



---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Coreografías relativas para el problema de los  
tres cuerpos

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**Licenciado en Matemáticas**

Presenta:

Jesse Manoel Shawn Mariñez Renteria

Director de tesis:

Dr. Héctor Alfredo Hernández Hernández

Hermosillo, Sonora, México,      18 de Diciembre de 2024



## SINODALES

Dr. Rosalía Guadalupe Hernández Amador

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Genaro Hernández Mada

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Héctor Alfredo Hernández Hernández

Universidad de Sonora, Hermosillo, México



*A mis amados padres, Jesús Manuel Mariñez Fuentes y Dinora Pilar Renteria Rebo-  
llar, cuya dedicación, amor incondicional y ejemplo constante han sido el motor que ha  
guiado cada paso de mi camino. Su sacrificio y apoyo inquebrantable han inspirado en mí  
la perseverancia y la fuerza necesarias para alcanzar este logro.*

*Y a mi querida Angel Zulema Ruiz Meza, quien ha sido mi compañera y mi refugio en  
este viaje. Su amor, paciencia y fe en mí han sido un faro en los momentos más difíciles.  
Gracias por caminar a mi lado y por creer en mí incluso cuando yo dudé.*

*Con infinito agradecimiento y amor, les dedico este trabajo, reflejo de todo lo que he  
aprendido de ustedes.*



# *Agradecimientos*

Esta tesis no habría sido posible sin el apoyo y la inspiración de muchas personas a lo largo del camino. En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, por su amor incondicional, su fe en mí y por enseñarme a nunca rendirme. Gracias por estar siempre ahí para mí.

A mis amigos Miguel, Darío, Sergio, Aarón, Gabriel y Carlos por su constante apoyo y por hacerme reír incluso en los momentos más difíciles. Gracias por ser mi refugio y mi fuente de energía.

A mi director de tesis, Hector, por su paciencia, orientación y por brindarme su conocimiento y experiencia. Su guía ha sido fundamental para este trabajo. A mi querida Zulema, por ser mi inspiración y por su amor y comprensión a lo largo de este proceso.

A Paola Tonanzy García Mendvil, por su valiosa ayuda en la redacción y organización de esta tesis. Su colaboración fue esencial para alcanzar este resultado.

Un agradecimiento especial a la Universidad de Sonora por proporcionarme los recursos y el espacio para llevar a cabo la conclusión de mis estudios. Y gracias a todos los profesores y colegas que contribuyeron con sus ideas y comentarios constructivos.



# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Problema de Cauchy . . . . .	4
1.2. Método de Euler . . . . .	6
1.3. Método de Euler Mejorado . . . . .	8
1.4. Regla de Simpson 1/3 . . . . .	11
1.5. Regla de Simpson 3/8 . . . . .	13
1.6. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden . . . . .	14
<b>2. Antecedentes</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción histórica al problema de los tres cuerpos . . . . .	17
2.2. Antecedentes sobre soluciones . . . . .	18
<b>3. Sistemas de ecuaciones y sistemas de coordenadas</b>	<b>21</b>
3.1. Sistema de ecuaciones . . . . .	21
3.1.1. Ecuaciones en SH . . . . .	24
3.1.2. Reducción a ecuaciones de primer orden en SH . . . . .	26
3.2. Cambio de coordenadas en SBI a SBR . . . . .	26
3.2.1. Transformación en SBR . . . . .	27
<b>4. Cálculo de coreografías relativas.</b>	<b>28</b>
4.1. Obtención de coreografías relativas via modificación de velocidad angular . . . . .	28
4.1.1. Simetrías de las soluciones . . . . .	28
4.2. Órbitas en SBR . . . . .	32
4.3. Conjuntos de racionales $A_{n,j}$ . . . . .	36
4.3.1. Contenciones de los conjuntos . . . . .	36
4.4. Análisis breve de los conjuntos $A_{n,j}$ . . . . .	42
4.5. Generalización de las Coreografías Relativas . . . . .	46
<b>5. Órbitas obtenidas</b>	<b>48</b>
5.1. Solución 1 (2 ejes de simetría) . . . . .	49
5.2. Solución 4 (1 eje de simetría) . . . . .	51
5.3. Solución 6 (5 ejes de simetría) . . . . .	54
5.4. Solución 40 (3 ejes de simetría) . . . . .	56

---

<b>A. Métodos numéricos</b>	<b>59</b>
A.1. Deducción de la fórmula del método de Euler clásico . . . . .	59
A.2. Deducción de la fórmula del método de Euler mejorado . . . . .	60
A.3. Deducción de la fórmula de Simpson 1/3 . . . . .	62
A.4. Deducción de la fórmula de Simpson 3/8 . . . . .	64
<b>B. Implementaciones computacionales</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Introducción

El problema general de los  $n$  cuerpos consiste en determinar la dinámica generada por su atracción gravitacional mutua. Este problema es reconocido por su complejidad matemática y computacional, incluso en el caso restringido al plano y con sólo tres cuerpos.

Una de las áreas más relevantes en este campo es el estudio de *órbitas periódicas*, soluciones particulares que exhiben propiedades interesantes de simetría. En este contexto, las *coreografías relativas* son órbitas en las que una partícula parece seguir el mismo camino que otra debido a las simetrías del sistema, presentando propiedades respecto al eje horizontal en un sistema de referencia rotatorio.

En un artículo de Broucke y Boggs, se muestran soluciones numéricas donde, gracias a las simetrías de algunas soluciones, es posible representarlas en un sistema baricéntrico rotatorio (SBR). En este sistema, las órbitas obtenidas exhiben la propiedad de coreografía relativa, ya que una partícula sigue aparentemente el mismo camino que otra. Sin embargo, Broucke y Boggs consideran únicamente una velocidad angular específica para el sistema rotatorio.

Este trabajo extiende los resultados de Broucke y Boggs al presentar conjuntos infinitos de velocidades angulares que generan coreografías relativas. Además, se realiza un estudio detallado de estos conjuntos, mostrando cómo se relacionan entre sí y visualizando que dichos conjuntos, aun siendo infinitos, son densos en los reales. Esta propiedad proporciona una mayor profundidad y generalización al concepto original, haciendo a estos conjuntos particularmente interesantes desde un punto de vista matemático y físico.

El principal propósito de este trabajo es calcular nuevas coreografías relativas en el problema plano de tres cuerpos, desarrollando un procedimiento de *continuación analítica* para explorar y examinar un conjunto denso de velocidades angulares. Asimismo, se analiza la estructura de estos conjuntos y sus propiedades de densidad en los números reales,

lo que amplía considerablemente el estudio de las configuraciones periódicas en sistemas gravitacionales.

La tesis está organizada en cinco capítulos principales. El primer capítulo aborda los preliminares necesarios, como los métodos de integración numérica utilizados en el desarrollo del trabajo, entre ellos el método de Euler y el método de Runge-Kutta. En el segundo capítulo, se proporciona un contexto histórico al presentar estudios previos relevantes del problema de los tres cuerpos, con énfasis en las aportaciones de Broucke y Boggs. Posteriormente, en el tercer capítulo, se describen los sistemas de ecuaciones y las transformaciones de coordenadas, explicando las relaciones entre distintos sistemas de referencia y las constantes de movimiento asociadas. El cuarto capítulo desarrolla la metodología para el cálculo de coreografías relativas mediante la modificación de la velocidad angular, además del análisis detallado de los conjuntos de velocidades generados. Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan las órbitas obtenidas en representaciones gráficas y comparaciones.

Los apéndices incluyen deducciones complementarias a los preliminares y un código en lenguaje C que implementa los cálculos necesarios para resolver los sistemas de ecuaciones y generar las gráficas resultantes. Adicionalmente, todo el material desarrollado será publicado en un repositorio en GitHub, con el propósito de facilitar su comprensión y reproducibilidad por parte del lector.

Este trabajo no sólo contribuye al desarrollo de nuevas coreografías relativas en el problema de los tres cuerpos, sino que también proporciona herramientas numéricas y teóricas para el análisis detallado de los conjuntos de velocidades angulares y sus propiedades.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se abordan conceptos fundamentales para el desarrollo y análisis de los métodos numéricos utilizados en este trabajo. Se presenta una introducción al problema de Cauchy y se describen algunos de los métodos más comunes para la aproximación numérica de las ecuaciones diferenciales de primer orden, como el método de Euler, la regla de Simpson entre otras. Estos temas son esenciales para comprender las aproximaciones numéricas implementadas posteriormente en el estudio de coreografías relativas en el problema de los tres cuerpos.

### 1.1. Problema de Cauchy

El problema de Cauchy clásico consiste en encontrar la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden sujeta a una condición inicial. En este caso, el planteamiento general es:

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

donde  $y(t)$  es la función incógnita que depende de la variable independiente  $t$ , y  $f(t, y)$  es una función que depende tanto del tiempo  $t$  como de la variable  $y$ . La condición inicial es que en el tiempo  $t_0$ , el valor de la función es  $y_0$ . El objetivo es determinar la función  $y(t)$  en un intervalo posterior a  $t_0$ , calculando una aproximación de  $y_1 = y(t_1)$  para algún  $t_1 > t_0$ .

Para resolver esta ecuación diferencial, aplicamos el método de *separación de variables*. Primero, reescribimos la ecuación en la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

A continuación, reorganizamos los términos de la ecuación para separar las variables  $dy$  y  $dt$ :

$$dy = f(t, y) dt.$$

Ahora, integramos ambos lados. En el lado izquierdo, integramos respecto a  $y$  en el intervalo  $[y_0, y_1]$ , mientras que en el lado derecho integramos respecto a  $t$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$ :

$$\int_{y_0}^{y_1} 1 dy = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt.$$

La integral en el lado izquierdo es simplemente  $y_1 - y_0$ , lo que nos lleva a la ecuación:

$$y_1 - y_0 = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt.$$

Despejando  $y_1$ , obtenemos:

$$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt.$$

En este caso, la función  $f(t, y)$  depende tanto del tiempo  $t$  como de la variable  $y$ , lo que hace que el cálculo de  $y_1$  sea más complejo. En muchos casos, esta integral no puede resolverse analíticamente debido a la dependencia de ambas variables. Para obtener una aproximación de  $y_1$ , es necesario utilizar *métodos de integración numérica*, que permiten calcular esta integral de manera aproximada.

La aproximación de  $y_1$  no solo es relevante como el valor en un punto específico, sino que es el primer paso en un proceso iterativo para calcular los valores sucesivos de  $y(t)$  en intervalos posteriores. Los métodos de integración numérica, como la *Regla de Simpson*

o el *método de Runge-Kutta*, permiten obtener  $y_2, y_3, \dots$ , construyendo así una solución paso a paso.

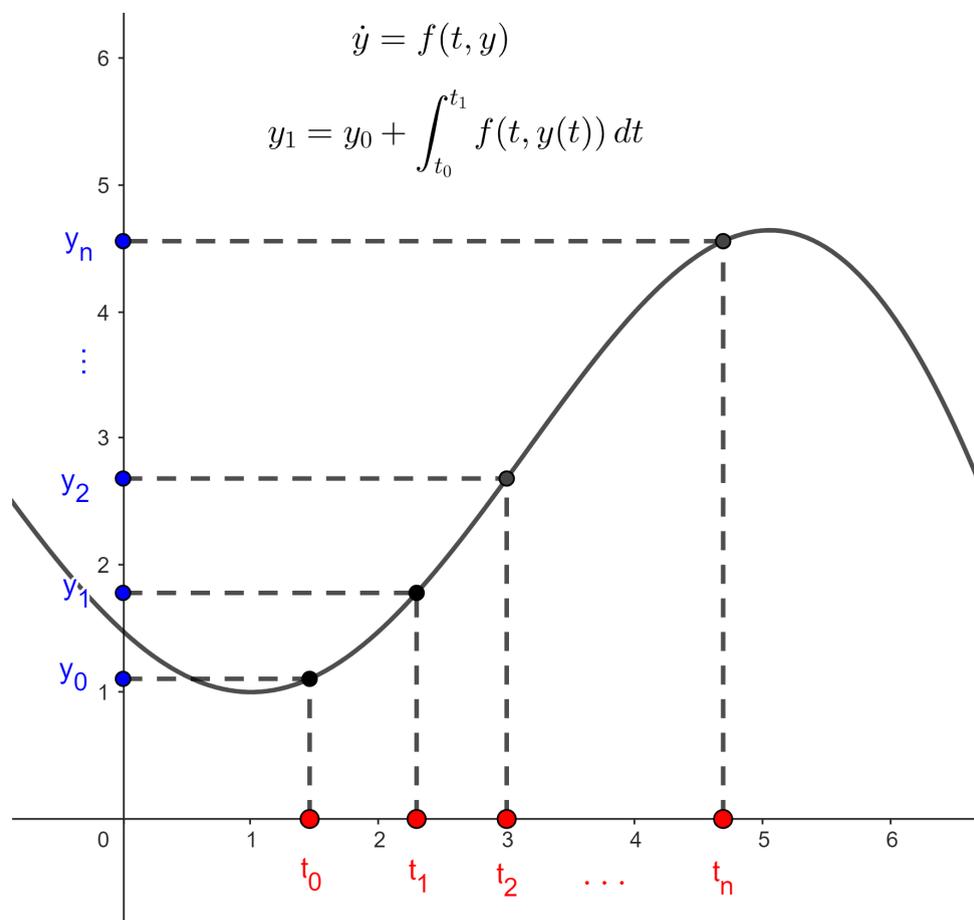


FIGURA 1.1: Representación gráfica de la aproximación de  $y_1$  a partir de  $y_0$ , como primer paso para aproximar los puntos sucesivos de la función  $y(t)$  mediante métodos de integración numérica.

Este proceso iterativo se repite para obtener una aproximación numérica de la función  $y(t)$  en todo el intervalo de integración. La precisión del resultado depende del tamaño de los pasos utilizados en el método numérico y del tipo de método que se emplee. En las siguientes secciones, se explicarán estos métodos en detalle.

## 1.2. Método de Euler

El método de Euler es uno de los métodos numéricos más sencillos para aproximar la solución de una ecuación diferencial ordinaria como la presentada en la sección anterior. Dado un valor inicial  $y_0$  en el tiempo  $t_0$ , el método de Euler estima el valor aproximado de  $y$  en un punto cercano  $t_1 = t_0 + h$ , donde  $h$  es el tamaño del paso. Este método asume que



Este proceso es particularmente útil para avanzar desde  $y_0$  y obtener una aproximación de la solución en un intervalo de tiempo. El método de Euler es simple y fácil de implementar, lo que lo convierte en una opción atractiva para problemas que requieren una aproximación inicial numérica. Sin embargo, su principal limitación es la acumulación de errores cuando el tamaño del paso  $h$  es demasiado grande, ya que la aproximación lineal utilizada por el método de Euler puede desviarse significativamente de la solución real  $y(t)$  si la función  $f(t, y)$  experimenta cambios bruscos o comportamientos no lineales.

En el contexto del problema de Cauchy, el método de Euler permite aproximar la integral

$$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt,$$

utilizando la fórmula  $w_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ , que es una aproximación de la evolución de  $y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . La simplicidad de esta aproximación implica que el tamaño del paso  $h$  debe ser suficientemente pequeño para mantener una precisión razonable. Esto puede hacer que el método de Euler no sea adecuado para problemas que requieren alta precisión o cuando  $f(t, y)$  presenta variaciones no lineales en el intervalo.

A pesar de estas limitaciones, el método de Euler sigue siendo útil en muchos casos debido a su facilidad de implementación y a su capacidad para ofrecer una primera aproximación rápida. En el *Apéndice B (A)* se presenta una implementación detallada del método de Euler.

Este método, aunque básico, sienta las bases para métodos más avanzados que utilizan ideas similares, como el *método de Euler Mejorado*, *Simpson 1/3*, *Simpson 3/8* y el *método de Runge-Kutta de cuarto orden*, que se analizarán en secciones posteriores. No obstante, el método de Euler ilustra bien cómo las soluciones numéricas se construyen paso a paso mediante la integración aproximada en intervalos discretos de tiempo.

### 1.3. Método de Euler Mejorado

El método de Euler mejorado, también conocido como método de Euler modificado o método de punto medio, es una variante que refina la precisión del método de Euler clásico al ajustar la pendiente en cada paso. En lugar de emplear únicamente la pendiente en el punto inicial, el método de Euler mejorado utiliza una combinación de la pendiente

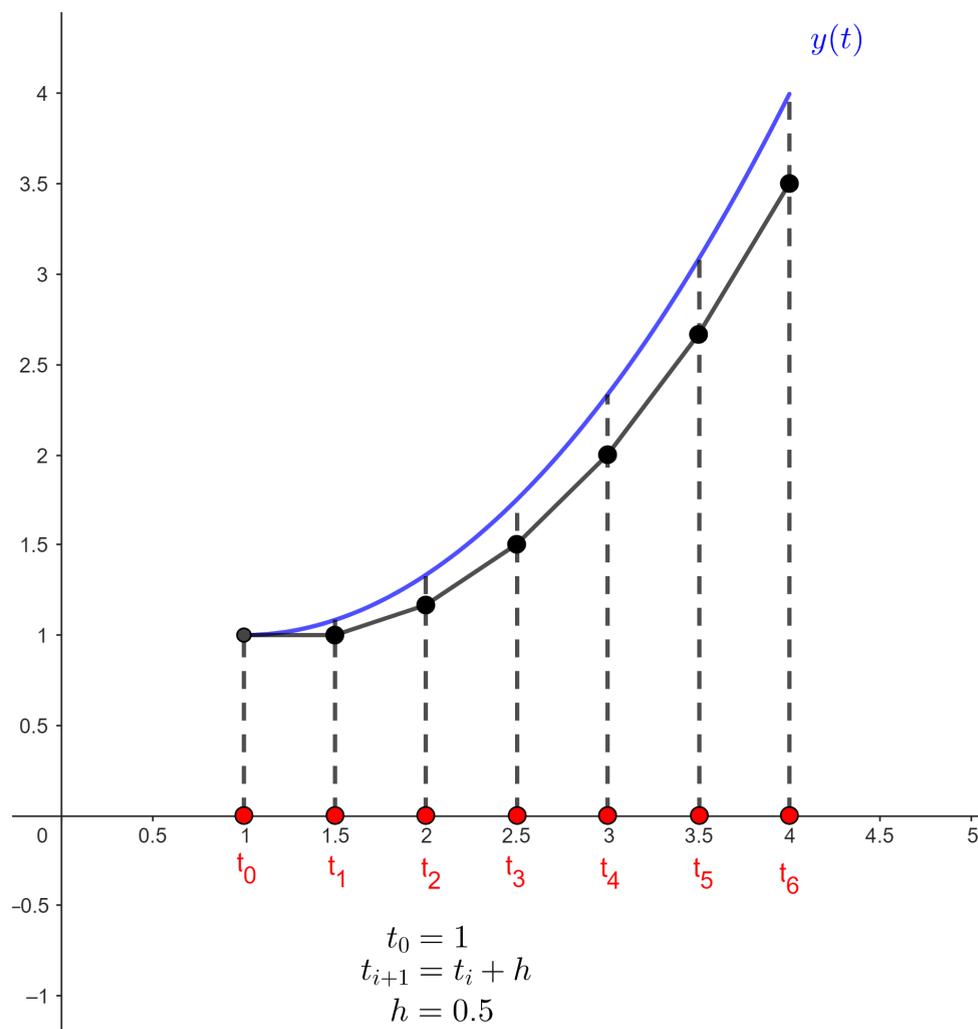


FIGURA 1.3: Representación gráfica del método de Euler. La curva muestra la evolución real de  $y(t)$ , y las líneas rectas representan las aproximaciones sucesivas que realiza el método de Euler en cada paso.

inicial y una pendiente corregida para cada intervalo, logrando así una aproximación más precisa.

Con la ecuación diferencial y condiciones iniciales presentadas en las secciones anteriores, el método de Euler mejorado avanza en dos etapas en cada paso:

1. **Predicción:** Primero, se calcula una predicción inicial de  $y$  utilizando el mismo esquema del método de Euler clásico:

$$w_{i+1}^* = y_i + hf(t_i, y_i),$$

donde  $w_{i+1}^*$  es la predicción del valor de  $y$  en el siguiente punto  $t_{i+1} = t_i + h$ .

2. **Corrección:** Posteriormente, se corrige esta predicción tomando el promedio de la pendiente en el punto inicial  $(t_i, y_i)$  y en el punto predicho  $(t_{i+1}, w_{i+1}^*)$ , obteniendo así:

$$w_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}^*)].$$

Esta corrección se interpreta geoméricamente como un ajuste de la pendiente, donde la aproximación utiliza tanto la pendiente inicial como la pendiente en el punto predicho para mejorar la precisión.

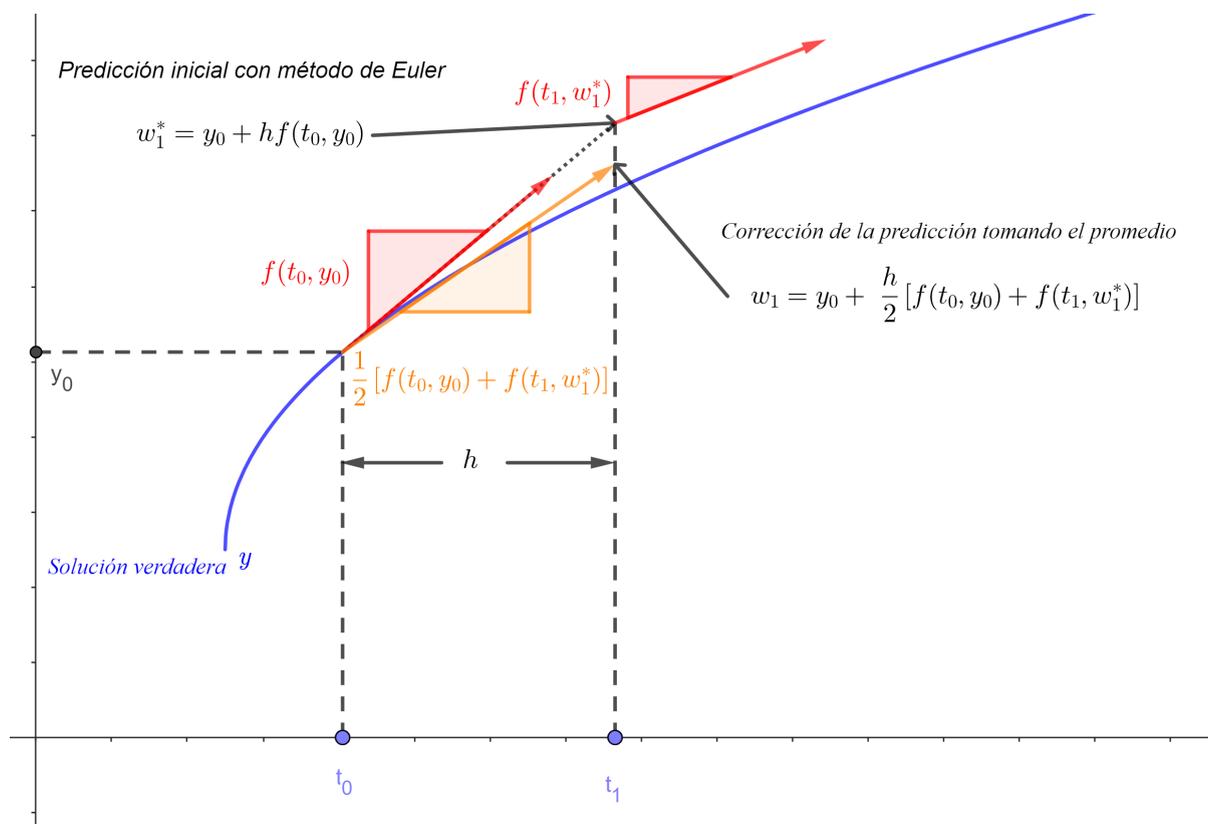


FIGURA 1.4: Representación gráfica del método de Euler mejorado, donde se utiliza el método de Euler como predicción para mejorar la aproximación.

