UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Departamento de Matemáticas

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcción de bases ortonormales en algunos espacios de Hilbert

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Jazmin Cristal Landeros Quiroz

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 24 de junio de 2025

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Carlos Alberto Robles Corbala
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Luis René San Martín Jiménez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Francisco Alejandro Villegas Acuña
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

A mi hermana Patricia y mi hermano Rafael…

Agradecimientos

En primer lugar, a mi familia. A mi abuela Patricia Quiroz, quien ha sido mi mayor soporte y siempre confió en mis capacidades para llegar hasta aquí. A mis tíos Isaac, Abraham y Esteban, quienes han sido para mí como tres padres, de los cuales he recibido su apoyo y cariño incondicional. A mi tía Liliana, quien ha sido como una madre para mí en tiempos difíciles. Y por último, a mi abuelo Esteban y a mis padres Cristal y Daniel quienes siempre buscaron brindarme su apoyo a pesar de las dificultades que cada uno enfrentaba.

A mis amistades Karen, Zoe, Aiden, Jocelyn y Devany que no solo me ayudaron en mis crisis cuando se me dificultaba la universidad sino que han formado parte de mi crecimiento como persona.

A mis amigos y compañeros de la universidad Mauricio, Omar, Victoria, Oscar, Damaris y Alan que fueron personas con las que pude consultar si tenía algún problema e hicieron que toda la carrera no se tratara de solo estudiar.

A todos los profesores que me impartieron clases, en especial a Carolina Espinoza, Marysol Navarro y Carlos Robles, quienes no solo me enseñaron matemáticas, sino también las cualidades que me gustaría tener en un futuro como maestra. Y por supuesto, a mi directora de tesis, Martha Guzmán, quien ha sido una guía para mí sobre lo que significa ser matemática y me ha brindado todo su apoyo durante la culminación de mi trabajo de tesis.

Finalmente, me gustaría agradecer a mis sinodales Carlos Robles, Luis San Martín y Alejandro Villegas por el tiempo que han dedicado para la revisión de esta tesis.

Índice general

Introducción

Históricamente, la teoría de los espacios de Hilbert tiene su origen en el trabajo realizado por David Hilbert (1862-1943) sobre formas cuadráticas en una infinidad de variables con aplicaciones en ecuaciones integrales. Durante el periodo de 1904-1910 publicó una serie de seis artículos donde se plasman las ideas generales de espacios de Hilbert como L^2, los operadores compactos y la ortogonalidad, teniendo una gran influencia en el análisis matemático y sus aplicaciones. Muchos años después, John von Neumann fue quien formuló un enfoque axiomático de los espacios de Hilbert y desarrolló la teoría moderna de los operadores en espacios de Hilbert.

Una de las características de los espacios normados es que su geometría es muy similar a la geometría Euclideana. Aún más, los espacios con producto interior y los espacios de Hilbert son mejores, puesto que su geometría es más o menos una generalización de la geometría Euclideana en espacios de dimensión infinita.

La razón de esta simplicidad es que un concepto importante que se desarrollará será el de la ortogonalidad que puede ser introducida en un espacio con producto interior de tal manera que la conocida fórmula pitagórica se cumple. Con esto tenemos que la estructura de los espacios de Hilbert es más simple y hermosa.

Por todo esto, en el primer capítulo de este trabajo desarrollaremos la teoría de espacios de Hilbert, ya que será esencial tener familiaridad con las ideas y resultados básicos. Este capítulo introduce espacios con producto interior y espacios de Hilbert, estableciendo una especial atención a los sistemas ortonormales también conocidos como bases ortonormles y a los espacios L^p.

Por una base de un espacio vectorial X, entendemos a una familia linealmente independiente $\mathscr{B}$ de vectores de X tales que cualquier vector $x \in X$ puede ser escrito como $x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n$, donde $x_n \in \mathscr{B}$ y los λ_n son escalares. En espacios con producto interior, las bases ortonormales son de mayor importancia. En lugar de combinaciones finitas

$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n$, las sumas infinitas son permitidas, y la condición de independencia lineal se sustituye por la ortogonalidad, siendo ésta una de las ventajas más importantes en los espacios de nuestro interés.

En el segundo capítulo, consideraremos espacios o subespacios de $L^2(A)$ donde A será un conjunto Lebesgue medible; en cada uno de estos conjuntos construiremos una base ortonormal. Los casos de A que consideraremos serán: la frontera del disco unitario, el disco unitario, el intervalo [-1,1], los reales y el intervalo [0,1].

Al final de esta tesis presentamos nuestras conclusiones.

Capítulo 1

Espacios de Hilbert

En este primer capítulo se darán los preliminares que proporcionarán el terreno para el propósito principal de la tesis. Primero estableceremos la definición de un espacio de Hilbert y posteriormente desarrollaremos los resultados necesarios para arribar al concepto de base ortonormal y algunas caracterizaciones para ésta.

1.1. Producto interior y desigualdad de Schwarz.

En esta sección comenzaremos dando conceptos que nos permitirán dar la definición de un espacio de Hilbert, así mismo buscaremos probar la desigualdad de Schwarz que será un recurso muy utilizado en todo este capítulo.

Para ello sea X un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. A continuación daremos la definición de dos funciones que serán importantes para poder hablar de espacios de Hilbert.

Definición 1.1.1. Una *norma* en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\forall \lambda \in K, \forall x \in X, \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- *Desigualdad del triángulo:* $\forall x, y \in X, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A la pareja $(X, \| \cdot \|)$ le llamaremos *espacio normado*. Recordemos que si un espacio normado es completo le llamamos *espacio de Banach*.

Los espacios de Hilbert son espacios de Banach que nos permiten hacer uso de un análisis más refinado, y además representan una generalización directa de espacios euclideanos de dimensión finita. Antes de describir con más detalle a los espacios de Hilbert es pertinente definir la siguiente función.

Definición 1.1.2. Un *Producto Interior* es una función $\langle \ , \ \rangle : X \times X \to K$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in X$.
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \ \forall x, y \in X$.
4. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \ \forall x, y, z \in X$.
5. *Si* $\lambda \in K, \ y, x \in X$
   $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Cuando $K = \mathbb{R}$ tenemos que para el inciso 3. se cumple que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. En general, usaremos más el producto interior complejo.

A la pareja $(X, \langle \ , \ \rangle)$ le llamamos *espacio con producto interior*. Notemos que los axiomas que determinan un producto interior implican ciertas propiedades.

Observación 1.1.3. *Sea* $(X, \langle \ , \ \rangle)$ *un espacio con producto interior. Entonces, aplicando las propiedades del producto interior, obtenemos que* $\forall x, y, z \in X, \lambda \in K$*:*

(i) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

(ii) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

(iii) $\langle x, 0 \rangle = 0 = \langle 0, y \rangle$.

Demostración:

(i) $\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

(ii) $\langle\, x, \lambda y \,\rangle = \overline{\langle\, \lambda y, x \,\rangle} = \overline{\lambda \langle\, y, x \,\rangle} = \bar{\lambda}\overline{\langle\, y, x \,\rangle} = \bar{\lambda}\langle\, x, y \,\rangle.$

(iii) $\langle\, x, 0 \,\rangle = \langle\, x, x - x \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle + \langle\, x, -x \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle - \langle\, x, x \,\rangle = 0 = \overline{\langle\, y, y \,\rangle} - \overline{\langle\, y, y \,\rangle} = \overline{\langle\, y, y \,\rangle - \langle\, y, y \,\rangle} = \overline{\langle\, y, y - y \,\rangle} = \overline{\langle\, y, 0 \,\rangle} = \langle\, 0, y \,\rangle.$

■

Es importante destacar que a partir del producto interior podemos generar una norma. Específicamente, nos enfocaremos en la siguiente función

$$\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle} \tag{1.1}$$

la cual demostraremos que es una norma, pero antes es necesario probar la desigualdad de Schwarz que será una herramienta importante durante la demostración.

Teorema 1.1.4 (*Desigualdad de Schwarz*)**.** Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior y sean $x, y \in X$. Entonces $|\langle\, x, y \,\rangle| \leq \langle\, x, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} \langle\, y, y \,\rangle^{\frac{1}{2}}$, con igualdad si y solo si x, y son linealmente dependientes.

Demostración: Supongamos que $\{x, y\}$ son linealmente independientes.
En consecuencia, tendremos que $\forall \lambda \in K \quad x - \lambda y \neq 0$.
Luego,

$$0 < \langle\, x - \lambda y, x - \lambda y \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle - \bar{\lambda}\langle\, x, y \,\rangle - \lambda\langle\, y, x \,\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle\, y, y \,\rangle. \tag{1.2}$$

Tomemos $\lambda = \frac{\langle\, x,y \,\rangle}{\langle\, y,y \,\rangle}$ para sustituirlo en la ecuación (1.2) y así tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &< \langle\, x, x \,\rangle - \overline{\frac{\langle\, x, y \,\rangle}{\langle\, y, y \,\rangle}}\langle\, x, y \,\rangle - \frac{\langle\, x, y \,\rangle}{\langle\, y, y \,\rangle}\overline{\langle\, x, y \,\rangle} + \frac{|\langle\, x, y \,\rangle|^2}{\langle\, y, y \,\rangle^2}\langle\, y, y \,\rangle \\ &= \langle\, x, x \,\rangle - \frac{\overline{\langle\, x, y \,\rangle}\langle\, x, y \,\rangle}{\langle\, y, y \,\rangle} - \frac{\overline{\langle\, x, y \,\rangle}\langle\, x, y \,\rangle}{\langle\, y, y \,\rangle} + \frac{|\langle\, x, y \,\rangle|^2}{\langle\, y, y \,\rangle} \\ &= \langle\, x, x \,\rangle - \frac{|\langle\, x, y \,\rangle|^2}{\langle\, y, y \,\rangle}. \end{aligned}$$

Con lo anterior tendremos que la desigualdad se reduce a

$$0 < \langle\, x, x \,\rangle - \frac{|\langle\, x, y \,\rangle|^2}{\langle\, y, y \,\rangle}.$$

Por lo tanto,

$$|\langle\, x, y \,\rangle|^2 < \langle\, x, x \,\rangle\langle\, y, y \,\rangle$$

es decir,

$$|\langle\, x, y \,\rangle| < \langle\, x, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} \langle\, y, y \,\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\{x, y\}$ es linealmente dependiente. Entonces $\exists \lambda \in K$ tal que $x = \lambda y$ de forma que obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle\, x, y \,\rangle|^2 &= |\langle\, \lambda y, y \,\rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle\, y, y \,\rangle \langle\, y, y \,\rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle\, y, y \,\rangle \langle\, y, y \,\rangle \\ &= \langle\, \lambda y, \lambda y \,\rangle \langle\, y, y \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle \langle\, y, y \,\rangle. \end{aligned}$$

Y así tenemos la igualdad,

$$|\langle\, x, y \,\rangle| = \langle\, x, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} \langle\, y, y \,\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

■

Con este resultado tenemos lo suficiente para probar que la función (1.1) es una norma para cualquier espacio con producto interior.

Teorema 1.1.5. Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior. Entonces, la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| := \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle}$ es una norma en X y se llama la norma inducida por el producto interior.

Demostración: Sean $x, y \in X$, $\lambda \in K$.

- Es claro que $\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle} \geq 0$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle\, x, x \,\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle\, \lambda x, \lambda x \,\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda} \langle\, x, x \,\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle\, x, x \,\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle} = |\lambda| \|x\|$.
- Finalmente, haciendo uso del Teorema 1.1.4

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle\, x + y, x + y \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle + \langle\, x, y \,\rangle + \langle\, y, x \,\rangle + \langle\, y, y \,\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle\, x, y \,\rangle + \overline{\langle\, x, y \,\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle\, x, y \,\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle\, x, y \,\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle\, x, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} \langle\, y, y \,\rangle^{\frac{1}{2}} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Así obtenemos que,

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

Al tener las funciones *norma* y *producto interior*, así como ver la relación que es posible establecer entre ellas, tenemos lo necesario para dar la definición apropiada de Espacio de Hilbert.

1.2. Espacios de Hilbert y ejemplos.

En esta sección se definirán los espacios de Hilbert y veremos varios ejemplos de espacios con producto interior en los cuales comprobaremos si cumplen las características de un espacio de Hilbert.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio vectorial sobre K. Diremos que el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio *pre-Hilbert* si la norma $\|\cdot\|$ está inducida por un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$, es decir, $\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x\,\rangle}$. Diremos que X es un *espacio de Hilbert* si X es un espacio pre-Hilbert completo.

Ahora, si consideramos un espacio pre-Hilbert notaremos que el producto interior asociado a este espacio cumple una propiedad que será de gran utilidad en varios resultados.

Proposición 1.2.2. Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio pre-Hilbert y $\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x\,\rangle}$. Entonces $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to K$ es una función continua.

Demostración:

Sea $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X \times X$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cuando $n \to \infty$ en $(X \times X, \|\cdot\|_1)$, donde $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$.

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz mostraremos la continuidad de $\langle\ ,\ \rangle$. Como $\|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces,

$$x_n \to x \text{ en } (X, \|\cdot\|)$$

$$y_n \to y \text{ en } (X, \|\cdot\|).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\langle\, x_n, y_n \,\rangle - \langle\, x, y \,\rangle| &= |\langle\, x_n, y_n \,\rangle - \langle\, x_n, y \,\rangle + \langle\, x_n, y \,\rangle - \langle\, x, y \,\rangle| \\
&= |\langle\, x_n, y_n - y \,\rangle + \langle\, x_n - x, y \,\rangle| \\
&\leq |\langle\, x_n, y_n - y \,\rangle| + |\langle\, x_n - x, y \,\rangle| \\
&\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \\
&\leq M\|y_n - y\| + \|y\|\|x_n - x\| \to M \cdot 0 + \|y\| \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ donde $M = \sup_{n\in N} \|x_n\|$. ■

Ahora pasaremos a destacar diferentes espacios a los cuales les asociamos un producto interior, induciremos su norma y veremos si se trata de un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.2.3.

(1) Sea $X = K^n$ $(K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$.
Para $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$, definimos: $\langle\, x, y \,\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$.
Es evidente que $\langle\, , \,\rangle$ define un producto interior en K^n.
La norma en K^n inducida por este producto interior está dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j\overline{x_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \|x\|_2, \text{ la norma euclideana.}$$

$(K^n, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert ya que $(K^n, \|\cdot\|_2)$ es completo.

(2) Sea $X = \ell^2 = \left\{x \in K^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ con $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Sean $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$.
Y definamos: $\langle\, x, y \,\rangle := \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_j}$.
Notemos que $\langle\, , \,\rangle$ está bien definido pues haciendo uso de la desigualdad de Hölder con $p = p' = 2$ tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j\overline{y_j}| \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}\right)$$

y tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_j}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j\overline{y_j}| \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}\right) < \infty.$$

Además $\langle\ ,\ \rangle$ *es un producto interior en* ℓ^2*:*

- $\langle\ x, x\ \rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left| x_j \overline{x_j} \right| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \geq 0.$
- $\langle\ x, x\ \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_j| = 0\ \ \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0.$
- $\langle\ x, y\ \rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} = \overline{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \overline{x_j} y_j} = \overline{\langle\ y, x\ \rangle}.$
- *Considere* $z \in \ell^2$ *con* $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} \langle\ x + z, y\ \rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} (x_j + z_j) \overline{y_j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (x_j \overline{y_j} + z_j \overline{y_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} + \sum_{j=1}^{\infty} z_j \overline{y_j} \\ &= \langle\ x, y\ \rangle + \langle\ z, y\ \rangle. \end{aligned}$$

- *Si* $\lambda \in K$ *entonces tendremos:*
  $\langle\ \lambda x, y\ \rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda x_j \overline{y_j} = \lambda \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} = \lambda \langle\ x, y\ \rangle.$
  Ahora, la norma inducida por este producto interior está dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle\ x, x\ \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{x_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} = \|x\|_2.$$

Y sabemos que $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *es completo. Por lo tanto,* $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *es de Hilbert.*

(3) *Sea* $X = c_{00} = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} : \exists N = N(x) \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0\, \forall n > N \right\}$.

Dotamos a c_{00} *del producto interior de* l^2*:* $\langle\ x, y\ \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$.

