mediante desigualdades lineales. También presento el teorema que establece la equivalencia entre las definiciones de V -politopo y H -politopo. Además estudiamos algunas definiciones y proposiciones de la invarianza de un politopo.

En el capítulo tres nos enfocamos en los sistemas positivos, es decir, mencionamos al conjunto politopo que queremos estudiar el cuál pertenece a R_+^n . Por lo que mencionaremos teoremas enfocados a los sistemas positivos.

Una vez que describo una familia particular de politopos, llamados Simplex-politopos, estudio varios teoremas que enuncian condiciones necesarias y suficientes para tener la invarianza positiva bajo el sistema lineal autónomo

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t). \quad (1)$$

Tales condiciones de invarianza son utilizadas para describir la estabilidad, así como un método de estabilización para los sistemas lineales positivos con control.

En el último capítulo expongo algunos trabajos recientes de estabilización de sistemas lineales positivos, con control escalar restringido en magnitud y signo. Un sistema de control lineal es de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu, \quad (2)$$

con matriz B en $R^{n \times m}$, y u en R^m un parámetro de control. Un problema de estabilización consiste en suponer que el origen es inestable bajo el sistema lineal (1) sin control (con $u = 0$); por diseñar una función $u(x)$ tal que el origen es asintóticamente estable bajo el llamado sistema retroalimentado (2).

En la literatura del área de sistemas positivos se describen algunas aplicaciones, podemos ver esto en los trabajos [1, 4, 5, 6, 9, 11]. Hay muchos ejemplos de la vida real de sistemas para los cuáles la entrada de control no es negativa, también conocida como unilateral. Un ejemplo típico con el que la mayoría de las personas pueden identificar es el de los sistemas de calefacción en casas u otros edificios. Un sistema de calefacción central esencialmente proporciona calor al interior de un edificio. Un sistema convencional hace circular agua caliente a través de radiadores que liberan calor a las habitaciones. Estos radiadores a menudo están equipados con válvulas controladas termostáticamente. Estas válvulas pueden abrirse (completamente o hasta cierto nivel) o cerrarse. Por lo tanto, el radiador solo puede liberar energía en la habitación (válvula abierta) o no agregar energía (válvula cerrada). No puede extraer calor de la habitación y, por lo tanto, el sistema de calefacción se clasifica como un sistema con control positivo.

Los ejemplos de sistemas de control positivo que están estrechamente relacionados con el ejemplo de calefacción central son los sistemas que implican el flujo de fluidos o gases controlados por válvulas unidireccionales. Tales sistemas ocurren por ejemplo en mecánica y química. Considere, por ejemplo, una planta química donde se agregarán varias sustancias a un recipiente de reacción. Una vez agregadas, las sustancias se mezclan y/o reaccionan para producir el producto final deseado, y por lo tanto las sustancias crudas ya no se pueden extraer individualmente. Por lo tanto, si u_i controla la adición de la sustancia i , entonces este es un control positivo ya que no es posible la extracción.

Se pueden enumerar muchos otros sistemas de control que se pueden clasificar como control positivo. Por ejemplo, en redes eléctricas con elementos de diodo (que tienen baja resistencia en una dirección y alta, idealmente infinita, resistencia en la otra). Además, el control de crucero clásico es un ejemplo de control positivo ya que el sistema de control solo opera el acelerador y no los frenos.

Otras áreas en las que se utiliza el control positivo son las siguientes

Biología y fisiología. La teoría de los sistemas positivos se ha utilizado repetidamente y con éxito para modelar sistemas biológicos y fisiológicos. Esto está motivado principalmente por el hecho de que una característica importante de los modelos bioquímicos es que la mayoría de las variables toman solo valores no negativos, ya que generalmente representan concentraciones químicas. Estos sistemas de control también se producen en campos médicos. Por ejemplo, en bombas que administran medicamentos por vía intravenosa al torrente sanguíneo de un paciente. Un páncreas artificial es un ejemplo de un sistema de control positivo ya que la insulina solo se puede agregar al cuerpo del paciente y no se puede extraer a través de la bomba.

Ciencias económicas. Quizás el más significativo, pero ciertamente no el único. El área de la economía en la que la teoría de los sistemas positivos juega un papel importante en el análisis de insumo-producto. El análisis de insumo-producto se ocupa de la cuestión específica de cuál debería ser el nivel de producción de diferentes industrias en

una economía, para satisfacer la demanda de un determinado producto en una situación económica particular.

Ecología y dinámica de poblaciones. Los sistemas positivos son opciones naturales para modelar sistemas ecológicos. La razón es que en los sistemas ecológicos, por lo general, los estados del sistema son las poblaciones de diferentes especies, que por supuesto no tienen un valor negativo. Por eso, desde los primeros trabajos sobre sistemas ecológicos, los sistemas positivos han jugado un papel importante en este campo.

Epidemiología. Por lo general, en modelos epidemiológicos, la población que se estudia se divide en diferentes clases y el número de individuos en cada una de estas clases se considera como variables de estado. Por eso, en ocasiones, los modelos epidemiológicos se estudian como un caso especial de modelos ecológicos.

Red reguladora genética. Una red de regulación genética es una colección de segmentos de ADN en una célula que interactúan entre sí indirectamente (a través de sus productos de expresión de ARN y proteínas) y con otras sustancias en la célula, lo que rige las tasas a las que los genes de la red se transcriben en ARNm. En general, cada molécula de ARNm pasa a producir una proteína específica (o conjunto de proteínas). Los genes se pueden ver como nodos en una red, donde las entradas son proteínas, como los factores de transcripción, y las salidas, el nivel de expresión génica. Es común modelar una red de este tipo con un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas (posiblemente estocásticas) que describen la cinética de reacción de las partes constituyentes. En tal caso, los estados de los sistemas son las concentraciones de las sustancias correspondientes, que de hecho son variables no negativas.

Sistemas compartimentales. Un compartimento es una cantidad de algún material que es cinéticamente homogéneo. Cinéticamente homogéneo significa que el material de un comportamiento es en todo momento homogéneo; cualquier material que entre en él se mezcla instantáneamente con el material del compartimento. Un compartimento puede ser, por ejemplo, un modelo físico de una parte del cuerpo de un organismo vivo con una concentración más o menos homogénea de un compuesto químico o de un material. Un sistema de compartimentos está compuesto por varios compartimentos. Los sistemas compartimentales se utilizaron por primera vez en fisiología, pero son modelos naturales de farmacocinética, epidemiología, ecología y otros sistemas cuyos modelos se derivan de consideraciones de equilibrio de masa. Las variables de interés en un sistema de compartimentos suelen ser la masa de cada compartimento y los flujos que entran y salen de él. Dado que en estos casos tratamos con masas de diferentes sustancias, por lo general, podemos describir los sistemas compartimentales como un sistema positivo.

Los sistemas de control que se describen en los ejemplos anteriores están comúnmente representados por un sistema de ecuaciones diferenciales. La estabilización de tales sistemas se ha estudiado ampliamente en el campo de la teoría del control. Estos sistemas se pueden encontrar en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología.

1.1. Antecedentes de sistemas positivos

A continuación presentamos algunas definiciones, teoremas o terminología en general, para la representación matemática de los sistemas lineales positivos. Estos resultados pueden leerse en las siguientes referencias [1, 2, 7, 9, 13].

Damos las siguientes definiciones para una matriz $A \in R^{n \times n}$.

Comenzamos esta sección analizando el sistema lineal (1)

$$\dot{x} = Ax,$$

donde A es una matriz con entradas reales y $x(0) = x_0$ es la condición inicial. La solución directa (a veces denominada solución) o trayectoria de (1) con la condición inicial x_0 en $t = 0$ se denota por $x(t, x_0)$.

Definición 1. *El sistema (1) es llamado positivo si*

$$x(t, x_0) \geq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad x_0 \geq 0.$$

En otras palabras, si R_+^n es un conjunto invariante para el sistema (1), entonces el sistema es positivo.

Observación. Debido a que R_+^n es positivo la matriz A no puede tener valores propios complejos.

Definición 2. *Una matriz A es definida positiva si para todo $x \neq 0$ se tiene que $x^T Ax > 0$.*

Definición 3. *Una matriz A es definida negativa si para toda $x \neq 0$ se tiene que $x^T Ax < 0$.*

Definición 4. *Una matriz A es positiva si todas sus entradas son positivas, y la denotamos como $A > 0$.*

Definición 5. *Una matriz $A \geq 0$ es no negativa si todas sus entradas son no negativas.*

La desigualdad $x > 0$ ($x \geq 0$) significa que todos los elementos del vector x son positivos (no negativos). La desigualdad $A \succ 0$ significa que la matriz A es definida positiva.

Definición 6. *Una matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es llamada matriz Hurwitz, si sus valores propios tienen parte real negativa.*

Definición 7. *Una matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es llamada matriz Metzler, si $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$.*

Definición 8. *Una matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es llamada matriz Metzleriana, si $a_{ii} < 0 \quad \forall i$ y $a_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$.*

Definición 9. *Los menores principales ordenados naturalmente de una matriz $Q \in R^{n \times n}$*

se definen como determinantes de las matrices

$$Q_k = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kk} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Específicamente, los menores principales de la matriz Q son

$$\Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

El siguiente teorema nos ayuda a saber cuando una matriz es definida positiva y puede encontrarse en [7] como el teorema 13.

Teorema 1. *Sea $Q \in R^{n \times n}$ una matriz simétrica. Entonces Q es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.*

Los siguientes dos teoremas nos dan las soluciones de dos sistemas lineales, estos se pueden encontrar en [15] como los teoremas 11 y 12 respectivamente.

Teorema 2. *El sistema lineal (1) con coeficientes constante y con condición inicial $x(t_0) = x_0$, tiene como solución*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0.$$

Teorema 3. *Sea el sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes*

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

y con condición inicial (t_0, x_0) tiene como solución

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Ejemplo 1. Consideremos el sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ e^{-2t} \end{pmatrix},$$

con $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02})^T$. Sabemos que su solución está dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Como

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal, es claro que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \\ &= e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ e^{-2s} \end{pmatrix} ds \\ &= e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} se^s \\ 1 \end{pmatrix} ds \\ &= e^{tA} \begin{pmatrix} \int_0^t se^s ds \\ \int_0^t ds \end{pmatrix} \\ &= e^{tA} \begin{pmatrix} e^t(t-1) + 1 \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds \\ &= e^{tA} x_0 + e^{tA} \begin{pmatrix} e^t(t-1) + 1 \\ t \end{pmatrix} \\ &= e^{tA} \left(x_0 + \begin{pmatrix} e^t(t-1) + 1 \\ t \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t(t-1) + 1 \\ t \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} + e^t(t-1) + 1 \\ x_{02} + t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}(x_{01} + e^t(t-1) + 1) \\ e^{-2t}(x_{02} + t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado anterior es la solución para el sistema lineal planteado.

Estabilidad de puntos de equilibrio

Consideremos el sistema (1) y fijemos un valor de t , luego la exponencial e^{tA} puede verse como un mapeo (función) de R^n en R^n : dado el punto $x_0 \in R^n$, $e^{(t-t_0)A}x_0$ es el punto al cual llega la solución que inicia en x_0 en un tiempo t .

El conjunto de todos estos mapeos $e^{(t-t_0)A} : R^n \rightarrow R^n$ puede considerarse como la descripción del movimiento de los puntos $x_0 \in R^n$ a través de las soluciones del sistema lineal (1). Este conjunto de mapeos es llamado el flujo del sistema lineal.

Hagamos $\varphi_t = e^{tA}x_0$. Luego, puede probarse que el flujo satisface las siguientes propiedades para cada $x_0 \in R^n$:

- i) $\varphi_0(x_0) = x_0$.
- ii) $\varphi_s(\varphi_t(x_0)) = \varphi_{s+t}(x_0) \forall s, t \in R$.
- iii) $\varphi_{-t}(\varphi_t(x_0)) = \varphi_t(\varphi_{-t}(x_0)) = x_0 \forall t \in R$.

Definición 10. Un conjunto no vacío Ω es un conjunto positivamente invariante del sistema (1) si y sólo si para cualquier estado inicial $x_0 \in \Omega$, la trayectoria solución correspondiente $x(t, x_0) \in \Omega$ para toda $t \geq 0$.

Definición 11. Diremos que x_0 es un punto de equilibrio estable (o Lyapunov estable) si para cada vecindad U de x_0 , con $U \subset V$, existe una vecindad U_1 de x_0 con $U_1 \subset U$ tal que toda solución $\varphi(t, x_1)$, con $x_1 \in U_1$, está definida y permanece en U para todo $t > 0$.

Diremos que una solución es inestable si no es estable.