Como se muestra en la figura 1.3, la mejora en la aproximación fue considerablemente buena aunque no se logra apreciar la diferencia que existe de esta con la curva real  $y(t)$ .

Este método se ha desarrollado de manera más extensa en *Apéndice A (A)*, permitiendo comprender un poco más sobre su desarrollo y análisis.

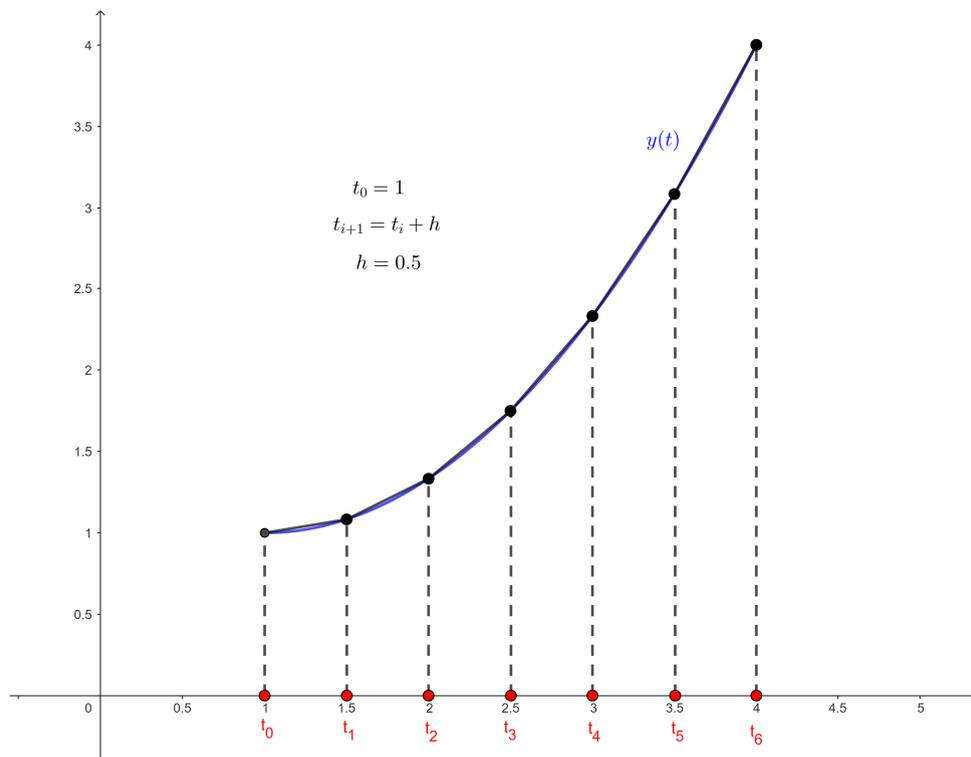


FIGURA 1.5: Representación gráfica del método de Euler mejorado. La curva muestra la evolución real de  $y(t)$ , y las líneas indican las predicciones y correcciones realizadas en cada paso para aproximar la solución.

## 1.4. Regla de Simpson 1/3

La regla de Simpson 1/3 es un método numérico que permite aproximar la integral definida de una función, particularmente útil cuando no es posible resolver la integral de manera analítica o cuando se dispone únicamente de valores discretos de la función. Este método, en comparación con los métodos de integración previamente abordados, ofrece una mayor precisión al aproximar la función en cada subintervalo mediante un polinomio cuadrático en lugar de una aproximación lineal.

Consideremos la integral de una función  $f(t, y)$  en el intervalo  $[a, b]$ :

$$I = \int_a^b f(t, y) dt$$

Para aplicar la regla de Simpson 1/3, dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ , donde  $n$  es un número par. La aproximación de la integral mediante la regla de Simpson 1/3 se expresa entonces como:

$$I \approx \frac{h}{3} \left[ f(a, y_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(t_{2i-1}, y_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(t_{2i}, y_{2i}) + f(b, y_n) \right]$$

donde  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ , y cada  $f(t_i, y_i)$  representa la evaluación de la función en los puntos de la partición  $t_i$ , con  $y_i$  siendo la correspondiente aproximación de  $y$  en esos puntos.

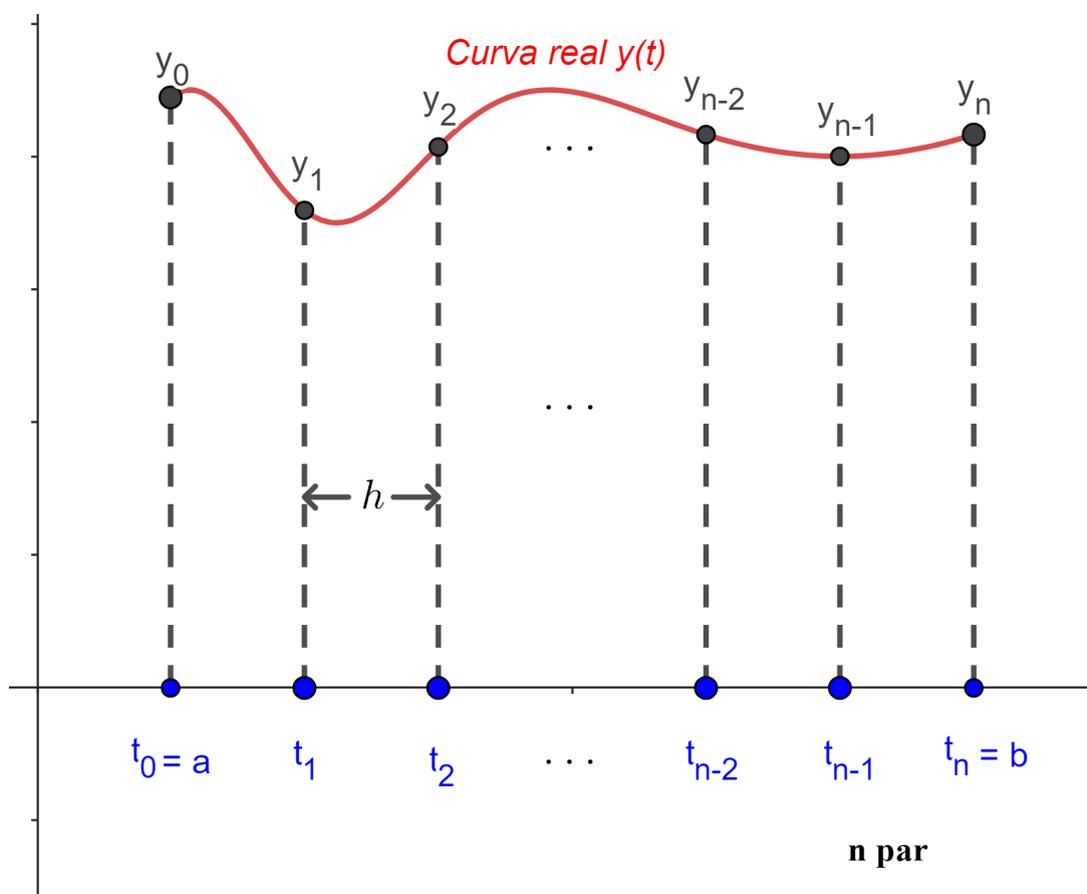


FIGURA 1.6: Representación gráfica de las condiciones iniciales para aproximar la integral  $I$ . La curva roja representa solución  $y(t)$ .

Al igual que en los métodos abordados en secciones anteriores, la regla de Simpson 1/3 combina las evaluaciones de la función  $f(t, y)$  en los puntos de la partición, pero con pesos específicos para optimizar la precisión. En este caso, las evaluaciones en los puntos intermedios impares tienen un peso de 4, en los puntos pares un peso de 2, y en los extremos del intervalo (en  $t_0 = a$  y  $t_n = b$ ) un peso de 1. Esta distribución de pesos permite una aproximación más precisa del área bajo la curva de la función.

La regla de Simpson 1/3 es un método eficiente para obtener una alta precisión en la integración de  $f(t, y)$ . Una implementación detallada de este método se presenta en el

Apéndice B (A), lo que permite comparar su precisión con la de otros métodos de integración numérica previamente discutidos.

## 1.5. Regla de Simpson 3/8

La regla de Simpson 3/8 es un método numérico que permite aproximar la integral de una función en un intervalo definido, útil en situaciones en que el intervalo de integración se divide en un número de subintervalos múltiplo de 3. Este método, en comparación con los abordados anteriormente, proporciona una mayor precisión al aproximar integrales cuando la función tiene una cuarta derivada continua y acotada en el intervalo, al utilizar una aproximación mediante un polinomio cúbico en cada subintervalo de la partición.

Consideremos la integral de una función de la forma  $f(t, y)$  en el intervalo  $[a, b]$ :

$$I = \int_a^b f(t, y) dt$$

Para aplicar la regla de Simpson 3/8, dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ , donde  $n$  es un múltiplo de 3. La aproximación de la integral mediante la regla de Simpson 3/8 se expresa entonces como:

$$I \approx \frac{3h}{8} \left[ f(a, y_0) + 3 \sum_{i=0}^{n/3-1} f(t_{3i+1}, y_{3i+1}) + 3 \sum_{i=0}^{n/3-1} f(t_{3i+2}, y_{3i+2}) + 2 \sum_{i=0}^{n/3-2} f(t_{3i+3}, y_{3i+3}) + f(b, y_n) \right]$$

donde  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ , y cada  $f(t_i, y_i)$  representa la evaluación de la función en los puntos de la partición  $t_i$ , con  $y_i$  siendo la correspondiente aproximación de  $y$  en esos puntos.

Al igual que en otros métodos de integración numérica, la regla de Simpson 3/8 pondera las evaluaciones de la función  $f(t, y)$  en los puntos de la partición con diferentes pesos para optimizar la precisión. En este caso, los extremos del intervalo tienen un peso de 1, mientras que los puntos intermedios alternan entre pesos de 3 y 2, dependiendo de su posición dentro de la partición.

La regla de Simpson 3/8, al igual que la regla de Simpson 1/3, es eficiente para obtener una alta precisión en la integración de  $f(t, y)$  cuando la función cumple con estos requisitos.

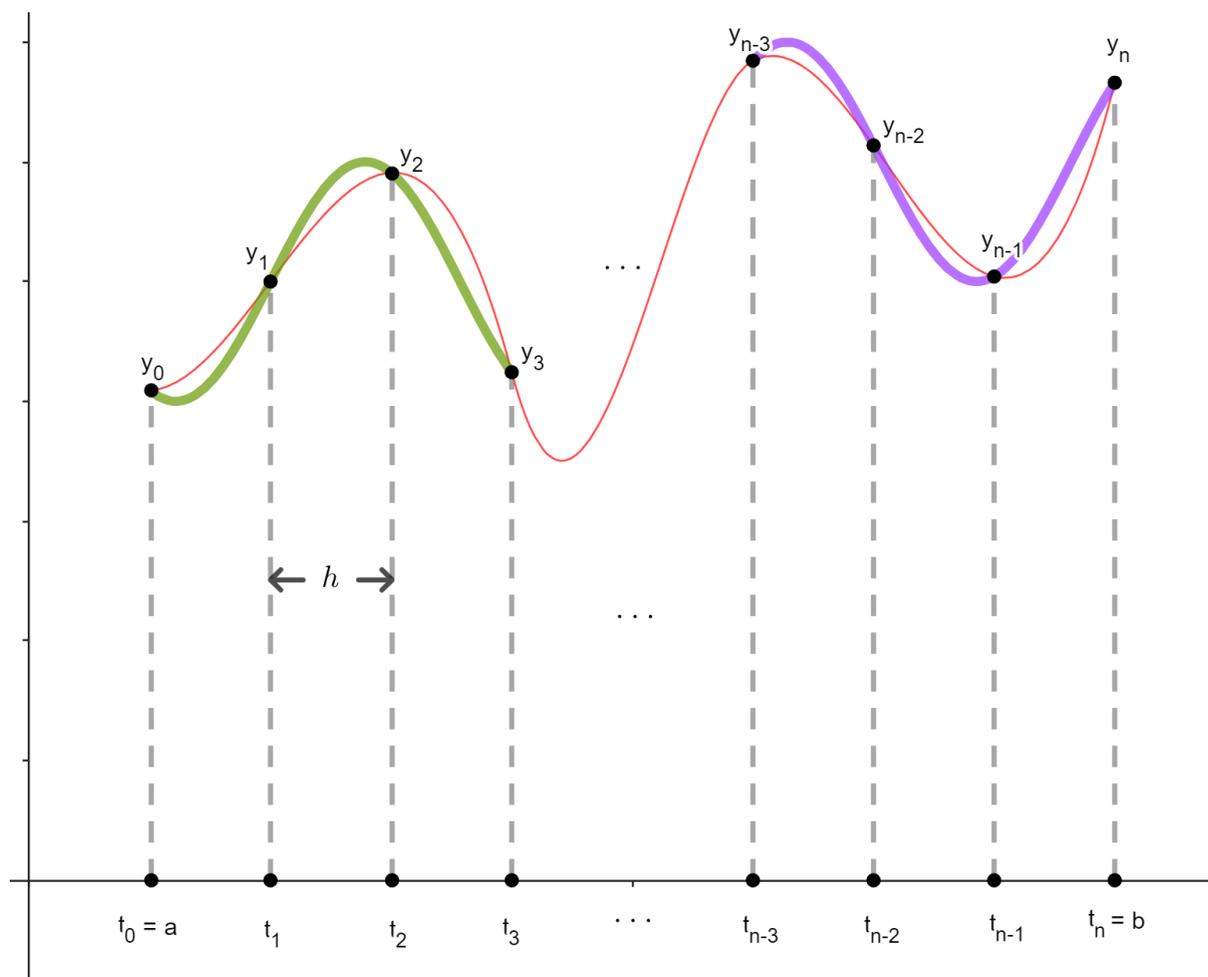


FIGURA 1.7: Representación gráfica de las condiciones iniciales para aproximar la integral  $I$ . La línea roja y delgada muestra la solución real, mientras que las líneas verde y morada representan el polinomio de tercer grado en el cual se integra para aproximar la solución en sus respectivos intervalos.

## 1.6. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

El método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) es uno de los métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con problemas de valor inicial, proporcionando una aproximación precisa en cada paso mediante una combinación ponderada de cuatro pendientes, evaluadas en puntos intermedios dentro del paso.

Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

donde  $f(t, y)$  es continua y diferenciable, y  $y(t_0) = y_0$  es la condición inicial, el objetivo es aproximar la solución en el intervalo  $[a, b]$ .

El método RK4 calcula el valor de  $y$  en el siguiente punto  $(t_{i+1}, y_{i+1})$  a partir del valor actual  $(t_i, y_i)$  y del tamaño del paso  $h$ , utilizando las siguientes fórmulas intermedias para las pendientes:

1. Cálculo de las pendientes:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, y_i) \\k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(t_i + h, y_i + hk_3)\end{aligned}$$

2. Cálculo de  $y_{i+1}$ : El valor de  $y_{i+1}$  se obtiene mediante una combinación ponderada de estas pendientes:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Cada pendiente  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  representa una estimación de la tasa de cambio de  $y$  en diferentes puntos dentro del paso  $h$ . La combinación ponderada de estas pendientes permite obtener una aproximación más precisa de la solución en  $t_{i+1}$ , al promediar las pendientes con mayor precisión que los métodos de orden inferior.

- $k_1$ : Es la pendiente inicial en el punto  $(t_i, y_i)$ .
- $k_2$ : Es la pendiente en el punto medio del paso, utilizando  $k_1$  para estimar  $y$  en  $t_i + \frac{h}{2}$ .
- $k_3$ : Es otra pendiente en el punto medio del paso, pero utilizando  $k_2$  para ajustar la estimación de  $y$ .
- $k_4$ : Es la pendiente al final del paso, calculada con  $y$  en  $t_i + h$  estimado a partir de  $k_3$ .

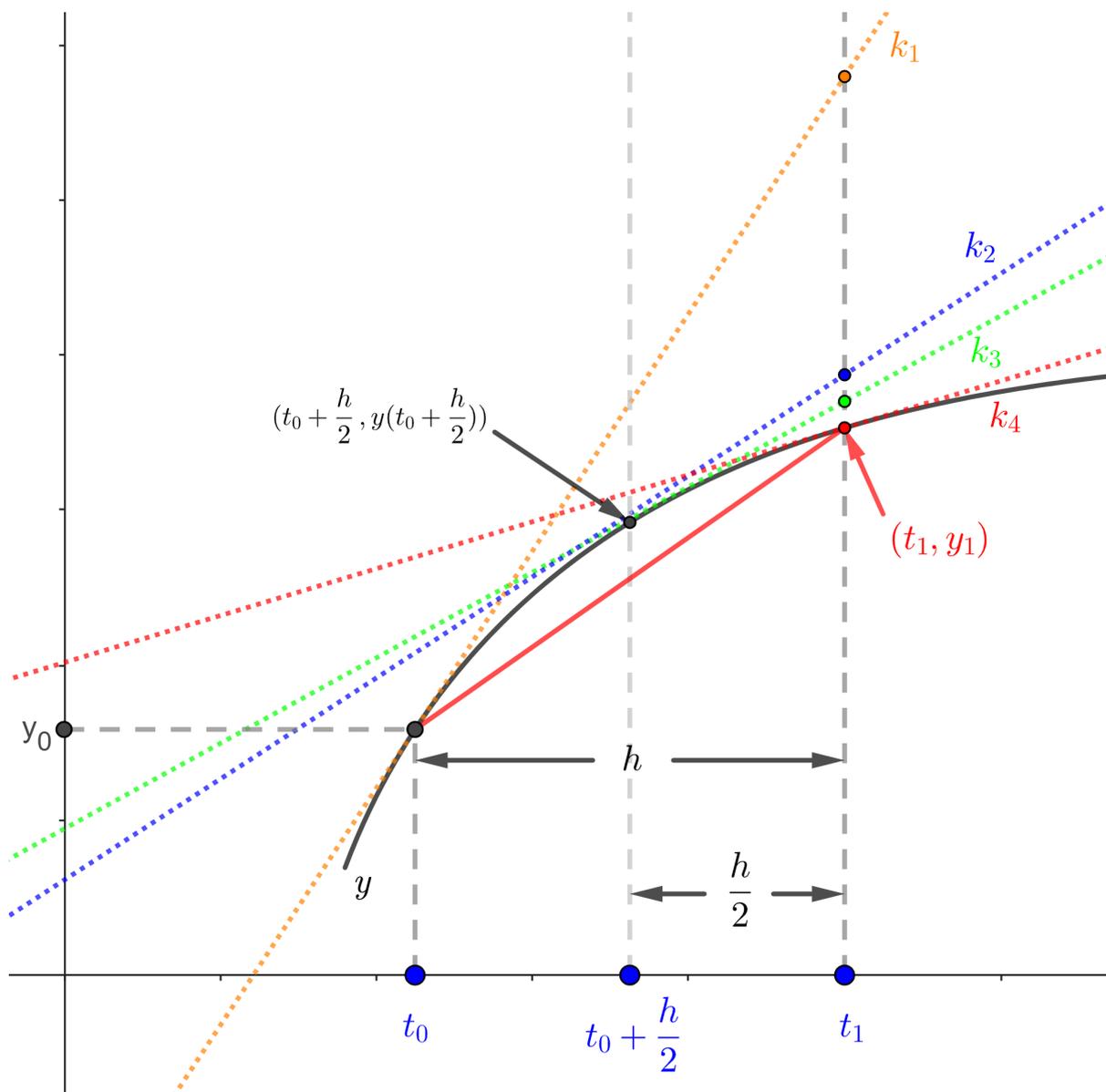


FIGURA 1.8: Representación gráfica de las comparaciones entre las pendientes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ . Se ilustra cómo estas pendientes estimadas sirven para dar con una mejor aproximación con el método RK4 para el primer paso  $t_1$ .

# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo se exploran los antecedentes históricos y conceptuales del problema de los tres cuerpos, destacando su evolución desde los aportes iniciales de Newton y Poincaré hasta los avances modernos en métodos numéricos y variacionales. Además, se presentan los enfoques utilizados para identificar soluciones periódicas, con énfasis en las coreografías relativas, que forman la base de los desarrollos abordados en este trabajo.

### 2.1. Introducción histórica al problema de los tres cuerpos

El problema de los  $n$  cuerpos es uno de los desafíos clásicos en las matemáticas y la física, formulado inicialmente para describir las trayectorias de cuerpos bajo la influencia de la gravedad mutua. En particular, el problema de los tres cuerpos, que estudia la interacción gravitacional entre tres masas puntuales, ha sido una fuente de inspiración y complejidad debido a su naturaleza intrínsecamente no lineal y, en muchos casos, caótica.

El interés por este problema surge desde los trabajos de Isaac Newton, quien resolvió el caso especial de dos cuerpos con su teoría de la gravitación universal. Sin embargo, al añadir un tercer cuerpo, la solución exacta dejó de ser posible mediante métodos analíticos, requiriendo aproximaciones numéricas o enfoques geométricos para describir sus trayectorias. Este problema no sólo es relevante por sus implicaciones teóricas, sino también por sus aplicaciones en astrofísica, mecánica orbital y sistemas dinámicos [1].