$(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ *es pre-Hilbert. Sin embargo,* c_{00} *con la norma* $\|\cdot\|_2$ *no es un espacio de Hilbert.*

En efecto, sea $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *la siguiente sucesión en* c_{00}*:*

$$x^{(1)} = (1, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 0, ...)$$

$$x^{(2)} = \left(1, \frac{1}{2}, 0, ..., 0, 0, ..., 0, ...\right)$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, ..., 0, ...\right).$$

Esto es,

$$x^{(n)} = (x_j^{(n)})_{j=1}^{\infty} \text{ tal que } x_j^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{j} & si \quad 1 \leq j \leq n \\ \\ 0 & si \qquad j > n. \end{cases}$$

$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ *pues si* $m > n$ *obtenemos:*

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \left|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} \to 0$$

cuando $n \to \infty$ *pues sabemos que* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$.

Sin embargo $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ **NO** *converge en* $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$. *De lo contrario existe* $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$ *tal que* $\|x^{(n)} - x\|_2 \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *esto es:*

$$\left|x_j^{(n)} - x_j\right| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(n)} - x_j\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ para cada } j \in \mathbb{N} \text{ cuando } n \to \infty$$

lo cual implica

$$x_j^{(n)} \to x_j \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ *cualesquiera fijo. Si* $n \geq j$ *tendremos que:*

$$x_j^{(n)} \to x_j \text{ cuando } n \to \infty \text{ por lo que } \frac{1}{j} = x_j^{(n)} \to x_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ cuando } n \to \infty$$

y por tanto

$$x_j = \frac{1}{j} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}, \text{ así } x \notin c_{00} \ \text{ lo cual es una contradicción.}$$

En consecuencia c_{00} *no es un espacio de Hilbert con la norma* $\|\cdot\|_2$.

(4) *Sea* $X = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{C} | f \text{ es continua}\}$ *para* $f, g \in X$ *definamos:*

$$\langle\, f, g \,\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Probaremos que $\langle \ , \ \rangle$ *es un producto interior:*

- $\langle\, f, f \,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{f(t)}dt = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \geq 0.$

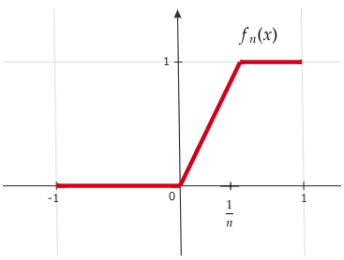
- $\langle\ f, f\ \rangle = 0$ *si y solo si* $\int_{-1}^{1} f(t)\overline{f(t)}dt = 0$ *si y solo si* $\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt = 0$ *y siendo* $|f|^2$ *continua y no negativa, esto es equivalente a* $|f(t)|^2 = 0\ \forall t \in [-1, 1]$ *si y solo si* $f = 0$ *en* $[-1, 1]$.
- $\langle\ g, f\ \rangle = \int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt = \overline{\int_{-1}^{1} \overline{g(t)}f(t)dt} = \overline{\langle\ f, g\ \rangle}$.
- $\langle\ f + h, g\ \rangle = \int_{-1}^{1}(f + h)(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-1}^{1}[f(t) + h(t)]\overline{g(t)}dt = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt + \int_{-1}^{1} h(t)\overline{g(t)}dt = \langle\ f, g\ \rangle + \langle\ h, g\ \rangle$.
- $\forall\lambda \in \mathbb{C}\ \ \langle\ \lambda f, g\ \rangle = \int_{-1}^{1}(\lambda f)(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-1}^{1} \lambda f(t)\overline{g(t)}dt = \lambda\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt = \lambda\langle\ f, g\ \rangle$.

La norma inducida en X *por* $\langle\ ,\ \rangle$ *es:*

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt} = \|f\|_2.$$

Por lo tanto tenemos que $(X, \|\cdot\|_2)$ *es pre-Hilbert. Sin embargo* $(X, \|\cdot\|_2)$ *no es Hilbert. Para ver esto consideremos la siguiente sucesión:*

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X, f_n : [-1, 1] \to \mathbb{C} \text{ tal que}$$



$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \le t \le 0 \\ nt & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* X *pues si* $m > n$ *tenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
\|f_m - f_n\|_2 &= \int_{-1}^{1} \Big|f_m(t) - f_n(t)\Big|^2 dt = \int_{0}^{\frac{1}{n}} \Big|f_m(t) - f_n(t)\Big|^2 dt \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{m}} |mt - nt|^2 dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |1 - nt|^2 dt \\
&= (m-n)^2 \int_{0}^{\frac{1}{m}} t^2 dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nt)^2 dt = (m-n)^2 \cdot \frac{t^3}{3}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n}\frac{(1-nt)^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \\
&= (m-n)^2 \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^3}{3} - \left[\frac{1}{n}\frac{\left(1 - n\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3}{3} - \frac{1}{n}\frac{\left(1 - n\left(\frac{1}{m}\right)\right)^3}{3}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(m-n)^2}{3m^3} + \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)^3}{3n} = \frac{(m-n)^2}{3m^3} + \frac{(m-n)^3}{3nm^3} \\
&= \frac{(m-n)^2}{3m^3}\left[1+\frac{(m-n)}{n}\right] = \frac{(m-n)^2}{3m^3}\left[1+\frac{m}{n}-\frac{n}{n}\right] = \frac{(m-n)^2}{3m^3}\left[\frac{m}{n}\right] \\
&= \frac{(m-n)^2}{3m^2n} = \frac{m^2}{3nm^2} - \frac{2mn}{3nm^2} + \frac{n^2}{3nm^2} = \frac{1}{3n} - \frac{2}{3m} + \frac{n}{3m^2} \\
&= \frac{1}{3n} - \frac{2}{3m} + \frac{1}{3m}\cdot\left(\frac{n}{m}\right).
\end{aligned}$$

Y como $m > n$ entonces $\frac{n}{m} < 1$ por lo tanto:

$$\frac{1}{3n} - \frac{2}{3m} + \frac{1}{3m}\cdot\left(\frac{n}{m}\right) < \frac{1}{3n} - \frac{2}{3m} + \frac{1}{3m} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Sin embargo la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **NO** *converge en $(X, \|\cdot\|_2)$: si no fuese así existiría $f \in X$ tal que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ cuando $n \to \infty$, esto es,*

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \leq \int_{-1}^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt \to 0 \text{ cuando } n \to \infty\ \forall -1 \leq a \leq b \leq 1.$$

Así

$$\int_{-1}^0 |f_n(t) - f(t)|^2 dt \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \text{ es decir, } \int_{-1}^0 |f(t)|^2 = 0.$$

Como f es continua entonces tendremos que $f(t) = 0$ para todo $t \in [-1, 0]$.

Así, sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < 1$. Elijamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon\ \forall n \geq n_0$. De este modo tendremos que

$$\int_\epsilon^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \text{ es decir, } \int_\epsilon^1 |1 - f(t)|^2 dt \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

entonces $\int_\epsilon^1 |1-f(t)|^2 dt = 0$ para todo $t \in [\epsilon, 1]$ lo que implica que $f(t) = 1$ para todo $t \in [\epsilon, 1]$ válido para $0 < \epsilon < 1$, así obtenemos que $f(t) = 1$ para todo $t \in (0, 1]$.

Por lo tanto,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \leq t \leq 0 \\ \\ 1 & si \quad 0 < t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{la cual no es continua, siendo esto una contradicción.}$$

(5) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida (es decir, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X y μ es una medida en X).

Para $1 \leq p < \infty$, *sea*

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \middle| f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

La norma está dada por $\|f\|_p := \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$. *Si* $1 < p, p' < \infty$ *son tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *y si tenemos que* $f \in L^p$ *y* $g \in L^{p'}$ *entonces*

$$fg \in L^1 \text{ y } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}, \text{ es decir, } \int_X (fg) d\mu \leq \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_X |g|^{p'} d\mu\right]^{\frac{1}{p'}},$$

esto, gracias a la Desigualdad de Hölder.

Ahora, si consideramos $p = 2$ *entonces* $(L^2(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_2)$ *es un espacio de Banach, (esto por el Teorema de Riesz-Fisher válido para* $1 < p < \infty$*). De hecho, aun más que eso* $(L^2(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_2)$ *es un espacio de Hilbert.*

La norma $\|\cdot\|_2$ *está inducida por el producto interior*

$$\langle\, f, g \,\rangle = \int_X f \bar{g}\, d\mu \text{ para } f, g \in L^2.$$

(6) Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ *tal que* G *es abierto y sea*

$$L_a^2(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \middle| f \text{ es analítica y } \iint_G |f(x, y)|^2 dxdy < \infty \right\}.$$

Este espacio se llama Espacio de Bergman *para* G. *Ahora dotemos a* $L_a^2(G)$ *de la norma* $\|f\|_2 = \left[\int \int_G |f(x, y)|^2 dxdy\right]^{\frac{1}{2}}$.

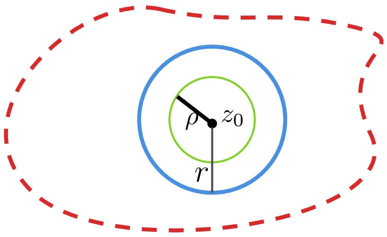
$L_a^2(G) \subset L^2(G, \zeta_G, \mu)$ *donde* ζ_G *es la familia de conjuntos Lebesgue medibles de* G *y* $m(G) =$ *Área de* G.

Mostraremos que $(L_a^2(G), \|\cdot\|_2)$ *es un espacio de Hilbert.*
Para mostrar esta afirmación, requerimos antes los siguientes resultados.

Proposición 1.2.4. Sea f una función analítica en un abierto que contiene a la bola cerrada $\overline{B_r(z_0)}$. Entonces

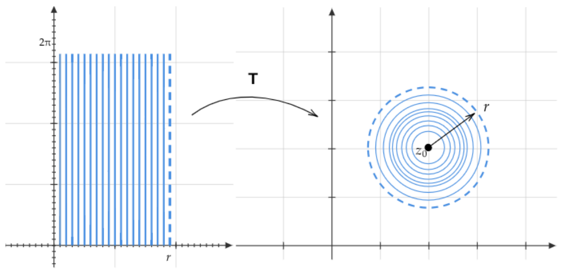
$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r(z_0)} f(x, y) dxdy.$$

Demostración: Dado que f es analítica en una vecindad de $\overline{B_r(z_0)}$, con $z_0 = (x_0, y_0)$, entonces por la propiedad del valor medio tenemos para $0 < \rho \leq r$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

Ahora consideremos la transformación:



$$T : A = (0, r) \times (0, 2\pi) \to D_r(z_0) - \{z_0\}$$

$$\text{tal que } T(\rho, \theta) = z = (x, y)$$

donde $x = x_0 + \rho\cos\theta$, $y = y_0 + \rho\sin\theta$, esto es, $T(\rho, \theta) = z_0 + \rho e^{i\theta}$.

Notemos que T es una biyección y también T es C^1 (como función real). Además, el jacobiano de la transformación está dado por:

$$|\mathbb{J}T(\rho, \theta)| = \left| \det \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \right| = \rho.$$

Así, aplicando el teorema de cambio de variable (coordenadas polares) tendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{B_r(z_0)} f(x, y)dxdy &= \frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{T(A)} f(x, y)dxdy \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{A} f(T(\rho, \theta))|\mathbb{J}T(\rho, \theta)|d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \int_0^{2\pi} \rho\left[f(z_0 + \rho e^{i\theta})\right] d\theta d\rho \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \rho\left[\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta\right] d\rho \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \rho(f(z_0))(2\pi)d\rho \\
&= f(z_0)\frac{2}{r^2}\int_0^r \rho d\rho \\
&= f(z_0)\frac{2\rho^2}{2r^2}\bigg|_0^r = \frac{2f(z_0)r^2}{2r^2} = f(z_0).
\end{aligned}$$

■

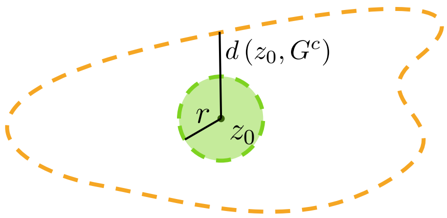
Una consecuencia de esta proposición es la siguiente:

Corolario 1.2.5. Si $f \in L_a^2(G)$, $z_0 \in G$ y $0 < r < d(z_0, G^c)$ entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2.$$

Demostración: Como $0 < r < d(z_0, G^c) \Rightarrow \overline{B_r(z_0)} \subset G$.

Aplicando la Proposición 1.2.4 tenemos que:



$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r(z_0)} f(x,y)dxdy.$$

Así tendremos con ayuda de la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left| \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r(z_0)} f(x,y)dxdy \right| \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r(z_0)} |f(x,y)| \cdot 1dxdy \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \left[\iint\limits_{B_r(z_0)} |f(x,y)|^2 dxdy \right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint\limits_{B_r(z_0)} (1)^2 dxdy \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \left[\iint\limits_{G} |f(x,y)|^2 dxdy \right]^{\frac{1}{2}} r\sqrt{\pi} = \frac{1}{\pi r^2} r\sqrt{\pi}\|f\|_2 = \frac{\|f\|_2}{r\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

■

Con la Proposición 1.2.4 y el Corolario 1.2.5 tenemos lo necesario para probar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.6. El espacio de Bergman $L_a^2(G)$ dotado de la norma $\|\cdot\|_2$ es un espacio de Hilbert.

Demostración:

$L_a^2(G) \subset L^2(G, \zeta_G, m)$ donde ζ_G es la familia de los subconjuntos Lebesgue medibles de G y m es la medida de Lebesgue de G, es decir, $m(G) =$ área de G y sabemos que $L^2(G, \zeta_G, m)$ es completo (Teorema de Riesz-Fisher); así será suficiente probar que $(L_a^2(G), \|\cdot\|_2)$ es cerrado.

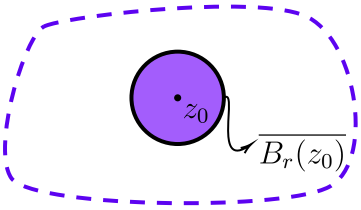
En efecto, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L_a^2(G)$ tal que $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_2$, donde $f \in L^2(G, \zeta_G, m)$.

Debemos probar que $f \in L^2_a(G)$.

Sea $\overline{B_r(z_0)}$ un disco cerrado cualesquiera tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset G$.

Consideremos $z \in \overline{B_r(z_0)}$.

Notemos que $d(z, G^c) \geq d(\overline{B_r(z_0)}, G^c)$ pues



$$d(\overline{B_r(z_0)}, G^c) = \text{ínf}\{d(z,w) | z \in \overline{B_r(z_0)}, w \in G^c\}.$$

Así, tomando ρ tal que $0 < \rho < d(\overline{B_r(z_0)}, G^c)$ tendremos que $0 < \rho < d(z, G^c)$.

De manera que aplicando el Corolario 1.2.5 a la función $f_n - f_m$ obtendremos

$$\left|(f_n - f_m)(z)\right| \leq \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2 \text{ y esto es válido } \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Así $\forall z \in \overline{B_r(z_0)}$

$$\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \leq \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$

$$\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \leq \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2 < \frac{\epsilon}{\rho\sqrt{\pi}} \ \forall z \in \overline{B_r(z_0)}.$$

Esto dice que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en cada disco cerrado $\overline{B_r(z_0)} \subset G$.

Por lo tanto, existe una función analítica en G, la cual llamaremos g tal que $f_n \to g$ cuando $n \to \infty$ uniformemente, en cada disco cerrado de G.

Como $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_2$ existe una subsución $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_k} \to f$ puntualmente cuando $k \to \infty$ casi en todas partes de G, esto es, existe $E \subset G$ tal que $m(E) = 0$ de modo que $f_{n_k}(z) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$ para todo $z \in G - E$.

Esto implica que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in G - E$ donde $m(E) = 0$, es decir, $f = g$ (salvo en un conjunto de medida cero).

Por lo tanto f es analítica en G y así $f \in L^2_a(G)$.

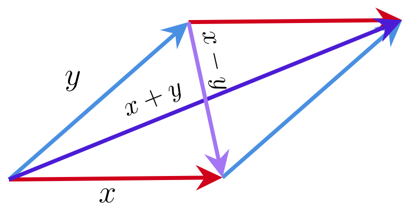
$\blacksquare$

1.3. Ley del Paralelogramo.

Hemos visto que gracias a un producto interior podemos inducir una norma, sin embargo, ¿cuándo podemos asegurar que una norma está inducida por un producto interior?