Definición 12. Diremos que el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable si es estable y si es posible escoger U_1 tal que, para toda $x_1 \in U_1$, $\varphi(t, x_1) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Diremos que el equilibrio es estable en forma global si es posible hacer $U_1 = R^n$ en la definición 11. Igualmente, diremos que un equilibrio es asintóticamente estable en forma global si es posible hacer $U_1 = R^n$ en la definición 12.

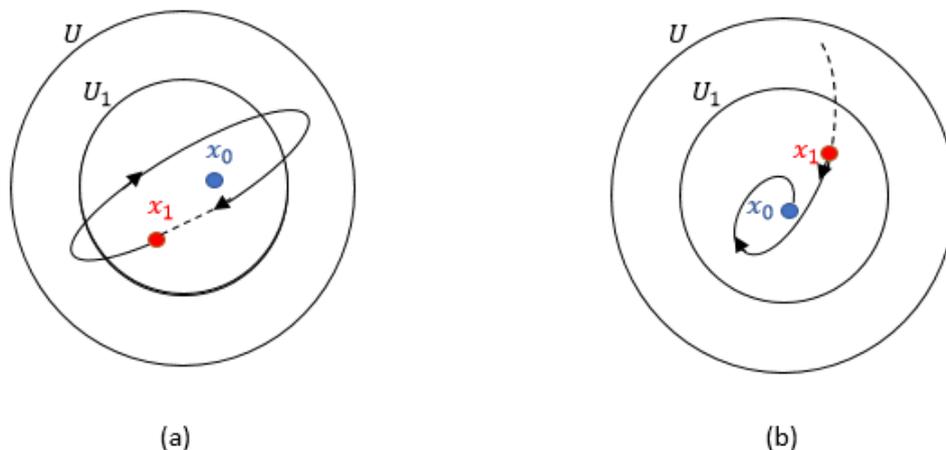


Figura 1. a) Equilibrio estable, b) equilibrio asintóticamente estable.

De las definiciones 6 y 12, así como de la proposición 6 de las notas de ecuaciones dos (pag. 50), podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 4. *El sistema (1) es asintóticamente estable si y sólo si A es matriz Hurwitz.*

El siguiente teorema, presentado en [15] como el teorema 14, nos clasifica los retratos fase de sistemas simples en el plano.

Teorema 5. *Consideremos el sistema (1) para $n = 2$. Sean $\mu_1 = \text{tr}(A)$ y $\mu_2 = \det(A)$, luego*

- i) *Si $\mu_2 < 0$ entonces (1) tiene un punto silla en el origen.*
- ii) *Si $\mu_2 > 0$ y $\mu_1^2 - 4\mu_2 \geq 0$ entonces (1) tiene un nodo en el origen. Es estable si $\mu_1 < 0$ e inestable si $\mu_1 > 0$.*
- iii) *Si $\mu_2 > 0$, $\mu_1^2 - 4\mu_2 < 0$ y $\mu_1 \neq 0$, entonces (1) tiene un foco en el origen. Es estable si $\mu_1 < 0$ e inestable si $\mu_1 > 0$.*
- iv) *Si $\mu_2 > 0$ y $\mu_1 = 0$ entonces (1) tiene un centro en el origen.*

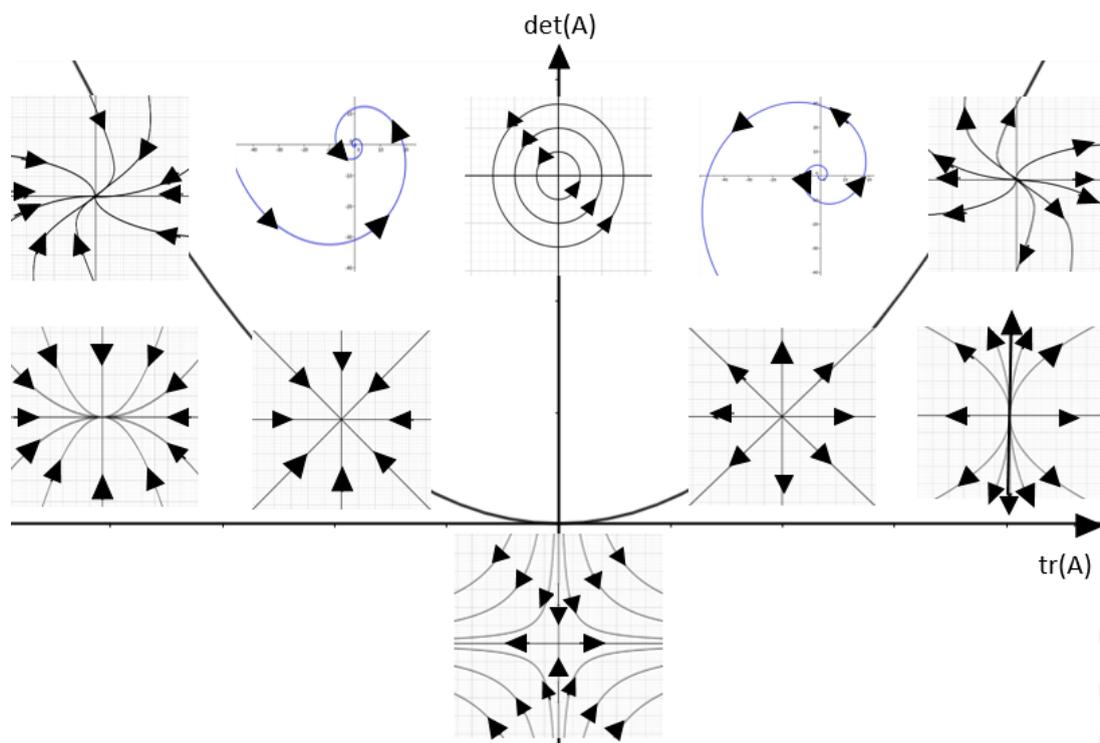


Figura 2. *Retratos fase del sistema $\dot{x} = Ax$ en función de la traza y el determinante de A .*

Medios espacios

En general, por hiperplano nos referimos a una superficie plana $(n - 1)$ -dimensional en n . Podemos definir el hiperplano mediante la ecuación lineal

$$l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n = c,$$

donde $l_1, l_2 \dots l_n$ y c son constantes. El vector $L^T = (l_1, l_2 \dots l_n)$ es normal al hiperplano, por lo que podemos escribir la ecuación del hiperplano como

$$L^T x = c,$$

con $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$. De aquí en adelante, nos referimos al hiperplano $H \subset R^n$, dado por

$$H := \{x \in R^n \mid L^T x = c\}.$$

Geoméricamente, el hiperplano H pasa por el origen sólo si $c = 0$.

Definimos los medios-espacios H^- , $H^+ \subset R^n$ como

$$H^- := \{x \in R^n \mid L^T x < c\} \quad \& \quad H^+ := \{x \in R^n \mid L^T x > c\}.$$

De acuerdo a la definición de conjunto positivamente invariante, diremos que un hiperplano H es positivamente invariante bajo el sistema lineal (1) si para toda $x_0 \in H$ sucede que

$$x(t, x_0) \in H \quad \forall t \geq 0.$$

Dada una solución $x(t)$ del sistema lineal, diremos que el punto $\bar{x} \in H$ es un punto de cruce, del subespacio H^+ al subespacio H^- , si sucede que

$$L^T A \bar{x} < 0.$$

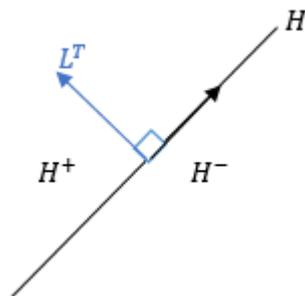


Figura 3. Hiperplano H

Aplicaremos estos conceptos para estudiar la invarianza de un politopo bajo el sistema lineal.

Consideremos un triángulo intersección que es acotada no vacío y convexo de medios espacios H_i^- , $i = 1, 2, 3$ dados por

$$T = \{x \in R^2 \mid L_i^T x \leq c_i\} \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

T es invariante bajo $\dot{x} = Ax$ si sucede que $x(t, \bar{x}) \in T \forall t > 0$ y $\bar{x} \in T$

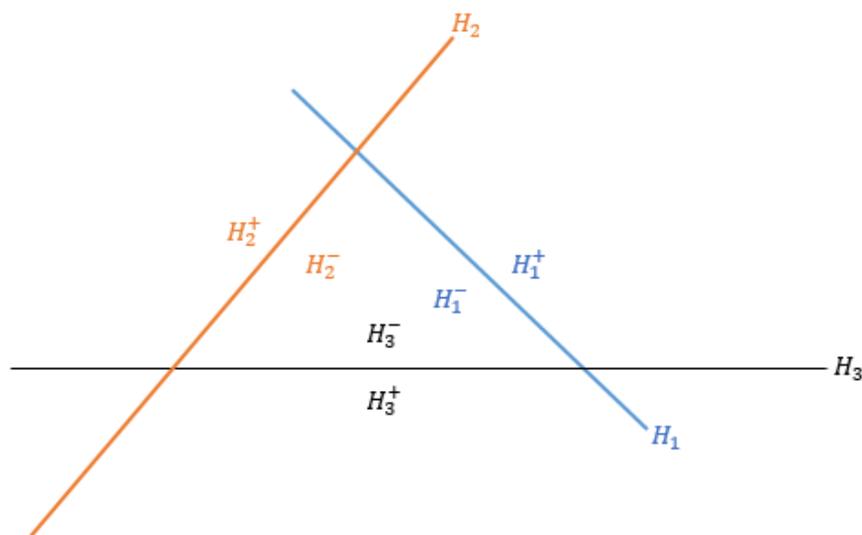


Figura 4. Intersección de los medios espacios H_i^- , para $i = 1, 2, 3$.

Ejemplo 2. Un ejemplo de lo mencionado anteriormente son las intersecciones de los siguientes medios espacios en el plano

$$H_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^2 \mid (0, -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid (-1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid (1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 = c \right\}$$

con $c > 0$, donde observamos en la siguiente figura como se forma un triangulo por la intersección de los medios espacios.

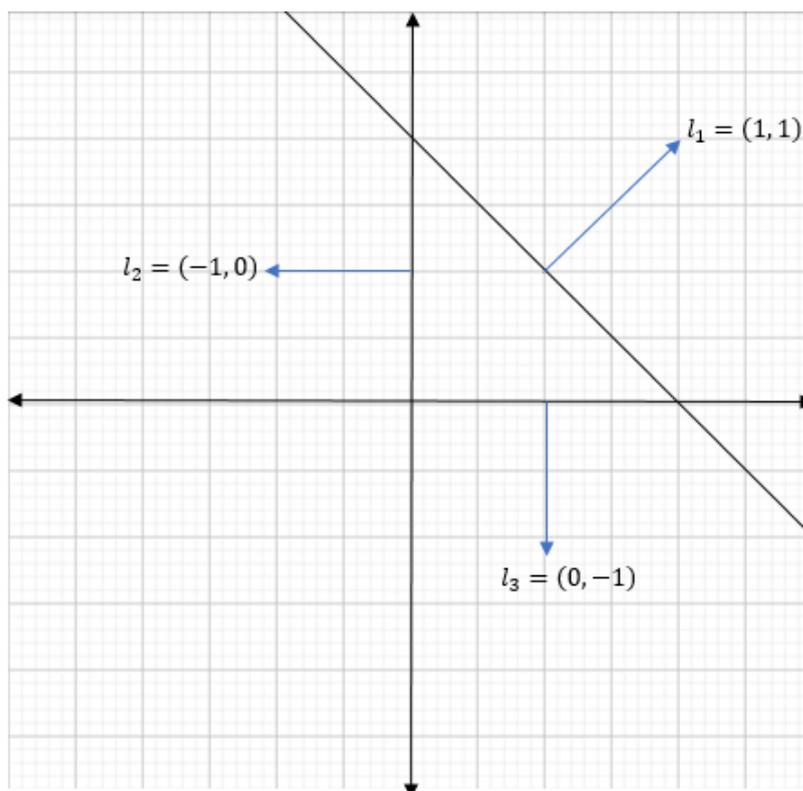


Figura 5. *Intersección de los medios espacios H_1^- , H_2^- , H_3^-*

En la siguiente sección nos dedicaremos a estudiar la invarianza de sistemas positivos, para eso nos enfocaremos en los politopos n-simplex.

Capítulo 2

Politopos invariantes bajo el sistema lineal

2.1. Politopos

Para estudiar la estabilidad de conjuntos simples estudiaremos los siguientes conceptos son las dos definiciones básicas de politopos

Definición 13. Se dice que un conjunto K de R^n es convexo si, dados dos puntos cualesquiera de K , el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto.