Un hito importante en la comprensión del problema fue el trabajo de Henri Poincaré a finales del siglo XIX, quien demostró que el movimiento de tres cuerpos podía ser altamente sensible a las condiciones iniciales, inaugurando el estudio del caos determinista. Poincaré también introdujo el concepto de *órbitas periódicas*, trayectorias que se repiten después de un tiempo determinado, como un enfoque para comprender la dinámica subyacente [2].

En el siglo XX, el desarrollo de métodos computacionales facilitó el modelado de trayectorias complejas y el descubrimiento de soluciones periódicas con alta precisión. Trabajos recientes como el de Abouelmagd et al. (2019) han extendido estos avances al estudiar órbitas periódicas perturbadas en el problema restringido de tres cuerpos [3], mientras que Cruz y Dilão (2020) abordaron la estabilidad de órbitas circulares en este sistema [4]. Por su parte, Quarles y Musielak (2014) ofrecieron una revisión exhaustiva de las contribuciones modernas al problema de los tres cuerpos [5].

En este contexto, el uso de métodos variacionales ha emergido como una herramienta poderosa para encontrar órbitas periódicas. Trabajos como el de Parker y Schneider (2022) han demostrado que estos métodos permiten identificar soluciones incluso en sistemas altamente inestables [6].

Entre estas soluciones destacan las *coreografías relativas*, trayectorias simétricas que permiten a múltiples cuerpos seguir caminos repetitivos en un sistema rotatorio. Estas soluciones no sólo son visualmente llamativas, sino que también ofrecen un marco para explorar simetrías y estructuras internas del sistema [7].

La presente tesis se inscribe dentro de esta tradición, centrándose en el análisis de nuevas coreografías relativas. Además, se busca ampliar el conocimiento existente al explorar nuevas configuraciones generadas por un conjunto denso de velocidades angulares.

## 2.2. Antecedentes sobre soluciones

A principios de la década de 1970, Broucke y Boggs publicaron un artículo que presentó aproximadamente 122 nuevas soluciones al problema de los tres cuerpos en el plano con masas iguales [8]. De estas soluciones, cuatro se destacaron por sus interesantes propiedades de simetría. Estas soluciones fueron etiquetadas con los números 1, 4, 6 y 40.

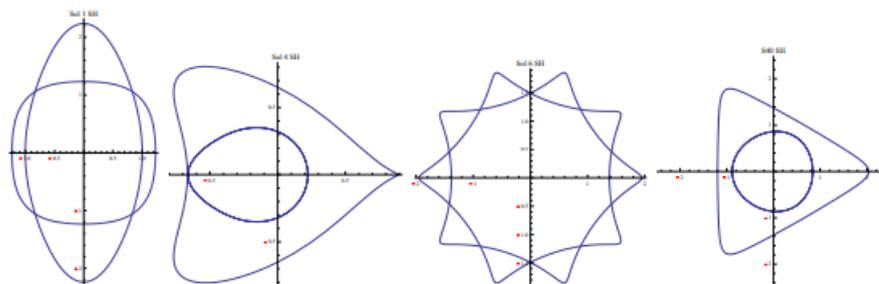
Las soluciones se obtuvieron mediante integración con el método de Runge-Kutta y métodos recurrentes de series de potencias, utilizando pasos variables pero sin regularización.

Este proceso se realizó en un *sistema heliocéntrico* (SH), un sistema de coordenadas donde el origen se encuentra en el centro de masa de uno de los tres cuerpos. Este enfoque permite reducir los grados de libertad al mantener una partícula en el origen. Sin embargo, las soluciones 1, 4, 6 y 40 resultan particularmente interesantes cuando se representan en un *sistema baricéntrico inercial* (SBI), un sistema donde el origen está ubicado en el centro de masa del sistema completo y permanece fijo en el plano.

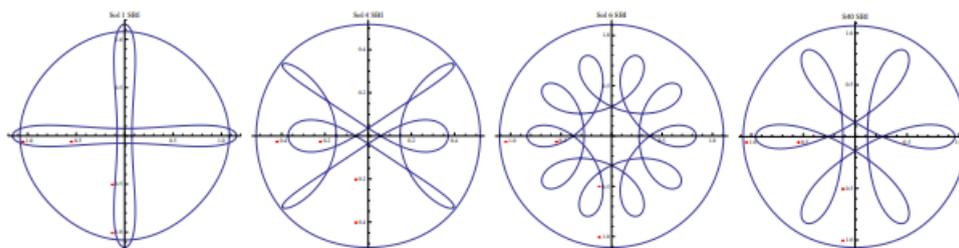
En la siguiente tabla se muestran las condiciones iniciales de dichas cuatro soluciones en SH.

$N$	$x_1(0)$	$y_1(0)$	$x_2(0)$	$y_2(0)$	$\frac{T_H}{2}$
1	1.003649	1.263550	-1.232358	0.794760	6.061160
4	0.888347	0.143591	0.222470	-2.077961	2.134540
6	1.381744	1.336857	1.946311	0.236280	6.668193
40	0.840381	-0.922163	2.037556	0.356653	$2\pi$

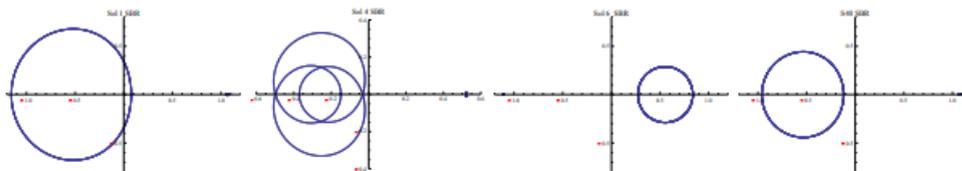
Las correspondientes ilustraciones de las soluciones son



Estas soluciones, representadas inicialmente en SH, son transformadas al *sistema baricéntrico inercial* (SBI), como se muestra en las siguientes gráficas. En el SBI, la simetría inherente de las soluciones se vuelve más evidente debido a la posición fija del centro de masa en el espacio.



Finalmente, al ser montadas estas soluciones en un *sistema baricéntrico rotatorio* (SBR), que comparte el centro de masa con el SBI pero rota alrededor de éste, las soluciones exhiben simetrías aún más notables:



Cabe destacar que estas soluciones no fueron originalmente calculadas buscando propiedades de simetría. Sin embargo, Richard Venderbei recalculó la solución 1 utilizando el principio de mínima acción, para lo cual empleó una representación basada en series de Fourier y aplicó un método de optimización por puntos interiores.

En este trabajo, no seguimos esta metodología porque no proporciona un enfoque claro para evitar caer en falsos mínimos ni ofrece un método consistente para reproducir resultados. Venderbei llama a la solución 1 solución Ducatti y calcula otra coreografía relativa muy similar a la solución 40, pero en lugar de tener cinco ejes de simetría, esta última cuenta con quince. Es importante resaltar que Venderbei aprovecha que la simetría de las aproximaciones iniciales se conserva durante el proceso de optimización.

# Capítulo 3

## Sistemas de ecuaciones y sistemas de coordenadas

Es mucho más sencillo reportar las soluciones proporcionando sus condiciones iniciales en SH, pues el número de ecuaciones diferenciales se reducen. El costo de reducir la cantidad de dichas ecuaciones es que después se tendría que hacer un cambio de coordenadas para ser representadas en otros sistemas referenciales. Por esta razón, es importante tener las expresiones de las condiciones iniciales en los tres sistemas de referencia (SH, SBI y SBR).

### 3.1. Sistema de ecuaciones

Para simplificar las ecuaciones del problema de los tres cuerpos y facilitar su análisis numérico, se realiza un **adimensionamiento** que permita establecer  $G = 1$ . Esto se logra mediante una adecuada elección de unidades características para la masa, la longitud y el tiempo del sistema, absorbiendo la constante gravitacional  $G$  en dichas unidades.

De este modo, las ecuaciones de movimiento quedan expresadas en forma adimensional, eliminando  $G$  como parámetro explícito. La constante gravitacional se hace igual a 1 sin pérdida de generalidad y las ecuaciones resultantes describen la dinámica gravitacional de manera simplificada.

Con este adimensionamiento, las ecuaciones de movimiento para el problema de los tres cuerpos quedan simplificadas, lo que facilita su resolución mediante métodos numéricos.

Si definimos  $\psi_i(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t))$  como las coordenadas de las masas  $i = 0, 1, 2$  en SBI respecto al tiempo  $t$ , el sistema de ecuaciones de movimiento queda descrito como:

$$m_i \ddot{\psi}_i = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\psi_i - \psi_j}{r_{ij}} = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 m_i m_j \frac{\psi_i - \psi_j}{r_{ij}^3},$$

donde  $\psi_i$  y  $\psi_j$  representan las posiciones de los cuerpos  $i$  y  $j$ , respectivamente. La distancia  $r_{ij}$  entre los cuerpos está dada por:

$$r_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2}.$$

Este sistema general se puede desglosar en seis ecuaciones diferenciales de segundo orden, asociadas a las componentes  $\xi$  y  $\eta$  de cada masa:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_0 &= -m_1 \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{01}^3} - m_2 \frac{\xi_0 - \xi_2}{r_{02}^3}, \\ \ddot{\eta}_0 &= -m_1 \frac{\eta_0 - \eta_1}{r_{01}^3} - m_2 \frac{\eta_0 - \eta_2}{r_{02}^3}, \\ \ddot{\xi}_1 &= -m_0 \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_{01}^3} - m_2 \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{12}^3}, \\ \ddot{\eta}_1 &= -m_0 \frac{\eta_1 - \eta_0}{r_{01}^3} - m_2 \frac{\eta_1 - \eta_2}{r_{12}^3}, \\ \ddot{\xi}_2 &= -m_0 \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{02}^3} - m_1 \frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}^3}, \\ \ddot{\eta}_2 &= -m_0 \frac{\eta_2 - \eta_0}{r_{02}^3} - m_1 \frac{\eta_2 - \eta_1}{r_{12}^3}. \end{aligned}$$

Aquí, las coordenadas  $\psi_i$  representan las posiciones relativas de las masas en el espacio bidimensional. Estas ecuaciones se basan en la atracción gravitacional y la dinámica del sistema de tres cuerpos, integrando la dependencia espacial y temporal.

Es importante considerar el cambio a coordenadas en SH, ya que esto reduce la cantidad de ecuaciones y facilita obtener las soluciones en SBI a partir de las soluciones en SH. Para realizar este cambio, el origen se sitúa en la masa cero mediante el siguiente ajuste:

$$(x_i(t), y_i(t)) = (\xi_i(t), \eta_i(t)) - (\xi_0(t), \eta_0(t)), \quad i = 0, 1, 2.$$

Este cambio implica que las nuevas coordenadas  $(x_i(t), y_i(t))$  están referenciadas al marco cuyo origen coincide con la posición de la masa  $i = 0$  en cada instante de tiempo  $t$ . Este

ajuste es esencial para simplificar la representación de las trayectorias relativas de las masas en el sistema.

El resultado es el siguiente:

- El origen en SH se mantiene en  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .
- Para las otras dos masas, las coordenadas se definen como:
  - $x_1 = \xi_1 - \xi_0$ ,
  - $y_1 = \eta_1 - \eta_0$ ,
  - $x_2 = \xi_2 - \xi_0$ ,
  - $y_2 = \eta_2 - \eta_0$ .

Esto implica que, conociendo las seis condiciones iniciales, se pueden calcular las ocho condiciones iniciales en SH:

- Para las coordenadas iniciales:
  - $x_1(0) = \xi_1(0) - \xi_0(0)$ ,
  - $y_1(0) = \eta_1(0) - \eta_0(0)$ ,
  - $x_2(0) = \xi_2(0) - \xi_0(0)$ ,
  - $y_2(0) = \eta_2(0) - \eta_0(0)$ .
- Para las velocidades iniciales:
  - $\dot{x}_1(0) = \dot{\xi}_1(0) - \dot{\xi}_0(0)$ ,
  - $\dot{y}_1(0) = \dot{\eta}_1(0) - \dot{\eta}_0(0)$ ,
  - $\dot{x}_2(0) = \dot{\xi}_2(0) - \dot{\xi}_0(0)$ ,
  - $\dot{y}_2(0) = \dot{\eta}_2(0) - \dot{\eta}_0(0)$ .

Cabe destacar que, si  $\dot{\xi}_i(0) = 0$  para  $i = 0, 1, 2$ , entonces  $\dot{x}_i(0) = 0$  para  $i = 1, 2$ .

### 3.1.1. Ecuaciones en SH

Las ecuaciones que describen las trayectorias de las masas en SH se obtienen considerando las relaciones entre las coordenadas en SBI y las de SH:

$$\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i - \ddot{\xi}_0, \quad \ddot{y}_i = \ddot{\eta}_i - \ddot{\eta}_0.$$

Con base en esto, las ecuaciones para las segundas derivadas de las coordenadas en SH son:

$$\ddot{x}_1 = -(m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_{01}^3} + m_2 \left( \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} - \frac{x_2}{r_{02}^3} \right),$$

$$\ddot{y}_1 = -(m_0 + m_1) \frac{y_1}{r_{01}^3} + m_2 \left( \frac{y_2 - y_1}{r_{12}^3} - \frac{y_2}{r_{02}^3} \right),$$

$$\ddot{x}_2 = -(m_0 + m_2) \frac{x_2}{r_{02}^3} + m_1 \left( \frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} - \frac{x_1}{r_{01}^3} \right),$$

$$\ddot{y}_2 = -(m_0 + m_2) \frac{y_2}{r_{02}^3} + m_1 \left( \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - \frac{y_1}{r_{01}^3} \right).$$

Para convertir las coordenadas de SH a SBI, es necesario calcular las condiciones iniciales en SBI a partir de las condiciones iniciales en SH. Para ello, se debe considerar el centro de masa en SH, calculado como:

$$\left( \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_0 + m_1 + m_2} \right).$$

Con base en esto, las siguientes son las ecuaciones que describen las coordenadas en SBI:

$$\xi_0 = -\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

$$\xi_1 = x_1 + \xi_0,$$

$$\xi_2 = x_2 + \xi_0,$$

$$\eta_0 = -\frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

$$\eta_1 = y_1 + \eta_0,$$

$$\eta_2 = y_2 + \eta_0.$$

Con estas relaciones, las condiciones iniciales para SBI se obtienen de la siguiente manera:

- Para las posiciones iniciales:

- $\xi_0(0) = -\frac{m_1x_1(0)+m_2x_2(0)}{m_0+m_1+m_2},$

- $\xi_1(0) = x_1(0) + \xi_0(0),$

- $\xi_2(0) = x_2(0) + \xi_0(0),$

- $\eta_0(0) = -\frac{m_1y_1(0)+m_2y_2(0)}{m_0+m_1+m_2},$

- $\eta_1(0) = y_1(0) + \eta_0(0),$

- $\eta_2(0) = y_2(0) + \eta_0(0).$

- Para las velocidades iniciales:

- $\dot{\xi}_0(0) = -\frac{m_1\dot{x}_1(0)+m_2\dot{x}_2(0)}{m_0+m_1+m_2},$

- $\dot{\xi}_1(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{\xi}_0(0),$

- $\dot{\xi}_2(0) = \dot{x}_2(0) + \dot{\xi}_0(0),$

- $\dot{\eta}_0(0) = -\frac{m_1\dot{y}_1(0)+m_2\dot{y}_2(0)}{m_0+m_1+m_2},$

- $\dot{\eta}_1(0) = \dot{y}_1(0) + \dot{\eta}_0(0),$

- $\dot{\eta}_2(0) = \dot{y}_2(0) + \dot{\eta}_0(0).$

Por último, si  $\dot{x}_i(0) = 0$  para  $i = 1, 2$ , entonces  $\dot{\xi}_i(0) = 0$  para  $i = 0, 1, 2$ .

### 3.1.2. Reducción a ecuaciones de primer orden en SH

Para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales de segundo orden, es necesario descomponerlas en un sistema equivalente de primer orden. Consideremos las ecuaciones de movimiento en SH:

$$\ddot{x}_i = f_{x_i}(x_1, x_2), \quad \ddot{y}_i = f_{y_i}(y_1, y_2), \quad i = 1, 2.$$

Donde  $x_i$  y  $y_i$  representan las coordenadas de las masas en SH, y  $f_{x_i}$  y  $f_{y_i}$  son las funciones que describen las aceleraciones debido a la atracción gravitacional. Introducimos entonces las variables auxiliares:

$$u_i = \dot{x}_i \quad \text{y} \quad v_i = \dot{y}_i, \quad i = 1, 2.$$

De esta forma, las ecuaciones de segundo orden se transforman en un sistema de 8 ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, \\ \dot{y}_i &= v_i, \\ \dot{u}_i &= f_{x_i}(x_1, x_2), \\ \dot{v}_i &= f_{y_i}(y_1, y_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

La transformación a un sistema de primer orden es particularmente útil para implementar algoritmos numéricos como el método de Runge-Kutta, que aproximan soluciones iniciales iterativamente. Además, este procedimiento permite incorporar de manera natural las condiciones iniciales para las posiciones  $x_i$  y  $y_i$ .

Por lo tanto, este cambio de variable constituye un paso importante para el análisis y simulación numérica de las trayectorias en el problema de tres cuerpos bajo condiciones iniciales específicas.

## 3.2. Cambio de coordenadas en SBI a SBR

Los siguientes resultados y definiciones son necesarias para tener un mejor contexto respecto a cómo trasladar coordenadas en SBI a SBR.

### 3.2.1. Transformación en SBR

El cambio de coordenadas en SBI a SBR está dado por:

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}.$$

Quedando de esta manera las expresiones de las coordenadas para las masas  $i = 0, 1, 2$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= X_i(t) \cdot \cos(\omega t) - Y_i(t) \cdot \text{sen}(\omega t), \\ \eta_i(t) &= X_i(t) \cdot \text{sen}(\omega t) + Y_i(t) \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Para nuestros propósitos sólo es necesario encontrar la forma de rotar cada punto de las soluciones en SBI.

# Capítulo 4

## Cálculo de coreografías relativas.

Para simplificar las expresiones, es conveniente aprovechar las propiedades de las soluciones, como la simetría, que puede ayudar a reducir la complejidad del cálculo.

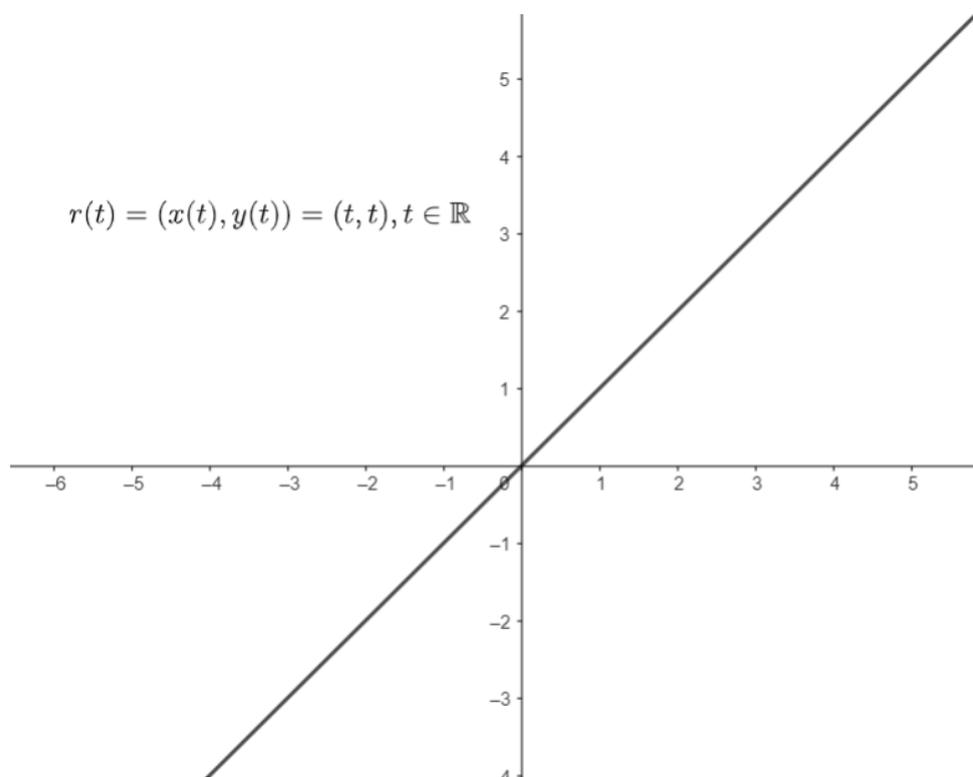
### 4.1. Obtención de coreografías relativas via modificación de velocidad angular

En el artículo de Broucke y Boggs, se considera una sola velocidad angular para montar una solución en SBR, a saber,  $\omega = \frac{2\pi}{\tau_{BI}}$ , donde  $\tau_{BI}$  es el período en SBI. En este trabajo se pretende explorar dicha velocidad angular y se demuestra que existe un conjunto de racionales que multiplican a  $\omega$  y también generan coreografías relativas, expandiendo así el número de coreografías dada una solución con propiedades de simetría.

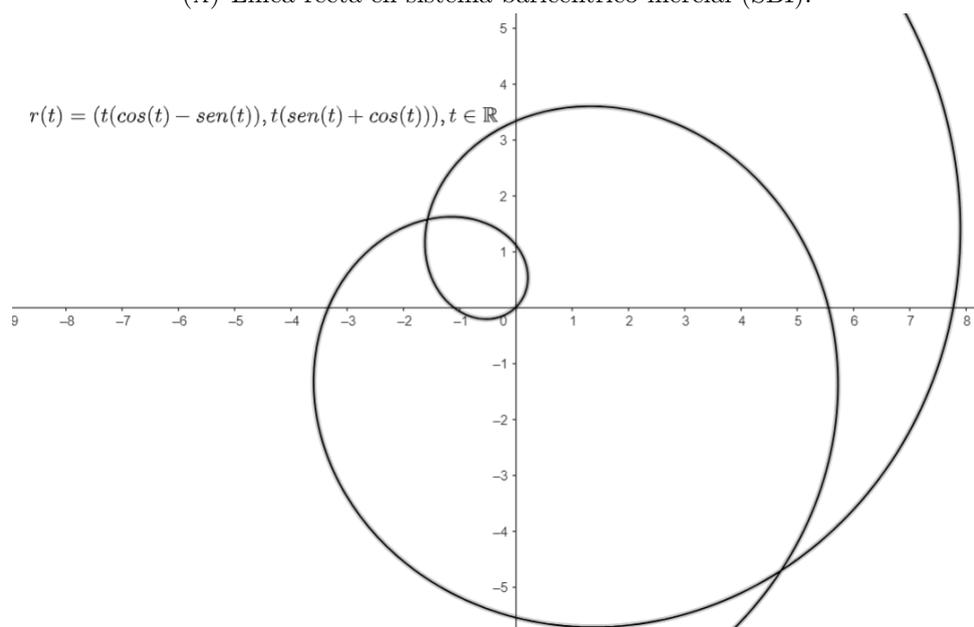
Para lograr esto, es necesario prestar mucha atención a las propiedades de simetría de las soluciones que se pretende obtener.