En esta sección daremos una respuesta a esta pregunta y, para hacerlo, notemos que si $\langle \, , \, \rangle$ es un producto interior en X y $\| \cdot \|$ es la norma inducida por el producto interior, entonces para cada $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle \, x+y, x+y \, \rangle + \langle \, x-y, x-y \, \rangle \\ &= \langle \, x,x \, \rangle + \langle \, x,y \, \rangle + \langle \, y,x \, \rangle + \langle \, y,y \, \rangle + \langle \, x,x \, \rangle - \langle \, x,y \, \rangle - \langle \, y,x \, \rangle + \langle \, y,y \, \rangle \\ &= 2\langle \, x,x \, \rangle + 2\langle \, y,y \, \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \end{aligned}$$



Ley del Paralelogramo

Lo anterior se conoce como la *Ley del Paralelogramo*. Es decir, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales.

Lo interesante de esto es que el recíproco de la afirmación anterior también es válido.

Teorema 1.3.1. Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado. Entonces X es pre-Hilbert (es decir, la norma está inducida por un producto interior) si y solo si se cumple la ley del paralelogramo, es decir, para todo $x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right].$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Ya fue probado.

($\Leftarrow$) **Caso 1:** $K = \mathbb{R}$.

Definamos para todo $x, y \in X$

$$\langle \, x,y \, \rangle := \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].$$

Probaremos que $\langle \, , \, \rangle$ es un producto interior:

1. $\langle\, x, x \,\rangle \geq 0$. Esto es claro porque

$$\begin{aligned}\langle\, x, x \,\rangle &= \frac{1}{2}[\|2x\|^2 - 2\|x\|^2] \\ &= \|x\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

2. $\langle\, x, x \,\rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

$$\begin{aligned}\langle\, x, x \,\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\|x + x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\|2x\|^2 - 2\|x\|^2] = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}[4\|x\|^2 - 2\|x\|^2] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[2\|x\|^2] = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.\end{aligned}$$

3. $\langle\, x, y \,\rangle = \langle\, y, x \,\rangle$.
   $\langle\, x, y \,\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \frac{1}{2}[\|y + x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2] = \langle\, y, x \,\rangle$.

4. $\langle\, x, y + z \,\rangle = \langle\, x, y \,\rangle + \langle\, x, z \,\rangle$ $\forall x, y, z \in X$. Por hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned}\|(x + z) + (x + y)\|^2 + \|(x + z) - (x + y)\|^2 = 2[\|x + z\|^2 + \|x + y\|^2], \text{es decir,} \\ \|2x + y + z\|^2 + \|z - y\|^2 = 2[\|x + z\|^2 + \|x + y\|^2] \qquad (1.3)\end{aligned}$$

   y también

$$\begin{aligned}\|(x + y + z) + x\|^2 + \|(x + y + z) - x\|^2 = 2[\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2], \text{es decir,} \\ \|2x + y + z\|^2 + \|y + z\|^2 = 2[\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2] \qquad (1.4)\end{aligned}$$

   De (1.3) y (1.4) tenemos que

$$\begin{aligned}&2[\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2] = \|2x + y + z\|^2 + \|y + z\|^2 \\ &= 2[\|x + z\|^2 + \|x + y\|^2] - \|z - y\|^2 + \|y + z\|^2, \text{ entonces} \\ &\|x + y + z\|^2 = \|x + z\|^2 + \|x + y\|^2 - \frac{1}{2}\|z - y\|^2 + \frac{1}{2}\|y + z\|^2 - \|x\|^2. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Por consiguiente haciendo uso de la ecuación (1.5) y la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned}
\langle\, x, y+z \,\rangle &= \frac{1}{2}[\|x+y+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y+z\|^2] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|x+z\|^2 + \|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|z-y\|^2 + \frac{1}{2}\|y+z\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|y+z\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|x+z\|^2 + \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 - \frac{1}{2}(\|z+y\|^2 + \|z-y\|^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|x+z\|^2 + \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 - \frac{1}{2}(2(\|z\|^2 + \|y\|^2))\right] \\
&= \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] + \frac{1}{2}[\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2] \\
&= \langle\, x, y \,\rangle + \langle\, x, z \,\rangle.
\end{aligned}$$

Por último, falta mostrar que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que $\langle\, x, \lambda y \,\rangle = \lambda \langle\, x, y \,\rangle$.

Supongamos que $\lambda = m,\ m \in \mathbb{N}$. Por el inciso 4 y usando inducción llegamos a que:

$$\langle\, x, my \,\rangle = m \langle\, x, y \,\rangle.$$

Ahora, haciendo uso de la *Ley del Paralelogramo*:

$$\begin{aligned}
\langle\, x, -y \,\rangle &= \frac{1}{2}\left[\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[-\|x+y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] \\
&= (-1)\frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = -\langle\, x, y \,\rangle.
\end{aligned}$$

Así, consideremos $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m < 0$, entonces

$$\langle\, x, my \,\rangle = \langle\, x, -(-my) \,\rangle = -\langle\, x, (-m)y \,\rangle = (-1)(-m)\langle\, x, y \,\rangle = m\langle\, x, y \,\rangle.$$

Claramente también $\langle\, x, 0 \,\rangle = 0 = 0\langle\, x, y \,\rangle$.
De forma que tenemos para cada $m \in \mathbb{Z}$, $\langle\, x, my \,\rangle = m\langle\, x, y \,\rangle$.
Enseguida, notemos que si $\lambda = \frac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$ entonces

$$q\left\langle\, x, \frac{1}{q}y \,\right\rangle = \left\langle\, x, q\left(\frac{1}{q}\right)y \,\right\rangle = \langle\, x, y \,\rangle; \text{ despejando llegamos a } \left\langle\, x, \frac{1}{q}y \,\right\rangle = \frac{1}{q}\langle\, x, y \,\rangle.$$

Si ahora, $\lambda = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left\langle\, x, \frac{p}{q}y \,\right\rangle = \left\langle\, x, p\left(\frac{1}{q}\right)y \,\right\rangle = p\left\langle\, x, \frac{1}{q}y \,\right\rangle = \frac{p}{q}\langle\, x, y \,\rangle.$$

Finalmente, supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos encontrar una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ si $n \to \infty$.

Dado que la norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función tal que $y \longmapsto \langle\, x, y \,\rangle$ es continua.

Por tanto,

$$\langle\, x, \lambda y \,\rangle = \langle\, x, \lim_{n\to\infty} \lambda_n y \,\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle\, x, \lambda_n y \,\rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \langle\, x, y \,\rangle = \lambda \langle\, x, y \,\rangle.$$

Así, $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interior en X y $\langle\, x, x \,\rangle = \frac{1}{2}\left[4\|x\|^2 - 2\|x\|^2\right] = \|x\|^2$, es decir, induce la norma en X.

Caso 2. $K = \mathbb{C}$.

Notando que cuando la norma está inducida por un producto interior se tiene,

$$Re\langle\, x, y \,\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]$$

$$\text{y } Im\langle\, x, y \,\rangle = Re(-i\langle\, x, y \,\rangle) = Re\langle\, x, iy \,\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right],$$

estamos obligados a definir

$$\langle\, x, y \,\rangle := \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] + \frac{i}{2}\left[\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].$$

Se puede demostrar (como en el caso $K = \mathbb{R}$) que esto define un producto interior en $X \times X$ y

$$\langle\, x, x \,\rangle = \frac{1}{2}\left[4\|x\|^2 - 2\|x\|^2\right] + \frac{i}{2}\left[2\|x\|^2 - 2\|x\|^2\right] = \|x\|^2.$$

Es decir, $\langle\ ,\ \rangle$ induce la norma en X. ■

Ahora, analizaremos diferentes espacios y comprobaremos si su respectiva norma está inducida por un producto interior, así veremos si es pre-Hilbert o no.

Ejemplo 1.3.2.

(1) $(l^p, \|\cdot\|_p), 1 \leq p < \infty$
Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión* $e_n = \left(e_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ *tal que* $e_n^{(j)} = \delta_{nj}$.
Si $m \neq n$

$$\|e_n - e_m\|_p^2 + \|e_n + e_m\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$$

mientras que,

$$2\left[\|e_n\|_p^2 + \|e_m\|_p^2\right] = 2[1+1] = 4.$$

Pero $2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{p}} = 2 \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{p}-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{p} - 1 = 0 \Leftrightarrow p = 2.$

Así, $(l^p, \|\cdot\|_p)$, **NO** *es pre-Hilbert* $\forall 1 \leq p < \infty, p \neq 2.$

(2) $X = \mathbb{R}^n$ *dotado de la norma*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \text{ donde } x = (x_1, ..., x_n)$$

¿Es $(X, \|\cdot\|_\infty)$ *pre-Hilbert?*

Sea $(e_k)_{k=1}^n$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $j \neq k; j, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

$$\|e_j - e_k\|_\infty^2 + \|e_j - e_k\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2 \text{ mientras que } 2[\|e_j\|_\infty^2 + \|e_k\|_\infty^2] = 2 \cdot 2 = 4$$

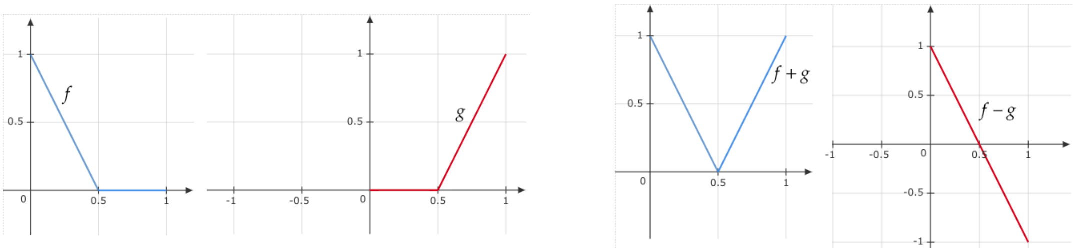
$$\text{y así } \|e_j + e_k\|_\infty^2 + \|e_j - e_k\|_\infty^2 \neq 2[\|e_j\|_\infty^2 + \|e_k\|_\infty^2]$$

es decir, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ **NO** *es pre-Hilbert.*

(3) $X = C([0,1], \mathbb{R})$ *dotado de la norma* $\|\cdot\|_\infty$, *es decir,* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

¿Es $(X, \|\cdot\|_\infty)$ *pre-Hilbert?*

Consideremos las gráficas de las siguientes funciones $f, g \in X$ *así como* $f - g$ *y* $f + g$.



$$2[\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2] = 2 \cdot 2 = 4 \text{ y } \|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2$$

Así, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ **NO** *es pre-Hilbert.*

1.4. Ortogonalización

En esta sección se dará un análisis de la ortogonalidad, se hará la introducción a los conjuntos ortonormales, se definirán los coeficientes de Fourier y se probará la desigualdad de Bessel. Estas definiciones y resultados nos permitirán más adelante hablar de bases ortonormales.

Definición 1.4.1. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio pre-Hilbert y $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interior que induce la norma.

(i) Diremos que dos elementos $x, y \in H$ son *ortogonales* si $\langle\, x, y\, \rangle = 0$.

(ii) Sea $A \subset H$, $A \neq \emptyset$. Diremos que A es *ortogonal* si dado $x, y \in A$ tal que $x \neq y$ se tiene que $\langle\, x, y\, \rangle = 0$.

(iii) Si $A \subset H$ es ortogonal y $\|x\| = 1$ para todo $x \in A$, diremos que A es *ortonormal*.

(iv) Si $A, B \subset H, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ y $\langle\, x, y\, \rangle = 0$ para cada $x \in A$ y para cada $y \in B$ diremos que A *es ortogonal a* B.

Teorema 1.4.2. Si $\{x_1, ..., x_n\}$ es un conjunto ortogonal de un espacio pre-Hilbert entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \qquad \text{(Pitágoras).}$$

Demostración:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle\, x_j, x_k\, \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle\, x_j, x_j\, \rangle = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

■

Con el teorema anterior establecimos una relación mediante la norma entre $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ y $\sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$ en el conjunto ortogonal, lo que nos lleva a la pregunta de si la convergencia de una serie implica la convergencia de la otra. Con el siguiente resultado veremos que efectivamente ambas implicaciones se cumplen.

Teorema 1.4.3. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortogonal en H. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge en } H \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 \text{ converge en } \mathbb{R} \text{ (es decir,} \|x_n\|_{n=1}^{\infty} \in l^2).$$

Además: Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$ entonces $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$.

Demostración: Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$. Haciendo uso del Teorema 1.4.2 vemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2 = \left| \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \right|.$$

Escribiendo $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \in H, \tilde{S_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \in \mathbb{R}$ tenemos $\forall m > n$

$$\|S_m - S_n\|^2 = |\tilde{S_m} - \tilde{S_n}|.$$

Por tanto, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en H si y solo si $(\tilde{S_n})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y como H y $\mathbb{R}$ son completos entonces $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en H si y solo si $(\tilde{S_n})_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{R}$. Finalmente sea $x \in H$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$ y sea $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, como antes, es decir, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Por hipótesis, $S_n \to x$ si $n \to \infty$ lo cual implica $\|S_n\| \to \|x\|$ si $n \to \infty$ por lo que $\|S_n\|^2 \to \|x\|^2$ si $n \to \infty$.

Así,

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

■

Teorema 1.4.4. Sea $(H, \|\cdot\|)$ pre-Hilbert y $A \subset H$ un subconjunto ortogonal de H tal que $0 \notin A$. Entonces A es linealmente independiente.

Demostración: Sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ cualquier subconjunto finito de A y sean $\alpha_1, ...\alpha_n \in K$ tal que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

Ahora, sea $j \in \{1, ..., n\}$, j fijo. Haciendo uso de la ortogonalidad de A tenemos que

$$0 = \langle\, 0, x_j \,\rangle = \left\langle\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x_j \,\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle\, x_k, x_j \,\rangle = \alpha_j \langle\, x_j, x_j \,\rangle = \alpha_j \|x_j\|^2.$$

Como $0 \notin A \Rightarrow \|x_j\|^2 > 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ y esto es válido para todo $j = 1, ..., n$. Por lo tanto, $\{x_1, ..., x_n\}$ es linealmente independiente. ■

Ahora, supongamos que $\dim H < \infty$, digamos n. Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tal que $0 \notin A$ y A es ortogonal.

Por tanto, A es base de Hamel de H. Luego, dado $x \in H$ existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j. \tag{1.6}$$

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$

$$\langle\, x, x_j \,\rangle = \left\langle\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x_j \,\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle\, x_k, x_j \,\rangle = \alpha_j \langle\, x_j, x_j \,\rangle = \alpha_j \|x_j\|^2$$

entonces

$$\alpha_j = \frac{\langle\, x, x_j \,\rangle}{\|x_j\|^2} = \left\langle\, x, \frac{x_j}{\|x_j\|} \,\right\rangle \frac{1}{\|x_j\|}. \tag{1.7}$$

Sustituyendo (1.7) en (1.6)

$$x = \sum_{j=1}^{n} \left\langle\, x, \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\rangle \frac{x_j}{\|x_j\|}.$$

Llamando $u_j = \frac{x_j}{\|x_j\|}$ para $j = 1, 2, ..., n$ obtenemos

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle\, x, u_j \,\rangle u_j \tag{1.8}$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ es *ortonormal.*

Veremos que "*hasta cierto punto*" la representación (1.8) se cumple en espacios de Hilbert.

Definición 1.4.5. Sean $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, $A \subset H$ un subconjunto *ortonormal* de H y sea $x \in H$. Para $z \in A$, al escalar $\langle\, x, z \,\rangle$ le llamamos *coeficiente de Fourier de x respecto a z.*

Los coeficientes de Fourier, resultarán cruciales para responder la pregunta: ¿qué tan cerca podemos aproximar un elemento $x \in H$ en la métrica de H mediante una combinación lineal de un subconjunto ortonormal dado de H? Esta pregunta se responde con el siguiente resultado.