Definición 14 (V-politopo). El envolvente convexo de un conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de puntos en R^n :

$$P = \text{conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Definición 15 (H-politopo). Un conjunto de soluciones acotadas de un sistema finito de desigualdades lineales:

$$P = P(Q, \rho) := \{x \in R^n \mid q_i^T x \leq \rho_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq m\},$$

donde $Q \in R^{r \times n}$ es una matriz real con renglones q_i^T , y $\rho \in R^r$ es un vector real con entradas ρ_i .

Revisemos un ejemplo en su versión de *V-politopo* y *H-politopo*

Ejemplo 3. Consideremos las siguientes cuatro desigualdades, tal que cada una representa un medio-espacio de R^2 :

$$\begin{aligned} l_1 x_1 + l_2 x_2 &\leq c \\ -l_1 x_1 + l_2 x_2 &\leq c \\ -l_1 x_1 - l_2 x_2 &\leq c \\ l_1 x_1 - l_2 x_2 &\leq c \end{aligned}$$

donde l_1, l_2, c son constantes positivas. Observamos que el origen está incluido en las cuatro desigualdades. Los lados del conjunto corresponden a las igualdades que se obtienen de sustituir \leq por $=$.

Los puntos comunes, o la intersección de tales rectas, definen el siguiente conjunto de vértices

$$\left\{ \frac{c}{l_1}e_1, -\frac{c}{l_1}e_1, \frac{c}{l_2}e_2, -\frac{c}{l_2}e_2 \right\},$$

donde el par de vectores $\{e_1, e_2\}$ representa la base canónica de R^2 .

Podemos definir el *V-politopo* P mediante el envolvente convexo:

$$P = \text{conv}(X) := \left\{ \frac{c}{l_1}e_1, -\frac{c}{l_1}e_1, \frac{c}{l_2}e_2, -\frac{c}{l_2}e_2 \right\}.$$

Ahora reescribiremos como *H-politopo* el politopo anterior con una escritura más general

$$P = P(Q, \rho) := \{x \in R^2 \mid q_i^T x \leq \rho_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4\}$$

con q_i^T los renglones de la matriz Q dada por

$$Q = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ -l_1 & l_2 \\ -l_1 & -l_2 \\ l_1 & -l_2 \end{pmatrix}.$$

También puede escribirse matricialmente:

$$P = P(Q, \rho) := \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid Qx \leq \rho\},$$

con vector $\rho = (c, c, c, c)^T$.

Observación. En la teoría de Lyapunov, denotamos el conjunto convexo P mediante la desigualdad

$$P = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\},$$

con $x = (x_1, x_2)^T$ y la función no negativa $V(x) = l_1|x_1| + l_2|x_2|$.

Definición 16. Un Politopo es un subconjunto $P \subseteq R^n$ que se puede presentar como un V -politopo o (equivalentemente por el teorema principal a continuación) como un H -politopo.

Definición 17. La dimensión de un subconjunto arbitrario $P \subseteq R^n$ se define como la dimensión de su envolvente afín: $\dim(P) := \dim(\text{aff}(P))$.

Recordemos que $\text{aff}(P)$, el envolvente afín de un conjunto P , es

$$\left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \mid x_1, \dots, x_k \in P, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \right\}$$

el subespacio afín más pequeño de R^n que contiene P .

Teorema 6. (Teorema principal de la teoría de politopos). Las definiciones de V -politopo y H -politopo son equivalentes es decir, cada H -politopo tiene una descripción por un sistema finito de desigualdades, y cada V -politopo se puede obtener como el envolvente convexo de un conjunto finito de puntos (sus vértices).

El teorema anterior se encuentra en [16] como el teorema 15.1.1 y nos ayuda a comprender la equivalencia entre V -politopo y H -politopo.

2.2. Politopos positivamente invariantes

En esta sección citamos la proposición 1 de Rantzer [10], que nos permite definir una función tipo Lyapunov $V(x) = L^T x$, para probar la estabilidad de un sistema positivo lineal.

Proposición 1. *Dada una matriz Metzler $A \in R^{n \times n}$, las siguientes declaraciones son equivalentes:*

- i) *La matriz A es Hurwitz.*
- ii) *Existe $\xi \in R^n$ tal que $\xi > 0$ y $A\xi < 0$.*
- iii) *Existe $L \in R^n$ tal que $L > 0$ y $L^T A < 0$.*
- iv) *Existe una matriz diagonal $P \succ 0$ tal que $A^T P + PA \prec 0$.*
- v) *La matriz $-A^{-1}$ existe y tiene entradas no negativas.*

Además, si $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ y $L^T = (l_1, \dots, l_n)$ satisface las condiciones ii) y iii) respectivamente, entonces $P = \text{diag}(l_1/\xi_1, \dots, l_n/\xi_n)$ satisface la condición iv).

Ejemplo 4. Consideremos la siguiente matriz Metzler

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Primero revisemos si la matriz es Hurwitz, para esto calcularemos los valores propios de la Matriz, entonces:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 1$$

luego los valores propios son

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{3} \quad y \quad \lambda_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Como λ_1 y λ_2 son menores que cero entonces A es Hurwitz.

Ahora calcularemos el vector ξ ,

$$A\xi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 + \xi_2 \\ 2\xi_1 - 3\xi_2 \end{pmatrix} < 0,$$

luego

$$-\xi_1 + \xi_2 < 0 \quad y \quad 2\xi_1 - 3\xi_2 < 0 \implies \xi_2 < \xi_1 \quad y \quad 2\xi_1 < 3\xi_2 \implies \xi_2 < \xi_1 < \frac{3}{2}\xi_2,$$

si $\xi_2 = 3$ entonces

$$3 < \xi_1 < \frac{9}{2} \implies \xi_1 = 4$$

por lo que tenemos $\xi_1 = 4$ y $\xi_2 = 3$

Ahora con $\xi^T = (4 \ 3)$

$$A\xi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0,$$

Ahora calculamos el vector L

$$L^T A = (l_1, \ l_2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (-l_1 + 2l_2, \ l_1 - 3l_2) < 0,$$

luego

$$-l_1 + 2l_2 < 0 \text{ y } l_1 - 3l_2 < 0 \implies 2l_2 < l_1 \text{ y } l_1 < 3l_2 \implies 2l_2 < l_1 < 3l_2$$

si $l_2 = 2$ entonces

$$4 < l_1 < 6 \implies l_1 = 5$$

Por lo que tenemos $l_1 = 5$ y $l_2 = 2$.

Ahora con $L^T = (5 \ 2)$

$$L^T A = (5 \ 2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (-1, \ -1) < 0,$$

ahora con la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \frac{l_1}{\xi_1} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{\xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{31}{12} \\ \frac{31}{12} & -4 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$Q = -(A^T P + PA) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{31}{12} \\ -\frac{31}{12} & 4 \end{pmatrix}$$

donde tenemos que

$$\Delta_1 = \frac{5}{2} > 0 \quad \Delta_2 = \det Q = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{31}{12} \\ -\frac{31}{12} & 4 \end{vmatrix} = \frac{479}{144} > 0$$

por el teorema 1 tenemos que Q es definida positiva, por lo tanto $-Q = A^T P + PA$ es definida negativa.

Para finalizar calcularemos $-A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj}(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $-A^{-1}$ existe y tiene entradas no negativas.

Ejemplo 5. La siguiente matriz es tomada del modelo de Sorensen:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{277}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000} \end{pmatrix} x$$

donde observamos que A es matriz Metzleriana, ¿ A es matriz Hurwitz ? Mediante el vector positivo

$$L^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{9}{10} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$L^T A = \left(-\frac{17}{750} \quad -\frac{6481}{30000} \quad -\frac{2349}{10000} \quad -\frac{189}{5000} \quad -\frac{7}{1000} \quad -\frac{48}{625} \quad -\frac{7}{100} \right) < 0.$$

Por lo que concluimos que la matriz del modelo de Sorensen es Hurwitz.

Estamos interesados en estudiar la invarianza positiva del siguiente conjunto contenido en el ortante positivo R_+^n :

$$S_c = \{x \in R_+^n \mid L^T x \leq c\},$$

donde el vector $L > 0$ satisface la propiedad iii) de la proposición 1 y $c > 0$ es escalar.

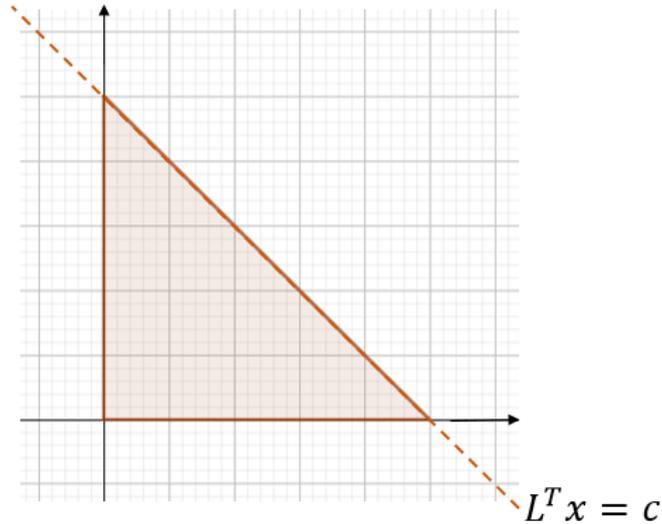


Figura 6. Conjunto positivamente invariante S_c

Una manera de probar la invarianza del politopo S_c , nos basaremos en la proposición 2.1 del artículo [14] de Castelan y Hennes (que llamaremos aquí proposición 2) donde establecen las condiciones necesarias y suficientes para tener que un politopo es invariante.

Retomamos la notación de *H-politopo* mencionada en la definición en forma matricial. De acuerdo a la definición de Castelan y Hennes podemos escribir un politopo convexo no vacío de R^n , puede ser caracterizado por una matriz $Q \in R^{r \times n}$, un vector $\rho \in R^r$ y $r, n, \in N$. Es definido por:

$$P[Q, \rho] = \{x \in R^n \mid Qx \leq \rho\}. \quad (3)$$

Por convención, las desigualdades entre vectores son desigualdades por componentes. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el conjunto de restricciones de desigualdad

que definen (3) no es redundante. Sea Q_i el i -ésimo renglon de matriz Q y ρ_i el i -ésimo componente del vector ρ . entonces, existe una relación uno a uno entre las r caras de (3) y el r sistema (para $i \in (1, \dots, r)$):

$$\begin{cases} Q_i x = \rho_i \\ Q_j x \leq \rho_j, \forall j \in (1, \dots, r), j \neq i \end{cases}$$

De acuerdo a lo anterior descrito, un politopo convexo (3) es un conjunto de sistema positivamente invariante bajo el sistema (1) y se puede representar mediante la siguiente implicación

$$Qx_0 \leq \rho \implies Qe^{At}x_0 \leq \rho, \forall x_0 \in P[Q, \rho], \forall t \geq 0. \quad (4)$$

La siguiente proposición, que se encuentra en la referencia [14] como la proposición 2.1, proporciona una condición algebraica necesaria y suficiente para la invarianza positiva de (3).