#### 4.1.1. Simetrías de las soluciones

A continuación, se describen en detalle las propiedades de simetría, algunos de los cuales son más generales que los mostrados por Broucke y Boggs. La figura muestra la



(A) Línea recta en sistema baricéntrico inercial (SBI).



(B) Línea curva en sistema baricéntrico rotatorio (SBR).

FIGURA 4.1: Transformación de una línea recta al pasar de un sistema baricéntrico inercial (SBI) a un sistema baricéntrico rotatorio (SBR). En el SBI, la línea es estática respecto al centro de masa, mientras que en el SBR adopta una curvatura debido a la rotación.

solución 6<sup>1</sup>, cada órbita tiene cinco ejes de simetría. Para que una órbita se sobreponga

<sup>1</sup>Nótese que la solución seis mostrada aquí no coincide con la dada por Broucke y Boggs. Esta versión es simétrica respecto al origen y se obtiene con una rotación de  $\pi$  radianes.

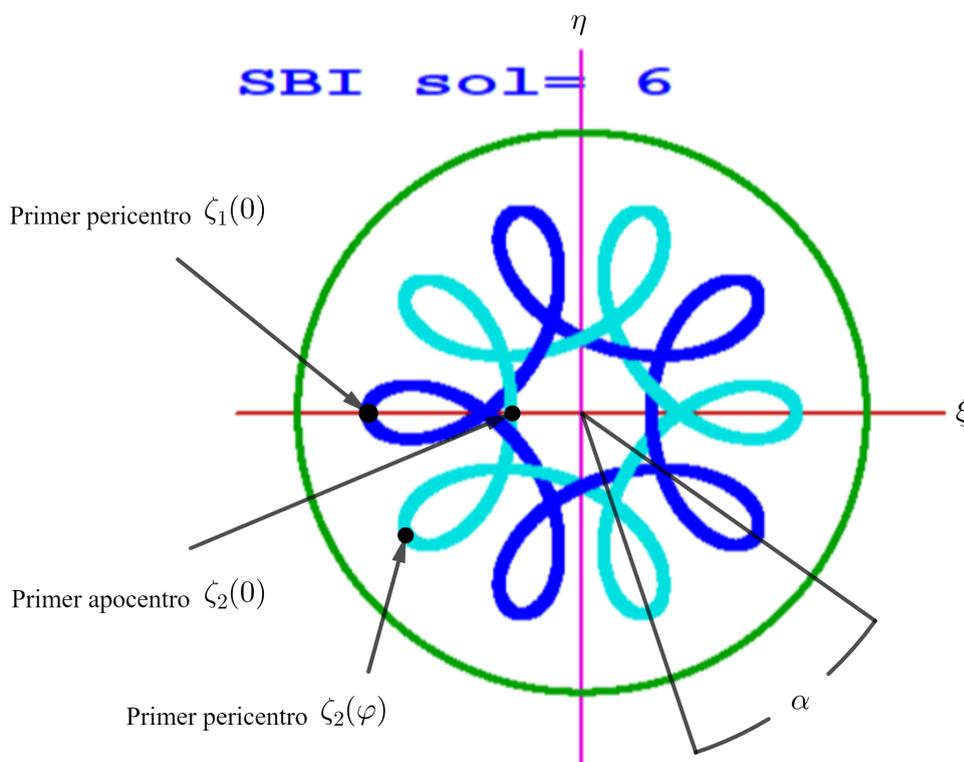


FIGURA 4.2: Solución 6 en SBI.

sobre otra, se requiere de una rotación en SBI.

Por comodidad, adoptamos la notación compleja:  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ , donde  $i$  denota la unidad imaginaria. En esta notación,  $\zeta(t)$  representa una órbita de período  $\tau_{BI}$ . Es importante señalar que, a partir de aquí, la letra  $i$  será utilizada exclusivamente como notación para la unidad imaginaria y no debe confundirse con el subíndice  $i = 0, 1, 2, \dots$  que aparece en otras expresiones.

En un sistema periódico, como el que describe  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$ , los pericentros (distancia mínima al origen) y apocentros (distancia máxima al origen) son puntos claves que ocurren en fases opuestas de la órbita. Las órbitas que analizaremos en este trabajo, como las soluciones 1, 4, 6 y 40, presentan las siguientes características, que describiremos en general para las órbitas  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$ , por lo tanto, se tendrá como hipótesis los siguientes puntos:

- La órbita  $\zeta_1(t)$  comienza en el pericentro  $\zeta_1(0)$ , mientras que  $\zeta_2(t)$  comienza en el apocentro  $\zeta_2(0)$ , es decir:

$$|\zeta_1(0)| = \max_t |\zeta_1(t)|, \quad |\zeta_2(0)| = \min_t |\zeta_2(t)|.$$

- Los pericentros son tangentes a un círculo centrado en el origen, y lo mismo ocurre con los apocentros:

$$\min_t |\zeta_1(t)| = \min_t |\zeta_2(t)| = r, \quad \max_t |\zeta_1(t)| = \max_t |\zeta_2(t)| = R.$$

- Al rotar  $\zeta_1(t)$  por un ángulo  $\alpha$ , se logra que se sobreponga a  $\zeta_2(t)$ :

$$|\zeta_2(t)| = |e^{i\alpha} \cdot \zeta_1(t)|, \quad \forall t \in (0, \tau_{BI}),$$

donde  $\alpha$  está dado según el número de simetrías  $n$ :

$$\alpha \equiv \frac{2\pi}{2n} \pmod{2\pi}.$$

- Se necesita un intervalo de tiempo para que un punto que parte del primer pericentro de  $\zeta_1(t)$  alcance su primer apocentro. Sea  $\varphi$  este intervalo de tiempo, el cual está dado por:

$$\varphi \equiv \frac{\tau_{BI}}{2n} \pmod{\tau_{BI}}.$$

De esta manera,  $\zeta_2(t)$ , que se obtiene con una rotación de ángulo  $\alpha$  y un retraso en el tiempo  $\varphi$ , se define como:

$$\zeta_2(t) = e^{i\alpha} \cdot \zeta_1(t - \varphi).$$

Nótese que cada órbita tiene  $n$  pericentros y  $n$  apocentros. Es más general intentar sobreponer cada pericentro de  $\zeta_1(t)$  sobre el primer apocentro de  $\zeta_2(t)$ , el que se encuentra sobre la horizontal ( $\zeta_2(0)$ ). Basado en lo anterior, se puede hacer la siguiente definición.

**Definición 4.1.1.** Dos órbitas  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$  en SBI, con  $n$  ejes de simetría, se dice que tienen simetría especial si se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$  son de clase  $C^1$  y simétricas respecto al eje horizontal.
2.  $\zeta_1(0) = (\xi_1(0), 0)$ ,  $\zeta_2(0) = (\xi_2(0), 0)$ , es decir, las órbitas inician en el eje horizontal.
3.  $\zeta_2(t) = e^{i\alpha} \cdot \zeta_1(t - \varphi)$ .

Donde:

- $\alpha$  representa el ángulo de rotación aplicado a  $\zeta_1(t)$  para alinear su trayectoria con la de  $\zeta_2(t)$  en el plano complejo.
- $\varphi$  corresponde a un desplazamiento temporal que define el desfase entre las trayectorias de  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$ . Este retraso temporal indica cómo se debe ajustar la variable de tiempo en  $\zeta_1(t)$  para sincronizar su evolución con la de  $\zeta_2(t)$ .

**Observación 4.1.2.** La siguiente observación describe la relación entre el ángulo  $\alpha$  y el retraso en el tiempo  $\varphi$ :

- $\alpha \equiv \frac{2\pi}{2n} \cdot (2k_0 + 1) \pmod{2\pi}$ , donde  $k_0 = 0, \dots, n - 1$ , que indica el número de pericentro.
- $\varphi \equiv \frac{\tau_{BI}}{2n} \cdot (2k_0 + 1) \pmod{\tau_{BI}}$ , para el mismo rango de  $k_0$ .

## 4.2. Órbitas en SBR

Sea  $Z_j(t) = X_j(t) + iY_j(t)$ , para  $j = 1, 2$ , la órbita que se obtiene al representar en SBR la órbita  $\zeta_j(t)$ . Dado que en SBR rota con velocidad angular constante  $\omega$  respecto a SBI, esto es equivalente a que en SBI se gire con velocidad angular constante  $-\omega$  respecto a SBR. Por este motivo,  $Z_j(t)$  se calcula de la siguiente manera:

$$Z_j(t) = e^{-i\omega t} \cdot \zeta_j(t).$$

Como veremos más adelante, representar órbitas con simetría especial en SBR con la velocidad angular constante adecuada  $\omega$  produce un fenómeno interesante. De hecho, se obtiene una situación donde dos órbitas se superponen, una de las cuales tiene un retraso en el tiempo. Un ejemplo de este fenómeno se ilustra en la figura 4.3.

A partir de este fenómeno, se puede hacer la siguiente definición:

**Definición 4.2.1.** Sean  $Z_1(t)$  y  $Z_2(t)$  órbitas en SBR con velocidad angular  $\omega$ . Se dice que son una coreografía relativa si:

$$Z_2(t) = Z_1(t - \varphi) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

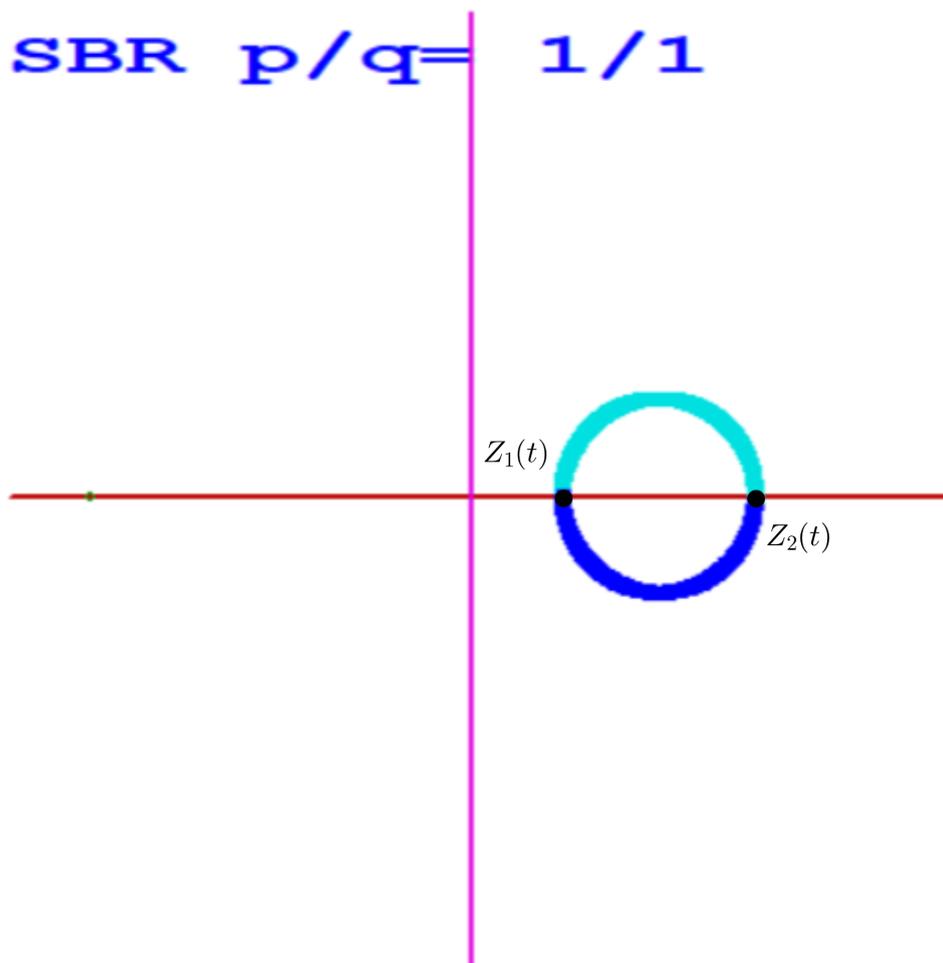


FIGURA 4.3: Solución 6 en SBR.

donde  $\varphi$  es un retraso en el tiempo.

El siguiente resultado es de particular importancia, ya que amplía el concepto de coreografía relativa al extender considerablemente el conjunto de velocidades angulares  $\omega$  mediante la introducción de factores racionales  $\frac{p}{q}$  adecuados. De hecho, a partir de una solución conocida con simetría especial, se puede generar un número infinito y numerable de coreografías de este tipo.

Además, este resultado proporciona un camino para explorar la posibilidad de encontrar una continuidad de órbitas periódicas en el problema de tres cuerpos con masas iguales, no necesariamente a lo largo de un continuo de valores de un parámetro, pero sí en un conjunto denso.

Las coreografías obtenidas también pueden servir como punto de partida para generar nuevas soluciones con alta simetría en SBI. Esto sigue siendo cierto incluso si  $\frac{p}{q}$  no sigue el patrón propuesto, es decir, si no genera una coreografía relativa.

**Teorema 4.1.** Sean  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$  órbitas con simetría especial, cada una con  $n \in \mathbb{N}$  ejes de simetría, y con  $k_0$  como el entero que indica el número de apocentro ( $k_0 = 0, 1, \dots, n-1$ ). Sean  $Z_1(t)$  y  $Z_2(t)$  en SBR con velocidad angular:

$$\omega_n = \frac{2\pi p}{\tau_{BI} q},$$

donde  $p = 2n \cdot k_1 + (2 \cdot k_0 + 1)$  y  $q = 2n \cdot k_2 + (2 \cdot k_0 + 1)$ , con  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Bajo estas condiciones, se tiene lo siguiente:

1.  $Z_1(t)$  y  $Z_2(t)$  forman una coreografía relativa.
2. Para cada órbita,  $Z_j(t) = Z_j(t + \tau_{BI} \cdot q)$  con  $j = 1, 2$ . Aquí,  $\tau_{BI} \cdot q$  no necesariamente es el período  $\tau_{BR}$ , el período en SBR.

*Demostración.* Para demostrar el primer punto, obtenemos la expresión para  $Z_2(t)$  en términos de  $\zeta_2(t)$ :

$$Z_2(t) = e^{-i\omega t} \cdot \zeta_2(t),$$

dado que  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$  tienen simetría especial, sabemos que:

$$\zeta_2(t) = e^{i\alpha} \cdot \zeta_1(t - \varphi),$$

así,

$$Z_2(t) = e^{-i\omega t} \cdot e^{i\alpha} \cdot \zeta_1(t - \varphi) = e^{i(-\omega t + \alpha)} \cdot \zeta_1(t - \varphi). \quad (4.1)$$

Por otro lado, para  $z_1(t)$ :

$$Z_1(t) = e^{-i\omega t} \cdot \zeta_1(t),$$

por lo que podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$Z_1(t - \varphi) = e^{-i\omega(t - \varphi)} \cdot \zeta_1(t - \varphi) = e^{i(-\omega t + \omega\varphi)} \cdot \zeta_1(t - \varphi). \quad (4.2)$$

Para que los lados derechos de las ecuaciones (4.1) y (4.2) sean iguales, se requiere que se cumpla la siguiente relación:

$$-\omega t + \alpha \equiv -\omega t + \omega \varphi \pmod{2\pi},$$

lo que implica que:

$$\alpha \equiv \omega \varphi \pmod{2\pi}, \quad (4.3)$$

a la ecuación (4.3) le llamaremos *ecuación de conexión*. Sin pérdida de generalidad, consideremos que  $\alpha = \omega \varphi$ , por lo que tenemos:

$$\omega = \frac{\alpha}{\varphi}. \quad (4.4)$$

De acuerdo con la observación 4.1.2, se tiene que:

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n} \cdot (2k_0 + 1) + k_1 \cdot 2\pi, \quad (4.5)$$

y que:

$$\varphi = \frac{\tau_{BI}}{2n} \cdot (2k_0 + 1) + k_2 \cdot \tau_{BI}, \quad (4.6)$$

con  $k_0 = 0, \dots, n - 1$ .

Las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) llevan a la siguiente expresión para  $\omega$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_{BI}} \cdot \frac{2nk_1 + (2k_0 + 1)}{2nk_2 + (2k_0 + 1)} = \frac{2\pi}{\tau_{BI}} \cdot \frac{p}{q}, \quad (4.7)$$

donde  $p = 2nk_1 + (2k_0 + 1)$  y  $q = 2nk_2 + (2k_0 + 1)$ .

Esto demuestra la primera parte del teorema. Para la segunda parte, consideremos que  $Z_1(t)$  y  $Z_2(t)$  son periódicas con período  $\tau_{BR}$ <sup>2</sup>. Al elegir el índice del apocentro  $k_0$ , sabemos

<sup>2</sup>Esto se debe a que la velocidad angular constante de SBR involucra un factor racional de  $2\pi$ .

que para que  $Z_j(t)$  vuelva a pasar por  $Z_j(0)$ , se requiere un tiempo  $t = 2n\varphi$ , y según la ecuación (4.6):

$$2n\varphi = 2n \left[ \frac{\tau_{BI}}{2n} \cdot (2nk_0 + 1) + k_2 \cdot \tau_{BI} \right] = \tau_{BI} \cdot q.$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$Z_j(0) = Z_j(\tau_{BI} \cdot q),$$

para  $j = 1, 2$ . Así concluimos la demostración. ■

**Observación 4.2.2.** En esta observación, se resalta lo siguiente:

a) Nótese que cuando  $k_0 = k_1 = k_2 = 0$ , se tiene que  $p = q = 1$ , lo que significa que  $\omega_n$  es una velocidad angular básica.

b) Para un conjunto finito de períodos en TBI ( $\tau_{BI}$ ), todos los posibles valores de  $\omega$  forman un conjunto infinito, denso y numerable, incluso cuando  $n$  y  $k_0$  están fijos.

### 4.3. Conjuntos de racionales $A_{n,j}$

Para abordar este objetivo, es necesario agrupar y clasificar todos los posibles valores de la velocidad angular  $\omega$  del sistema rotatorio. Tomaremos en cuenta principalmente el número de ejes de simetría  $n$  y el número de pericentro de  $\zeta_1(t)$  que se desea conectar con el apocentro  $\zeta_2(0)$ . De este modo, nos centraremos en los factores racionales  $\frac{p}{q}$  que aparecen en la expresión de la velocidad angular  $\omega$ .

#### 4.3.1. Contenciones de los conjuntos

**Definición 4.2.** Sea  $A_{n,j} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \equiv q \equiv 2j + 1 \pmod{2n} \right\}$ . Este es el conjunto de factores racionales asociados a la conexión del apocentro  $j$  de  $\zeta_1(t)$  al apocentro  $\zeta_2(0)$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Nótese que  $\frac{p}{q} \in A_{n,j}$  tiene la siguiente forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{2nk_1 + (2j + 1)}{2nk_2 + (2j + 1)}$$

o una expresión reducida, si  $p$  y  $q$  tienen factores primos en común.

Además,  $n$  es el número de ejes de simetría de las órbitas con la misma forma,  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  y  $j$  el número de apocentro,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

En particular, nos interesa la relación de orden (contención) entre los conjuntos  $A_{n,j}$ . A continuación, se demuestra un teorema que describe cómo determinar si  $A_{n,k} \subset A_{n,j}$ .

**Teorema 4.3.** *Sea  $n$  un entero.  $A_{n,k} \subset A_{n,j} \iff \text{mcd}(2k + 1, 2n) | (2j + 1)$*

*Demostración.* Sea  $\frac{x}{y} \in A_{n,k}$ , entonces, se puede expresar de la forma:

$$\frac{x}{y} = \frac{2nk_1 + (2k + 1)}{2nk_2 + (2k + 1)}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Se multiplica por  $\frac{n_1}{n_1}$  con la propiedad

$$(2k + 1) \cdot n_1 = 2n \cdot n_2 + (2j + 1). \quad (4.9)$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{2nk_1 + (2k + 1)}{2nk_2 + (2k + 1)} \cdot \frac{n_1}{n_1} \\ &= \frac{2nk_1 \cdot n_1 + (2k + 1) \cdot n_1}{2nk_2 \cdot n_1 + (2k + 1) \cdot n_1} \\ &= \frac{2nk_1 \cdot n_1 + 2n \cdot n_2 + (2j + 1)}{2nk_2 \cdot n_1 + 2n \cdot n_2 + (2j + 1)} \\ &= \frac{2n(k_1 \cdot n_1 + n_2) + (2j + 1)}{2n(k_2 \cdot n_1 + n_2) + (2j + 1)}. \end{aligned}$$

Definiendo  $k_3$  y  $k_4$  como  $k_3 = k_1 \cdot n_1 + n_2$  y  $k_4 = k_2 \cdot n_1 + n_2$ , obtenemos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{2nk_3 + (2j + 1)}{2nk_4 + (2j + 1)}$$

Falta garantizar que  $k_3$  y  $k_4$  existen y son enteros. Se debe cumplir que en (4.9) tanto  $n_1$  como  $n_2$  existen y son enteros, esto se logra aplicando un resultado del matemático indio Brahmagupta [9] que en términos de nuestro problema dice que la ecuación diofantina (4.9) tiene soluciones enteras  $n_1$  y  $n_2$  si y solo si

$$\text{mcd}(2k + 1, 2n) | (2j + 1).$$

Ahora, supongamos que  $A_{n,k} \subset A_{n,j}$ . Entonces, todo elemento de  $A_{n,k}$  pertenece a  $A_{n,j}$ . En particular,

$$\frac{2n \cdot 0 + (2k + 1)}{2n \cdot 1 + (2k + 1)} \in A_{n,j}$$

Por lo que existen enteros  $m_1, m_2$  tales que

$$\frac{2k + 1}{2n + 2k + 1} = \frac{2nm_1 + (2j + 1)}{2nm_2 + (2j + 1)}.$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} (2k + 1)(2nm_2 + (2j + 1)) &= (2nm_1 + (2j + 1))(2n + 2k + 1) \\ (2k+1)(2nm_2)+(2k+1)(2j+1) &= (2nm_1)(2n)+(2nm_1)(2k+1)+(2j+1)(2n)+(2j+1)(2k+1) \\ (2k + 1)(2nm_2) &= (2nm_1)(2n) + (2j + 1)(2n) + (2nm_1)(2k + 1) \\ (2nk + 1)(2nm_2 - 2nm_1) + (2n)(-2nm_1) &= (2j + 1)(2n), \end{aligned}$$

y podemos dividir todo entre  $2n$ :

$$(2k + 1)(m_2 - m_1) + (2n)(-m_1) = 2j + 1,$$

lo que nos dice que la ecuación diofantina

$$(2k + 1)x + (2n)y = (2j + 1)$$

tiene solución entera, por lo que  $\text{mcd}(2k + 1, 2n)$  divide a  $(2j + 1)$ .