Teorema 1.4.6. Sean $(H, \|\cdot\|)$ pre-Hilbert, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un subconjunto ortonormal finito de H y sea $x \in H$. Entonces, la función $f : K^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\|$ alcanza su valor mínimo absoluto en uno y solo un punto de K^n, a saber, cuando $\alpha_j = \langle\, x, e_j \,\rangle\ \forall j = 1, ..., n$. Además $\sum_{j=1}^{n} |\langle\, x, e_j \,\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(f(\alpha_1,...,\alpha_n))^2 &= \Big\|x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\Big\|^2 = \Big\langle\, x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j, x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k \,\Big\rangle \\
&= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\langle\, x,e_k\,\rangle-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overline{\langle\, x,e_j\,\rangle}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\overline{\alpha_k}\langle\, e_j,e_k\,\rangle \\
&= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}[\overline{\alpha_k}\langle\, x,e_k\,\rangle+\alpha_k\overline{\langle\, x,e_k\,\rangle}-|\alpha_k|^2] \\
&= \|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}[|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2-\overline{\alpha_k}\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k\overline{\langle\, x,e_k\,\rangle}+|\alpha_k|^2]-\sum_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$\sum_{k=1}^{n}[|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2-\overline{\alpha_k}\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k\overline{\langle\, x,e_k\,\rangle}+|\alpha_k|^2]=\sum_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k|^2.$$

Esto se tiene, pues,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n}(\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k)\overline{(\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2-\overline{\alpha_k}\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k\overline{\langle\, x,e_k\,\rangle}+|\alpha_k|^2\}
\end{aligned}
$$

y por tanto la expresión (1.9) es igual a

$$\|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2.$$

Así, $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ será mínimo si y solo si $\sum\limits_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle-\alpha_k|^2=0,$ esto es, si y solo si $\alpha_k=\langle\, x,e_k\,\rangle$ para todo $k=1,...,n$.

En tal caso, $0\leq\|x\|^2-\sum\limits_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2$ lo que implica que $\sum\limits_{k=1}^{n}|\langle\, x,e_k\,\rangle|^2\leq\|x\|^2$.

Que es precisamente a lo que buscábamos llegar. ■

Definición 1.4.7. Sea $(\lambda_i)_{i\in I}$ una colección de escalares. Definimos

$$\sum_{i\in I}|\lambda_i|=\begin{cases}0 & si\ I=\emptyset \\ \\ \sup\Big\{\sum\limits_{i\in F}|\lambda_i|: F\subset I, F\ finito\Big\}\end{cases}.$$

Teorema 1.4.8 (Desigualdad de Bessel)**.** Sea $(H, \|\cdot\|)$ pre-Hilbert, $(e_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal de H y sea $x \in H$. Entonces

$$\sum_{i\in I} |\langle\, x, e_i \,\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración: Sea $F \subset I$ cualquier subconjunto finito, entonces por el Teorema 1.4.6 tenemos

$$\sum_{i\in F} |\langle\, x, e_i \,\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

por lo que $\sum\limits_{i\in I} |\langle\, x, e_i \,\rangle|^2 = \sup\left\{\sum\limits_{i\in F} |\langle\, x, e_i \,\rangle|^2 : F \subset I, F \text{ finito}\right\} \leq \|x\|^2.$ ■

La desigualdad de Bessel es un resultado importante en el análisis de espacios de Hilbert. Con esta herramienta será posible más adelante el identificar bases ortonormales para espacios de Hilbert.

Teorema 1.4.9. Sea $(H, \|\cdot\|)$ pre-Hilbert, $(e_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal de H y sea $x \in H - \{0\}$. Entonces:

1. Si $J_x := \{i \in I \big| \langle\, x, e_i \,\rangle \neq 0\}$ entonces J_x es a lo sumo numerable.

2. Si J_x es infinito y $\pi : \mathbb{N} \to J_x$ es una enumeración de J_x (es decir, π es biyectiva), entonces $\sum\limits_{i\in I} |\langle\, x, e_i \,\rangle|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle|^2$.

Demostración:

1. Notemos que

$$J_x = \{i \in I \big| |\langle\, x, e_i \,\rangle| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{i \in I \middle| |\langle\, x, e_i \,\rangle| > \frac{1}{n}\right\}.$$

Ahora, definiendo

$$J_x^n = \left\{i \in I \middle| |\langle\, x, e_i \,\rangle| > \frac{1}{n}\right\} \text{ tenemos } J_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_x^n.$$

Bastará demostrar que cada J_x^n es a lo sumo numerable.

En efecto, sea $F \subset J_x^n$ cualquier subconjunto finito de J_x^n, digamos que la cardinalidad de F, $|F| = m$ con $m \in \mathbb{N}$. Así $\sum\limits_{i\in F} |\langle\, x, e_i \,\rangle|^2 > \frac{1}{n^2}(m) = \frac{m}{n^2}$.

Usando la desigualdad de Bessel tendremos

$$\frac{m}{n^2} < \sum_{i \in F} |\langle\ x, e_i\ \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |F| = m < \|x\|^2 n^2 \text{ siendo } \|x\|^2 n^2 \text{ fijo.}$$

Así, *cualquier* subconjunto finito de J_x^n tiene una cardinalidad acotada por $\|x\|^2 n^2$, entonces J_x^n debe ser finito y por lo tanto J_x es a lo sumo numerable.

2. Por la desigualdad de Bessel

$$\sum_{i \in I} |\langle\ x, e_i\ \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

y por la parte 1, la suma de la izquierda tiene solamente una cantidad a lo sumo numerable de términos distintos de 0.

Así, $\sum\limits_{i \in I} |\langle\ x, e_i\ \rangle|^2$ es una serie absolutamente convergente y sabemos que toda serie absolutamente convergente tiene la propiedad de que cualquier reordenamiento de ésta converge y lo hace al mismo límite.

Por tanto, $\sum\limits_{i \in I} |\langle\ x, e_i\ \rangle|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle\ x, e_{\pi(i)}\ \rangle|^2$ para cada $\pi : \mathbb{N} \to J_x$ biyección.

■

Ahora consideremos la serie de la forma $\sum\limits_{n} a_n e_n$ donde $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal. Haciendo uso del teorema de Pitágoras y la desigualdad de Bessel, podemos hacer notar ciertas características que estas series cumplen.

Proposición 1.4.10. Sea $(H, \|\cdot\|)$ pre-Hilbert, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en H y $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}}$. Entonces

(i) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge en H tenemos que $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

(ii) Si H es de Hilbert entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge si y solo si $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

Demostración:

(i) Notemos que el conjunto $\{a_n e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es *ortogonal*, esto es, si $n \neq m$ $\langle\ a_n e_n, a_m e_m\ \rangle = a_n \overline{a_m} \langle\ e_n, e_m\ \rangle = 0$.

Sea $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$.

Como $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, en tal caso existe $M > 0$ tal que $\|S_n\| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ lo que implica $\|S_n\|^2 \leq M^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Pitágoras, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \|a_k e_k\|^2 = \|S_n\|^2 \leq M^2 \text{ esto es } \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq M^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq M^2.$$

Es decir, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

(ii) Supongamos que H es un espacio de Hilbert.
Entonces $\{a_n e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal.
Por tanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge en H si y solo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ converge en $\mathbb{R}$ si y solo si $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

■

Observación 1.4.11. Sea H de Hilbert, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en H. Entonces, para cada $x \in H$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge en H.

Demostración: Por la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \text{ lo cual implica que } (\langle x, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \in l^2,$$

y aplicando (ii) de la Proposición 1.4.10 obtenemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge en H. ■

1.5. Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

En esta sección nos enfocaremos en desarrollar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt; este proceso nos permite tomar un conjunto, por conveniencia, linealmente independiente y volverlo ortonormal. Esto con el propósito de utilizarlo para generar bases ortonormales a lo sumo numerables para espacios de Hilbert.

Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio pre-Hilbert y $\{y_1, y_2, ...\}$ una colección a lo sumo numerable de elementos linealmente independientes de H. Entonces existe una colección a lo sumo numerable y ortonormal $\{u_1, u_2, ...\}$ de elementos de H tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\text{span}\{u_1, u_2, ..., u_n\} = \text{span}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Demostración: Construiremos inductivamente el conjunto deseado. Sea $z_1 := y_1$ y $u_1 := \frac{z_1}{\|z_1\|}$ $(z_1 \neq 0)$. Notemos que

$$\langle\, y_2 - au_1, u_1 \,\rangle = 0 \text{ implica } \langle\, y_2, u_1 \,\rangle = a\langle\, u_1, u_1 \,\rangle = a.$$

Sea $z_2 = y_2 - \langle\, y_2, u_1 \,\rangle u_1, z_2 \neq 0$ (pues y_2 no es múltiplo de y_1).

Sea $u_2 := \frac{z_2}{\|z_2\|}$, $\|u_2\| = 1$. Además, notemos que $\langle\, u_1, u_2 \,\rangle = \frac{1}{\|z_1\|}\langle\, z_2, u_1 \,\rangle = \frac{1}{\|z_1\|}\{\langle\, y_2, u_1 \,\rangle - \langle\, y_2, u_1 \,\rangle\langle\, u_1, u_1 \,\rangle\} = 0$.

Así, $\{u_1, u_2\}$ es ortonormal.

Notemos que $\text{span}\{u_1, u_2\} = \text{span}\{y_1, y_2\}$.

Supongamos que hemos encontrado un conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tal que

$$Y_k = \text{span}\{y_1, y_2, ..., y_k\} = \text{span}\{u_1, u_2, ..., u_k\} = U_k \text{ para } k = 1, 2, ..., n.$$

Si $\{y_1, ..., y_n\} = \{y_1, y_2, ...\}$ ya acabamos. Si no, definamos

$$z_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle\, y_{n+1}, u_k \,\rangle u_k. \tag{1.10}$$

Observemos que $z_{n+1} \neq 0$ porque de no ser así tendríamos $y_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\langle\, y_{n+1}, u_k \,\rangle u_k$ y en tal caso $y_{n+1} \in U_n = Y_n$, es decir, $y_{n+1} \in \text{span}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ lo cual es absurdo pues $\{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\}$ es linealmente independiente.

Definamos

$$u_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{\|z_{n+1}\|}. \tag{1.11}$$

Es claro que $\|u_{n+1}\| = 1$. Notemos que para $j = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
\langle\, u_{n+1}, u_j \,\rangle = \frac{1}{\|z_{n+1}\|}\langle\, z_{n+1}, u_j \,\rangle &= \frac{1}{\|z_{n+1}\|}\langle\, y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle\, y_{n+1}, u_k \,\rangle u_k, u_j \,\rangle \\
&= \frac{1}{\|z_{n+1}\|}\left\{\langle\, y_{n+1}, u_j \,\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle\, y_{n+1}, u_k \,\rangle\langle\, u_k, u_j \,\rangle\right\} \\
&= \frac{1}{\|z_{n+1}\|}\{\langle\, y_{n+1}, u_j \,\rangle - \langle\, y_{n+1}, u_j \,\rangle\} = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ es ortonormal.

Resta demostrar que $U_{n+1} = Y_{n+1}$. De (1.10) y (1.11) vemos que

$$u_{n+1} \in \operatorname{span}\{y_{n+1}, u_1, u_2, ..., u_n\} = \operatorname{span}\{y_{n+1}, y_1, y_2, ..., y_n\} = Y_{n+1}$$

y como $U_n = Y_n \subset Y_{n+1} \Rightarrow U_{n+1} \subset Y_{n+1}$.

Razonando análogamente se sigue que $Y_{n+1} \subset U_{n+1}$ y así terminamos la inducción. ■

Ejemplo 1.5.1.

- *$H = c_{00}$ dotado de $\|\cdot\|_2$, $x, y \in c_{00}, x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$.*

$$\langle\, x, y \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \ \ \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ la siguiente sucesión en c_{00}.
$y_1 = (1, 0, 0, ...), y_2 = (1, 1, 0, ...), y_3 = (1, 1, 1, 0, ...), ..., y_n = (1, 1, ..., 1, 0, ...)$

Es claro que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente en c_{00}.

Realizaremos el procedimiento de Gram-Schmidt a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Consideremos $z_1 = y_1$, $\|z_1\| = 1$, entonces $u_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|} = y_1 = (1, 0, 0, ...)$.
$z_2 = y_2 - \langle\, y_2, u_1 \,\rangle u_1 = y_2 - y_1 = (0, 1, 0, 0, ...)$, por lo que
$u_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = z_2 = (0, 1, 0, 0, ...)$.
$z_3 = y_3 - \langle\, y_3, u_1 \,\rangle u_1 - \langle\, y_3, u_2 \,\rangle u_2 = y_3 - u_1 - u_2 = (0, 0, 1, 0, 0, ...)$ y así
$u_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = z_3 = (0, 0, 1, 0, ...)$.
En general obtendremos que $u_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, con el 1 en el n-ésimo lugar.

En el siguiente capítulo, abordaremos ejemplos de espacios de Hilbert más interesantes, donde podremos aplicar de igual manera el proceso de Gram-Schmidt a subconjuntos linealmente independientes de estos espacios.

1.6. Sistemas Ortonormales Completos

En esta sección finalmente hablaremos de bases ortonormales, estableceremos que todo espacio pre-Hilbert posee una base ortonormal, así como condiciones que permitan identificar que un conjunto ortonormal forma una base para un espacio de Hilbert.

Definición 1.6.1. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio pre-Hilbert y $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interior que induce la norma. Sea $(e_i)_{i\in I}$ una colección ortonormal de elementos en H. Diremos que $(e_i)_{i\in I}$ es un *sistema ortonormal completo* (o familia ortonormal completa o base ortonormal) si para cada $x \in H$ tal que $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ para todo $i \in I$ se tiene que $x = 0$.

Observación 1.6.2.

(1) $(e_i)_{i\in I}$ es un sistema ortonormal completo si y solo si $(e_i)_{i\in I}$ es un conjunto maximal respecto a la ortonormalidad.

Demostración:
($\Rightarrow$) Si $A = \{e_i : i \in I\}$ no fuese maximal respecto a la ortonormalidad entonces existe $B \supsetneq A$ tal que B es ortonormal.

Así, existe $x_0 \in B - A$ con $\|x_0\| = 1$ lo que implica $x_0 \neq 0$.

Sin embargo, para todo $i \in I$ $\langle\, x_0, e_i \,\rangle = 0$ y como $(e_i)_{i\in I} = A$ es un sistema ortonormal completo entonces $x_0 = 0$ lo cual es imposible.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos $A = \{e_i : i \in I\}$ maximal respecto a la ortonormalidad.

Sea $x \in H$ tal que $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ $\forall i \in I$.

Si ocurriese que $x \neq 0$ entonces $x \notin A$ (pues si $x \in A$ entonces $\langle\, x, x \,\rangle = 0$ implica que $x = 0$ lo cual es absurdo). Así $A' = A \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\} \supsetneq A$ y es ortonormal lo cual contradice la maximalidad de A respecto a la ortonormalidad. ■

(2) No confundir los conceptos base ortonormal y base de Hamel.

- **Base ortonormal:** Maximal respecto a la ortonormalidad.
- **Base de Hamel:** Maximal respecto a la independencia lineal.

Ejemplo 1.6.3. *Sea $H = l^2$ dotado del producto interior*

$$\langle\, x, y \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \text{ con } x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Sea $(e_n^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ tal que $e_n^{(j)} = \delta_{nj}, n \in \mathbb{N}$.
$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ no *es base de Hamel de l^2:*

La sucesión $z = \left(\frac{1}{j}\right)_{j=1}^{\infty} \in l^2$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty\right)$ no *es combinación lineal (finita) de* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sin embargo, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sí es base ortonormal (sistema ortonormal completo) de l^2 porque si $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l^2$ satisface $\langle\, x, e_j \,\rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ por lo que $x = 0$.

Observemos que $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ *en* $\| \cdot \|_2$ *(*$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de Schauder de* $l^p, 1 \leq p < \infty$*) por lo que* $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle\, x, e_j \,\rangle e_j$ *en* $\| \cdot \|_2$*, ya que* $x_j = \langle\, x, e_j \,\rangle\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Notemos que la dimensión algebraica de ℓ^2 es infinita. Sin embargo,

Proposición 1.6.4. Sea $(H, \| \cdot \|)$ un espacio pre-Hilbert de dimension algebraica finita. Entonces toda base ortonormal (sistema ortonormal completo) es base de Hamel.

Demostración: Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base ortonormal de H.

Si ocurriese que $n < \dim H$ entonces existe $x \in H, x \neq 0$ tal que $\{e_1, e_2, ..., e_n, x\}$ es linealmente independiente.

Mediante el procedimiento de Gram-Schmidt podemos hallar $\{e_1, e_2, ..., y\}$ un conjunto ortonormal de H; así $y \neq 0$. Pero $\langle\, y, e_k \,\rangle = 0\ \forall k = 1, 2, ..., n$ lo que implica $y = 0$ lo cual es imposible.