Proposición 2 : *El politopo (3) es un conjunto positivamente invariante bajo el sistema (1) si y sólo si existe una matriz Metzler $H \in R^{r \times r}$ tal que:*

$$QA - HQ = 0 \quad (5)$$

$$H\rho \leq 0 \quad (6)$$

Proposición 3. *Si A es matriz Metzler y Hurwitz, sea $L > 0$ el vector que satisface la propiedad iii) de la proposición 1, entonces, el politopo convexo S_c es invariante bajo el sistema lineal (1).*

Demostración. De acuerdo a la proposición 2, consideremos la matriz Metzler $H \in R^{(n+1) \times (n+1)}$, dada como

$$H = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix}.$$

Representamos el politopo S_c como desigualdad matricial

$$S_c = \{x \in R^n \mid Qx \leq \rho\}$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} -e_1^T \\ \vdots \\ -e_n^T \\ L^T \end{pmatrix}_{(n+1) \times n} = \begin{pmatrix} -I \\ L^T \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Con e_1, e_2, \dots, e_n es la base canónica, de forma que

$$H\rho = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que se cumple (6), además, sucede que

$$QA = \begin{pmatrix} -A \\ L^T A \end{pmatrix}$$

y

$$HQ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ L^T A \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que

$$QA - HQ = 0. \quad \square$$

Ejemplo 6. Consideremos un caso para $n = 2$ del politopo S_c positivamente invariante

$$S_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid l_1 x_1 + l_2 x_2 \leq c\},$$

o bien

$$S_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid -e_1^T x \leq 0, \quad -e_2^T x \leq 0, \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 \leq c\},$$

donde

$$-e_1^T x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1 \leq 0$$

$$-e_2^T x = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_2 \leq 0$$

$$Lx = l_1 x_1 + l_2 x_2 \leq c$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

tal que

$$S_c = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid Qx \leq \rho\}$$

de forma que buscamos una matriz Metzler $H \in R^{3 \times 3}$ tal que se cumplan (5) y (6); de forma que obtenemos

$$H = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & 0 \\ a_1 l_1 - a_3 l_2 & a_4 l_2 - a_2 l_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & 0 \\ -(L^T A)_{1 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

donde al suponer que A es Hurwitz, tendremos que $\det A > 0$. Podemos observar que el vector $L^T = (l_1, l_2) \in R_+^2$ no es único, ya que es suficiente con satisfacer

$$L^T A < 0 \implies (l_1, l_2) \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} < 0 \implies (-a_{11}l_1 + a_{21}l_2, a_{12}l_1 - a_{22}l_2) < 0$$

entonces

$$\begin{aligned} -a_{11}l_1 + a_{21}l_2 < 0 \quad \text{y} \quad a_{12}l_1 - a_{22}l_2 < 0 &\implies a_{21}l_2 < a_{11}l_1 \quad \text{y} \quad a_{12}l_1 < a_{22}l_2 \\ \implies \frac{a_{21}}{a_{11}} < \frac{l_1}{l_2} \quad \text{y} \quad \frac{l_1}{l_2} < \frac{a_{22}}{a_{12}} &\implies 0 < \frac{a_{21}}{a_{11}} < \frac{l_1}{l_2} < \frac{a_{22}}{a_{12}}, \end{aligned}$$

donde tenemos que $0 < \frac{a_{21}}{a_{11}} < \frac{a_{22}}{a_{12}}$, ya que $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

Capítulo 3

Sistemas positivos lineales

En este capítulo nos enfocamos en estudiar la existencia de la dinámica de deslizamiento del sistema de control positivo surge de algunas propiedades interesantes del sistema lineal homogéneo $\dot{x} = Ax$.

El siguiente teorema, aparece en [6] como el teorema 1, y nos muestra un resultado para sistemas positivos.

Teorema 7. *El sistema (1) es positivo si y sólo si A es Metzler.*

En particular, para sistemas lineales positivos, nos interesa estudiar la invarianza del siguiente politopo

$$S_c = \{x \in R_+^n \mid L^T x \leq c\}$$

con vector $L^T = (l_1, \dots, l_n) > 0$, y escalar $c > 0$, tal que $S_c \subset R_+^n$ tiene $n + 1$ caras de dimensión $n - 1$; es decir, cada una es un segmento de hiperplano de dimensión $n - 1$; n caras del politopo pertenecen a ∂R_+^n y pueden representarse mediante $\{x \in R_+^n \mid x_i = 0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; la otra cara puede escribirse como $\{x \in R_+^n : Lx = c\}$.

También, mediante el envolvente convexo, podemos escribir S_c como un V -politopo de la forma

$$S_c = \text{Conv} \left\{ 0, \frac{c}{l_1} e_1, \frac{c}{l_2} e_2, \dots, \frac{c}{l_n} e_n \right\}$$

para $c > 0$, donde los vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ representan la base canónica de R^n .

Ejemplo 7. Consideremos una matriz Metzler A de 2×2

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0,$$

donde

$$L^T = \left(l_1, \frac{2l_1}{-\lambda} \right)$$

entonces

$$L^T A = \left(l_1, \frac{2l_1}{-\lambda} \right) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = (l_1\lambda, -l_1) \in \text{int}(R_-^2).$$

Ejemplo 8. Consideremos una matriz Metzler A para el caso $n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} L^T A &= \left(l_1, \frac{2l_1}{-\lambda}, \frac{2^2 l_1}{\lambda^2}, \frac{2^3 l_1}{-\lambda^3} \right) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda l_1, -l_1, \frac{2}{\lambda} l_1, \frac{-4}{\lambda^2} l_1 \right) \in \text{int}(R_-^4). \end{aligned}$$

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0,$$

donde tenemos que para $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, sucede que

$$-e_i^T \dot{x}_i = -x_{i+1} \leq 0 \quad \text{para } x \in \partial R_+^n,$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica.

Para el caso $x_n = 0$ sucede que $\dot{x}_n = 0$. Concluimos que el ortante positivo R_+^n es invariante.

Por la proposición 1 para $L^T = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ debe tenerse que

$$L^T A < 0$$

entonces

$$(l_1, l_2, \dots, l_n) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = (l_1\lambda, l_1 + l_2\lambda, l_2 + l_3\lambda \dots l_{n-1} + l_n\lambda)$$

Por lo que

$$l_i + l_{i+1}\lambda < 0 \implies 0 < \frac{l_i}{l_{i+1}} < -\lambda \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1$$

basta con la relación recursiva

$$l_{i+1} = \frac{2l_i}{-\lambda}$$

de forma que

$$L^T = \left(l_1, \frac{2l_1}{-\lambda}, \frac{2^2 l_1}{\lambda^2}, \dots, \frac{2^n l_1}{|\lambda|^n} \right)$$

entonces

$$L^T \dot{x} < 0 \quad \text{para toda } x \in R_+^n$$

ya que $L^T A \in \text{int}(R_-^n)$.

Los siguientes teoremas dos aparecen en [6] como el teorema 2 y el teorema 3 respectivamente y definen las condiciones de positividad.

Teorema 8. (Perron-Frobenius para matrices Metzler)

Sea A una matriz Metzler. Entonces, existe un número real μ_0 y un vector $\omega_0 \geq 0$ tal que,

(i) $A\omega_0 = \mu_0\omega_0$.

(ii) Si $\mu \neq \mu_0$ es un valor propio de A , entonces $\text{Re}(\mu) < \mu_0$.

Ejemplo 9. Consideremos la siguiente matriz Metzler

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \quad \text{con } a > b > 0.$$

Para calcular los valores propios de A debemos determinar primero su polinomio característico

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -a - \lambda & b \\ a & -a - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 2a\lambda - ab + a^2 \\ &= (\lambda + a + \sqrt{ab})(\lambda + a - \sqrt{ab}), \end{aligned}$$

entonces, tenemos los valores propios $\lambda_1 = -a - \sqrt{ab}$, $\lambda_2 = -a + \sqrt{ab}$. Para los vectores propios deberemos resolver el sistema homogéneo

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0,$$

con $v_i = (v_1, v_2)^T$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -a - \sqrt{ab} &\Rightarrow (A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & b \\ a & \sqrt{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \sqrt{ab}v_{11} + bv_{12} = 0 \quad y \quad av_{11} + \sqrt{ab}v_{12} = 0, \end{aligned}$$

luego,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\sqrt{ab} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora tomamos el valor propio λ_2

$$\begin{aligned} \lambda_2 = -a + \sqrt{ab} &\Rightarrow (A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & b \\ a & -\sqrt{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff -\sqrt{ab}v_{21} + bv_{22} = 0 \quad y \quad av_{21} - \sqrt{ab}v_{22} = 0, \end{aligned}$$

luego,

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\sqrt{ab} \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces tenemos el vector propio

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\sqrt{ab} \\ 1 \end{pmatrix}$$

asociado al valor propio dominante $\mu = -a + \sqrt{ab}$, por lo que

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\sqrt{ab} \\ 1 \end{pmatrix} = (\sqrt{ab} - a) \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\sqrt{ab} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se cumple el ejemplo del teorema 8.

Teorema 9. Sea $A \in R^{n \times n}$ una matriz Metzler. Existe una matriz positiva $-A^{-1}$ si y sólo si A es matriz Hurwitz, donde A^{-1} es la matriz inversa de A .

Ejemplo 10. Una matriz que podemos tomar de ejemplo para el teorema 9 es la misma que utilizamos en el ejemplo 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \quad \text{con } a > b > 0.$$

Ya tenemos una matriz A que es Metzler y que también es Hurwitz porque tiene valores propios $\lambda_1 = -a - \sqrt{ab}$, $\lambda_2 = -a + \sqrt{ab}$ por lo que tienen parte real negativa. Ahora solo falta calcular $-A^{-1}$ y verificar que es mayor a cero.

$$-A^{-1} = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & -\frac{b}{ab-a^2} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{b}{a^2-ab} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} \end{pmatrix} > 0.$$

Capítulo 4

Estabilización de sistemas positivos

Al considerar la función del Lyapunov $V = x^T P x$ abordaremos el problema de la ecuación de Lyapunov para sistemas positivos. En la referencia [1] podemos encontrar el siguiente resultado como el teorema 15.

Teorema 10. *Sea $A \in R^{n \times n}$ una matriz Metzler. El origen es un equilibrio globalmente asintóticamente estable (GAS) del sistema (1) si y sólo si existe una matriz diagonal P con entradas positivas en la diagonal tal que la matriz $A^T P + P A$ es definida negativa.*

A partir del teorema anterior damos el siguiente resultado.

Proposición 4. *Si $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz Hurwitz, con $a_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$, entonces con la matriz diagonal $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{21}} \end{pmatrix}$, tenemos que la matriz simétrica $Q = A^T P + P A$ es definida negativa.*

Demostración. De acuerdo al teorema 1, tenemos que

$$-Q = -A^T P - P A = \begin{pmatrix} 2a_{11} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & 2\frac{a_{12}}{a_{21}}a_{22} \end{pmatrix},$$

por lo tanto los menores principales son positivos; $\Delta_1 = 2a_{11}$ y $\Delta_2 = 4\frac{a_{12}}{a_{21}}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, de forma que la matriz Q es definida negativa.

Ejemplo 11. La matriz del ejemplo 9 es un caso particular de la matriz de la proposición 4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \quad \text{con } a > b > 0,$$

tenemos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} -Q &= -A^T P - PA = - \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & -2b \\ -2b & 2a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por el teorema 1 los menores principales de $-Q$ son $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$, por lo que concluimos que $A^T P + PA$ es definida negativa.

Ejemplo 12. Consideremos la matriz del ejemplo 9 para usarlo de ejemplo en el teorema 10. Dado el sistema lineal (1) con A Metzler y Hurwitz, probamos la estabilidad con la función de Lyapunov $V = x^T P x$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + PA) x < 0 \quad \text{para } x \neq 0. \end{aligned}$$

Como observamos en el ejemplo 11 la matriz $A^T P + PA$ es definida negativa. Por lo tanto tenemos la desigualdad.

A continuación presentaremos el teorema 3.8.1 de la tesis doctoral de Samadi [13], donde establece condiciones sobre el sistema para tener un punto de equilibrio positivo.

Teorema 11. *Considera el sistema*

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u} \tag{7}$$

donde $A \in R^{n \times n}$ es Metzler y Hurwitz, $b \in R^n$ con $b > 0$ y $\bar{u} \in R$ con $\bar{u} > 0$. Sea \bar{x} el equilibrio de el sistema (7). Entonces $\bar{x} > 0$.

El caso de mezcla con dos tanques

En esta parte analizamos el caso $n = 2$ (dos tanques), de la sección anterior. La descripción del problema es el siguiente:

Dos tanques, A y B , contienen V_1 y V_2 litros de salmuera y en los cuáles se disolvieron inicialmente a y b libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiendo un flujo f_2 de salmuera del tanque A al B y un flujo f_3 del tanque B al A . Además, del exterior hay un flujo f_1 con u libras de sal por litro hacia el tanque A , y del tanque B hay un flujo f_4 hacia el exterior.

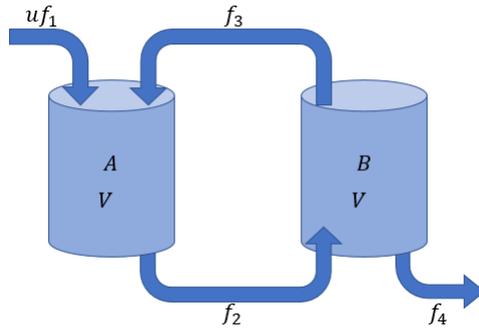


Figura 7. En este caso el volumen V de los tanques se considera constante.

Considerando el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_3}{V_2} - \frac{f_4}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (8)$$

donde $f_2 = f_3 + f_4$, entonces nos queda la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix}$$

donde el $\det A > 0$ y $\text{tr} A < 0$, por lo que A es Hurwitz. Por lo tanto las soluciones

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

son tales que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

donde el punto de equilibrio $\bar{x} \in R_+^2$, es dado por

$$\bar{x} = - \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} = \bar{u} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

4.1. Presentación de un resultado de estabilidad para espacios métricos

En esta sección citamos un teorema de estabilidad para espacios métricos, que para nuestros fines consideramos el espacio métrico R_+^n , donde se incluye el caso de sistemas no lineales representado por

$$\dot{x} = f(x),$$

donde $x \in R^n$ y suponemos que existe una solución única $x(t, x_0)$, que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$. De forma que las soluciones $x(t, x_0)$ inducen en R^n un flujo que satisface los axiomas que definen un sistema dinámico (ver axiomas en página 7).