■

Aplicando el resultado anterior, es fácil probar las siguientes proposiciones:

**Proposición 4.4.** *Sea  $n$  un número entero.  $A_{n,0} \subset A_{n,j}$  para  $j = 0, \dots, n - 1$ .*

*Demostración.* Los elementos de  $A_{n,0}$  son de la forma

$$\frac{x}{y} = \frac{2nk_1 + (2 \cdot 0 + 1)}{2nk_2 + (2 \cdot 0 + 1)},$$

es decir,  $k = 0$ . Evidentemente,  $\text{mcd}(1, 2n) = 1 \mid (2j + 1)$ . ■

El resultado anterior implica que los conjuntos  $A_{n,j}$ , para un  $n$  fijo, no son disjuntos, ya que  $A_{n,0} \neq \emptyset$ . Como veremos a continuación, dado un apocentro  $j$  y su simétrico  $n - (j + 1)$ , tienen el mismo conjunto de factores racionales.

**Proposición 4.5.** *Sea  $n$  un número entero.  $A_{n,j} = A_{n,n-(j+1)}$  para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .*

*Demostración.* Para demostrar que:

- $A_{n,j} \subset A_{n,n-(j+1)}$ , debemos buscar una solución para la ecuación diofantina:

$$(2j + 1) \cdot n_1 = 2n \cdot n_2 + (2 \cdot (n - (j + 1)) + 1),$$

aplicando el teorema (4.3). Llamando  $d = \text{mcd}(2j + 1, 2n)$ , sabemos que  $d \mid (2j + 1)$  y  $d \mid 2n$ , entonces:

$$d \mid (2n - (2j + 1)) = (2n - 2j - 2 + 1) = (2 \cdot (n - (j + 1)) + 1)$$

Por lo tanto,  $d \mid (2 \cdot (n - (j + 1)) + 1)$ , lo cual demuestra que la ecuación tiene solución.

- Para demostrar  $A_{n,n-(j+1)} \subset A_{n,j}$ , buscamos una solución para:

$$(2 \cdot (n - (j + 1)) + 1) \cdot n_1 = 2n \cdot n_2 + (2j + 1).$$

Nuevamente, aplicando el teorema (4.3), sea  $d = \text{mcd}(2 \cdot (n - (j + 1)) + 1, 2n)$ , sabemos que  $d \mid (2 \cdot (n - (j + 1)) + 1)$  y  $d \mid 2n$ , entonces:

$$d \mid (2n - (2 \cdot (n - (j + 1)) + 1)) = (2n - 2n + 2j + 2 - 1) = (2j + 1)$$

Por lo tanto,  $d \mid (2j + 1)$ , lo cual demuestra que la ecuación tiene solución y así  $A_{n,j} = A_{n,n-(j+1)}$  para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

■

Utilizando este resultado es fácil identificar igualdades entre algunos conjuntos  $A_{n,j}$ . A continuación, se presenta una tabla que muestra estas relaciones:

$A_{n,j}$	$A_{n,n-(j+1)}$
$A_{n,0}$	$A_{n,n-1}$
$A_{n,1}$	$A_{n,n-2}$
$A_{n,2}$	$A_{n,n-3}$
$\vdots$	$\vdots$
$A_{n,n-2}$	$A_{n,1}$
$A_{n,n-1}$	$A_{n,0}$

CUADRO 4.1: Relaciones de igualdad entre conjuntos  $A_{n,j}$  y  $A_{n,n-(j+1)}$

Nótese que para  $n$  impar, los conjuntos  $A_{n,j}$  se relacionan con otro diferente a sí mismo excepto por  $A_{n,\frac{n-1}{2}}$ .

**Proposición 4.6.** *Sea  $A_{n,(n-1)/2}$ , con  $n$  impar, si  $j \in \{0, 1, \dots, (n-1)/2 - 1\}$ , entonces  $A_{n,j} \subset A_{n,(n-1)/2}$ .*

*Demostración.* Veamos cómo son los elementos de  $A_{n,(n-1)/2}$ :

$$A_{n,(n-1)/2} \ni \frac{x}{y} = \frac{2nk_1 + (2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1)}{2nk_2 + (2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1)} = \frac{2nk_1 + n}{2nk_2 + n} = \frac{2k_1 + 1}{2k_2 + 1},$$

con  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Esto indica que  $A_{n,(n-1)/2} = A_{1,0}$ .

Para cualquier  $\frac{x}{y} \in A_{n,j}$ , podemos reescribirlo como:

$$\frac{x}{y} = \frac{2nk_1 + (2j + 1)}{2nk_2 + (2j + 1)} = \frac{2[nk_1 + j] + 1}{2[nk_2 + j] + 1}.$$

Esto demuestra que  $\frac{x}{y} \in A_{n,(n-1)/2}$ . ■

**Proposición 4.7.** *Sea  $n = 2^m$ , con  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Entonces,  $A_{n,k} = A_{n,j}$  para todo  $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$ .*

*Demostración.* Para el caso  $m = 0$  se cumple pues para  $n = 2^0 = 1$  sólo hay 1 conjunto.

Para el caso  $m > 0$ , es suficiente mostrar que  $A_{n,k} \subset A_{n,j}$ .

La validez de esta inclusión depende de la existencia de una solución entera para la ecuación:

$$(2k + 1)n_1 = 2n \cdot n_2 + (2j + 1).$$

Definamos  $d = \text{mcd}(2k + 1, 2n) = \text{mcd}(2k + 1, 2^{m+1})$ . Observamos que:

$$d = \begin{cases} n & \text{si } 2k + 1 = n \\ 1 & \text{si } 2k + 1 \neq n \end{cases}$$

El primer caso queda descartado porque  $2k + 1 = n$  implica  $k = \frac{n-1}{2}$ , lo cual no es posible ya que  $n$  es par. Por lo tanto,  $d = \text{mcd}(2k + 1, 2n) = 1$ , lo que implica que  $1 \mid (2j + 1)$ .

Así, la ecuación tiene solución y, por lo tanto,  $A_{n,k} \subset A_{n,j}$ . ■

**Observación 4.3.1.** La proposición anterior (4.7) implica que dado un  $n$  fijo de la forma  $n = 2^m$ , se tiene un único conjunto de factores racionales. Es decir, para todo  $k, j \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ :

$$A_{2^m,k} = A_{2^m,j}$$

A raíz de estas observaciones y proposiciones, es fácil sospechar que los conjuntos  $A_{n,j}$  son densos en  $\mathbb{R}$ , por lo que es oportuno enunciar el siguiente teorema.

**Observación 4.3.2.** El conjunto  $A_{n,j}$  definido como:

$$A_{n,j} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \equiv q \equiv 2j + 1 \pmod{2n} \right\}$$

es denso en  $\mathbb{R}$  para  $n$  y  $j$  fijos.

Para  $p \equiv 2j + 1 \pmod{2n}$  y  $q \equiv 2j + 1 \pmod{2n}$ , los valores de  $p$  y  $q$  se pueden expresar como:

$$p = 2nk_p + (2j + 1), \quad q = 2nk_q + (2j + 1),$$

donde  $k_p, k_q \in \mathbb{Z}$ .

Los elementos de  $A_{n,j}$  tienen entonces la forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{2nk_p + (2j + 1)}{2nk_q + (2j + 1)}.$$

Es posible encontrar  $k_p$  y  $k_q$  suficientemente grandes, comparados con  $j$ , tales que

$$\frac{p}{q} \approx \frac{2nk_p}{2nk_q} = \frac{k_p}{k_q}$$

.

Así es como podemos encontrar racionales suficientemente cercanos a  $\frac{p}{q}$ .

#### 4.4. Análisis breve de los conjuntos $A_{n,j}$

Además de notar la densidad en los conjuntos  $A_{n,j}$ , también surgen cuestiones respecto a las contenciones de dichos conjuntos, pues parecieran presentar cierto orden parcial de contención. En seguida se intentará dar un análisis atendiendo a dichas cuestiones y para esto se dan las siguientes definiciones.

**Definición 4.8** (Representante de clase). Dado que varios conjuntos  $A_{n,j}$  pueden ser iguales, de entre los conjuntos que sean iguales seleccionaremos como representante de clase al conjunto con el menor índice  $j$ . Por ejemplo:

$$A_{4,0} = A_{4,1} = A_{4,2} = A_{4,3}, \quad \text{donde } A_{4,0} \text{ será el representante.}$$

**Definición 4.9** (Conjunto líder  $A_{n,L}$ ). Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos como conjunto líder  $A_{n,L}$  con  $L \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , al conjunto tal que para todo  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ :

$$A_{n,j} \subseteq A_{n,L}.$$

Para visualizar las relaciones de contención entre los conjuntos  $A_{n,j}$ , se presentan diagramas que ilustran cómo, para un  $n$  fijo, ciertos conjuntos están contenidos en otros. Cada diagrama tomará como representante de cada clase de equivalencia el conjunto con menor índice  $j$ .

Con estos diagramas, aunque son pocos, podemos intentar hacer un par de conjeturas que demostraremos en seguida.

**Teorema 4.10.** *Sea  $n$  un número impar. Entonces,  $A_{n,(n-1)/2}$  es un conjunto líder.*

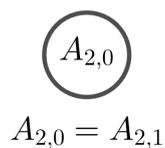


FIGURA 4.4: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{2,j}$ .

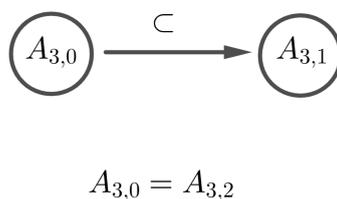


FIGURA 4.5: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{3,j}$ .

*Demostración.* Por definición de conjunto líder, se busca demostrar que para  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ,  $A_{n,j} \subset A_{n,(n-1)/2}$ , pero por el teorema 4.3, basta con demostrar que  $\text{mcd}(2j+1, 2n)$  divide a  $2((n-1)/2) + 1$  o bien, divide a  $n$ .

Sea  $n$  impar y  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ .

Dado que  $2j+1$  es impar y  $n$  también lo es, se cumple que:

$$\text{mcd}(2j+1, 2n) = \text{mcd}(2j+1, n). \tag{4.10}$$

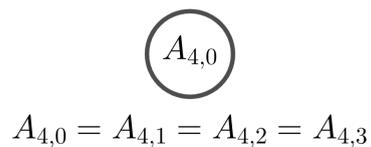


FIGURA 4.6: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{4,j}$ .

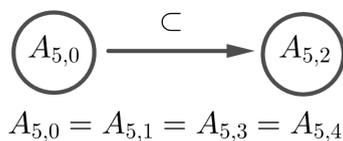


FIGURA 4.7: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{5,j}$ .

Esto es porque  $2j + 1$  no tiene factores comunes con el factor 2 de  $2n$ .

Ahora, sea  $d = \text{mcd}(2j + 1, n)$ , esto quiere decir que  $d$  divide tanto a  $2j + 1$  y a  $n$ , pero por la ecuación (4.10), se tiene que  $d = \text{mcd}(2j + 1, 2n)$  y esto ocurre para todo  $j = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ .

Por lo tanto  $A_{n,j} \subset A_{n,(n-1)/2}$  para todo  $j = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ , es decir, para  $n$  impar,  $A_{n,(n-1)/2}$  es un conjunto líder. ■

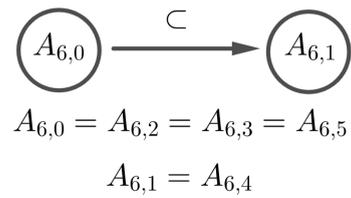


FIGURA 4.8: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{6,j}$ .

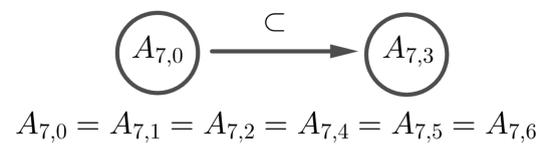


FIGURA 4.9: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{7,j}$ .

A través de este resultado, podría uno sospechar que en general para todo  $n$ , existe por lo menos un conjunto líder.

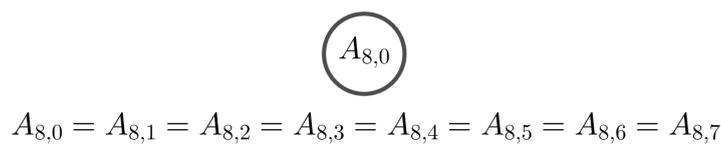


FIGURA 4.10: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{8,j}$ .

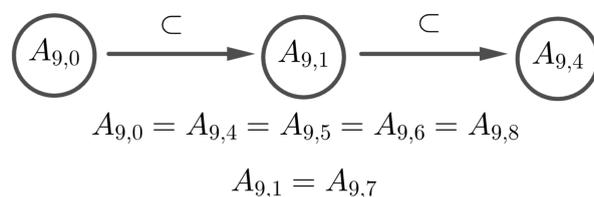


FIGURA 4.11: Diagrama de contenciones de los conjuntos  $A_{9,j}$ .

## 4.5. Generalización de las Coreografías Relativas

En su trabajo, Broucke y Boggs [8] introducen el concepto de velocidad angular  $\omega = \frac{2\pi}{\tau_{BI}}$  para describir soluciones periódicas relativas en SBR, donde  $\tau_{BI}$  es el periodo para las órbitas en SBI. Estas soluciones se caracterizan por exhibir periodicidad relativa, es decir, las posiciones y velocidades de las masas se repiten después de un periodo  $\tau_{BI}$ , mientras el sistema rota un ángulo fijo alrededor del baricentro.

Broucke y Boggs consideran únicamente el primer pericentro donde las órbitas se conectan

al rotar una órbita para sobreponerse con la otra. Sin embargo, este trabajo amplía el enfoque observando que las órbitas pueden conectarse también en otros pericentros, permitiendo identificar  $n$  pericentros posibles, donde  $n$  es el número de simetrías que presenta la curva según una definida simetría especial. Este análisis más general resalta las diferentes maneras en que las órbitas pueden sincronizarse en un marco rotatorio baricéntrico.

En este trabajo, expandimos este enfoque introduciendo una generalización basada en la relación  $p/q$ , donde la velocidad angular se redefine como:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_{BI}} \cdot \frac{p}{q},$$

con  $p, q \in \mathbb{Z}$  y  $\text{mcd}(p, q) = 1$ . Esta formulación permite generar una familia de coreografías relativas al ajustar adecuadamente los valores de  $p$  y  $q$ , proporcionando soluciones que son periódicas relativas a un marco rotatorio baricéntrico con velocidades angulares racionales múltiples de la velocidad base definida por Broucke y Boggs.

La inclusión de la razón  $p/q$  implica que, durante un periodo  $\tau_{BI}$ , el sistema completa  $p$  revoluciones relativas respecto a un marco de referencia rotatorio, mientras que el marco rotatorio mismo ha completado  $q$  revoluciones respecto a un marco inercial. Este planteamiento generaliza las condiciones de periodicidad relativa, permitiendo describir configuraciones más complejas con simetrías rotacionales fraccionales.

Para encontrar estas soluciones, se utilizan técnicas de integración numérica como el método de Runge-Kutta, ajustando las condiciones iniciales para garantizar que la periodicidad relativa se mantenga bajo el criterio de velocidad angular generalizada. Este procedimiento permite descubrir nuevas familias de coreografías relativas, enriqueciendo el conjunto de soluciones conocidas y ampliando su aplicabilidad a configuraciones dinámicas más generales.

# Capítulo 5

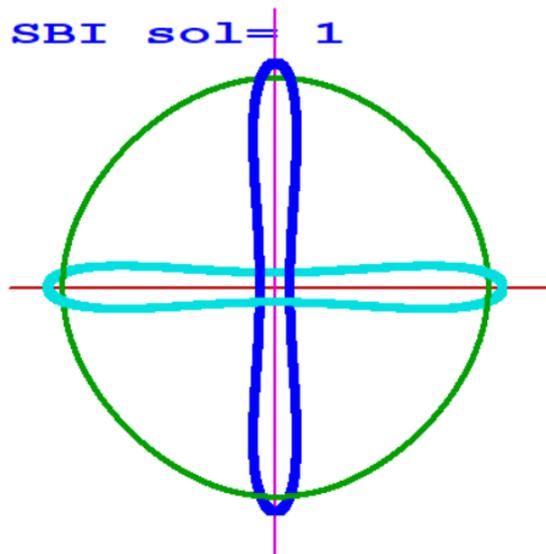
## Órbitas obtenidas

En este capítulo, exploramos las órbitas obtenidas utilizando la teoría desarrollada hasta el momento en esta tesis. Hemos investigado las simetrías presentes en SBR y cómo estas simetrías afectan la dinámica de las órbitas en el problema de los tres cuerpos. Además, hemos analizado los conjuntos de factores racionales asociados a las conexiones entre apocentros de las órbitas, lo que nos ha proporcionado un marco teórico sólido para comprender la variedad de órbitas que pueden surgir en este sistema.

A través de métodos analíticos y computacionales, hemos trazado diversas órbitas obtenidas aplicando estas ideas. Estas visualizaciones nos permiten apreciar la riqueza y complejidad de las configuraciones orbitales que pueden surgir en el contexto del problema de los tres cuerpos. Cada gráfica representa una solución particular, revelando patrones interesantes y proporcionando una comprensión más profunda de la dinámica subyacente.

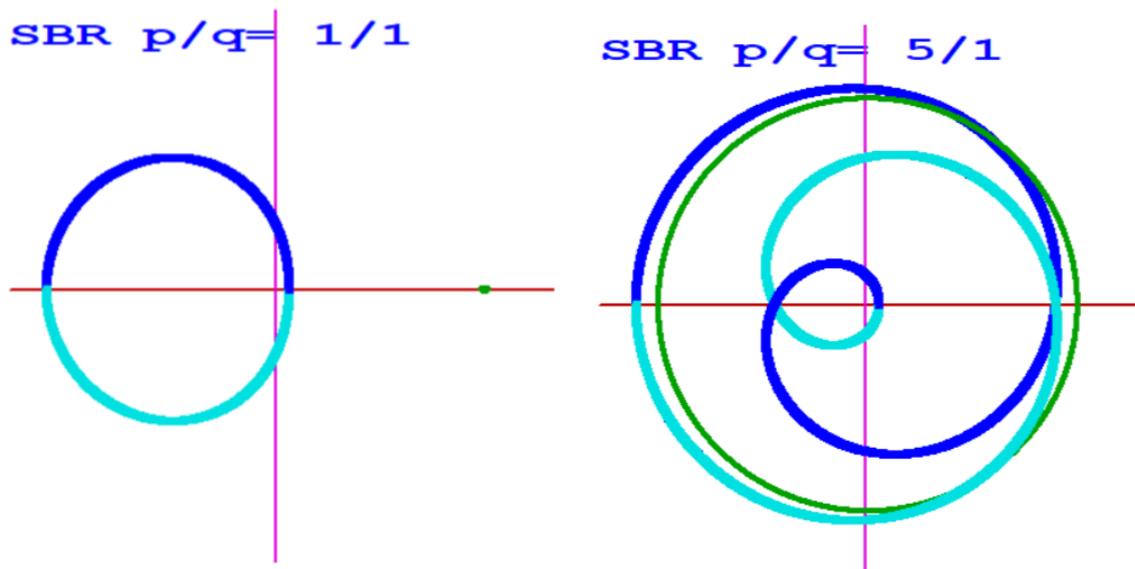
A lo largo de esta sección, examinaremos una variedad de órbitas obtenidas, explorando cómo diferentes configuraciones de parámetros y condiciones iniciales influyen en la forma y la evolución de las trayectorias orbitales. Estas visualizaciones son fundamentales para nuestro entendimiento del problema de los tres cuerpos y nos ayudan a avanzar en la comprensión de las complejas interacciones gravitacionales que caracterizan este sistema.

### 5.1. Solución 1 (2 ejes de simetria)

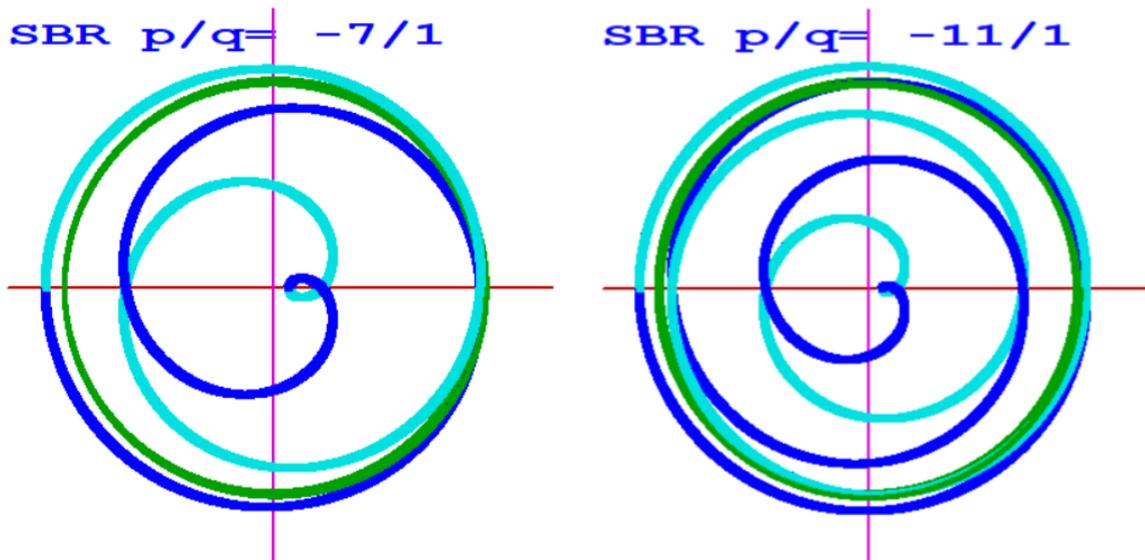


Solución 1 en SBI.