Por tanto $\dim H \leq n$ y además $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es linealmente independiente por lo que $\dim H = n$ y así $\{e_1, ..., e_n\}$ es base de Hamel de H. ■

Teorema 1.6.5. Sea $(H, \| \cdot \|)$ un espacio pre-Hilbert, $H \neq \{0\}$ y $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interior que induce $\| \cdot \|$. Entonces H posee una base ortonormal.

Demostración: Usaremos el Lema de Zorn.
Definamos

$$Z = \{A \subset H : A \text{ es ortonormal}\}.$$

Claramente $Z \neq \emptyset$, pues si $x \in H - \{0\}$ entonces $A = \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\} \in Z$. Definamos el siguiente orden parcial en Z.

Dados $A, B \in Z$ diremos que $A \propto B$ si y solo si $A \subseteq B$.

Ahora sea ζ una cadena en Z y definamos

$$\Lambda := \bigcup_{C \in \zeta} C$$

Veamos que Λ es ortonormal.

Sea $x, y \in \Lambda$ entonces existen $C, D \in \zeta$ tal que $x \in C, y \in D$; y como ζ es cadena entonces $C \subseteq D$ ó $D \subseteq C$, digamos sin pérdida de generalidad $C \subseteq D$.

Así, $x, y \in D$ y siendo D ortonormal entonces $\langle\, x, y \,\rangle = 0$ si $x \neq y$ (si $x = y \Rightarrow \langle\, x, x \,\rangle = 1$).

Por lo tanto, Λ es ortonormal y entonces $\Lambda \in Z$.
También notemos que Λ es una cota superior para ζ. Por el Lema de Zorn Z posee un elemento maximal.

Esto es, existe $A \subset H$ tal que A es ortonormal y es maximal respecto a la relación $\subseteq$ y esto nos dice que A es una base ortonormal de H. ■

Teorema 1.6.6. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio pre-Hilbert, $H \neq \{0\}$. Supongamos que H es separable, entonces H posee una base ortonormal a lo sumo numerable.

Demostración: Como H es separable entonces existe un subconjunto de H que es denso y a lo sumo numerable, digamos $\{x_n\}_{n\in A}$, $A \subseteq \mathbb{N}$.

Por el Teorema 1.6.5, existe $(e_i)_{i\in I}$ base ortonormal de H. Para cada $n \in A$ definamos $J_n = \{i \in I : \langle\, x_n, e_i \,\rangle \neq 0\}$. Hemos visto que J_n es a lo sumo numerable.

Defínase $J = \bigcup\limits_{n\in A} J_n$. Como A es a lo sumo numerable J es a lo sumo numerable y $J \subset I$.

Mostraremos que $\{e_i\}_{i\in J}$ es base ortonormal de H. En efecto, sea $x \in H$ tal que $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ para cada $i \in J$. Como $\{x_n\}_{n\in A}$ es denso en H, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \to x$ si $k \to \infty$, por lo tanto

$$\langle\, x_{n_k}, e_i \,\rangle \to \langle\, x, e_i \,\rangle \text{ cuando } k \to \infty \text{ para cada } i \in I.$$

En particular para toda $i \in J$ $\langle\, x_{n_k}, e_i \,\rangle \to \langle\, x, e_i \,\rangle$ cuando $k \to \infty$. Esto implica que si $\langle\, x_{n_k}, e_i \,\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces, $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ para cada $i \in I - J$, pero por hipótesis $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ para cada $i \in J$ y en consecuencia, $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ para toda $i \in I$ y puesto que $\{e_i\}_{i\in I}$ es base ortonormal de H tendremos que $x = 0$.

Así si $x \in H$ es tal que $\langle\, x, e_i \,\rangle = 0$ para cualquier $i \in J$, entonces $x = 0$.

Por lo tanto, $\{e_i\}_{i\in J}$ es base ortonormal de H a lo sumo numerable. ■

Observación 1.6.7. Como muestra la prueba del Teorema 1.6.6, $\{e_i\}_{i\in J}$ y $\{e_i\}_{i\in I}$ son bases ortonormales de H donde $J \subset I$ y como ambos conjuntos son maximales respecto a la ortonormalidad, entonces $J = I$.
Así hemos probado que:

"Toda base ortonormal de un espacio pre-Hilbert $H \neq \{0\}$ separable es a lo sumo numerable."

En general, no es difícil demostrar que

"Dos bases ortonormales cualesquiera de un espacio pre-Hilbert poseen la misma cardinalidad."

Esto permite definir la *dimensión de un espacio de Hilbert* como la cardinalidad de cualquier base ortonormal de H.

Teorema 1.6.8. Sea $(H, \|\cdot\|)$ espacio de Hilbert, $H \neq \{0\}$, $(e_i)_{i\in I}$ base ortonormal de H y sea $x \in H$. Supongamos que $J_x = \{i \in I : \langle\, x, e_i \,\rangle \neq 0\}$ es infinito numerable. Si $\pi : \mathbb{N} \to J_x$ es cualquier enumeración de J_x entonces la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}$ converge a x.

Demostración: Notemos que en virtud de la Desigualdad de Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle\right|^2 \leq \|x\|^2 \text{ implica } \left(\langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$$

y como H es de Hilbert entonces la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle\, x, e_{\pi_{(i)}} \,\rangle e_{\pi_{(i)}}$ converge en H, digamos que existe $x_\pi \in H$ tal que $x_\pi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}$.
Ahora mostraremos que $\langle\, x_\pi, e_i \,\rangle = \langle\, x, e_i \,\rangle \ \forall i \in I$.
Hagámoslo primero para $j \in J_x$.
Sabemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)} \to x_\pi$ cuando $n \to \infty$.

Si $j \in J_x$ entonces por la continuidad de $\langle\ ,\ \rangle$ en cada componente

$$\left\langle\ \sum_{i=1}^{n} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}, e_j \right\rangle \longrightarrow \langle\, x_\pi, e_j \,\rangle \text{ cuando } n \to \infty.$$

Supongamos que $e_j = e_{\pi(k)}$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
Si $n \geq k$ entonces

$$\left\langle\ \sum_{i=1}^{n} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}, e_{\pi(k)} \right\rangle \longrightarrow \langle\, x_\pi, e_{\pi(k)} \,\rangle.$$

Pero $\left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}, e_{\pi(k)} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle \langle\, e_{\pi(i)}, e_{\pi(k)} \,\rangle = \langle\, x, e_{\pi(k)} \,\rangle$ y por tanto $\langle\, x, e_{\pi(k)} \,\rangle = \langle\, x_\pi, e_{\pi(k)} \,\rangle$ es decir:

$$\langle\, x, e_j \,\rangle = \langle\, x_\pi, e_j \,\rangle \;\forall j \in J_x.$$

Supongamos ahora que $j \notin J_x$.

$$\begin{aligned}\langle\, x_\pi, e_j \,\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}, e_j \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)}, e_j \right\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle \langle\, e_{\pi(i)}, e_j \,\rangle = 0,\end{aligned}$$

mientras que $\langle\, x, e_j \,\rangle = 0$ pues $j \notin J_x$
Es decir, $\langle\, x_\pi, e_j \,\rangle = \langle\, x, e_j \,\rangle \;\forall j \notin J_x$.

Resumiendo, hemos probado que si $\langle\, x_\pi, e_i \,\rangle = \langle\, x, e_i \,\rangle \;\forall i \in I$ entonces, $\langle\, x_\pi - x, e_i \,\rangle = 0 \;\forall i \in I$ y como $(e_i)_{i\in I}$ es base ortonormal tendremos que $x_\pi - x = 0$ ó $x_\pi = x$. ■

Observación 1.6.9. Si en el teorema 1.6.8 J_x es finito, entonces $x = \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_j \,\rangle e_j$.

Demostración: En efecto, sea $j \in J_x$
$\left\langle x - \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle\, x, e_j \,\rangle - \langle\, x, e_j \,\rangle = 0.$

Ahora, si $j \notin J_x$
$\left\langle x - \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle\, x, e_j \,\rangle - \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle \langle\, e_i, e_j \,\rangle = 0 - 0 = 0.$

Por tanto $\left\langle x - \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i, e_j \right\rangle = 0 \;\forall j \in I$ y como $(e_i)_{i\in I}$ es base ortonormal se tiene en consecuencia que, $x - \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i = 0$ o $x = \sum_{j\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i$. ■

Todo lo realizado previamente nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 1.6.10. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, $H \neq \{0\}, (e_i)_{i\in I}$ una base ortonormal de $H, x \in H$ y $J_x = \{i \in I \big| \langle\, x, e_i \,\rangle \neq 0\}$. Definimos:

$$\sum_{i\in I} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i = \begin{cases} 0 & si \qquad J_x = \emptyset, \\ \sum\limits_{i\in J_x} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i & si \qquad J_x \neq \emptyset \text{ y finito}, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle\, x, e_{\pi(i)} \,\rangle e_{\pi(i)} & si \qquad J_x \text{ es infinito (numerable) y} \\ & \qquad \pi : \mathbb{N} \to J_x \text{ es } \textit{cualquier} \text{ función biyectiva.} \end{cases}$$

Observación 1.6.11. Sea $(H, \|\cdot\|)$ pre-Hilbert, $S \subset H$ es un subconjunto denso de H. Si $x \in H$ satisface $x \perp S$ entonces $x = 0$.

Demostración: En efecto, como S es denso en H existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ de manera que se tendrá que $\langle\, x, x_n \,\rangle = 0$.

Así haciendo uso de la desigualdad de Schwarz tendremos
$\langle\, x, x \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle - \langle\, x, x_n \,\rangle = \langle\, x, x - x_n \,\rangle$ entonces, $\|x\|^2 = \langle\, x, x - x_n \,\rangle = |\langle\, x, x - x_n \,\rangle|$ $\leq \|x\|\|x - x_n\| \to \|x\| \cdot 0 = 0$ cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto $\|x\|^2 = 0$ implica $x = 0$. ■

Teorema 1.6.12. Sea $(H, \|\cdot\|)$ espacio de Hilbert, $E \subset H$ tal que E es ortonormal. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) E es base ortonormal de H.

(ii) ***(Serie de Fourier)*** Para todo $x \in H$ se tiene que $x = \sum\limits_{z\in E} \langle\, x, z \,\rangle z$.

(iii) ***(Identidad de Parseval)*** *Para todo* $x \in H, \|x\|^2 = \sum\limits_{z\in E} |\langle\, x, z \,\rangle|^2$.

(iv) ***(Identidad de Parseval)*** *Para cada* $x, y \in H, \langle\, x, y \,\rangle = \sum\limits_{z\in E} \langle\, x, z \,\rangle \overline{\langle\, y, z \,\rangle}$.

(v) $\overline{span\{E\}} = H$.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sabemos que $J_x = \{z \in E : \langle\, x, z \,\rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable, vimos que si $\pi : \mathbb{N} \to J_x$ es biyectiva, entonces $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle\, x, z_{\pi(i)} \,\rangle z_{\pi(i)}$ y de hecho

$$\sum_{z \in E} \langle\, x, z \,\rangle z = \sum_{i=1}^{\infty} \langle\, x, z_{\pi(i)} \,\rangle z_{\pi(i)} = x.$$

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Sean $J_x = \{z \in E : \langle\, x, z \,\rangle \neq 0\}$, $J_y = \{z \in E : \langle\, y, z \,\rangle \neq 0\}$.

Como J_x, J_y son a lo sumo numerables entonces $J_x \cup J_y$ es a lo sumo numerable. Sea $\{z_n\}_n$ una enumeración de $J_x \cup J_y$.
Así $x = \sum\limits_{n} \langle\, x, z_n \,\rangle z_n, y = \sum\limits_{n} \langle\, y, z_n \,\rangle z_n$.

Llamaremos, $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle\, x, z_k \,\rangle z_k,\ y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle\, y, z_k \,\rangle z_k$.
Por hipótesis $x_n \to x$ y $y_n \to y$ si $n \to \infty$. Por consiguiente, tendremos

$$\begin{aligned}
&\left| \langle\, x, y \,\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle\, x, z_k \,\rangle \overline{\langle\, y, z_k \,\rangle} \right| = \left| \langle\, x, y \,\rangle - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle\, x, z_k \,\rangle \overline{\langle\, y, z_j \,\rangle} \langle\, z_k, z_j \,\rangle \right| \\
&= \left| \langle\, x, y \,\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle\, x, z_k \,\rangle z_k, \sum_{j=1}^{n} \langle\, y, z_j \,\rangle z_j \right\rangle \right| = \left| \langle\, x, y \,\rangle - \langle\, x_n, y_n \,\rangle \right| \\
&\leq |\langle\, x, y \,\rangle - \langle\, x, y_n \,\rangle| + |\langle\, x, y_n \,\rangle - \langle\, x_n, y_n \,\rangle| = |\langle\, x, y - y_n \,\rangle| + |\langle\, x - x_n, y_n \,\rangle| \\
&\leq \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle\, x, y \,\rangle = \sum_{n} \langle\, x, z_n \,\rangle \overline{\langle\, y, z_n \,\rangle} = \sum_{z \in E} \langle\, x, z \,\rangle \overline{\langle\, y, z \,\rangle}.$$

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Tomemos $y = x$ en (iv), entonces

$$\|x\|^2 = \langle\, x, x \,\rangle = \sum_{z \in E} \langle\, x, z \,\rangle \overline{\langle\, x, z \,\rangle} = \sum_{z \in E} |\langle\, x, z \,\rangle|^2.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $x \in H$ tal que $\langle\, z, x \,\rangle = 0$ para cada $z \in E$, por hipótesis $\|x\|^2 = \sum\limits_{z \in E} |\langle\, x, z \,\rangle|^2 = 0$ lo que implica $x = 0$.
Por tanto, E es base ortonormal de H.

Hemos mostrado $(i) \iff (ii) \iff (iii) \iff (iv)$, así solo queda probar $(ii) \Rightarrow (v)$ y $(v) \Rightarrow (i)$ para completar todas las equivalencias que necesitamos.

$(ii) \Rightarrow (v)$ Sabemos que $J_x = \{z \in E : \langle\ x, z\ \rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable y sea $\{z_n\}_n$ una enumeración de J_x. Por hipótesis $x = \sum\limits_n \langle\ x, z_n\ \rangle z_n$.

Sea $x \in H$ fijo y sea $\epsilon > 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \langle\ x, z_k\ \rangle z_k - x \right\| < \epsilon.$$

Así, $\sum\limits_{k=1}^{N} \langle\ x, z_k\ \rangle z_k \in B_\epsilon(x) \cap \text{span } E$.
Lo cual implica que $x \in \overline{\text{span } E}$ y en tal caso span E es denso en H.

Por tanto, $\overline{\text{span } E} = H$.

$(v) \Rightarrow (i)$ Sea $x \in H$ tal que $\langle\ x, z\ \rangle = 0$ para cada $z \in E$ entonces tenemos que $\langle\ x, w\ \rangle = 0$ para todo $w \in \text{span } E$. Así $x \perp \text{span } E$ y span E es denso en H lo cual implica que $x = 0$ en virtud de la Observación 1.6.11.

Por tanto E es base ortonormal de H. ■

Definición 1.6.13. Sea H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Diremos que H_1 y H_2 son isomorfos (como espacios de Hilbert) si existe $\varphi : H_1 \to H_2$ tal que φ es un isomorfismo isométrico.

Teorema 1.6.14. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, $H \neq 0$. Supongamos que H es separable. Entonces H es isomorfo a K^n para algún $n \in \mathbb{N}$, o bien, a ℓ^2. Más concretamente:

Si H tiene una base ortonormal finita, entonces H es isomorfo a K^n para algún $n \in \mathbb{N}$ y si H tiene una base ortonormal infinita numerable, entonces H es isomorfo a ℓ^2.

Demostración: Supongamos que H tiene una base ortonormal finita, digamos $B = \{u_1, ..., u_n\}$. Entonces B es una base de Hamel de H, pues de no ser así existiría $x \in H-$ span B.

Por tanto $\{u_1, ..., u_n, x\}$ es linealmente independiente y realizando el proceso de Gram-Schmidt, encontraremos un conjunto $\{u_1, ..., u_n, y\}$ ortonormal.

Así $\langle\ y, u_i\ \rangle = 0$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ lo cual implica $y = 0$ siendo esto una contradicción. Esto muestra que span $B = H$ y como B es linealmente independiente entonces B es base de Hamel de H.