Función del Lyapunov

La característica básica de la teoría de la estabilidad de Lyapunov es que busca caracterizar las propiedades de estabilidad o inestabilidad de un conjunto dado del espacio de estado en términos de la existencia de ciertos tipos de funciones escalares definidas en conjuntos adecuados del espacio de estado. Generalmente se requiere que tales funciones sean monótonas a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico dado. Cualquier función que garantice una propiedad de estabilidad o inestabilidad de un conjunto se denomina función de Lyapunov para el conjunto. A continuación, presentaremos algunos resultados fuertes. Con esto nos referimos a teoremas sobre las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica de un conjunto compacto basado en la existencia de funciones continuas de valor real de tipos muy especiales.

Definición 18. *Un conjunto compacto M es globalmente asintóticamente estable si es asintóticamente estable y $A(M) \equiv X$.*

Donde $A(M)$ es la región de atracción del conjunto M .

El siguiente resultado aparece como el teorema 2.7.20 del libro de Bhatia N., y Szegö [8] el cual nos habla de estabilidad en espacios metricos.

Teorema 12. *Un conjunto compacto $M \subset X$, es globalmente asintóticamente estable si y sólo si existe una función no acotada y uniformemente continua $V(x)$ definida en X tal que*

i) $V(x) = 0$ para $x \in M$, $V(x) > 0$ para $x \notin M$;

ii) $V(xt) < V(x)$ para $x \notin M$ y $t > 0$.

Definición 19. *Un espacio métrico es un par (X, ρ) , formado por un conjunto no vacío X y una función*

$$\rho : X \times X \rightarrow R_+$$

llamada función distancia o métrica de X , tal que las soluciones $x(t, x_0)$ inducen en R^n un flujo que satisface los axiomas que definen un sistema dinámico (ver axiomas en página 7).

En este trabajo consideramos que X es el ortante positivo R_+^n del espacio de estado junto con la norma usual. Además para nuestros fines de estabilización consideramos que el conjunto M representa el origen $x = 0$.

Una familia de sistemas lineales

Dado el sistema (1)

$$\dot{x} = Ax$$

con matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix},$$

con $a_{ij} > 0$.

Consideremos un vector $L^T = (l_1, l_2) > 0$ tal que definimos la función no negativa

$$V(x) = L^T|x| = l_1|x_1| + l_2|x_2|.$$

Donde se puede probar que la función $V(x)$ es Lipschitz y eso implica que es uniformemente continua, lo anterior nos permite definir el siguiente conjunto cerrado y convexo

$$P_c = \{x \in R^2 : L^T|x| \leq c\}, \quad c > 0.$$

El conjunto P_c también puede definirse como un V -politopo de la siguiente manera:

$$P_c = \text{conv} \left\{ \frac{c}{l_1}e_1, -\frac{c}{l_1}e_1, \frac{c}{l_2}e_2, -\frac{c}{l_2}e_2 \right\},$$

con vector $L^T = (l_1, l_2) > 0$ y los vectores $\{e_1, e_2\}$ representan la base canónica de R^2 .

En la siguiente proposición mostramos la invarianza de P_c bajo (1).

Proposición 5. *Si A es matriz Metzleriana y existe un vector $L > 0$ tal que $L^T A < 0$, entonces el origen $x = 0$ es GAS y el politopo P_c es positivamente invariante.*

Demostración. Consideremos el conjunto de puntos de los ejes

$$E = \{x \in R^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}.$$

Sea $W \subset R^2$ un abierto tal que $W \cap E = \emptyset$, entonces para cualquier $x \in W$, podemos derivar la función

$$V(x) = l_1 s_1 x_1 + l_2 s_2 x_2$$

donde $s_i = \text{sign}(x_i)$ tal que

$$\dot{V} = (l_1 s_1 \quad l_2 s_2) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = (l_1 s_1 \quad l_2 s_2) \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(-l_1 s_1 a_{11} + l_2 s_2 a_{21}) + x_2(l_1 s_1 a_{12} - l_2 s_2 a_{22}) = |x_1| \left(-l_1 a_{11} + l_2 a_{21} \frac{s_2}{s_1} \right) + |x_2| \left(l_1 \frac{s_1}{s_2} a_{12} - l_2 a_{22} \right)$$

ya que $\frac{s_1}{s_2} \leq 1$ y $a_{ij} \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{V} &= |x_1| \left(-l_1 a_{11} + l_2 a_{21} \frac{s_2}{s_1} \right) + |x_2| \left(l_1 \frac{s_1}{s_2} a_{12} - l_2 a_{22} \right) \leq |x_1|(-l_1 a_{11} + l_2 a_{21}) + |x_2|(l_1 a_{12} - l_2 a_{22}) \\ &\leq (l_1 \quad l_2) \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{pmatrix} = L^T A |x| < 0 \quad \forall x \in R^2 \setminus E \end{aligned}$$

entonces $V(x(t))$ es decreciente para $x \in R^2 \setminus E$.

Ahora consideremos el caso $x \in E$. Sea $\varphi(t, x_0)$ la solución del sistema lineal, con condición inicial $x_0 \in E$. Sean $p, q \in R^2 \setminus E$ tal que el segmento de recta pq corta al conjunto E en x_0 , es conocido que el conjunto $e^{At}pq$ es un segmento de recta para cada $t > 0$, de forma $\dot{V}(p) < 0$ y $\dot{V}(q) < 0$, por lo tanto $V(x(t))$ es decreciente en x_0 : $V(xt) < V(x)$ para toda $t > 0$. De manera que $V(t)$ es decreciente en R^2 de forma que el conjunto P_c es invariante. De acuerdo al teorema (12) (de Bhatia-Szego) el origen $x = 0$ es GAS.

La proposición anterior puede resumirse como sigue: Si A es matriz Metzleriana y $\exists L > 0$ tal que $L^T A < 0$, entonces A es Hurwitz.

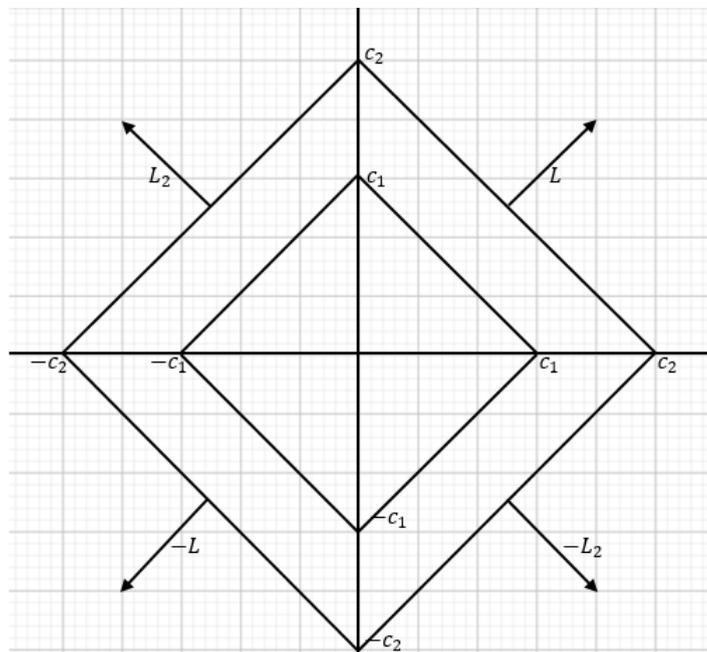


Figura 8. Conjunto cerrado y convexo

$$P_c = x \in R^2 : L^T |x| \leq c, \quad c > 0, \quad 0 < c_1 < c_2, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

En esta página utilizaremos el siguiente lema para probar que algunas matrices son Hurwitz, además damos condiciones para la existencia del vector $L^T > 0$, tal que $L^T A < 0$.

Lema 1. Sea $A \in R^{2 \times 2}$ matriz Metzleriana con entradas no nulas, entonces las siguientes condiciones i), ii) y iii) son equivalentes:

i) $\det A > 0$;

ii) A es Hurwitz;

iii) Existe un vector $L^T = (l_1, l_2) > 0$ tal que $L^T A < 0$.

En general, dada una matriz A Metzleriana, es difícil determinar si es matriz Hurwitz.

Demostración. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, \text{ con } a_{ij} > 0.$$

Por ser A matriz Metzleriana tenemos que $\text{tr} A < 0$, con $\det A > 0$, por lo tanto: i) \Leftrightarrow ii).

Ahora probaremos que ii) \Leftrightarrow iii). Si

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{a_{21}}{a_{11}} < \frac{a_{22}}{a_{12}}$$

entonces podemos elegir $L^T = (l_1, l_2) > 0$ tal que

$$0 < \frac{a_{21}}{a_{11}} < \frac{l_1}{l_2} \quad y \quad \frac{l_1}{l_2} < \frac{a_{22}}{a_{12}}$$

y también equivalente a

$$a_{21}l_2 - a_{11}l_1 < 0 \quad y \quad a_{12}l_1 - a_{22}l_2 < 0$$

por lo tanto

$$L^T A = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = (a_{21}l_2 - a_{11}l_1, \quad a_{12}l_1 - a_{22}l_2) < 0$$

concluimos la equivalencia entre condición ii) y condición iii). \square

Un control para estabilizar un sistema positivo lineal en el plano.

Dado el sistema (1) con A matriz Metzler y no-Hurwitz; obtenemos una matriz $A + bK$ Metzler y Hurwitz mediante la aplicación del control $u(x)$.

Un criterio para diseñar el vector $L^T > 0$ para definir la matriz K :

$$A + bK = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2) = \begin{pmatrix} a_{11} + k_1 & a_{12} + k_2 \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{ii} > 0$. Sea el vector $L^T > 0$ tal que

$$L^T(A + bK)x < 0 \quad \forall x \in R_+^2 \setminus \{0\}.$$

Donde

$$L^T(A + bK) = (l_1 \ l_2) \begin{pmatrix} a_{11} + k_1 & a_{12} + k_2 \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = (l_1(a_{11} + k_1) + a_{21}l_2 \quad l_1(a_{12} + k_2) - a_{22}l_2)$$

en la primer desigualdad, k_1 debe satisfacer

$$l_1(a_{11} + k_1) + a_{21}l_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 < -a_{21}\frac{l_2}{l_1} - a_{11}$$

por lo que solo debemos considerar que donde k_1 quedó en función de l_1 y l_2 .

Como se quiere que la matriz $A + bK$ sea una matriz Hurwitz el valor de k_2 debe ser mayor o igual a cero, en este caso consideraremos k_2 igual a cero; a la vez deben satisfacer la segunda desigualdad

$$l_1(a_{12} + k_2) - a_{22}l_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{12}l_1 - a_{22}l_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} < \frac{l_2}{l_1}.$$

Las desigualdades anteriores implican que

$$k_1 < -a_{21}\frac{l_2}{l_1} - a_{11} < -a_{21}\frac{a_{12}}{a_{22}} - a_{11}.$$

Podemos elegir el valor $k_1 = -a_{21}\frac{l_2}{l_1} - 2a_{11}$ de forma que la matriz

$$A + bk = \begin{pmatrix} -a_{11} - \frac{l_2}{l_1}a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

es Metzler y Hurwitz, por lo tanto

$$L^T(A + bk) = (l_1(a_{11} + k_1) + a_{21}l_2 \quad a_{12}l_1 - a_{22}l_2) = (-a_{11}l_1 \quad a_{12}l_1 - a_{22}l_2) < 0$$

tal que los politopos P_c son invariantes bajo el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = (A + bk)x,$$

por lo tanto el equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable para las soluciones $x(t, x_0)$ del sistema retroalimentado que inician en $x_0 \in R_+^2$.

A continuación presentamos el teorema 16 del libro de Farina y Rinaldi [1].

Teorema 13. *Sea $A \in R^{n \times n}$ Hurwitz y Metzler. Entonces el origen es GAS bajo el sistema:*

$$\dot{x} = DAx$$

para toda matriz diagonal D con entradas positivas.

Demostración. Primero hacemos la siguiente observación. Si A es matriz Metzler (Metzleriana) y Hurwitz, y la matriz D es diagonal con entradas positivas, entonces DA es Metzler (Metzleriana). Probaremos que la matriz DA también es Hurwitz.