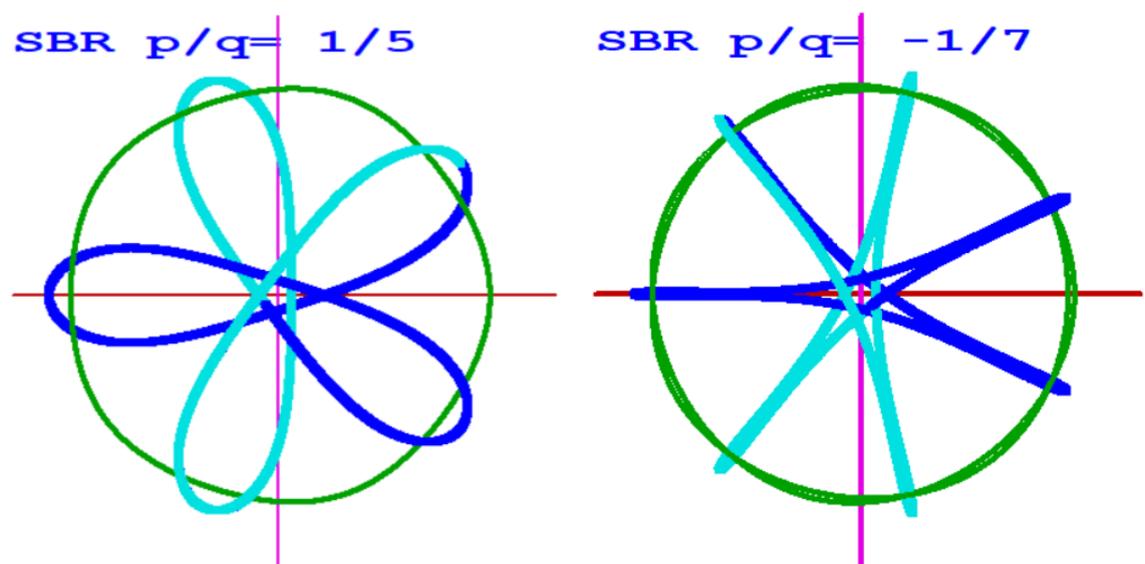
Factores enteros positivos.



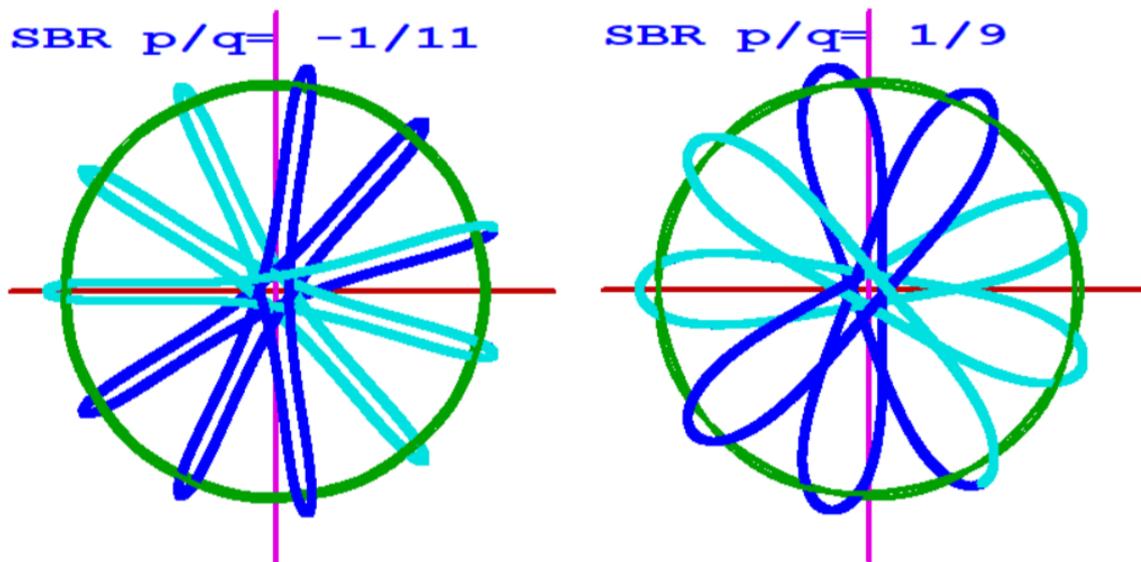
Factores enteros negativos.



Factores fraccionarios positivos.

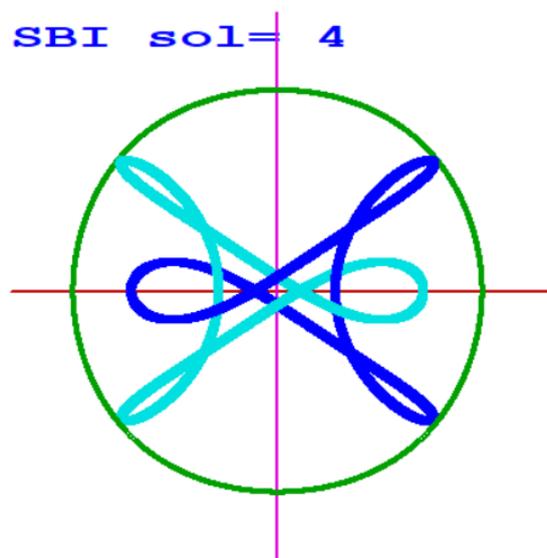


Factores fraccionarios negativos.



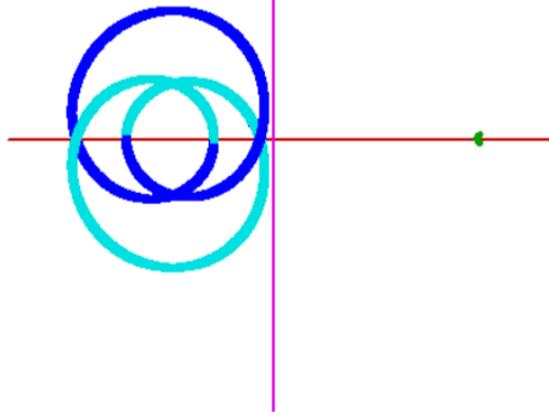
## 5.2. Solución 4 (1 eje de simetría)

Solución 4 en SBI.

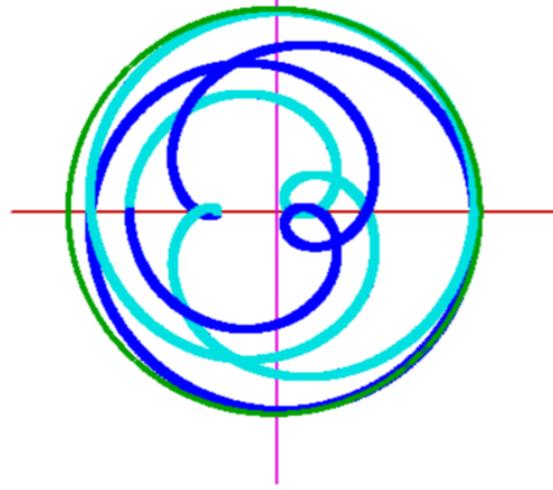


Factores enteros positivos.

SBR  $p/q = 1/1$

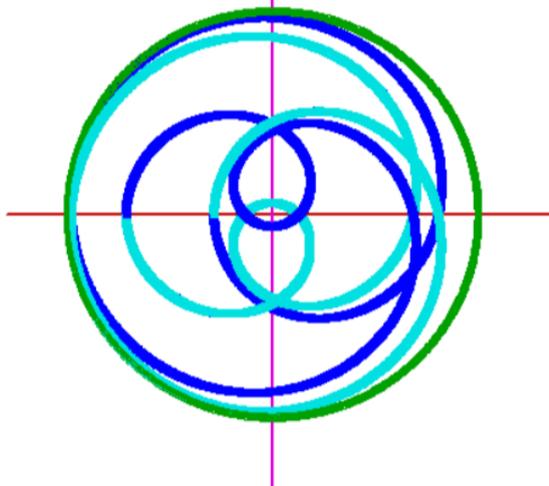


SBR  $p/q = 5/1$

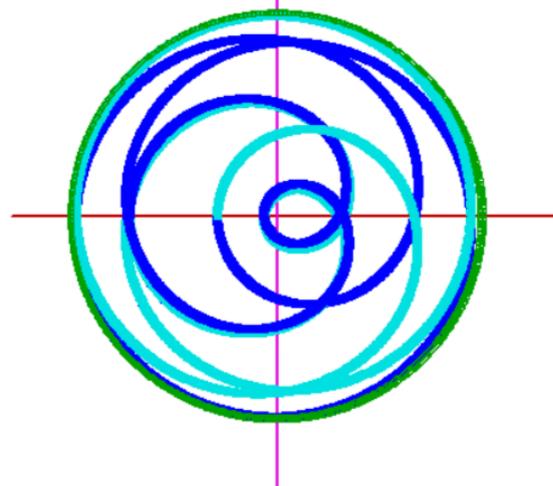


Factores enteros negativos.

SBR  $p/q = -5/1$

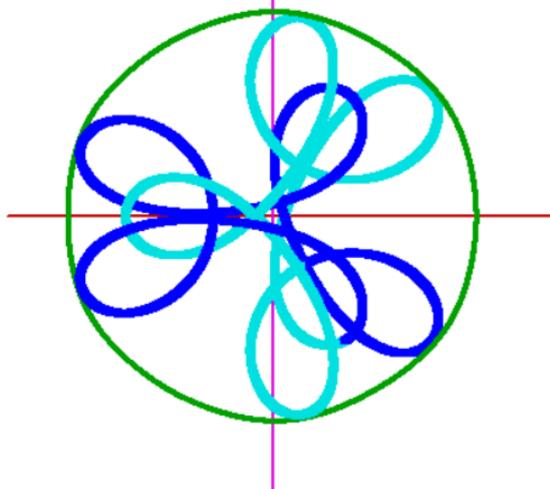


SBR  $p/q = -7/1$

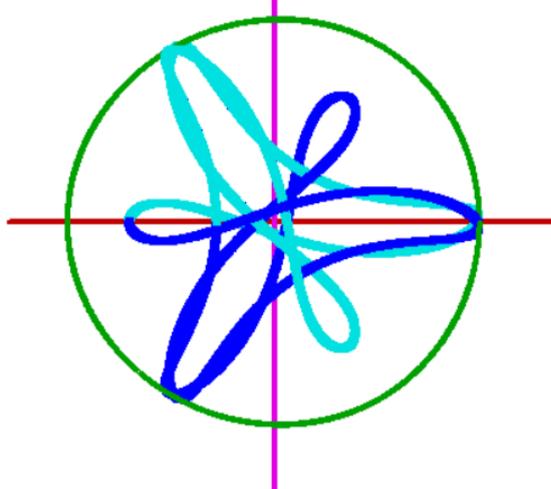


Factores fraccionarios positivos.

SBR  $p/q = 1/3$

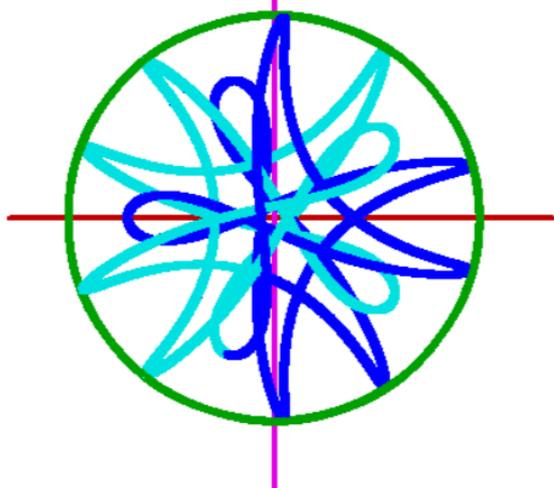


SBR  $p/q = -1/3$

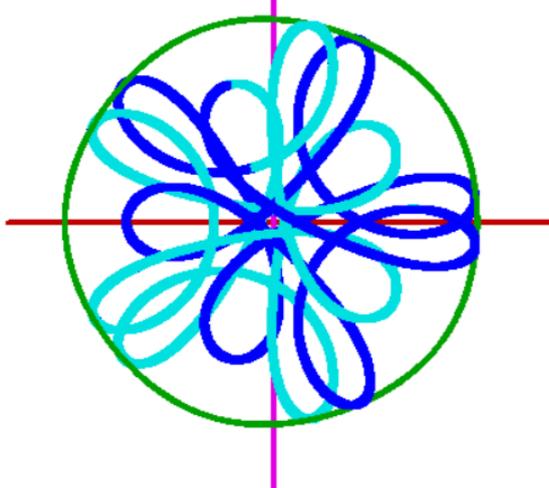


Factores fraccionarios negativos.

SBR  $p/q = -1/5$

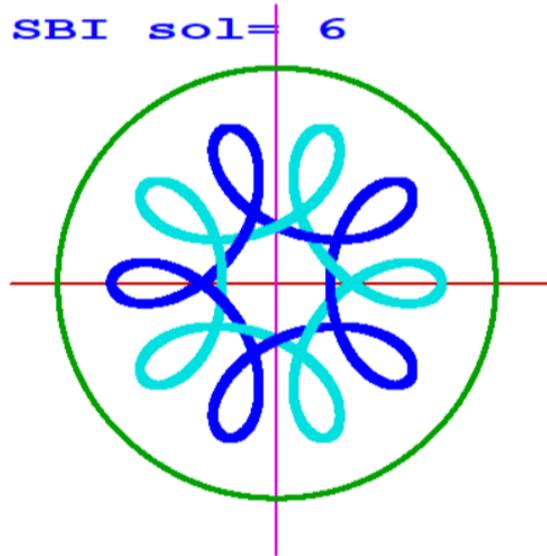


SBR  $p/q = 1/5$

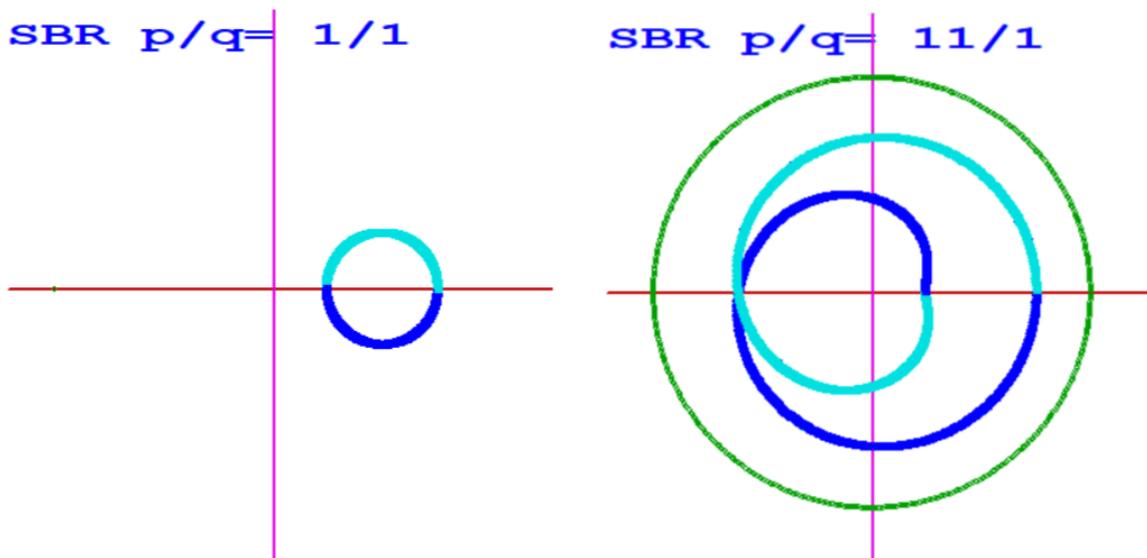


### 5.3. Solución 6 (5 ejes de simetría)

Solución 6 en SBI.

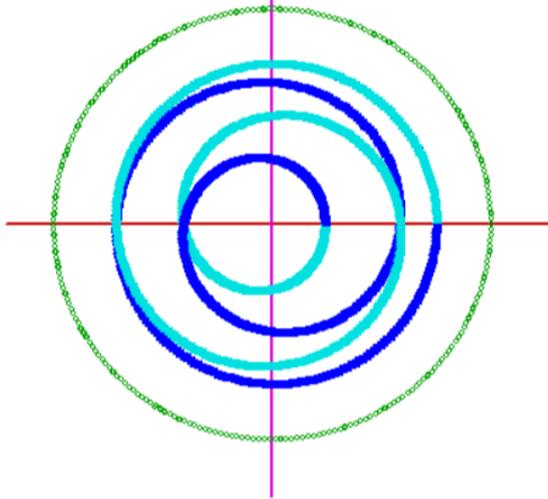


Factores enteros positivos.

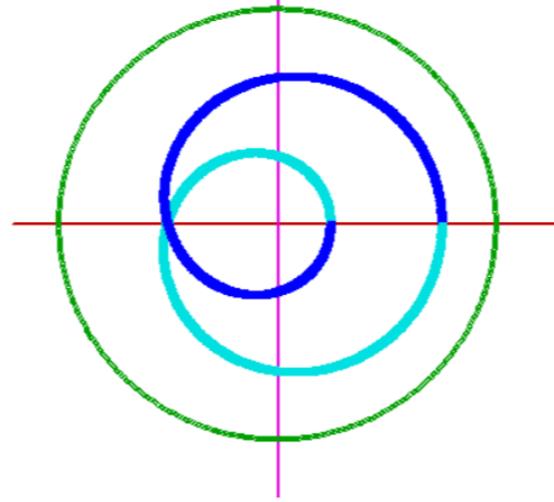


Factores enteros negativos.

SBR  $p/q = 21/1$

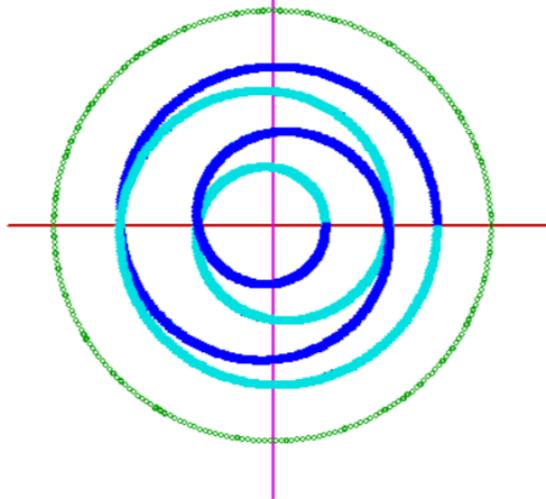


SBR  $p/q = -9/1$

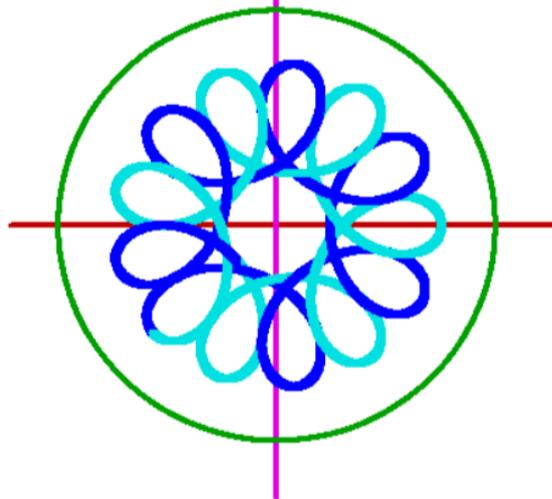


Factores fraccionarios positivos.

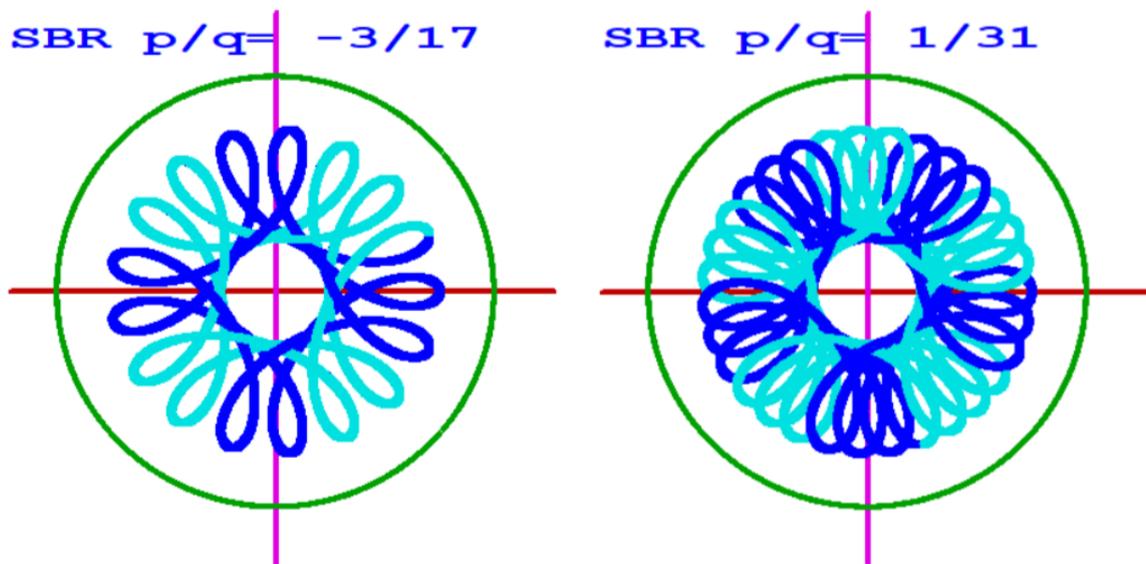
SBR  $p/q = -19/1$



SBR  $p/q = 3/13$

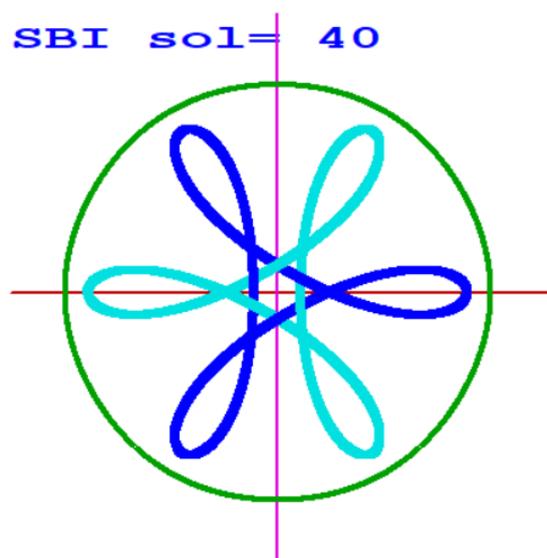


Factores fraccionarios negativos.