Ahora, definamos $T : H \to K^n$ tal que $T(u_i) = e_i, i = 1, ..., n$ donde e_i es el i-ésimo vector de la base estandar de K^n y extendemos linealmente a T en H, es decir, si $x \in H$

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j \text{ entonces } T(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j = (a_1, ..., a_n) = (\langle\, x, u_1 \,\rangle, ..., \langle\, x, u_n \,\rangle)\,.$$

Claramente T es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además:

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \|a_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|u_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \|a_j u_j\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j u_j\right\|^2 = \|x\| \text{ es decir, } \|T(x)\| = \|x\| \ \forall x \in H.\end{aligned}$$

Así, T es un isomorfismo de espacios de Hilbert.

Supongamos ahora que H tiene una base ortonormal infinita numerable digamos $B = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Queremos definir $\varphi : H \to \ell^2$ isomorfismo de espacios de Hilbert.

Proponemos $\varphi : H \to \ell^2$ tal que $\varphi(x) = (\langle\, x, u_k \,\rangle)_{k=1}^{\infty}$. Notemos que φ está bien definido pues aplicando la Identidad de Parseval:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle\, x, u_k \,\rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty, \text{ es decir, } (\langle\, x, u_k \,\rangle)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Es fácil ver que φ es lineal. Además, para cada $x \in H$

$$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle\, x, u_k \,\rangle|^2 = \|x\|^2 \text{ lo que implica } \|\varphi(x)\| = \|x\| \ \text{ para cada } x \in H$$

lo cual nos indica que φ es isometría y por tanto es inyectiva.

Finalmente φ es sobreyectiva pues dada $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ el elemento $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n \in H$ (pues $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$) y tenemos

$$\varphi(x) = (\langle\, x, u_k \,\rangle)_{k=1}^{\infty} \text{ y } \langle\, x, u_k \,\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, u_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\, u_n, u_k \,\rangle a_n = a_k \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto es $\varphi(x) = (a_n)_{n=1}^{\infty} = a$.

Por tanto φ es isomorfismo de espacios de Hilbert. ■

Capítulo 2

Construcción de Bases Ortonormales.

En este capítulo abordaremos el objetivo principal de la tesis: analizar diversas construcciones de sistemas ortonormales completos para algunos espacios de Hilbert. Éstos serán espacios o subespacios de $L^2(A)$ donde A es algún conjunto Lebesgue medible apropiado.

2.1. El sistema trigonométrico en $L^2(T)$

En esta sección haremos una breve exposición del sistema trigonométrico en el espacio de Hilbert $L^2(T)$, y construiremos una base ortonormal apropiada para este espacio.

Para ello consideremos $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si tenemos $F : T \to \mathbb{C}$ cualquier función en T y definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$f(t) = F(e^{it}) \tag{2.1}$$

tendremos que f es una función 2π-periódica.

De forma recíproca, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función 2π-periódica, entonces podemos asociarle una función $F : T \to \mathbb{C}$ que cumple la ecuación (2.1).

Así podremos identificar funciones definidas en T con funciones 2π-periódicas definidas en $\mathbb{R}$ y por simplicidad de notación, se va a escribir $f(t)$ en lugar de $f(e^{it})$, incluso si pensamos en f estando definida en T.

Con esto en cuenta definiremos $L^p(T)$ con $1 \leq p < \infty$, la clase de todas las funciones complejas, Lebesgue medibles, 2π-periódicas en $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.2}$$

En otras palabras, estamos considerando a $L^p(\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$(ó en T), dividida por 2π.

Ahora, $L^\infty(T)$ será la clase de todos los elementos de $L^\infty(\mathbb{R})$ 2π-periódicos, con la norma supremo esencial, y $C(T)$ es el conjunto de todas las funciones continuas complejas en T (o equivalentemente, todas las funciones continuas, complejas, 2π-periódicas en $\mathbb{R}$) con norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(t)| \tag{2.3}$$

El factor $\frac{1}{2\pi}$ en la ecuación simplificará el formalismo que se va a desarrollar a lo largo de esta sección.

Notemos que la norma L^p de la función $f(t) = 1$ es 1.

Ahora es importante definir lo siguiente, ya que formará parte fundamental de lo que deseamos obtener.

Definición 2.1.1. Un *polinomio trigonométrico* es una suma finita de la forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{2.4}$$

donde $a_0, a_1, ..., a_N$ *y* $b_1, b_2, ..., b_N$ *son números complejos.*

Tomando en cuenta las identidades de Euler, la ecuación (2.4) se puede reescribir en la forma

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \tag{2.5}$$

lo cual será conveniente para algunos propósitos. Además, tenemos claro que cada polinomio trigonométrico tiene período 2π.

Denotaremos a los enteros por $\mathbb{Z}$ y escribiremos

$$u_n(t) = e^{int} \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2.6}$$

Recordemos que el producto interior de este espacio está dado por

$$\langle\, f, g \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ahora, notemos que los $u_n(t)$ son ortonormales:

$$\begin{aligned}\langle\, u_n, u_m \,\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\overline{u_m(t)}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt\\ &= \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases} = \delta_{nm}.\end{aligned}$$

De este modo $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto ortonormal en $L^2(T)$, llamado el *sistema trigonométrico.*

Lo siguiente que probaremos será que el sistema trigonométrico es una base ortonormal para el espacio $L^2(T)$.

Para esto bastará probar que $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es total en $L^2(T)$, lo cual equivale a demostrar que $\text{span}\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $L^2(T)$, lo que a su vez equivale a probar que los polinomios trigonométricos son densos en $L^2(T)$ con respecto a $\|\cdot\|_2$.

Pero por el Teorema de Lusin, $C(T)$ es denso en $L^2(T)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. De este modo, tendremos que será suficiente probar que los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.

Pero notemos que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ en $C(T)$, pues si $f \in C(T)$, entonces

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

y esto es $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

Así bastará mostrar que los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$ respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 2.1.2. Los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$ respecto a $\|\cdot\|_\infty$, esto es, dado $\epsilon > 0$ y dada $f \in C(T)$ existe p, polinomio trigonométrico tal que

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon.$$

Demostración: Si pudiéramos construir una sucesión $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ de polinomios trigonométricos tales que:

(a) $Q_n(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Para cada $0 < \delta < \pi$ sea $\eta_k(\delta) = \sup\limits_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_k(t)$ entonces $\eta_k(\delta) \to 0$ cuando $k \to \infty$ $\forall \delta > 0$ (equivalentemente $Q_n(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$).

Entonces podríamos probar el teorema así:

Dada $f \in C(T)$ definimos

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds \qquad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{2.7}$$

Haciendo un cambio de variable con $u = t - s$ y $du = -ds$ tendremos por la 2π-periodicidad de los $Q_k(t)$ que

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds = \frac{-1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(u)Q_k(t-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(s)Q_k(t-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)Q_k(t-s)ds, \end{aligned}$$

es decir,

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)Q_k(t-s)ds. \tag{2.8}$$

Ahora, como Q_k es un polinomio trigonométrico,

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{n,k}e^{int}, k \in \mathbb{N}$$

y substituyendo en la ecuación (2.8)

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{n,k}e^{in(t-s)}\right] ds = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{n,k}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds\right] e^{int}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de producto interior tenemos que

$$\langle\, f, u_n \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds$$

por lo que

$$P_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{n,k}\langle\, f, u_n \,\rangle e^{int},$$

lo cual indica que $P_k(t)$ es un polinomio trigonométrico.

A continuación probaremos que $P_k \to f$ uniformemente cuando $k \to \infty$ en $\mathbb{R}$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

Luego, de la ecuación (2.7) y de las propiedades que cumple la sucesión $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ tenemos

$$\begin{aligned} P_k(t) - f(t) &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds\right] - f(t)\cdot 1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds - f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_k(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t)]Q_k(s)ds. \end{aligned}$$

Así,

$$P_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t)]Q_k(s)ds.$$

Si tomamos módulos en ambos lados tendremos entonces

$$\begin{aligned}
|P_k(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t)] Q_k(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0 \leq |s| < \delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta \leq |s| < \pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar I_1 y I_2.

$$I_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0 \leq |s| < \delta} \epsilon Q_k(s) ds \leq \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s) ds = \epsilon \cdot 1 = \epsilon. \tag{2.9}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta \leq |s| < \pi} Q_k(s) ds \\
&\leq 2\|f\|_\infty \eta_k(\delta) \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta \leq |s| \leq \pi} 1 ds \qquad (2.10) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \eta_k(\delta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds \\
&= 2\|f\|_\infty \eta_k(\delta) < \epsilon
\end{aligned}$$

siempre que k sea suficientemente grande, esto por la propiedad (c) de la sucesión $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

De las ecuaciones (2.9) y (2.10) concluimos que $|P_k(t) - f(t)| < \epsilon$, si k es suficientemente grande para todo $t \in \mathbb{R}$ y así tendremos que los polinomios trigonométricos son densos.

Ahora construiremos $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$

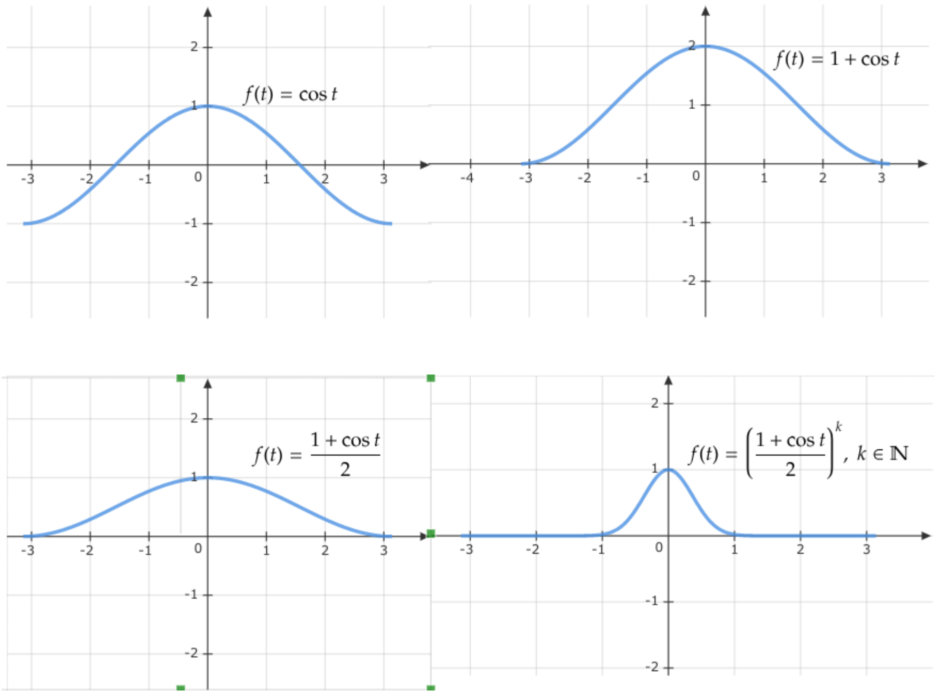
La propuesta es la siguiente:

$$Q_k(t) = C_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k, k \in \mathbb{N} \text{ donde } C_k \text{ se elige así } C_k = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2} \right)^k dt}.$$

Por construcción se cumple el inciso (a).

Notemos también que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)dt = C_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt = 1$. Así, tenemos que se cumple (b).

Observemos ahora el comportamiento de las siguientes gráficas:



Probaremos que cada $Q_k(t)$ es un polinomio trigonométrico mediante el método de inducción.

Caso k=1. Claramente tenemos que $Q_1(t) = C_1\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)$ es un polinomio trigonométrico.

Caso k=2. Primero recordemos una propiedad de la función coseno

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Ahora, veamos que esto nos ayudará para probar el caso $k = 2$.

$$Q_2(t) = C_2\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^2 = C_2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos^2 t\right].$$

Pero

$$\cos 2t = \cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - [1-\cos^2 t] = 2\cos^2 t - 1$$

entonces,

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

y sustituyendo en $Q_2(t)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q_2(t) &= C_2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\right]\\
&= C_2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{8}\cos 2t\right]\\
&= \frac{3}{8}C_2+\frac{C_2}{2}\cos t+\frac{C_2}{8}\cos 2t,
\end{aligned}$$

lo cual muestra claramente que $Q_2(t)$ es un polinomio trigonométrico.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que $Q_k(t)$ es un polinomio trigonométrico con $k = n$.

Veremos que $Q_k(t)$ con $k = n+1$ es un polinomio trigonométrico. Tenemos que

$$Q_{n+1}(t) = C_{n+1}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{n+1} = C_{n+1}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right). \tag{2.11}$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que $\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$ es un polinomio trigonométrico, y como es una función par entonces es de la forma

$$\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{n} = (a_0+a_1\cos t+...+a_n\cos nt).$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación (2.11) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&Q_{n+1}(t) = C_n(a_0+a_1\cos t+...+a_n\cos nt)\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)\\
&= C_n\left(\frac{a_0}{2}+\frac{a_1\cos t}{2}+...+\frac{a_n\cos nt}{2}\right)+C_n\left(\frac{a_0\cos t}{2}+\frac{a_1\cos t\cos t}{2}+...+\frac{a_n\cos nt\cos t}{2}\right)\\
&= C_nA_1(t)+C_nA_2(t).
\end{aligned}$$

Es claro que A_1 es un polinomio trigonométrico y veremos que A_2 también lo es. Para ello analizaremos el producto $\cos kt\cdot\cos t$ con $k = 0,1,2,...,n$.

Primero, recordemos una propiedad de la funcion coseno:

$$\cos a\cdot\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

Así, tomando $a = kt$ y $b = t$ entonces tendremos que

$$\cos kt \cdot \cos t = \frac{1}{2}\left[\cos((k+1)t) + \cos\left((k-1)t\right)\right].$$

De esta forma, A_2 se puede reescribir como

$$A_2(t) = \frac{a_0 \cos t}{2} + \frac{a_1(\cos 2t + 1)}{4} + ... + \frac{a_n(\cos(n+1)t - \cos(n-1)t)}{4}$$

el cual es claramente un polinomio trigonométrico.

Así $Q_{n+1}(t)$ es un polinomio trigonométrico, con lo cual probamos que cada $Q_k(t)$ es un polinomio trigonométrico para todo $k \in \mathbb{N}$.

Resta probar el inciso (c) para completar la prueba. Para ello usaremos la paridad de cada $Q_k(t)$.

$$\begin{aligned}
\text{Como } 1 &= \frac{C_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \\
&= \frac{2C_k}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \cdot 1dt \\
&\geq \frac{C_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin tdt.
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable con $u = 1 + \cos t$, $du = -\sin tdt$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{C_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin tdt &= \frac{-C_k}{\pi 2^k} \int_{u(0)}^{u(\pi)} u^k du \\
&= \frac{-C_k}{\pi 2^k} \frac{(1+\cos t)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_{t=0}^{t=\pi} \\
&= \frac{C_k}{\pi 2^k} \frac{2^{k+1}}{k+1} = \frac{2C_k}{(k+1)\pi}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $C_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Notemos que si $\delta \leq |t| \leq \pi$

$$0 \leq Q_k(t) \leq Q_k(\delta) = C_k \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

luego

$$0 \leq Q_k(t) \leq \frac{\pi}{2}(k+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \to 0 \text{ cuando } k \to \infty$$

pues

$$\frac{\pi}{2}(k+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k = \frac{\pi}{2}k\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k$$

y como $0 < \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$ (porque $0 < \delta < \pi$) entonces $Q_k(t) \to 0$ cuando $k \to \infty$ uniformemente en t, $\delta \leq |t| \leq \pi$.

Con esto tenemos finalmente el inciso (c) lo que nos indica que efectivamente $\{Q_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios trigonométricos buscada que nos permite aproximar una función en $C(T)$ con un polinomio trigonométrico del tipo $P_k(t)$. ■

Así, el sistema trigonométrico $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para $L^2(T)$.

2.2. El espacio $L^2_a(D)$

En esta sección construiremos una base ortonormal para el espacio $(L^2_a(D), dA)$ donde $D = \{z \in \mathbb{C} \big| \; |z| < 1\}$, es decir, D es el disco unitario del plano y dA es la medida de Lebesgue en D.

Así, $L^2_a(D)$ es el espacio de todas las funciones holomorfas en D para las cuales la integral de Lebesgue

$$\iint\limits_D |f(x)|^2 dxdy < \infty. \tag{2.12}$$

Sabemos que este espacio es de Hilbert gracias al ejemplo (4) de la sección 1.2 del capítulo I. En otras palabras, éste es el espacio de Bergman para D.