Ya que la matriz A es Hurwitz, por la proposición 1, existe una matriz diagonal P tal que la matriz $A^T P + PA$ es definida negativa. Sea la matriz diagonal $P_D = D^{-1}P$, entonces:

$$\begin{aligned} (DA)^T P_D + P_D(DA) &= A^T D^T (D^{-1}P) + (D^{-1}P)DA \\ &= A^T D(D^{-1}P) + (D^{-1}P)DA \\ &= A^T D(D^{-1}P) + (PD^{-1})DA \\ &= A^T P + PA. \end{aligned}$$

Es decir, la matriz $(DA)^T P_D + P_D(DA)$ es negativa definida, por lo tanto la matriz DA es Hurwitz.

Observación. Los eigenvalores y eigenvectores de las matrices A y DA son diferentes.

El siguiente teorema es consecuencia directa del resultado anterior y puede verse en la referencia [7] como el teorema 11.

Teorema 14. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = D(Ax + b\bar{u}) \quad (9)$$

donde D es matriz diagonal con entradas positiva y $A \in R^{n \times n}$ es matriz Metzler y Hurwitz, $b \in R_+^n$ con $\bar{u} > 0$. Sea \bar{x} el punto de equilibrio del sistema (9). Entonces $\bar{x} \in R_+^n$.

Para mejorar la tasa de estabilización del sistema (9) sustituimos la entrada constante \bar{u} por una función continua y acotada $u(x)$. Esta función es diseñada mediante la metodología CLF, que inicia con obtener una función de Lyapunov $V(x)$ para el sistema de control.

Para diseñar un estabilizante vía la teoría CLF, necesitamos resolver versiones particulares de la ecuación de Lyapunov: Dada una matriz A Metzleriana y Hurwitz, por obtener matrices diagonales P tal que la matriz $A^T P + PA$ es definida negativa.

Después de resolver el problema anterior, definimos la función de Lyapunov $V = x^T P x$. Es conocido que si A es matriz Hurwitz, entonces existe una matriz simétrica definida positiva P tal que la matriz

$$Q = A^T P + PA$$

es definida negativa. Si además A es matriz Metzler, entonces existe matriz P diagonal tal que Q es definida negativa.

Lema 2. Si $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & -a_{33} \end{pmatrix}$ es matriz Hurwitz, con $a_{ij} > 0$ para

$i, j = 1, 2$, entonces con la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{31}^2} (2a_{33}(a_{11} - a_{21}) - a_{13}a_{31}) \end{pmatrix}$$

se tiene que $Q = A^T P + PA$ es definida negativa.

Demostración. Directamente tenemos que a la matriz $-(A^T P + PA)$ le corresponden los menores principales

$$\Delta_1 = 2a_{11}, \quad \Delta_2 = 4a_{12}^2 \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{21}}$$

$$\Delta_3 = 8a_{12}^2 a_{33} (a_{11} - a_{21}) \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{21}a_{33}}{a_{21}a_{31}^2}$$

donde las desigualdades $a_{11} - a_{21} > 0$ y $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{21}a_{33} > 0$ ¿son necesarios para que la matriz A sea Hurwitz? Al tener $\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, concluimos la demostración.

Lema 3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_3 & a_{22} & f_4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_5 & a_{33} & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & f_7 & \ddots & f_{2n-4} & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & f_{2n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{2n-1} & -(f_{2n-2} + f_1) \end{pmatrix}$$

Metzler y Hurwitz, donde $a_{ii} = -(f_{2i-2} + f_{2i+1})$, para $i = 2, \dots, n-1$, entonces, con la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_2}{f_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_2 f_4}{f_3 f_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_2 f_4 f_6}{f_3 f_5 f_7} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2 f_4 \cdots f_{2n-2}}{f_3 f_5 \cdots f_{2n-1}} \end{pmatrix}$$

se tiene que $Q = A^T P + P A$ es definida negativa.

Demostración. Los menores principales Δ_i de la matriz $Q := (A^T P + P A)$ son

$$\Delta_1 = 2f_3, \quad \Delta_2 = 4f_2 f_5, \quad \Delta_3 = \frac{f_2^2}{f_3} f_4 f_7, \dots, \quad \Delta_i = 2^i \frac{f_2^3}{f_3^2} \frac{f_4^2}{f_5} \cdots \frac{f_{2i-4}^2}{f_{2i-3}} f_{2i-2} f_{2i+1}, \dots$$

$$\Delta_n = 2^n \frac{f_2^{n-1}}{f_3^{n-2}} \frac{f_4^{n-2}}{f_5^{n-3}} \frac{f_6^{n-3}}{f_7^{n-4}} \cdots \frac{f_{2n-4}^3}{f_{2n-3}^3} f_{2n-2} f_1,$$

de forma que $\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Concluimos que la matriz simétrica Q es definida negativa.

Capítulo 5

Estabilización a través del control de la función de Lyapunov

Consideremos un sistema de control lineal con entrada escalar

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (10)$$

donde $A \in R^{n \times n}$ es Metzler y Hurwitz, $b \in R^n$ con $b > 0$ y $u \in R$; donde el parámetro de control u esta restringido al intervalo

$$U = [-r^-, r^+], \quad r^- \geq 0 \text{ y } r^+ > 0.$$

En esta sección, se presenta una formulación explícita de una retroalimentación continua restringida al conjunto U , lo que permite una estabilización más rápida y robusta en sistemas lineales positivos estables.

Lo descrito a continuación puede verse en el artículo [5].

Dada una función del Lyapunov al derivarla con respecto al sistema de control generamos

$$\alpha(x) := \nabla V(x) \cdot Ax \text{ y } \beta(x) := -\nabla V(x) \cdot b.$$

Para diseñar funciones de control de retroalimentación continuas en el origen ocuparemos las siguientes condiciones:

La primera condición es la *propiedad del control pequeño* (SCP): para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\alpha(x) - \beta(x)u < 0$ se mantiene para cierta u con $\|u\|_U < \varepsilon$ cuando $0 < \|x\|_{R^n} < \delta$.

La siguiente condición es la *función de control de Lyapunov* (CLF) donde suponemos que una V es una CLF $V : R^n \rightarrow R$ con respecto a (10) tal que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$\min_{u \in U} \dot{V} = \min_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (Ax + bu)\} = \min_{u \in U} \{\alpha(x) - \beta(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

El conjunto de funciones admisibles de control de retroalimentación se define por

$$\mathcal{U} = \{u : R^n \rightarrow [-r^-, r^+], \mid u(x) \text{ es continuo}\}.$$

Considere la función no negativa $|\beta(x)|r$, donde

$$r = \begin{cases} r^+ & \text{si } \beta(x) > 0 \\ r^- & \text{si } \beta(x) < 0 \end{cases}$$

tal que

$$\min_{u \in U} \{\alpha(x) - \beta(x)u\} = \alpha - \beta \cdot \omega(x) = \alpha(x) - |\beta(x)|r,$$

donde hay un control óptimo estabilizador único $\omega(x)$ definido por

$$\omega(x) = r \operatorname{sign}(\beta(x)) \notin \mathcal{U},$$

y todo x tal que $\beta(x) \neq 0$, pero es discontinuo cuando $\beta(x) = 0$. Para diseñar funciones de control de retroalimentación continua en el origen, la teoría CLF asume la propiedad de control pequeño (SCP) para el sistema lineal. Por lo tanto, el control continuo y estabilizador propuesto en este documento es uno de los siguientes:

$$u_\varepsilon = \begin{cases} r(\operatorname{sign}\beta(x))(\rho_\varepsilon(x)) & \text{para } |\beta(x)|r > 0 \\ 0 & \text{para } |\beta(x)|r = 0 \end{cases} \quad (11)$$

que satisface la propiedad SCP, donde

$$\rho_\varepsilon(x) = 1 - \exp(-\varepsilon|\beta(x)|r), \quad \rho_\varepsilon : R^n \longrightarrow [0, 1]$$

es una función de reescalado utilizada para regularizar $\omega(x)$.

El siguiente resultado, que esta en la referencia [5] como el teorema 4, mejora la estabilización para el sistema (10) con controles continuos.

Teorema 15. *Suponga que $V(x)$ es un CLF (con respecto al sistema (10) y los controles que toman valores en U que satisfacen el SCP), entonces $u_\varepsilon(x)$ dado por (11) es una fórmula de un ε -familia ($\varepsilon > 0$) funciones de control continuo que hacen que el sistema (10) sea globalmente asintóticamente estable.*

Para el sistema (10) con matriz A Metzler y Hurwitz (llamados sistemas lineales positivos estables), consideremos la función cuadrática $V(x) = x^T P x$ como función de Lyapunov, la derivada de V permanece

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (Ax + bu)^T Px + x^T P(Ax + bu) \\
&= x^T (A^T P + PA)x + (b^T Px + x^T Pb)u \\
&= \alpha(x) - \beta(x)u.
\end{aligned}$$

Como la matriz A es Hurwitz, $\alpha(x) < 0$ para todo $0 \neq x \in R^n$, tal que se cumplan las condiciones SCP y CLF. Donde

$$u_\epsilon = \rho_\epsilon(x)\omega(x),$$

y si $\epsilon \rightarrow \infty$ entonces la función control $u_{\epsilon(x)}$ proporciona convergencia al control estabilizador $\omega(x)$ con una mejor tasa. También la condición restrictiva para la familia de controles

$$-r^- \leq u_\epsilon(x) \leq r^+ \quad \forall x \in R^n$$

esta incluido.

Considere el sistema lineal positivo (7) el cual es

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}$$

donde la matriz A es Metzler y Hurwitz, y \bar{u} es constante de modo que

$$0 \leq r^- \leq \bar{u} \leq r^+,$$

entonces las soluciones correspondientes $x(t)$ son tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} := -A^{-1}b\bar{u}.$$

La velocidad de la convergencia previa depende de los valores propios de la matriz A . Esta velocidad de convergencia puede mejorarse sustituyendo la constante \bar{u} por la siguiente función dado en (11)

$$u_\epsilon(x) \in [r^-, r^+].$$

Al cambiar la variable

$$y(t) = x(t) - \bar{x},$$

la ecuación

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}$$

se puede representar como

$$\dot{y} = Ay$$

Este resultado se establece en el siguiente teorema, el cual puede verse en [5] como el teorema 4.

Teorema 16. *El sistema de control $\dot{y} = Ay + bu_\varepsilon(y)$, con control continuo $u_\varepsilon(y)$ dada por (11) tiene una estabilización más rápida que el sistema (7).*

Demostración. La prueba se basa en la magnitud de la derivada de la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}y^T P y$. Mostramos que la derivada \dot{V} es menor cuando se aplica $u_\varepsilon(y)$ que cuando se aplica el valor constante \bar{u} .

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V A y \\ &= y^T (A^T P + P A) y \\ &= \alpha(y). \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando se aplica el control de retroalimentación $u_\varepsilon(y)$, obtenemos que la velocidad viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V (A y + b u_\varepsilon(y)) \\ &= y^T (A^T P + P A) y + (b^T P y + y^T P b) u_\varepsilon(y), \end{aligned}$$

o denotando la derivada con las funciones escalares $\alpha(y)$ y $\beta(y)$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha(y) - \beta(y) u_\varepsilon(y) \\ &= \alpha(y) - r |\beta(y)| \rho_\varepsilon(y), \end{aligned}$$

donde está claro que

$$\alpha(y) - r |\beta(y)| \rho_\varepsilon(y) < \alpha(y) < 0 \quad \text{para} \quad r |\beta(y)| \neq 0$$

Por lo tanto, la tasa de estabilización mejora cuando el control (11) se aplica al sistema (10). \square

Ejemplo 12. Consideremos sistema (8) con

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_3}{V_2} - \frac{f_4}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (12)$$

donde $f_2 = f_3 + f_4$, entonces nos queda la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix}$$

A continuación diseñamos el estabilizador continuo para obtener una mejor tasa de convergencia. Por la proposición 4, consideremos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f_3 V_1}{f_2 V_2} \end{pmatrix},$$

para definir la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} x^T P x = \frac{1}{2} (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f_3 V_1}{f_2 V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \frac{f_3 V_1}{f_2 V_2} x_2^2 \right) > 0 \text{ para } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tal que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{x}^T P x + \frac{1}{2} x^T P \dot{x} = \frac{1}{2} x^T A^T P x + \frac{1}{2} x^T P A x = \frac{1}{2} x^T (A^T P + P A) x \\ &= \frac{1}{2} (x_1 \ x_2) \left(\begin{pmatrix} -f_2 & f_2 \\ f_3 & -f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f_3 V_1}{f_2 V_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f_3 V_1}{f_2 V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_2 & f_3 \\ f_2 & -f_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} -2f_2 & \frac{f_3 V_1 + f_3 V_2}{V_2} \\ \frac{f_3 V_2 + f_3 V_1}{V_2} & -\frac{2f_3 V_1}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(-2f_2 x_1 + \frac{f_3 V_2 + f_3 V_1}{V_2} x_2 \quad \frac{f_3 V_1 + f_3 V_2}{V_2} x_1 - \frac{2f_3 V_1}{V_2} x_2 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es decir

$$\dot{V} = -f_2x_1^2 + \frac{f_3V_1 + f_3V_2}{V_2}x_1x_2 - \frac{f_3V_1}{V_2}x_2^2 + \frac{x_1f_1u}{V_1} = \alpha(x) + \beta(x)u,$$

Entonces

$$\begin{aligned} -f_2x_1^2 + \frac{f_3V_1 + f_3V_2}{V_2}x_1x_2 - \frac{f_3V_1}{V_2}x_2^2 &= f_3 \left(-\frac{f_2}{f_3}x_1^2 + \frac{V_1 + V_2}{V_2}x_1x_2 - \frac{V_1}{V_2}x_2^2 \right) \\ &\leq f_3 (-x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2) = -f_3(x_1 - x_2)^2, \end{aligned}$$

tal que

$$\alpha(x) = -f_2x_1^2 + \frac{f_3V_1 + f_3V_2}{V_2}x_1x_2 - \frac{f_3V_1}{V_2}x_2^2 \leq -f_3(x_1 - x_2)^2 < 0$$

y

$$\beta(x) = x_1f_1.$$

Por lo tanto, mediante el control

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\varepsilon|\beta|r), & \text{si } |\beta|r > 0, \\ 0, & \text{si } |\beta|r = 0 \end{cases} \quad (13)$$

mejoramos la tasa de estabilización. Por ejemplo, para el sistema (8), si tomamos los valores

$$f_1 = f_4 = 1, \quad f_2 = 3, \quad f_3 = 2 \quad \text{y} \quad \bar{x} = (20, 20)^T,$$

La figura 9 nos compara las convergencias con el control constante u y el control continuo (9).