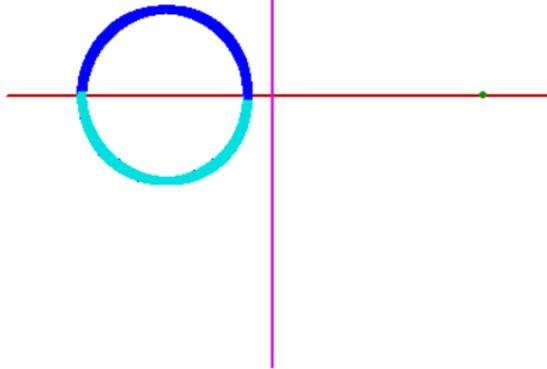
#### 5.4. Solución 40 (3 ejes de simetría)

Solución 40 en SBI.

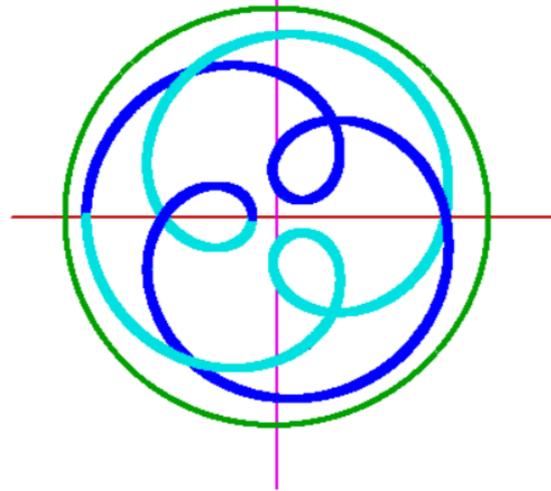


Factores enteros positivos.

SBR  $p/q = 1/1$

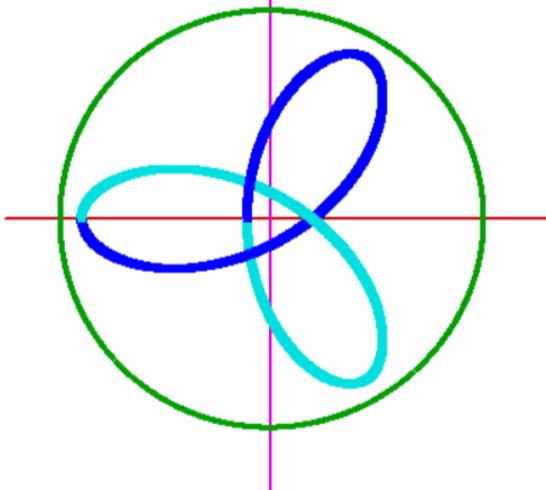


SBR  $p/q = 3/1$

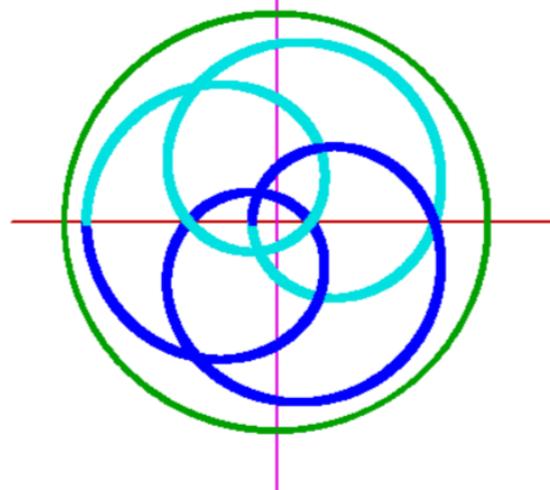


Factores enteros negativos.

SBR  $p/q = -1/1$

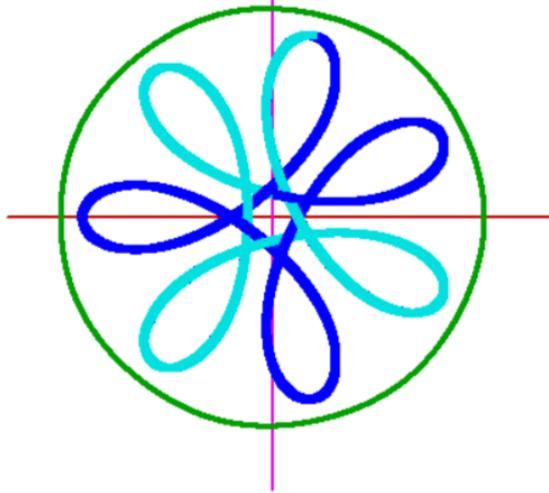


SBR  $p/q = -3/1$

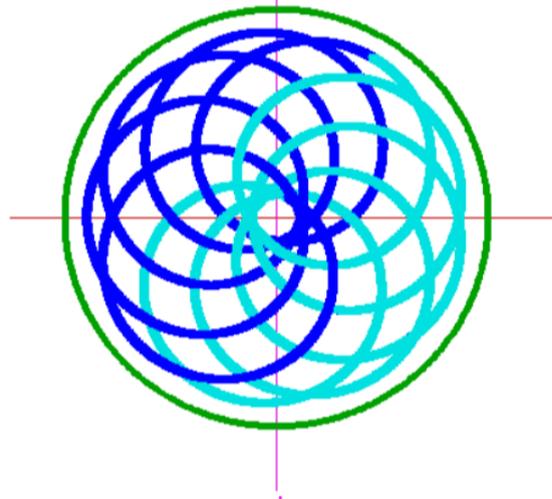


Factores fraccionarios positivos.

SBR  $p/q = 1/7$

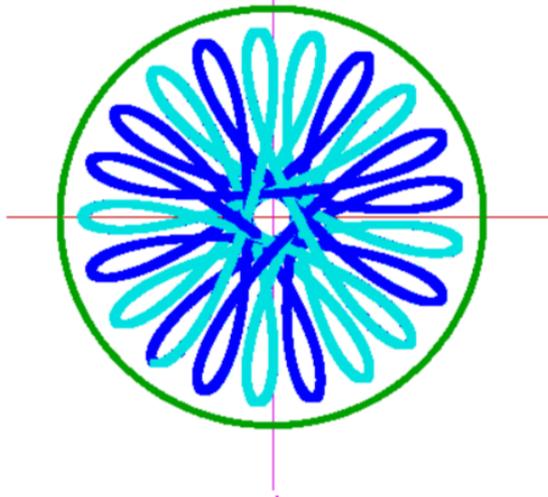


SBR  $p/q = -7/3$

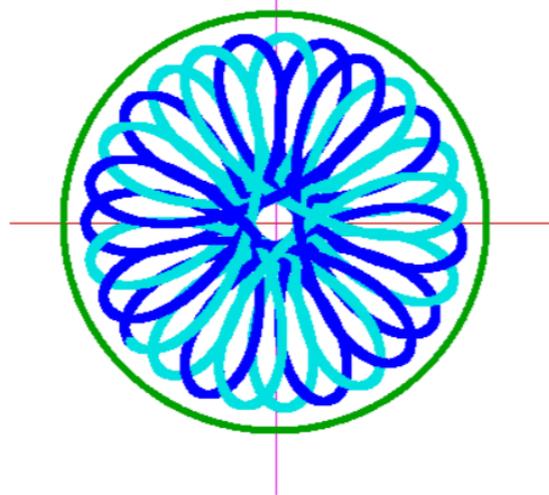


Factores fraccionarios negativos.

SBR  $p/q = -1/7$



SBR  $p/q = 1/9$



# Apéndice A

## Métodos numéricos

### A.1. Deducción de la fórmula del método de Euler clásico

El método de Euler se deriva a partir de la ecuación diferencial ordinaria de primer grado que se desea resolver. Sea la ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

donde  $y(x_0) = y_0$  es la condición inicial. El objetivo es encontrar una aproximación numérica para la solución de esta ecuación en un intervalo dado.

El método de Euler se basa en la idea de utilizar la pendiente de la función,  $f(x, y)$ , para aproximar la solución paso a paso. Sabemos que la derivada  $\frac{dy}{dx}$  representa la pendiente de la curva en cada punto, lo que nos permite escribir:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Si elegimos un tamaño de paso constante  $h$  tal que  $h = x_{i+1} - x_i$ , podemos reorganizar la ecuación anterior como:

$$y_{i+1} - y_i \approx hf(x_i, y_i)$$

Despejando  $y_{i+1}$ , obtenemos la fórmula básica del método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Dado un intervalo  $[a, b]$  y una condición inicial  $y(a) = y_0$ , el método de Euler aproxima la solución de la ecuación diferencial en el intervalo utilizando los siguientes pasos:

1. **Definir el número de pasos:** Elegimos un número  $n$  de pasos y calculamos el tamaño del paso como  $h = \frac{b-a}{n}$ .
2. **Inicializar los valores:** Establecemos  $x_0 = a$  y  $y_0$  como la condición inicial.
3. **Aplicar la fórmula de Euler:** Para cada paso  $i$ , calculamos:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

y actualizamos  $x_{i+1} = x_i + h$ .

4. **Repetir el proceso:** Continuamos calculando  $y_{i+1}$  y  $x_{i+1}$  hasta llegar al valor de  $x = b$ .

## A.2. Deducción de la fórmula del método de Euler mejorado

Sea una ecuación diferencial ordinaria de primer grado de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

El método de Euler mejorado (o método de Heun) busca aproximar la solución de esta ecuación a lo largo de un intervalo mediante una combinación de la pendiente inicial y una corrección basada en la pendiente en el punto predicho.

Partimos de la fórmula del método de Euler clásico, que estima el valor de  $y$  en el siguiente punto  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  utilizando la pendiente en el punto actual  $(x_i, y_i)$ :

$$y^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

donde  $h$  es el tamaño del paso y  $y^*$  es el valor predicho de  $y$  en  $x_{i+1} = x_i + h$ . Este paso se denomina **predicción**, pero el valor  $y^*$  puede no ser suficientemente preciso.

Para mejorar esta predicción, evaluamos la pendiente en el nuevo punto  $(x_{i+1}, y^*)$ , es decir,  $f(x_{i+1}, y^*)$ . Ahora, en lugar de avanzar solo con la pendiente  $f(x_i, y_i)$ , calculamos

el valor corregido de  $y_{i+1}$  promediando las pendientes en los puntos  $(x_i, y_i)$  y  $(x_{i+1}, y^*)$ . Esto nos da la siguiente fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*)]$$

La fórmula completa del método de Euler mejorado es, por lo tanto, una combinación de la pendiente inicial y la pendiente en el punto predicho:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*)]$$

donde:

$$y^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Esta fórmula corrige la predicción inicial hecha con el método de Euler clásico, promediando las pendientes para obtener una aproximación más precisa de la solución en  $y_{i+1}$ .

Dado un intervalo  $[a, b]$  y una condición inicial  $y(a) = y_0$ , el método de Euler mejorado sigue los siguientes pasos:

1. **Definir el número de pasos:** Elegimos un número  $n$  de pasos y calculamos el tamaño del paso como  $h = \frac{b-a}{n}$ .
2. **Inicializar los valores:** Establecemos  $x_0 = a$  y  $y_0$  como la condición inicial.
3. **Predicción:** Para cada paso  $i$ , calculamos la predicción inicial utilizando el método de Euler:

$$y^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

4. **Corrección:** Usando el valor predicho  $y^*$ , calculamos el valor corregido:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*)]$$

y actualizamos  $x_{i+1} = x_i + h$ .

5. **Repetir el proceso:** Continuamos calculando  $y_{i+1}$  y  $x_{i+1}$  hasta llegar al valor de  $x = b$ .

### A.3. Deducción de la fórmula de Simpson 1/3

La regla de Simpson 1/3 se basa en aproximar la función  $f(x)$  mediante un polinomio de segundo grado en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . El polinomio cuadrático que utilizamos para aproximar  $f(x)$  es de la forma:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_i) + c_2(x - x_i)^2$$

donde  $x_i$  es el punto medio del intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

Para obtener los coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ , necesitamos que el polinomio  $p(x)$  coincida con los valores de la función  $f(x)$  para  $x = x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$ . Esto nos proporciona las siguientes condiciones:

$$p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad p(x_i) = f(x_i), \quad p(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

La integral de este polinomio en el intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  se calcula de la siguiente manera:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [c_0 + c_1(x - x_i) + c_2(x - x_i)^2] dx$$

Integramos cada término por separado:

1. **Término constante  $c_0$ :**

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c_0 dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) = c_0 \cdot 2h$$

donde  $h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$ .

2. **Término lineal  $c_1(x - x_i)$ :**

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c_1(x - x_i) dx = \frac{c_1}{2} [(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_{i-1} - x_i)^2]$$

Dado que  $x_i$  es el punto medio, tenemos  $(x_{i+1} - x_i)^2 = h^2$  y  $(x_{i-1} - x_i)^2 = (-h)^2 = h^2$ , por lo que:

$$\frac{c_1}{2} [h^2 - h^2] = 0$$

Este término desaparece debido a la simetría del intervalo.

3. **Término cuadrático**  $c_2(x - x_i)^2$ :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c_2(x - x_i)^2 dx = \frac{c_2}{3} [(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_{i-1} - x_i)^3]$$

Como  $(x_{i+1} - x_i)^3 = h^3$  y  $(x_{i-1} - x_i)^3 = (-h)^3 = -h^3$ , esto se simplifica a:

$$\frac{c_2}{3} [h^3 - (-h)^3] = \frac{2c_2h^3}{3}$$

Así, la integral total es:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx = c_0 \cdot 2h + \frac{2c_2h^3}{3}$$

Sabemos que  $p(x)$  debe coincidir con los valores de  $f(x)$  en los puntos  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ , y  $x_{i+1}$ . Esto nos da las siguientes condiciones:

1. En  $x = x_i$ :

$$f(x_i) = p(x_i) = c_0$$

Por lo tanto,  $c_0 = f(x_i)$ .

2. En  $x = x_{i-1}$  y  $x = x_{i+1}$ :

$$f(x_{i-1}) = c_0 - c_1h + c_2h^2, \quad f(x_{i+1}) = c_0 + c_1h + c_2h^2$$

Sustituyendo  $c_0 = f(x_i)$  y sumando las dos ecuaciones obtenemos:

$$f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) = (f(x_i) - c_1h + c_2h^2) + (f(x_i) + c_1h + c_2h^2) = 2f(x_i) + 2c_2h^2$$

De aquí, despejamos  $c_2$ :

$$c_2 = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) - 2f(x_i)}{2h^2}$$

Sustituyendo los valores de  $c_0$  y  $c_2$  en la expresión de la integral:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx = f(x_i) \cdot 2h + \frac{2}{3} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) - 2f(x_i)}{2h^2} h^3$$

Simplificando obtenemos:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Esta es la fórmula de la regla de Simpson 1/3, que nos permite aproximar la integral de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  con una combinación lineal de las evaluaciones de la función en los puntos de la partición.

Para obtener la integral en el intervalo completo  $[a, b]$ , sumamos las contribuciones de cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Al hacerlo, los puntos  $f(x_i)$  correspondientes a los extremos intermedios  $x_1, x_3, \dots, x_{n-1}$  tienen un peso de 4, mientras que los puntos  $f(x_2), f(x_4), \dots, f(x_{n-2})$  tienen un peso de 2. Finalmente, los extremos  $f(x_0)$  y  $f(x_n)$  tienen un peso de 1. Esto da lugar a la fórmula general de la regla de Simpson 1/3:

$$I \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(x_{2i}) + f(x_n) \right]$$

donde  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$  es el número de subintervalos (que debe ser par), y  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son los puntos de partición en el intervalo  $[a, b]$ .

## A.4. Deducción de la fórmula de Simpson 3/8

Para deducir la fórmula de Simpson 3/8, aproximamos la función  $f(x)$  mediante un polinomio cúbico en cada subintervalo de la partición. Sea  $p(x)$  el polinomio cúbico que aproxima a  $f(x)$  en el intervalo  $[x_i, x_{i+3}]$ , dado por:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_{i+3/2}) + c_2(x - x_{i+3/2})^2 + c_3(x - x_{i+3/2})^3$$

donde  $x_{i+3/2}$  es el valor central del intervalo  $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ .

Para obtener los coeficientes  $c_0, c_1, c_2$  y  $c_3$  necesitamos que el polinomio  $p(x)$  coincida con los valores de la función  $f(x)$  para  $x = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$ . Esto nos proporciona las siguientes condiciones:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad p(x_{i+2}) = f(x_{i+2}), \quad p(x_{i+3}) = f(x_{i+3})$$

La integral de este polinomio en el intervalo  $[x_i, x_{i+3}]$  es:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} p(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+3}} [c_0 + c_1(x - x_{i+3/2}) + c_2(x - x_{i+3/2})^2 + c_3(x - x_{i+3/2})^3] dx$$

Realizamos la integración término por término.

1. **Término constante  $c_0$ :**

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} c_0 dx = c_0 \cdot (x_{i+3} - x_i) = c_0 \cdot 3h$$

2. **Término lineal  $c_1(x - x_{i+3/2})$ :**

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} c_1(x - x_{i+3/2}) dx = \frac{c_1}{2} [(x_{i+3} - x_{i+3/2})^2 - (x_i - x_{i+3/2})^2] = \frac{c_1}{2} \left[ \left(\frac{3h}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3h}{2}\right)^2 \right] = 0$$

Dado que el intervalo es simétrico, los términos cuadráticos se cancelan, por lo que este término desaparece.

3. **Término cuadrático  $c_2(x - x_{i+3/2})^2$ :**

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} c_2(x - x_{i+3/2})^2 dx = \frac{c_2}{3} [(x_{i+3} - x_{i+3/2})^3 - (x_i - x_{i+3/2})^3] = \frac{c_2}{3} \left[ \left(\frac{3h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3h}{2}\right)^3 \right] = c_2 \frac{9h^3}{4}$$

4. **Término cúbico  $c_3(x - x_{i+3/2})^3$ :**

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} c_3(x - x_{i+3/2})^3 dx = \frac{c_3}{4} [(x_{i+3} - x_{i+3/2})^4 - (x_i - x_{i+3/2})^4] = \frac{c_3}{4} \left[ \left(\frac{3h}{2}\right)^4 - \left(-\frac{3h}{2}\right)^4 \right] = 0$$

Nuevamente, como el intervalo es simétrico, los términos elevados a la cuarta potencia se cancelan, por lo que este término desaparece.

Finalmente, sumando los términos obtenemos la integral del polinomio cúbico  $p(x)$  en  $[x_i, x_{i+3}]$ :

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} p(x) dx = c_0 3h + c_2 \frac{9h^3}{4}$$

Con lo que ahora nos faltaría determinar los valores exactos de  $c_0$  y  $c_2$

Sabemos que  $p(x)$ , el polinomio cúbico que aproxima a  $f(x)$ , debe coincidir con los valores de  $f(x)$  en los puntos  $x_i$ ,  $x_{i+1}$ ,  $x_{i+2}$ , y  $x_{i+3}$ . Esto nos da las siguientes condiciones:

1. En  $x = x_i$ :

$$f(x_i) = p(x_i) = c_0 + c_1(x_i - x_{i+3/2}) + c_2(x_i - x_{i+3/2})^2 + c_3(x_i - x_{i+3/2})^3$$

Como  $x_i - x_{i+3/2} = -\frac{3h}{2}$ , la expresión se convierte en:

$$f(x_i) = c_0 - c_1 \frac{3h}{2} + c_2 \left(\frac{3h}{2}\right)^2 - c_3 \left(\frac{3h}{2}\right)^3$$

2. En  $x = x_{i+1}$ :

$$f(x_{i+1}) = p(x_{i+1}) = c_0 + c_1(x_{i+1} - x_{i+3/2}) + c_2(x_{i+1} - x_{i+3/2})^2 + c_3(x_{i+1} - x_{i+3/2})^3$$

Dado que  $x_{i+1} - x_{i+3/2} = -\frac{h}{2}$ , tenemos:

$$f(x_{i+1}) = c_0 - c_1 \frac{h}{2} + c_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 - c_3 \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

3. En  $x = x_{i+2}$ :

$$f(x_{i+2}) = p(x_{i+2}) = c_0 + c_1(x_{i+2} - x_{i+3/2}) + c_2(x_{i+2} - x_{i+3/2})^2 + c_3(x_{i+2} - x_{i+3/2})^3$$

Dado que  $x_{i+2} - x_{i+3/2} = \frac{h}{2}$ , tenemos:

$$f(x_{i+2}) = c_0 + c_1 \frac{h}{2} + c_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_3 \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

4. En  $x = x_{i+3}$ :

$$f(x_{i+3}) = p(x_{i+3}) = c_0 + c_1(x_{i+3} - x_{i+3/2}) + c_2(x_{i+3} - x_{i+3/2})^2 + c_3(x_{i+3} - x_{i+3/2})^3$$

Como  $x_{i+3} - x_{i+3/2} = \frac{3h}{2}$ , la expresión queda:

$$f(x_{i+3}) = c_0 + c_1 \frac{3h}{2} + c_2 \left(\frac{3h}{2}\right)^2 + c_3 \left(\frac{3h}{2}\right)^3$$

A continuación, sumamos las expresiones para  $f(x_i)$  y  $f(x_{i+3})$ , y restamos las expresiones para  $f(x_{i+1})$  y  $f(x_{i+2})$ . Esto nos ayuda a simplificar el sistema y a obtener una relación más directa para los coeficientes:

$$\begin{aligned} f(x_i) + f(x_{i+3}) &= \left( c_0 - c_1 \frac{3h}{2} + c_2 \frac{9h^2}{4} - c_3 \frac{27h^3}{8} \right) + \left( c_0 + c_1 \frac{3h}{2} + c_2 \frac{9h^2}{4} + c_3 \frac{27h^3}{8} \right) \\ &= 2c_0 + 2c_2 \frac{9h^2}{4} = 2c_0 + \frac{9h^2}{2} c_2 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) &= \left( c_0 - c_1 \frac{h}{2} + c_2 \frac{h^2}{4} - c_3 \frac{h^3}{8} \right) + \left( c_0 + c_1 \frac{h}{2} + c_2 \frac{h^2}{4} + c_3 \frac{h^3}{8} \right) \\ &= 2c_0 + 2c_2 \frac{h^2}{4} = 2c_0 + \frac{h^2}{2} c_2 \end{aligned}$$

Finalmente, restamos ambas ecuaciones para despejar  $c_2$ :

$$\begin{aligned} (f(x_i) + f(x_{i+3})) - (f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) &= (2c_0 + \frac{9h^2}{2} c_2) - (2c_0 + \frac{h^2}{2} c_2) \\ &= 4h^2 c_2 \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{(f(x_i) + f(x_{i+3})) - (f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))}{4h^2}$$

Ahora, conociendo el valor de  $c_2$  podemos despejar en  $f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) = 2c_0 + \frac{h^2}{2} c_2$  para encontrar  $c_0$  de la siguiente manera:

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) = 2c_0 + \frac{h^2}{2} \left( \frac{(f(x_i) + f(x_{i+3})) - (f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))}{4h^2} \right)$$

$$c_0 = \frac{9(f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) - (f(x_i) + f(x_{i+3}))}{16}$$

Con esto hemos encontrado los valores para  $c_0$  y  $c_2$  con valores conocidos, lo que nos permite calcular la aproximación a la integral de  $f(x)$ .