En este caso veremos que el conjunto

$$\left\{ \varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1} \middle| n = 1, 2, ... \right\}$$

es una base ortonormal para $L^2_a(D)$.

Para ello, primero probaremos que es ortonormal:

$$\begin{aligned}
\langle\, \varphi_n(z), \varphi_m(z) \,\rangle &= \iint\limits_D \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1} \left(\sqrt{\frac{m}{\pi}} \overline{z}^{m-1}\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{nm}}{\pi} (re^{it})^{n-1} (re^{-it})^{m-1} r\, dtdr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{nm}}{\pi} \int_0^1 r^{n+m-1} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dtdr \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \\ \left(\frac{n}{\pi} \int_0^1 r^{2n-1} \right) 2\pi & si \quad n = m \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \\ 2n \frac{r^{2n}}{2n} \Big|_0^1 & si \quad n = m \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \\ 1 & si \quad n = m \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Ahora probaremos que $\{\varphi_n\}$ cumple con la identidad de Parseval, lo cual nos dará la completitud del conjunto. Para ello, si $f \in L_a^2(D)$ observemos que sus coeficientes de Fourier están dados por

$$
a_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \iint\limits_{|z|<1} f(z)\overline{z}^{n-1} dxdy.
$$

Haciendo uso de la identidad

$$
\iint\limits_{\Omega} F(z)\overline{G'(z)} dxdy = \frac{1}{2i} \int\limits_{C} F(z)\overline{G(z)} dz,
$$

donde Ω representa un abierto con frontera suave C, tendremos que los coeficientes de Fourier toman la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \iint\limits_{|z|<1} f(z)\overline{z}^{n-1} dxdy \\
&= \lim_{r \to 1} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \iint\limits_{|z|<r} f(z)\overline{z}^{n-1} dxdy \\
&= \lim_{r \to 1} \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int\limits_{|z|=r} f(z) \frac{\overline{z}^n}{n} dz.
\end{aligned}
$$

Ahora, como $\overline{z}z = |z|^2 = r^2$, tendremos que $\overline{z} = \frac{r^2}{z}$ y así

$$a_n = \lim_{r\to 1} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{r^{2n}}{2i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^n} dz.$$

Si consideramos la expansión en series de potencia para f como $f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ..., |z| < 1$ entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$b_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^n} dz.$$

Por tanto,

$$a_n = \lim_{r\to 1} \sqrt{\frac{\pi}{n}} r^{2n} b_{n-1} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} b_{n-1},\ \ n = 1, 2, 3, ... \cdot$$

Veamos que la identidad de Parseval

$$\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|^2 dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_{n-1}|^2}{n}$$

se cumple.

Para esto notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|^2 dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r\, drd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^n e^{-in\theta} \right) rdrd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n \overline{b_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} rdrd\theta \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n \overline{b_m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta r^{n+m+1} dr,
\end{aligned}$$

donde la integración término a término es válida, pues la serie de potencias converge uniformemente en $|z| \leq r$ para $r < 1$.

Entonces,

$$\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|^2 dxdy = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \cdot 2\pi r^{2n+1} dr$$
$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} 2|b_n|^2 \left[\frac{r^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1$$
$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} 2|b_n|^2 \frac{1}{2(n+1)}$$
$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n+1}$$
$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_{n-1}|^2}{n}.$$

Teniendo esto, finalmente completamos la prueba de que $\{\varphi_n\}$ es base ortonormal del espacio $L_a^2(D)$.

2.3. El espacio $L^2([-1,1])$

En esta sección buscaremos encontrar una base ortonormal para el espacio $L^2([-1,1])$. Para ello notemos que el producto interior del espacio de todas las funciones reales Lebesgue medibles definidas en $[-1,1]$ estará dado por:

$$\langle\, x, y\, \rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt,$$

el cual induce la norma $\|\cdot\|_2$ en dicho espacio.

Con esto en cuenta, deseamos encontrar una sucesión ortonormal en $L^2([-1,1])$ que consista de funciones fáciles de manejar. Los polinomios son de este tipo, por lo cual haremos uso de ellos para encontrar tal sucesión.

Comenzaremos por las potencias $x_0, x_1, x_2, ...$, donde

$$x_0(t) = 1, \qquad x_1(t) = t, \qquad ..., \qquad x_j(t) = t^j, \qquad ..., \qquad \forall t \in [-1,1]. \tag{2.13}$$

Notemos que esta sucesión es linealmente independiente, pues cualquier subconjunto finito de ella es linealmente independiente.

Ahora, si aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a (2.13) obtendremos una sucesión ortonormal (e_n), donde cada e_n es un polinomio, pues en el proceso hacemos combinaciones lineales de los x_j's y cada e_n tiene grado n, como lo veremos después.

Proposición 2.3.1. (e_n) es total en $L^2([-1,1])$.

Demostración: Por el teorema de Lusin, para cualquier $x \in L^2([-1,1])$ y cada $\epsilon > 0$ hay una función continua y definida en $[-1,1]$ tal que

$$\|x-y\|_2 < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Por el Teorema de aproximación de Weierstrass, para esta y existe un polinomio z tal que para toda $t \in [-1,1]$

$$|y(t)-z(t)| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente

$$\|y-z\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |y(t)-z(t)|^2 dt \leq 2\left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{4}$$

y así

$$\|y-z\|_2 < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.15}$$

Haciendo uso de la desigualdad del triángulo y las desigualdades (2.14) y (2.15) tendremos

$$\|x-z\|_2 \leq \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

La definición del proceso de Gram-Schmidt muestra que, por las relaciones (2.13) tenemos que $z \in \text{span}\{e_0, ..., e_m\}$ para una m suficientemente grande.

Finalmente, como $x \in L^2([-1,1])$ y $\epsilon > 0$ fueron arbitrarios, esto prueba la totalidad de (e_n). ■

Pero el propósito de este trabajo es tener para este espacio un sistema ortonormal con fórmulas explícitas. Por esto, afirmamos que

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.16}$$

donde

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]. \tag{2.17}$$

P_n se llama polinomio de Legendre de orden n. La fórmula (2.17) se conoce como Fórmula de Rodrigues.

Al aplicar el teorema binomial a $(t^2-1)^n$ y derivando el resultado n veces término por término se obtiene de (2.17):

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} t^{n-2j} \tag{2.18}$$

donde $N = \frac{n}{2}$ si n es par y $N = \frac{n-1}{2}$ si n es impar. Esto ocurre pues:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n] &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{2(n-j)}(-1)^j\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{2n-2j}(-1)^j\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{2n-2j}\right](-1)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j(2n-2j)(2n-2j-1)(2n-2j-2)...(2n-2j-(n-1))t^{2n-2j-n} \\
&= \sum_{j=0}^{N}\binom{n}{j}(-1)^j(2n-2j)(2n-2j-1)(2n-2j-2)...(n-2j+1))t^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{N}\binom{n}{j}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}t^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j n!}{(n-j)!j!}\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}t^{n-2j},
\end{aligned}$$

donde $N = \frac{n}{2}$ si n es par, pues si $j > \frac{n}{2}$ entonces $2n-2j < 2n-2\frac{n}{2} = 2n-n = n$ y al derivar t^{2n-2j} n veces tendremos que eventualmente esta derivada se hará cero. Análogamente podemos probar que si n es impar entonces $N = \frac{(n-1)}{2}$.

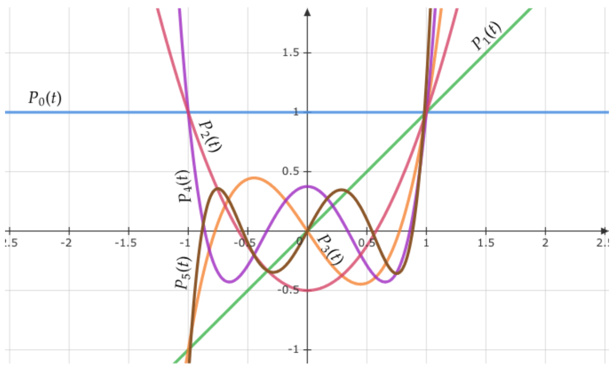
De esta forma, tendremos que

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n] \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j n!}{(n-j)!j!}\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}t^{n-2j}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} t^{n-2j}.$$

Por lo tanto,

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$
$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), \quad P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t), \quad etc.$$



Demostración de las afirmaciones (2.16) y (2.17)

Mostraremos en la parte (a) que la ecuación (2.17) implica

$$\|P_n\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \tag{2.19}$$

por lo que la norma de e_n en la relación (2.16) es la adecuada, esto es 1. En la parte (b) probaremos que (P_n) es una sucesión ortogonal en el espacio $L^2([-1,1])$. Esto será suficiente para establecer las relaciones (2.16) y (2.17) por la siguiente razón.

Denotamos el lado derecho de la fórmula (2.16) por $y_n(t)$. Entonces y_n es un polinomio de grado n, y las partes (a) y (b) implican que (y_n) es una sucesión ortonormal en $L^2([-1,1])$.

Sea $Y_n = \mathrm{span}\{e_0, ..., e_n\} = \mathrm{span}\{x_0, ..., x_n\} = \mathrm{span}\{y_0, ..., y_n\}$. Aquí la segunda igualdad se sigue del algoritmo del proceso de Gram-Schmidt y la última igualdad del hecho que $\dim Y_n = n+1$ junto con la independencia lineal de $\{y_0, ..., y_n\}$ garantizada por el Teorema 1.4.4.

Por lo tanto y_n tiene una representación

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_j. \tag{2.20}$$

Ahora por la ortogonalidad

$$y_n \perp Y_{n-1} = \text{span}\{y_0, ..., y_{n-1}\} = \text{span}\{e_0, ..., e_{n-1}\}.$$

Esto implica que para $k = 0, 1, ..., n-1$ tenemos

$$0 = \langle\, y_n, e_k \,\rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle\, e_j, e_k \,\rangle = \alpha_k.$$

Así, la representación (2.20) se reduce a $y_n = \alpha_n e_n$ y por ello tendremos que $|\alpha_n| = 1$ pues $\|y_n\|_2 = \|e_n\|_2 = 1$. De hecho, $\alpha_n = +1$ o -1 ya que y_n y e_n son reales. Ahora $y_n(t) > 0$ para t suficientemente grande dado que el coeficiente de t^n de la ecuación (2.18) es positivo. Además, $e_n(t) > 0$ también para t suficientemente grande, ya que $x(t) = t^n$, $e_n(t)$ se obtiene del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt y así $e_n(t)$ es un polinomio de grado n con coeficiente principal positivo. Por lo tanto $\alpha_n = +1$ y $y_n = e_n$, lo cual establece la relación (2.16) con P_n dado por (2.17).

Todo lo anterior muestra que después de la presentación de las partes (a) y (b) mencionadas arriba la prueba estará completa.

(a) Vamos a derivar la relación (2.19) de (2.17). Primero, hacemos un cambio de notación tomando $u = t^2 - 1$. Luego, notemos que u^n y sus derivadas $(u^n)^{(1)}, ..., (u^n)^{(n-1)}$ son cero en $t = \pm 1$ así como $(u^n)^{(2n)} = (2n)!$. Integrando n veces por partes obtenemos de (2.17):

$$\begin{aligned}(2^n n!)^2 \|P_n\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n)} (u^n)^{(n)} dt \\ &= (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n)} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n+1)} dt \\ &= ... \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} u^n dt = 2(2n)! \int_{0}^{1} (1-t^2)^n dt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Haciendo un cambio de variable con $t = \sin\tau$ vemos que $1-t^2 = 1-\sin^2\tau = \cos^2\tau$ y $dt = \cos\tau d\tau$. Así, obtenemos que (2.21) es igual a

$$\begin{aligned} &= 2(2n)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}\tau d\tau \\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}, \end{aligned}$$

donde la última integral se puede encontrar en ([6], p. 395). Dividiendo por $(2^n n!)^2$ obtenemos

$$\|P_n\|_2^2 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)(2^n n!)^2} = \frac{2(2^n n!)}{(2n+1)(2^n n!)} = \frac{2}{2n+1}, \text{ por lo tanto}$$
$$\|P_n\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1}},$$

y así se obtiene la relación (2.19).

(b) Mostraremos que $\langle\, P_m, P_n \,\rangle = 0$ donde $0 \leq m < n$. Como P_m es un polinomio es suficiente probar que $\langle\, x_m, P_n \,\rangle = 0$ para $m < n$, donde $x_m(t) = t^m$.

Este resultado se obtiene integrando por partes m veces y haciendo el cambio de notación $u = t^2 - 1$.

$$\begin{aligned} 2^n n! \langle\, x_m, P_n \,\rangle &= \int_{-1}^{1} t^m (u^n)^{(n)} dt \\ &= t^m (u^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} - m \int_{-1}^{1} t^{m-1} (u^n)^{(n-1)} dt \\ &= \cdots \\ &= (-1)^m m! \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-m)} dt \\ &= (-1)^m m! (u^n)^{(n-m-1)} \Big|_{-1}^{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de las relaciones (2.16) y (2.17).

Con todo lo anterior hemos probado que (e_n) es una base ortonormal. ■

Una observación muy interesante es que los polinomios de Legendre son soluciones de la importante ecuación diferencial de Legendre:

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0.$$

En efecto, sea $f(x) = (x^2-1)^n$. Entonces

$$(1-x^2)f'(x) + 2nxf(x) = 0.$$

Derivando $n+1$ veces y usando la regla de Leibnitz para la $(n+1)$-ésima derivada de un producto $\left(D^{(n+1)}[fg] = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k f D^{n+1-k} g\right)$ tendremos

$$\binom{n+1}{0}(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1}(-2x)f^{(n+1)}(x) + \binom{n+2}{2}(-2)f^{(n)}(x) \\ + 2n\left[\binom{n+1}{0}xf^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}f^{(n)}(x)\right] = 0.$$

Dividiendo por $2^n n!$ y juntando términos similares obtenemos

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

2.4. El espacio $L^2(\mathbb{R})$

El espacio de nuestro interés es $L^2(-\infty,\infty)$. En este caso no funcionan los polinomios de Legendre. Esto, porque el intervalo de integración es infinito y las potencias $1, t, t^2, ...$ por si solas no funcionan.

Pero si multiplicamos cada una de las potencias por una función que decrezca rápidamente podríamos esperar obtener integrales que sean finitas. La función exponencial con un exponente adecuado parece la mejor opción.

Lo que haremos en esta sección será probar que cierta familia de funciones apropiadas forman una base ortonormal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$ dotado de la medida de Lebesgue.

Para ello, el producto interior para este espacio estará dado por:

$$\langle\, x, y \,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt.$$

Aplicaremos el proceso de Gram-Schmidt a la sucesión de funciones definidas por

$$w(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}, tw(t), t^2w(t), ...,$$

la cual es linealmente independiente y pertenece a $L^2(\mathbb{R})$.

Sea $x_n(t) = t^n e^{\frac{-t^2}{2}} = t^n w(t),\ \ n = 0, 1, 2, ...$ Entonces

$e_0(t) = \dfrac{w(t)}{\|w(t)\|_2} = c_0 e^{\frac{-t^2}{2}}$.

$V_1(t) = x_1(t) - \langle\ x_1, e_0\ \rangle e_0(t) = tw(t) - \langle\ x_1, e_0\ \rangle e_0(t) = te^{\frac{-t^2}{2}} + a_{10}e^{\frac{-t^2}{2}}$.

$e_1(t) = \dfrac{V_1}{\|V_1\|_2} = a_{00}tw(t) + a_{10}w(t) = w(t)(a_{00}t + a_{10})$.

$V_2(t) = x_2(t) - \langle\ x_2, e_1\ \rangle e_1(t) - \langle\ x_2, e_0\ \rangle e_0(t) = t^2e^{\frac{-t^2}{2}} - a_{20}te^{\frac{-t^2}{2}} - a_{21}e^{\frac{-t^2}{2}} - a_{22}e^{\frac{-t^2}{2}}$

$= t^2e^{\frac{-t^2}{2}} - a_{20}te^{\frac{-t^2}{2}} - (a_{21} + a_{22})e^{\frac{-t^2}{2}} = w(t)(t^2 - a_{20}t - (a_{21} + a_{22}))$.

Así $e_2(t) = w(t)$(polinomio de grado 2).