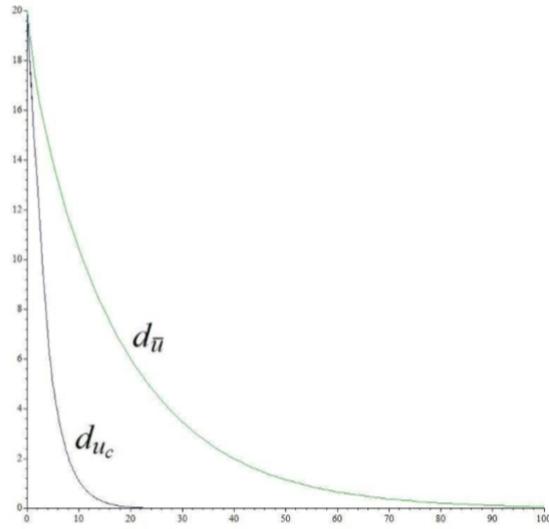


Figura 9. En esta simulación se tomó la condición inicial $x_0 = (20, 40)^T$, la curva $d_{\bar{u}}(t) = \sum |x_i(t, \bar{u}) - \bar{x}_i|$ donde $x(t, \bar{u})$ es la solución del sistema (8) con $f_1 = f_4 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 2$ y $\bar{x} = (20, 20)^T$, mientras que $d_{u_c} = \sum |x_i(t, u) - \bar{x}_i|$ con u_c dado por (12).

Estabilización de insulina mediante control positivo

El problema de la estabilización rápida de la insulina se analiza aquí mediante la explotación de la estructura en cascada de un modelo matemático fisiológico y compartimental del metabolismo de la glucosa en T1DM informado por Sorensen. El modelo está representado por un campo vectorial que en realidad involucra tres subsistemas.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{z}_g = f_g(z_g, z_c, x) \\ \dot{z}_c = f_c(z_g, z_c, x) \\ \dot{x} = f(z_g, z_c, x, u) \end{cases}$$

con $(z_g, z_c, x) \in R^{16}$ donde $z_g \in R^8$ denota la concentración de glucosa en los órganos relacionados con el metabolismo de la glucosa, $z_c \in R_+$ es la concentración sistémica de glucagón, $x \in R_+^7$ es la concentración de insulina en los mismos órganos donde se analizó la dinámica de la glucosa, y $u \in R_+$ representa la infusión de insulina exógena. Como podemos ver en [11] tres ecuaciones diferenciales adicionales relacionadas con las tasas metabólicas complementan el sistema de 19 dimensiones para el modelo de Sorensen. Para completar la presentación, las 19 ecuaciones diferenciales, así como las tasas metabólicas, pueden verse en el artículo IET([5]). Tengamos en cuenta que el sistema Σ tiene una estructura en cascada, por lo que el objetivo es estabilizar x mientras la concentración de glucosa en sangre se mantiene dentro del rango fisiológico. La figura 10 muestra el diagrama de bloques de esta propuesta. Las entradas del sistema son la condición inicial $(z_g, z_c, x)(t = 0)$ del sistema Σ , y la señal de control u . Las salidas son la insulina (x_6) y glucosa ($z_{g,7}$) concentraciones en el espacio intersticial del tejido periférico. x_6 es la variable de retroalimentación para calcular $u \in R_+$ de ambos esquemas de estabilización. $z_{g,7}$ representa la concentración de glucosa medida por medio de un sistema de monitoreo continuo de glucosa.

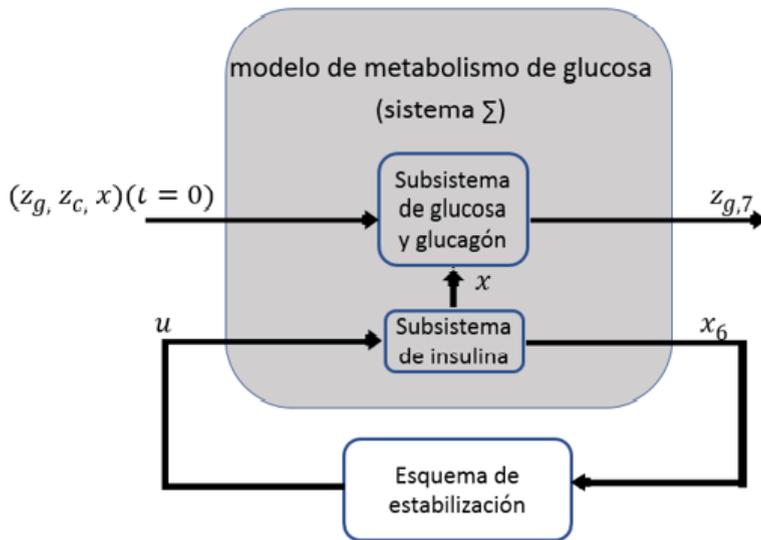


Figura 10. Diagrama de bloques del esquema de estabilización propuesto. El objetivo es estabilizar el estado completo de la insulina $x \in R_+^7$, cuyo campo vectorial está en cascada con los subsistemas de glucosa y glucagón (ver sistema Σ).

Es preciso mencionar que el sistema \sum no es lineal, pero los esquemas de estabilización de la insulina involucran al subsistema de insulina, que de hecho es un sistema lineal.

Definamos la insulina como $x = (x_1, \dots, x_7)^T \in R_+^7$, donde $x_1 = I_B$, $x_2 = I_H$, $x_3 = I_G$, $x_4 = I_L$, $x_5 = I_K$, $x_6 = I_{PV}$, y $x_7 = I_{PI}$. Además I_B es la insulina en el cerebro, I_H es la insulina en el corazón y pulmones, I_G es la insulina en el intestino, I_L es la insulina en el hígado, I_K es la insulina en el riñón, I_{PV} es la insulina en el Periferia (tejido vascular), I_{PI} es la insulina en el Periferia (tejido intersticial). Teniendo en cuenta los parámetros nominales validados e informados en [3], el subsistema de insulina se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1.73x_2 - 1.73x_1 \\ \dot{x}_2 &= 0.454x_1 + 0.909x_4 + 0.727x_5 + 1.06x_6 - 3.151x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0.765x_2 - 0.765x_3 \\ \dot{x}_4 &= 0.094x_2 + 0.378x_3 - 0.789x_4 \\ \dot{x}_5 &= 1.411x_2 - 1.835x_5 \\ \dot{x}_6 &= 1.418x_2 - 1.874x_6 + 0.455x_7 \\ \dot{x}_7 &= 0.05x_6 - 0.111x_7\end{aligned}$$

que es un sistema lineal con $x = [x_1 \dots x_7]^T$.

Es decir, resumimos las ecuaciones del modelo de Sorensen en el siguiente sistema lineal de ecuación

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \text{con } u \geq 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{277}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000} \end{pmatrix}$$

y el vector $b \in R^7$ se convierte en

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $b_6 > 0$ y A es una matriz Metzler y Hurwitz pues ya se probó por el ejemplo 5. Según la proposición 1 en [6], existe un modo deslizante sobre el hiperplano

$$S = \{x \in R^n \mid L(x - \bar{x}) = 0\}$$

a través del control

$$0 \leq u_{eq}(x) = -\frac{L Ax}{L b}.$$

Para determinar el vector $L \in R_+^n$ debemos resolver las desigualdades

$$L Ax \leq 0.$$

De acuerdo con la proposición 1 en [6], en un conjunto de soluciones dadas por

$$L = (l_1 \ l_2 \ b l_4 \ l_4 \ l_5 \ l_6 \ c l_6) = l_2 \left(\frac{1}{3} \ 1 \ \frac{6}{5} b \ \frac{6}{5} \ \frac{2}{5} \ \frac{7}{10} \ \frac{7}{10} c \right) \quad (14)$$

hay un deslizamiento, donde $l_2 > 0$, en el que los parámetros b y c deben satisfacer las desigualdades

$$\frac{42}{85} < b < \frac{6784}{6885} \quad y \quad \frac{455}{111} < c < \frac{1259}{175}$$

considerando las últimas restricciones, calculamos el control equivalente u_{eq} con respecto al hiperplano

$$L(x - \bar{x}) = 0,$$

donde el punto de equilibrio

$$\bar{x} = -A^{-1} b \bar{u} = \frac{1}{15504307351274} \begin{pmatrix} 444471314408250 \\ 444471314408250 \\ 444471314408250 \\ 265894119646000 \\ 341770585629450 \\ 668466192875685 \\ 301110897691750 \end{pmatrix},$$

donde

$$\bar{u}b_6 = \frac{3131}{100} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \frac{3131}{100b_6}$$

con L dado por (13), parámetro $k = L\bar{u}$ y función $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb}$ se calculan de manera que

$$L\bar{x} = \frac{3032671864101919}{31008614702548}l_2 + \frac{266682788644950}{7752153675637}bl_2 + \frac{30111089769175}{2214901050182}cl_2.$$

así u_{eq}

$$u_{eq}(x) = -\frac{LAx}{Lb}$$

tal que

$$u_{eq}(x) = \frac{10}{7b_6} \left(\frac{46}{375}x_1 + \left(\frac{1696}{1875} - \frac{459}{500}b \right) x_2 + \left(\frac{459}{500}b - \frac{567}{1250} \right) x_3 + \frac{189}{5000}x_4 + \frac{7}{1000}x_5 \right) \\ + \frac{10}{7b_6} \left(\left(\frac{1259}{5000} - \frac{7}{200}c \right) x_6 + \left(\frac{777}{10000}c - \frac{637}{2000} \right) x_7 \right)$$

de tal manera que se satisfaga la relación $u_{eq}(\bar{x}) = \bar{u}$

$$u_{eq}(\bar{x}) = -\frac{LA\bar{x}}{Lb} = -\frac{\left(-\frac{21917}{1000}l_2\right)}{\frac{7}{10}b_6l_2} = \frac{3131}{100b_6} = \bar{u}.$$

Consideramos de nuevo el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu$$

para obtener la matriz que representa la dinámica sobre el hiperplano

$$L^T(x - \bar{x}) = 0,$$

de forma que

$$x(t) \in \mathcal{L} = \{x \in R^n | L^T(x(t) - \bar{x}) = 0\} \quad \forall t \geq 0.$$

Lo que implica que

$$\frac{d(L^T(x(t) - \bar{x}))}{dt} = 0$$

entonces

$$L^T \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow L^T(Ax + bu_{eq}) = 0 \Rightarrow L^T bu_{eq} = -L^T Ax \Rightarrow u_{eq} = -\frac{L^T Ax}{L^T b}$$

válida para $x \in \mathcal{L}$. La matriz que representa la dinámica sobre el hiperplano la denotamos por A_{eq} , y la podemos obtener de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b \left(-\frac{L^T Ax}{L^T b} \right) \\ &= \left(A - b \frac{L^T A}{L^T b} \right) x, \quad \forall x \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{eq} &= A - b \frac{L^T A}{L^T b} \\ &= \left(I - \frac{1}{L^T b} L^T A \right) A \end{aligned}$$

de manera que una solución $x(t, x_0)$, con

$$\{x_0 \in R^n | L^T(x - \bar{x}) = 0\},$$

sucedee que

$$x(t, x_0) \in \{R^n | L^T(x - \bar{x}) = 0\} \quad \forall t \geq 0$$

y cuya dinámica es dada por el sistemas lineal

$$\dot{x} = A_{eq}x$$

odservamos que

$$\det A_{eq} = \det \left(I - \frac{1}{L^T b} L^T A \right) \det A$$

El modo deslizante está representado por el sistema lineal $\dot{x} = A_{eq}x$, donde la matriz $A_{eq} = A_{eq}(b, c)$ es el rango 6; es decir, el valor propio $\lambda = 0$ tiene multiplicidad 1.