Para finalizar, sustituyendo  $c_0$  y  $c_2$  en  $\int_{x_i}^{x_{i+3}} p(x) dx = c_0 3h + c_2 \frac{9h^3}{4}$ :

$$c_0 3h + c_2 \frac{9h^3}{4} = \left( \frac{9(f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) - (f(x_i) + f(x_{i+3})))}{16} \right) 3h \\ + \left( \frac{(f(x_i) + f(x_{i+3})) - (f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})))}{4h^2} \right) \frac{9h^3}{4}$$

$$c_0 3h + c_2 \frac{9h^3}{4} = \frac{27}{16} h f(x_{i+1}) + \frac{27}{16} h f(x_{i+2}) - \frac{3}{16} h f(x_i) - \frac{3}{16} h f(x_{i+3}) \\ + \frac{9}{16} h f(x_i) + \frac{9}{16} h f(x_{i+3}) - \frac{9}{16} h f(x_{i+1}) - \frac{9}{16} h f(x_{i+2})$$

$$c_0 3h + c_2 \frac{9h^3}{4} = \frac{3}{8} h f(x_i) + \frac{9}{8} h f(x_{i+1}) + \frac{9}{8} h f(x_{i+2}) + \frac{3}{8} h f(x_{i+3}) \\ = \frac{3h}{8} [f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})]$$

Por lo tanto, tenemos la expresión de la integral en términos de los 4 puntos sobre la curva:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} p(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})]$$

Para calcular la integral en todo el intervalo  $[a, b]$ , sumamos las contribuciones de cada subintervalo. Para los puntos que no son extremos,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , se alternan los coeficientes 3 y 2 en función de su posición relativa en la partición. Finalmente, obtenemos la fórmula general de la regla de Simpson 3/8:

$$I \approx \frac{3h}{8} \left[ f(x_0) + 3 \sum_{i=0}^{\frac{\frac{3}{n}-1}{2}} f(x_{3i+1}) + 3 \sum_{i=0}^{\frac{\frac{3}{n}-1}{2}} f(x_{3i+2}) + 2 \sum_{i=0}^{\frac{\frac{3}{n}-2}{2}} f(x_{3i+3}) + f(x_n) \right]$$

donde  $h = \frac{b-a}{n}$  y  $n$  es un múltiplo de 3.

# Apéndice B

## Implementaciones computacionales

En este apéndice se comparten los códigos en lenguaje C que además reproducir numéricamente las soluciones estudiadas en este trabajo, proporcionan los gráficos de las órbitas junto con las coreografías correspondientes a algunos elementos de  $A_{n,j}$  de velocidades angulares constantes del sistema baricéntrico rotatorio.

Estos códigos funcionan en sistema operativo windows y requieren la instalación previa de la biblioteca gráfica winbgim.h. Se sugiere utilizar la vesion DevC de la compañía Embarcadero. Estos códigos y demas información pertinente tambien podrá ser descargada de el repositorio en GitHub:

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

#include <winbgim.h>
    FILE *AE;

// Para graficar

void waitForLeftMouseClicked();
#define xmaxCP 1890
```

```
#define ymaxCP 1000

float fact=.9;
float Xmin =-5*fact+3;
float Ymin =-4*fact -2;
float Xmax =10*fact+3;
float Ymax =4*fact -2;

float Tax(float x){
    return  ymaxCP*(x -Xmin)/(Xmax-Xmin);
}

float Tay(float y){
    return  ymaxCP*(Ymax-y)/(Ymax-Ymin);
}

void linea(float a,float b, float c, float d){
    line(Tax(a),Tay(b),Tax(c),Tay(d));
}

void ejes_0(int c1, int c2){
    setcolor(c1);  linea(Xmin*.9,0,Xmax/8.5,0);
    setcolor(c2);  linea(0,Ymin/4,0,Ymax*.9);
}

void ejes_1(int c1, int c2){
    setcolor(c1);  linea(Xmin*.9 + 3,0,Xmax/8.5 +3,0);
    setcolor(c2);  linea(0+3,Ymin/4,0+3,Ymax*.9);
}

void ejes_2(int c1, int c2){
    setcolor(c1);  linea(Xmin*.9 + 3+3,0,Xmax/8.5 +3+3,0);
    setcolor(c2);  linea(0+3+3,Ymin/4,0+3+3,Ymax*.9);
}
```

```
void ejes_3(int c1, int c2){
    setcolor(c1); linea(Xmin*.9,0-3,Xmax/8.5,0-3);
    setcolor(c2); linea(0,Ymin/4-3,0,Ymax*.9-3);
}
```

```
void ejes_4(int c1, int c2){
    setcolor(c1); linea(Xmin*.9+3,0-3,Xmax/8.5+3,0-3);
    setcolor(c2); linea(0+3,Ymin/4-3,0+3,Ymax*.9-3);
}
```

```
void ejes_5(int c1, int c2){
    setcolor(c1); linea(Xmin*.9+3+3,0-3,Xmax/8.5+3+3,0-3);
    setcolor(c2); linea(0+3+3,Ymin/4-3,0+3+3,Ymax*.9-3);
}
```

```
void ejes(int c1, int c2){
    setcolor(c1);
    linea(Xmin,0,Xmax,0);
    setcolor(c2);
    linea(0,Ymin,0,Ymax);
}
```

```
// Define el numero de ecuaciones diferenciales
#define N 8 // Cambia este valor segun el numero de funciones
```

```
// Define las funciones derivadas f1', f2', ..., fn'
```

```
void derivadas_SBI(double t, double *y, double *dy) {
    double r3[2][2];
    r3[0][1]=pow(pow(y[0]-y[4],2)+pow(y[2]-y[6],2),3.0/2);
```

```

r3[0][2]=pow(pow(y[0]-y[8],2)+pow(y[2]-y[10],2),3.0/2);
r3[1][2]=pow(pow(y[4]-y[8],2)+pow(y[6]-y[10],2),3.0/2);

dy[0]=y[1];
dy[1]=-(1.0/3)*((y[0]-y[4])/r3[0][1] +(y[0]-y[8])/r3[0][2]);

dy[2]=y[3];
dy[3]=-(1.0/3)*((y[2]-y[6])/r3[0][1] +(y[2]-y[10])/r3[0][2]);

dy[4]=y[5];
dy[5]=-(1.0/3)*((y[4]-y[0])/r3[0][1] +(y[4]-y[8])/r3[1][2]);

dy[6]=y[7];
dy[7]=-(1.0/3)*((y[6]-y[2])/r3[0][1] +(y[6]-y[10])/r3[1][2]);//

dy[8]=y[9];
dy[9]=-(1.0/3)*((y[8]-y[0])/r3[0][2] +(y[8]-y[4])/r3[1][2]);

dy[10]=y[11];
dy[11]=-(1.0/3)*((y[10]-y[2])/r3[0][2] +(y[10]-y[6])/r3[1][2]);

}

//Campo en sistema heliocentrico
void derivadasSH(double t, double *y, double *dy) {
double r3[2][2];
r3[0][1]=pow(pow(y[0],2)+pow(y[2],2),3.0/2);
r3[0][2]=pow(pow(y[4],2)+pow(y[6],2),3.0/2);
r3[1][2]=pow(pow(y[4]-y[0],2)+pow(y[6]-y[2],2),3.0/2);

dy[0]=y[1];
dy[1]=-(2.0/3)*y[0]/r3[0][1] +1.0/3*((y[4]-y[0])/r3[1][2] -y[4]/r3[0][2]);

dy[2]=y[3];
dy[3]=-(2.0/3)*y[2]/r3[0][1] +1.0/3*((y[6]-y[2])/r3[1][2] -y[6]/r3[0][2]);

```

```

dy[4]=y[5];
dy[5]=-((2.0/3)*y[4]/r3[0][2] +1.0/3*((y[0]-y[4])/r3[1][2] -y[0]/r3[0][1]));

dy[6]=y[7];
dy[7]=-((2.0/3)*y[6]/r3[0][2] +1.0/3*((y[2]-y[6])/r3[1][2] -y[2]/r3[0][1]));
}

// Método de Runge-Kutta de cuarto orden para un sistema de ecuaciones
void runge_kutta(double t0, double tf,double *y0, double h, int n_steps, int ns,
int m1, int m2) {
int i, step;
double t = t0;
double y[N];
double k1[N], k2[N], k3[N], k4[N];
int p[5],q[5];

for(i=0;i<m1;i++){
fscanf(AE,"%d %d",&p[i],&q[i]) ;
printf("\n %d %d",p[i],q[i]);
}

double w,w1=-2*3.1415962/tf*p[0]/q[0];

double w2=w1*p[1]/q[1];

double w3=w1*p[2]/q[2];
double w4=w1*p[3]/q[3];
double w5=w1*p[4]/q[4];

char Letrero[30],cad[10];
tf=tf*2;
h = (tf-t0)/n_steps;

double xi[6],nu[6];

```

```
initwindow(xmaxCP,ymaxCP); //open a graphics window

setbkcolor(15);
cleardevice();
setlinestyle(0,0,2);

// linea(Xmin,0,Xmax,0);      linea(0,Ymax,0,Ymax);
//   circle(Tax(0),Tay(0),10);

//waitForLeftMouseClicked();

strcpy(Letrero,"SBI sol= ");itoa(ns,cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35),Tay(1.4),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[0],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,"/") ;
           itoa(q[0],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3),Tay(1.4),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[1],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,"/") ;
           itoa(q[1],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3+3),Tay(1.4),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[2],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,"/") ;
           itoa(q[2],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35),Tay(1.4-3),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q=");itoa(p[3],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,"/") ;
           itoa(q[3],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3),Tay(1.4-3),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[4],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,"/") ;
           itoa(q[4],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3+3),Tay(1.4-3),Letrero);

ejes_0(4,5);
```

```
ejes_1(4,5);
ejes_2(4,5);
ejes_3(4,5);
ejes_4(4,5);
ejes_5(4,5);

// Copiar condiciones iniciales
for (int i = 0; i < N; i++) {
    y[i] = y0[i];
}

// Iterar sobre los pasos
for (step = 0; step < n_steps; step++) {
    // Calcular k1
    double dy[N];
    derivadasSH(t, y, dy);
    for ( i = 0; i < N; i++) {
        k1[i] = h * dy[i];
    }

    // Calcular k2
    double y_temp[N];
    for ( i = 0; i < N; i++) {
        y_temp[i] = y[i] + k1[i] / 2.0;
    }
    derivadasSH(t + h / 2.0, y_temp, dy);
    for ( i = 0; i < N; i++) {
        k2[i] = h * dy[i];
    }

    // Calcular k3
    for (i = 0; i < N; i++) {
        y_temp[i] = y[i] + k2[i] / 2.0;
    }
    derivadasSH(t + h / 2.0, y_temp, dy);
```

```

for (i = 0; i < N; i++) {
    k3[i] = h * dy[i];
}

// Calcular k4
for (i = 0; i < N; i++) {
    y_temp[i] = y[i] + k3[i];
}
derivadasSH(t + h, y_temp, dy);
for (i = 0; i < N; i++) {
    k4[i] = h * dy[i];
}

// Actualizar y y t
for (i = 0; i < N; i++) {
    y[i] += (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 * k3[i] + k4[i]) / 6.0;
}

int rc=2;
xi[0]=-1.0/3*(y[0]+y[4]); //De SBH a SBI
nu[0]=-1.0/3*(y[2]+y[6]);
xi[1]=y[0]+xi[0];
nu[1]=y[2]+nu[0];
xi[2]=y[4]+xi[0];
nu[2]=y[6]+nu[0];

setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=50) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]),Tay(nu[0]),rc);
setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=50) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]),Tay(nu[1]),rc);
setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=50) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]),Tay(nu[2]),rc);
w=w1;
setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3),

```

```
Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)),rc);
setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3),
Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)),rc);
setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3),
Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)),rc);
```

```
w=w2;
```

```
setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3+3),
Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)),rc);
setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3+3),
Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)),rc);
setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3+3),
Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)),rc);
```

```
w=w3;
```

```
setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)),
Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)-3),rc);
setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)),
Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)-3),rc);
setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)),
Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)-3),rc);
```

```
w=w4;
```

```
setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3),
Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)-3),rc);
setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
```

```

    circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3),
    Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3),
    Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)-3),rc);

    w=w5;
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3+3),
    Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3+3),
    Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3+3),
    Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)-3),rc);

    t += h;

//      delay(.01);
}
waitForLeftMouseClicked();
cleardevice();

tf=tf*2;
h = (tf-t0)/n_steps;

for(i=1;i<m2+1;i++){
    fscanf(AE,"%d %d",&p[i],&q[i]) ;
    printf("\n %d %d",p[i],q[i]);
}
w2=w1*p[1]/q[1];
w3=w1*p[2]/q[2];
w4=w1*p[3]/q[3];
w5=w1*p[4]/q[4];

```

```

strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[1],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,("/") ) ;
                itoa(q[1],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3+3),Tay(1.4),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[2],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,("/") ) ;
                itoa(q[2],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35),Tay(1.4-3),Letrero);
strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[3],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,("/") ) ;
                itoa(q[3],cad,10);strcat(Letrero,cad);
setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3),Tay(1.4-3),Letrero);
//  strcpy(Letrero,"SBR p/q= ");itoa(p[4],cad,10);strcat(Letrero,cad) ;
strcat(Letrero,("/") ) ;
//
                itoa(q[4],cad,10);strcat(Letrero,cad);
//  setcolor(1);settextstyle(0,0,3);outtextxy(Tax(-1.35+3+3),Tay(1.4-3),Letrero);
ejes_2(4,5);
ejes_3(4,5);
ejes_4(4,5);
// ejes_5(4,5);

// Copiar condiciones iniciales
for (int i = 0; i < N; i++) {
    y[i] = y0[i];
}

// Iterar sobre los pasos
for (step = 0; step < n_steps; step++) {
    // Calcular k1
    double dy[N];
    derivadasSH(t, y, dy);
    for ( i = 0; i < N; i++) {
        k1[i] = h * dy[i];
    }
}

```

```
// Calcular k2
double y_temp[N];
for ( i = 0; i < N; i++) {
    y_temp[i] = y[i] + k1[i] / 2.0;
}
derivadasSH(t + h / 2.0, y_temp, dy);
for ( i = 0; i < N; i++) {
    k2[i] = h * dy[i];
}

// Calcular k3
for (i = 0; i < N; i++) {
    y_temp[i] = y[i] + k2[i] / 2.0;
}
derivadasSH(t + h / 2.0, y_temp, dy);
for (i = 0; i < N; i++) {
    k3[i] = h * dy[i];
}

// Calcular k4
for (i = 0; i < N; i++) {
    y_temp[i] = y[i] + k3[i];
}
derivadasSH(t + h, y_temp, dy);
for (i = 0; i < N; i++) {
    k4[i] = h * dy[i];
}

// Actualizar y y t
for (i = 0; i < N; i++) {
    y[i] += (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 * k3[i] + k4[i]) / 6.0;
}

int rc=2;
xi[0]=-1.0/3*(y[0]+y[4]); //De SBH a SBI
```

```

    nu[0]=-1.0/3*(y[2]+y[6]);
    xi[1]=y[0]+xi[0];
    nu[1]=y[2]+nu[0];
    xi[2]=y[4]+xi[0];
    nu[2]=y[6]+nu[0];
//
//      setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=50) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]),Tay(nu[0]),rc);
//      setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=50) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]),Tay(nu[1]),rc);
//      setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=50) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]),Tay(nu[2]),rc);
//      w=w1;
//      setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3),
Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)),rc);
//      setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3),
Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)),rc);
//      setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3),
Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)),rc);

    w=w2;
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3+3),
    Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)),rc);
    setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3+3),
    Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)),rc);
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3+3),
    Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)),rc);

w=w3;

```

```

    setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)),
    Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)),
    Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)),
    Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)-3),rc);

w=w4;
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3),
    Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3),
    Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)-3),rc);
    setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
    circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3),
    Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)-3),rc);

//      w=w5;
//      setlinestyle(0,0,4);setcolor(1); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[0]*cos(w*t)- nu[0]*sin(w*t)+3+3),
Tay(xi[0]*sin(w*t)+ nu[0]*cos(w*t)-3),rc);
//      setlinestyle(0,0,1);setcolor(2); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[1]*cos(w*t)- nu[1]*sin(w*t)+3+3),
Tay(xi[1]*sin(w*t)+ nu[1]*cos(w*t)-3),rc);
//      setlinestyle(0,0,4);setcolor(3); if (step<=5) setcolor(4);
circle(Tax(xi[2]*cos(w*t)- nu[2]*sin(w*t)+3+3),
Tay(xi[2]*sin(w*t)+ nu[2]*cos(w*t)-3),rc);
//

    t += h;

//      delay(.01);

```

```
}
```

```
}
```

```
int main() {
    double t0 = 0.0;           // Tiempo inicial
    double tf=2*3.1415926535;
    double y0[N]; // Condiciones iniciales (ajusta según el problema)
    int n_steps = 10000;      // Número de pasos
    double h ;                // Tamaño del paso
    int i,nsol;

    AE=fopen("S1.dat","r");
    if(AE==NULL) printf("\n Problemas con el archivo\n");

    fscanf(AE,"%d",&nsol);
    for(i=0;i<8;i++) fscanf(AE,"%lf",&y0[i]);
    fscanf(AE,"%lf",&tf);

    //
    //  fscanf(AE,"%d",&nsol);
    //  for(i=0;i<8;i++) fscanf(AE,"%lf",&y0[i]);
    //  fscanf(AE,"%lf",&tf);
    //
    //  fscanf(AE,"%d",&nsol);
    //  for(i=0;i<8;i++) fscanf(AE,"%lf",&y0[i]);
    //  fscanf(AE,"%lf",&tf);
    //
}
```

```
//      fscanf(AE,"%d",&nsol);
//      for(i=0;i<8;i++) fscanf(AE,"%lf",&y0[i]);
//      fscanf(AE,"%lf",&tf);
//
//      fclose(AE);

//      printf("\n %d %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf",nsol,
y0[0],y0[1],y0[2],y0[3],y0[4],y0[5],y0[6],y0[7],tf);
//      getchar();
//
//      printf("\n Medio periodo =%lf\n",tf);
      tf*=2;
//      tf/=2;
//      tf*=4;

      h = (tf-t0)/n_steps;
      runge_kutta(t0,tf, y0, h, n_steps,1,5,3);

      fclose(AE);
      waitForLeftMouseClicked();

//      getchar();
      return 0;
}

void waitForLeftMouseClicked()
{
    clearmouseclick(WM_LBUTTONDOWN);
    const int DELAY = 50; // Milliseconds of delay between checks
    int x, y;
    while (!ismouseclick(WM_LBUTTONDOWN))
        delay(DELAY);
    getmouseclick(WM_LBUTTONDOWN, x, y);
}
```

# Bibliografía

- [1] Isaac Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society, London, 1687.
- [2] Henri Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1893.
- [3] E. I. Abouelmagd, J. L. G. Guirao, and J. Llibre. Periodic orbits for the perturbed planar circular restricted 3–body problem. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 39(4):1567–1580, 2019. URL [https://www.academia.edu/download/67442737/26\\_Periodic\\_orbits\\_for\\_the\\_perturbed\\_planar\\_circular\\_restricted\\_3\\_body\\_problem\\_2019.pdf](https://www.academia.edu/download/67442737/26_Periodic_orbits_for_the_perturbed_planar_circular_restricted_3_body_problem_2019.pdf).
- [4] J. Cruz and R. Dilão. Stability of circular orbits in the three-body problem. *CERN Report*, 2020. URL <https://indico.cern.ch/event/900416/contributions/3884387/attachments/2069711/3474269/ist84395.joao.cruz.report.pdf>.
- [5] B. Quarles and Z. E. Musielak. The three-body problem. *Reports on Progress in Physics*, 77(6):065901, 2014. URL <https://arxiv.org/pdf/1508.02312>.
- [6] J. P. Parker and T. M. Schneider. Variational methods for finding periodic orbits in the incompressible navier–stokes equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 939:A3, 2022. URL <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/588BDF4CC7E7FCA9B907CDCA0C162751/S0022112022002993a.pdf>.
- [7] G. S. Krishnaswami and H. Senapati. An introduction to the classical three-body problem: From periodic solutions to instabilities and chaos. *Resonance*, 24:87–114, 2019. URL <https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/024/01/0087-0114>.
- [8] R. Broucke and D. Boggs. Periodic orbits in the planar general three-body problem. *Celestial Mechanics*, 11:13–38, 1975. URL <https://doi.org/10.1007/BF01235837>.

- 
- [9] Aarón Ruiz Gómez. Ecuaciones diofánticas. *Isagoge*, 1:38–40, 2004.  
URL [http://isagoge.atspace.com/documentos/Archivo\\_isagoge1/ECUACIONES\\_DIOFANTICAS.pdf](http://isagoge.atspace.com/documentos/Archivo_isagoge1/ECUACIONES_DIOFANTICAS.pdf). Accedido el 13 de diciembre de 2024.