Realizando el proceso n veces vemos que $e_n(t) = w(t)$(polinomio de grado n), $n = 0, 1, 2, ... \cdot$

Lo siguiente que probaremos será que cada $w(t)t^n$ es acotado. Recordando que la serie de potencias de la exponencial tiene la siguiente forma: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$, vemos que,

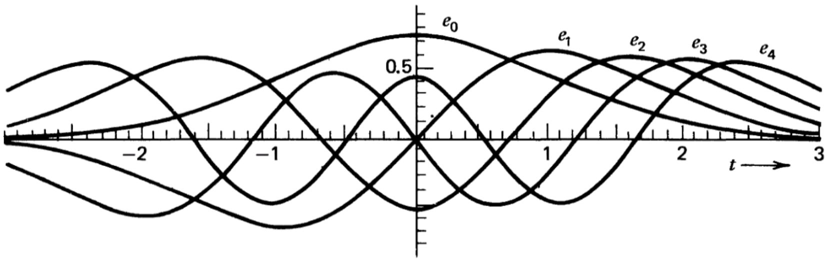
$$e^x > \frac{x^n}{n!} \text{ para cada } x > 0, \text{ en particular, } e^{\frac{t^2}{2}} > \frac{t^{2n}}{2^n n!}, \text{por lo que, } e^{\frac{-t^2}{2}} < \frac{2^n n!}{t^{2n}}$$

para todo $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Así, $t^n e^{\frac{-t^2}{2}} < \frac{2^n n!}{t^n}$, entonces, $0 < |t|^n e^{\frac{-t^2}{2}} < \frac{2^n n!}{|t|^n}$ para todo $t \neq 0$ y esto muestra que $w(t)t^n = t^n e^{\frac{-t^2}{2}}$ es acotada en $\mathbb{R}$. Además $w(t)t^n \in L^2(\mathbb{R})$ pues como $e^x > \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ entonces $e^{t^2} > \frac{t^{4n}}{(2n)!}$, y así tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(t^n e^{\frac{-t^2}{2}})||(t^n e^{\frac{-t^2}{2}})| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2n} e^{-t^2} dt.$$

Ahora vamos a descomponer $(-\infty, \infty)$ en $(-\infty, -1), [-1, 1], (1, \infty)$.



Claramente $\int_{-1}^{1}|t|^{2n}e^{-t^2}dt<\infty$ por ser continua en $[-1,1]$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int\limits_{|t|>1}|t|^{2n}e^{-t^2}dt &\leq \int\limits_{|t|>1}|t|^{2n}\frac{(2n)!}{|t|^{4n}}dt\\ &= \int\limits_{|t|>1}(2n)!\frac{dt}{|t|^{2n}}\\ &= 2(2n)!\int_1^\infty\frac{dt}{t^{2n}}\\ &= 2(2n)!\left(\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1}\right)\Bigg|_1^\infty\\ &= 2(2n)!\left[\frac{1}{2n-1}\right]\\ &= \frac{2(2n)!}{2n-1}<\infty \text{ para cada } n\geq 1,\end{aligned}$$

lo cual implica que efectivamente $w(t)t^n\in L^2(\mathbb{R})$.

Aunque no lo hacemos aquí, se puede mostrar que después de realizar el proceso de Gram-Schmidt obtenemos una sucesión ortonormal (e_n) de la siguiente forma:

$$e_n(t)=\frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-t^2}{2}}H_n(t) \tag{2.22}$$

donde

$$H_0(t)=1, \qquad H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}), n=1,2,...\cdot \tag{2.23}$$

H_n se llama el polinomio de Hermite de orden n. Haciendo la derivación indicada en la ecuación (2.23), obtenemos

$$H_n(t)=n!\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!}t^{n-2j} \tag{2.24}$$

donde $N = \frac{n}{2}$ si n es par y $N = \frac{n-1}{2}$ si n es impar. Notemos que también puede ser escrito como:

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)...(n-2j+1)(2t)^{n-2j}. \tag{2.25}$$

Así, las expresiones para los primeros términos de los polinomios de Hermite son:

$$\begin{array}{lll} H_0(t) = 1 & H_1(t) = 2t & H_2(t) = 4t^2 - 2 \\ H_3(t) = 8t^3 - 12t & H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12 & H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t. \end{array}$$

Ahora veremos que la sucesión (e_n) definida por las relaciones (2.22), (2.23) y (2.24) es ortonormal. Para ello, debemos probar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & si \quad m = n. \end{cases} \tag{2.26}$$

Notemos que al derivar la ecuación (2.25) obtenemos para $n \geq 1$,

$$H_n'(t) = 2n \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} (n-1)(n-2)...(n-2j)(2t)^{n-1-2j} = 2nH_{n-1}(t)$$

donde $M = \frac{n-2}{2}$ si n es par y $M = \frac{n-1}{2}$ si n es impar. Aplicamos esta fórmula a H_m, asumiendo que $m \leq n$, denotamos la función exponencial en la ecuación (2.26) por $v(t)$, para simplicidad, e integrando m veces por partes obtendremos que por la relación (2.23):

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) v^{(n)}(t) dt \\ &= (-1)^n \left[H_m(t) v^{(n-1)}(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2m H_{m-1}(t) v^{(n-1)}(t) dt \right] \\ &= (-1)^n - 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t) v^{(n-1)}(t) dt \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t) v^{(n-m)} dt. \end{aligned}$$

Como $H_0(t) = 1$, si $m < n$ tenemos que si integramos una vez más obtenemos 0 dado que $v(t)$ y sus derivadas tienden a cero cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$. Teniendo así la ortogonalidad de (e_n).

Finalmente, probaremos que si $m = n$ tendremos que se cumple la ecuación (2.26) lo cual implica que $\|e_n\|_2 = 1$ por la relación (2.23).

Para esto, tomemos la última integral, llamémosle J y notemos lo siguiente:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Para verificarlo, consideraremos J^2; haciendo uso de las coordenadas polares r, θ con $dsdt = rdrd\theta$ obtendremos que

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)} dsdt \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} rdrd\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$

y esto implica que $J = \sqrt{\pi}$. Por lo tanto (e_n) es ortonormal. Lo que resta probar es que (e_n) forma una base ortonormal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$, para lo cual será suficiente demostrar que los polinomios de Hermite son un sistema ortogonal completo de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

Teorema 2.4.1. Los polinomios de Hermite son un sistema ortogonal para el espacio $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

Demostración: Sea $L_g^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

Consideremos $f \in L_g^2(\mathbb{R})$ tal que $\langle\, f, H_n \,\rangle = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces tendremos que $\langle\, f, I_n \,\rangle = 0$ para toda n donde $I_n(t) = t^n$.

Sea

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dg(x) \text{ para } t \in \mathbb{R},$$

donde $dg(x) = e^{-x^2}dx$. Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-ixt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} t^k x^k$$

donde esta serie converge absolutamente para toda $x \in \mathbb{R}$. Así $F(t)$ se reescribe como

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(x)e^{-x^2} \frac{(-i)^k}{k!} t^k x^k dx.$$

De este modo, aplicando la Desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|f(x)|e^{-x^2}\frac{|t|^k}{k!}|x^k|dx &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|e^{-x^2}e^{|t||x|}dx \\
&\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2e^{-x^2}dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{2|t||x|}e^{-x^2}dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2_g}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{2|t||x|}e^{-x^2}dx\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donde $e^{2|t||x|-x^2}$ es integrable pues

$$\begin{aligned}
x^2-2|t||x|+t^2 &= (|x|-|t|)^2 \\
-[\,x^2-2|t|||x|+t^2\,] &= -[\,|x|-|t|\,]^2 \\
e^{-[\,|x|-|t|\,]^2} &= e^{-[\,x^2-2|t||x|+t^2\,]} = e^{-t^2}\cdot e^{2|t||x|-x^2},
\end{aligned}$$

y como $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[\,|x|-|t|\,]^2}dx<\infty$, entonces también $\int_{-\infty}^{\infty}e^{2|t||x|-x^2}dx$ es finita. Ahora, por el Teorema de Convergencia Dominada tenemos

$$F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}t^k\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^kdg(x)=0.$$

Finalmente, aplicando el Teorema 7.3* de ([7]), el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dg(x)=0$$

para todo $t\in\mathbb{R}$ implica que $f=0$ en $L^2_g(\mathbb{R})$. ∎

Con todo esto podemos concluir que efectivamente (e_n) es una base ortonormal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

2.5. El espacio $L^2([0,1])$

En esta sección daremos la definición del sistema de Haar y probaremos que este sistema resulta ser una base ortonormal para el espacio $L^2([0,1])$ dotado con la medida de Lebesgue.

* "Si $f\in L^2_g(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{itx}dg(x)=0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, entonces $f=0$ en $L^2_g(\mathbb{R})$"

Definición 2.5.1. Sean

$$\varphi_0^{(0)}(x) = 1, x \in [0,1]$$

$$\varphi_1^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ -1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

y para $m = 1, 2, ...; k = 1, ..., 2^m$

$$\varphi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & si \quad x \in \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k-1/2}{2^m}\right) \\ \\ -\sqrt{2^m} & si \quad x \in \left[\frac{k-1/2}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right) \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto de funciones $\{\varphi_0^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, \varphi_m^{(k)}$ tal que $m = 1, 2, ...; k = 1, ..., 2^m\}$ se conoce como el sistema de Haar.

Proposición 2.5.2. El sistema de Haar es base ortonormal de $L^2([0,1])$.

Demostración: Si $m = n$, entonces $\varphi_m^{(k)} \cdot \varphi_n^{(l)}(x) = 0$, $k \neq l$ excepto posiblemente en un punto, de forma que

$$\int_0^1 \varphi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(l)}(x)dx = 0.$$

Si $m \neq n$, entonces

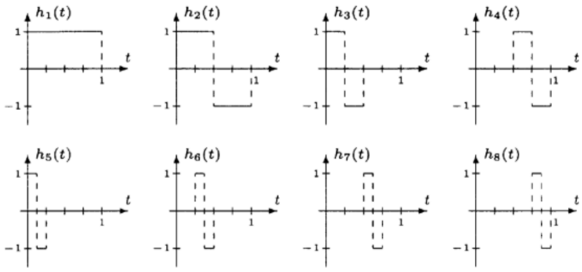
$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_m^{(k)}(x) \cdot \varphi_n^{(l)}(x)dx &= \int_{\frac{l-1}{2^n}}^{\frac{l}{2^n}} \varphi_m^{(k)}(x) \cdot \varphi_n^{(l)}(x)dx \\ &= \sqrt{2^n} \int_{\frac{l-1}{2^n}}^{\frac{l-1/2}{2^n}} \varphi_m^{(k)}(x)dx - \sqrt{2^n} \int_{\frac{l-1/2}{2^n}}^{\frac{l}{2^n}} \varphi_m^{(k)}dx = 0 \end{aligned}$$

pues ambas integrales valen cero en los intervalos dados.

Para la normalidad tendremos que

$$\int_0^1 (\varphi_m^{(k)}(x))^2 dx = 2\left(\left(\sqrt{2^m}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{m+1}}\right) = 1.$$

Enseguida, mostraremos que los $\{\varphi_m^{(k)}\}$ sin normalizar, esto es, los $\{h_n\}$ de las gráficas, constituye un conjunto ortogonal completo.



Para mostrar que $\mathcal{H} = \text{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $L^2([0,1])$, bastará probar que $\mathcal{H}$ es denso en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ pues en tal caso, dado $\epsilon > 0$ y dada $f \in L^2([0,1])$ existe $g \in C([0,1])$ tal que $\|f - g\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$, esto por el Teorema de Lusin.

Así mismo, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $\|g - h\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \|f - h\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 \\ &\leq \|g - h\|_\infty + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Prueba de que cada $f \in C[0,1]$ se puede aproximar con una función $h \in \mathcal{H}$.

Lo primero que observamos es que $\mathcal{H}$ contiene a las funciones características de todo intervalo diádico

$$I_{k,m} = \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right), m = 0, 1, 2, ...; k = 1, ..., 2^m.$$

Por ello, será suficiente mostrar que $\mathcal{F} = \text{span}\{\mathcal{X}_{I_{k,m}} : m = 0, 1, 2, ...; k = 1, ..., 2^m\}$ aproxima a $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, pues así tendremos que $\mathcal{H}$ aproxima a $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Ahora, sea $f \in C([0,1])$ y sea $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[0,1]$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$u, v \in [0,1] \text{ y } |u - v| < \delta \text{ implica que } |f(u) - f(v)| < \epsilon.$$

Elíjase $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{m} < \delta$ para todo $m \geq M$.

Así, $P_m = \{0, \frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, ..., \frac{2^m}{2^m} = 1\}$ es una partición de $[0,1]$ tal que $\|P_m\| = \frac{1}{m} < \delta$.

Definamos $\varphi_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} f\left(\frac{k-1}{2^m}\right) & si \quad x \in I_{k,m},\ k = 1, ..., 2^m \\ \\ f\left(\frac{2^m-1}{2^m}\right) & si \qquad\qquad x = 1. \end{cases}$$

En otras palabras:

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2^m} f\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \mathcal{X}_{I_{k,m}}(x) & si \quad x \in [0,1) \\ \\ f\left(\frac{2^m-1}{2^m}\right) & si \qquad x = 1. \end{cases}$$

Así, dado $x \in [0,1]$ existe un único $k = 1, ..., 2^m$ tal que $x \in I_{k,m}$ y esto implica que

$$|f(x) - \varphi_m(x)| = \left| f(x) - f\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right| < \epsilon$$

Por lo tanto $\|f - \varphi_m\|_\infty < \epsilon$.

Finalmente, como $\varphi_m \in \text{span}\{\mathcal{X}_{I_{k,m}} : m = 0, 1, ...; k = 1, ..., 2^m\} = \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ aproxima a $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Con esto tenemos la prueba completa de que el sistema de Haar es una base ortonormal para $L^2([0,1])$. ∎

Conclusiones

Las construcciones de bases ortonormales de espacios de Hilbert resultan, como se pudo observar, no ser triviales pese a que en el primer capítulo se probó que cada espacio de Hilbert tiene al menos un sistema ortonormal. Con todo lo visto en el segundo capítulo es claro que el encontrar tales sistemas resulta una tarea complicada.

Sin embargo, el análisis de estos espacios es enriquecedor ya que permite trabajar con espacios de dimensión infinita, algo que no es sencillo de realizar si consideramos solamente la estructura de espacio vectorial o de espacio de Banach.

Con todo esto, podemos llegar a plantearnos nuevas preguntas tales como, ¿será que en algún momento podremos construir para cada espacio de Hilbert con dimensión infinita un sistema ortonormal? ¿los espacios o subespacios $L^2(A)$ tendrán siempre un sistema ortonormal conformado por polinomios?

Es posible que nunca podamos responder estas preguntas, así como tampoco es posible que logremos llegar a un resultado sin formularnos más preguntas que nos ayuden a entender nuestro objeto de estudio. Es por esto que las matemáticas proporcionan una fuente inagotable de problemas.

Bibliografía

[1] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis.* Academic Press, 1966.

[2] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Julius Springer, 1937.

[3] L. Debnath and F. Shah. *Wavelet Transforms and Their Applications.* Springer, 2015.

[4] G. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley Sons, 1999.

[5] C. Goffman and G. Pedrick. *First Course in Functional Analysis.* Prentice-Hall, 1965.

[6] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products.* Elsevier Inc., 2007. 57

[7] N. Haaser and J. Sullivan. *Real Analysis.* Litton Educational Publishing, 1971. 63

[8] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis: A modern treatment of the theory of functions of a real variable.* Springer, 1965.

[9] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley Sons, 1978.

[10] R. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, 1988.

[11] I. P. Natanson. *Theory of Functions of a Real Variable.* Frederick Ungar Publishing Co., 1955.

[12] A. Naylor and G. Sell. *Linear Operator Theory in Engineering and Science (Applied mathematical sciences; 40).* Springer, 2000.

[13] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Co., 1986.

[14] A. Taylor and D. Lay. *Introduction to Functional Analysis.* Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

[15] R. Wheeden and A. Zygmund. *Measure and Integral an Introduction to Real Analysis.* Taylor Francis Group, 2015.

[16] P. Wojtaszczyk. *Banach Spaces for Analysts.* Cambridge University Press, 1991.

[17] A. Zygmund. *Trigonometric series, Volumes I II combined.* Cambridge University Press, 2002.