Teniendo en cuenta estas características de A_{eq} , los parámetros b y c se seleccionan de modo que la matriz A_{eq} debe tener el valor propio dominante (real y no cero) lo más hacia la izquierda posible en el plano complejo. Con respecto al enfoque de CLF, se selecciona una matriz P de modo que se cumpla el Teorema 16. En este caso

$$P = \begin{pmatrix} I_6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donde I_6 es una matriz de identidad con dimensión 6×6 . Con esto, podemos obtener que $(A^T P + PA)$ es una matriz definida negativa. Considerando el cambio de la variable

$$y(t) = x(t) - \bar{x},$$

obtenemos

$$\beta(y) = -2b^T P y = -2b_6 y_6.$$

Lema 4. $\det A_{eq} = 0$.

Demostración. Basta con probar que $b \in \ker \left(I - b \frac{L}{Lb} \right)$, ya que

$$\left(I - b \frac{L}{Lb} \right) b = b - b \frac{L}{Lb} b = 0$$

concluimos que $\det A_{eq} = 0$.

La interpretación del lema 4 consiste en que la dinámica n -dimensional de

$$\dot{x} = Ax$$

se restringe, mediante el control equivalente, a la dinámica $(n - 1)$ -dimensional definida en el hiperplano S y representada por

$$\dot{x} = A_{eq}x.$$

En particular, por ser A matriz Hurwitz tenemos que $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ es punto de equilibrio de

$$\dot{x} = Ax + bu_{eq}$$

ya que al sustituir en la última igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A_{eq}\bar{x} \\
 &= A\bar{x} + b\left(-\frac{LA\bar{x}}{Lb}\right) \\
 &= A(-A^{-1}b\bar{u}) + b\left(-\frac{LA(-A^{-1}b\bar{u})}{Lb}\right) \\
 &= -b\bar{u} + b\left(-\frac{L(-b\bar{u})}{Lb}\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Hemos probado que $\lambda = 0$ es valor propio de la matriz

$$A_{eq} = A - b\left(\frac{LA}{Lb}\right);$$

además es Metzler por ser la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas.

Por otro lado, tenemos que si

$$x^* \in Ker\left(I - b\frac{L}{Lb}\right)b,$$

entonces

$$x^* = \frac{1}{Lb}bLx^*.$$

Por lo tanto, $x^* \in \text{Im}(b)$, implicando que $\lambda = 0$ es el valor propio correspondiente al vector propio x^* . En cada una de las aplicaciones expuestas más adelante, mostramos que $\lambda = 0$ es el valor propio dominante de A_{eq} , y de acuerdo al teorema de Perron-Frobenius para matrices Metzler, esto implica que la dinámica del sistema.

$$\dot{x} = A_{eq}x$$

tiene al estado $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ como único punto de equilibrio sobre el hiperplano

$$Lx = k.$$

Aplicación al modelo de mezclas en n tanques

De acuerdo la proposición 1 en [6], existe un modo deslizante sobre el hiperplano

$$S = \{x \in R^n \mid L(x - \bar{x}) = 0\}$$

a través del control

$$0 \leq u_{eq}(x) = -\frac{L Ax}{L b}.$$

Consideremos una línea de n tanques conectados cada uno con su antecesor y su sucesor, es decir para el i -ésimo tanque, éste recibirá dos flujos f_{2i-1} y f_{2i} , y a su vez dará dos flujos f_{2i-2} y f_{2i+1} de el y para el $(i-1)$ -ésimo e $(i+1)$ -ésimo tanque respectivamente, para $i = 1, 2, \dots, n$. (ver figura 11). Es claro, que el tanque 1, recibirá un flujo f_1 con cierta concentración u , mientras que el tanque n desfogará al exterior un flujo f_{2n} . Tal configuración, nos lleva a un sistema del tipo (11), donde

$$A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_3 & -a_{22} & f_4 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & f_{2i-1} & -a_{ii} & f_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & f_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2n-1} & -a_{nn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

con $a_{22} = f_2 + f_4$, $a_{ii} = f_{2i-2} + f_{2i+1}$ y $a_{nn} = f_{2n-2} + f_{2n+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $b = (1, 0, \dots, 0)^T$. Como el volumen en cada tanque se considera constante, deberán cumplirse las ecuaciones

$$f_{2i-1} + f_{2i} = f_{2i-2} + f_{2i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

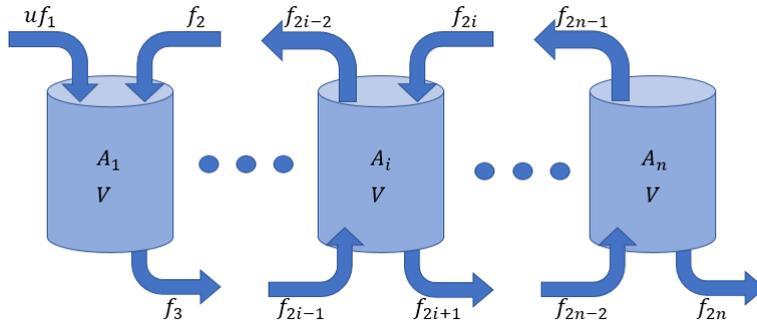


Figura 11. En esta configuración de tanques, se considera el volumen V constante.

La demostración de la siguiente proposición puede verse en la referencia [6] como la proposición 2.

Proposición 6. *Existe una dinámica deslizante para el sistema (11) con matriz A dada por (15).*

Robustez en la estabilización de la insulina.

Para probar la robustez de los esquemas propuestos, se considera un caso especial de estabilidad robusta de Hurwitz para matrices Metzlerianas. Esta prueba la podemos encontrar en [5].

Del mismo modo a la definición 8, se dice que la matriz de intervalos \mathbf{A} es una matriz de intervalos Metzleriana si cada matriz $A \in \mathbf{A}$ es una matriz Metzleriana.

Un elemento típico de \mathbf{A} puede ser representado por la notación:

$$0 \leq A^- \leq A \leq A^+.$$

Supongamos que $A(k)$ denota la submatriz principal principal k -dimensional de \mathbf{A} que consta de las primeras k renglones y columnas de A .

Teorema 17. *Una matriz de Metzleriana $A \in R^{n \times n}$ es Hurwitz estable para todo $A \in [A^-, A^+]$ si y sólo si A^+ es Hurwitz estable. Una condición equivalente es que todos los menores principales de $-A^+$ son positivos es decir $\det[-A^+(k)] > 0$ para $k = 1 \dots n$.*

En el caso de la estabilización de la insulina, consideramos la matriz A definida en la subsección anterior. Al aumentar las entradas distintas de cero de la matriz A , se define una matriz A^+ de Metzlerian y Hurwitz de límite superior,

$$\begin{pmatrix} -1.71 & 1.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 3.1 & 0 & 1 & 0.73 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0.77 & -0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & -0.78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 & -1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & -1.85 & 0.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0833 & -0.1 \end{pmatrix}$$

A^+ es Hurwitz ya que los principales menores de $-A^+$ son positivos, es decir

$$\begin{aligned} \det[-A^+(1)] &= 1.71, & \det[-A^+(2)] &= 4.4010, & \det[-A^+(3)] &= 3.3448, \\ \det[-A^+(4)] &= 1.9523, & \det[-A^+(5)] &= 2.4041, & \det[-A^+(6)] &= 1.4369, \\ \det[-A^+(7)] &= 0.0515. \end{aligned}$$

Ahora, una matriz $C = [c_{ij}]$ se define de modo que

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

El teorema 17 asegura que la matriz $A + \epsilon C$ es Hurwitz para un ϵ arbitrario, tal que $\epsilon \in (-0,05, 0,005)$; es decir, $-0,05 < \epsilon < 0,005$. Considerando el caso particular $A^- := A + (-0,05)C$, entonces A^- se convierte en

$$\begin{pmatrix} -1.78 & 1.68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & -3.2 & 0 & 0.85 & 0.67 & 1.01 & 0 \\ 0 & 0.71 & -0.81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.32 & -0.83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.36 & 0 & 0 & -1.88 & 0 & 0 \\ 0 & 1.36 & 0 & 0 & 0 & -1.92 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.16 \end{pmatrix}$$

con $a_{76}^- = 0$. Luego, el sistema

$$\dot{x} = (A + \epsilon C)x$$

es asintóticamente estable para cualquier valor épsilon en el intervalo $(-0,05, 0,005)$.

Conclusiones

Se han revisado los resultados de una línea de trabajos para sistemas positivos. Se han descrito métodos de estabilización. Además se presentaron conceptos y resultados clásicos de sistemas positivos, así métodos de estabilización.

Se desarrolla una prueba muy simple para determinar si una matriz Metzler dada es Hurwitz estable. Esta prueba se deriva observando que cualquier matriz Metzler que sea Hurwitz estable.

Mostramos un método de estabilización-clf para sistemas positivos lineales mediante funciones de control admisibles (continuas y acotadas). Para el caso de sistemas lineales positivos, es suficiente con encontrar una matriz diagonal P , solución de una ecuación de Lyapunov, para definir la función de Lyapunov.

Mediante resultados conocidos de la teoría de control, sistemas lineales positivos y teoremas de estabilidad, mostramos una manera de analizar y diseñar una estabilización robusta de una familia de sistemas lineales. También se presentaron ejemplos y aplicaciones para ilustrar los métodos y estabilidad de los sistemas.

Bibliografía

- [1] L. Farina, S. Rinaldi, (2000) Positive Linear Systems, John Wiley, New York.
- [2] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel.(1995), Robust Control: the Parametric Approach, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ
- [3] Sorensen, J.T. (1985) ‘A physiologic model of glucose metabolism in man and its use to design and assess improved insulin therapies for diabetes’, PhD thesis, MIT, USA
- [4]F.L.H. Klein S. (2019). On the Stabilization of Linear Time Invariant Systems with positive controls (Tesis de maestria). University of Twente, Enschede.
- [5] Leyva, H., Quiroz, G., Carrillo F., y Femat R. (2018). Insulin stabilisation in artificial pancreas: a positive control approach. *IET control theory and applications*, 13, 970-978.
- [6] Leyva, H., Quiroz, G., Carrillo F., y Quiroz G. (2016). Robust stabilization of positive linear systems via sliding positive control. *Journal of Process Control*. 41. 47-55
- [7] Leyva, H., y Carrillo F. (2017). Mejorando la tasa de convergencia de sistemas lineales positivos con CLF-estabilizadores. *Asociación de México de Control Automático* 60-65.
- [8] Bhatia N., y Szegö G. (1967) *Dynamical Systems: Stability Theory and Applications*, Berlín, Alemania, springer verlag.
- [9] Leyva, H., Quiroz, G., Carrillo, F., y Femat, R. (2013). Estabilización vía Modos Deslizantes con Control Positivo. *Asociación de México de Control Automático*. 718-723.
- [10] Rantzer, A.(2015). Scalable control of positive systems. *European Journal of Control*, 24, 72-80.
- [11] Quiroz, G., y Femat, R.(2007). On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from dynamic analysis. *Mathematical Biosciences* 210 554–575.
- [12] Bacciotti, A. (2019). *Stability and Control of Linear Systems*. Cham, Suiza Springer Nature Switzerland AG
- [13] Samadi, V.(2012). *Stability Analysis of Positive Systems with Applications to Epidemiology* (Tesis Doctoral). Hamilton Institute National University, Irlanda maynooth.
- [14] Castelan, E., y Hennes, J. (1993) On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 38(11), 1680-85.

[15] Fernando Verduzco y Horacio Leyva, Notas de Ecuaciones Diferenciales 2, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas.

[16] ÓRourke, J. O., Tóth, C. D. T. y Goodman, J. E. G. (Eds.). (2018). Polytopes and polyhedra. Handbook of discrete and computational geometry (3.a ed., pp. 381-415). CRC Press.