



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Bifurcación de ciclos límite en una singularidad de  
doble tangencia

## T E S I S

Que para obtener el título de:

**Licenciado en Matemáticas**

Presenta:

José Luis Ocejo Quijada

Director de Tesis: Dr. Juan Andrés Castillo Valenzuela

Hermosillo, Sonora, México, 17 diciembre de 2025



## **SINODALES**

Dr. Manuel Adrián Acuña Zegarra.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Martín Aarón Carrillo Carranza.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Fernando Verduzco González.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Juan Andrés Castillo Valenzuela.  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.



# Índice general

---

|                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Introducción</b>                                                            | <b>III</b> |
| <b>1. Preliminares</b>                                                         | <b>1</b>   |
| <b>2. Forma normal</b>                                                         | <b>9</b>   |
| 2.1. Construcción de la forma normal . . . . .                                 | 9          |
| 2.2. Dinámicas normalizadas en las regiones deslizantes y de cruce . . . . .   | 12         |
| 2.3. Máximo número de pseudo-equilibrios . . . . .                             | 16         |
| <b>3. Bifurcaciones en una singularidad de doble tangencia</b>                 | <b>29</b>  |
| 3.1. La bifurcación pseudo-Hopf . . . . .                                      | 29         |
| 3.2. Bifurcaciones estacionarias en el campo deslizante regularizado . . . . . | 33         |
| <b>4. Familias Representativas</b>                                             | <b>41</b>  |
| 4.1. Una familia con CB I, CB II y sin CB . . . . .                            | 41         |
| 4.2. Una familia sin bifurcación compuesta . . . . .                           | 51         |
| <b>5. Conclusiones</b>                                                         | <b>53</b>  |
| <b>A. Teoremas básicos</b>                                                     | <b>57</b>  |
| <b>B. Construcción de los mapeos de medio retorno</b>                          | <b>63</b>  |



# Introducción

---

Los sistemas dinámicos no lineales han sido una herramienta fundamental para modelar fenómenos en física, biología, ingeniería y otras áreas de las ciencias aplicadas. Estos modelos suelen describirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias suaves, cuya teoría cualitativa está bien desarrollada y proporciona un marco robusto para el análisis de la dinámica local y global; véanse, por ejemplo, [14, 15, 16]. Sin embargo, en muchos problemas de la vida real surgen comportamientos abruptos, conmutaciones o cambios repentinos en la dinámica de ciertos fenómenos que no pueden capturarse adecuadamente mediante modelos puramente suaves.

Los sistemas dinámicos no suaves constituyen una extensión natural de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, en la cual se permite la presencia de discontinuidades y fenómenos que no pueden modelarse adecuadamente mediante campos vectoriales suaves. Entre ellos, los sistemas Filippov ocupan un papel central: describen la interacción de dos (o más) campos vectoriales definidos a cada lado de una superficie (o varias superficies) de discontinuidad, en la cual surge una dinámica inducida por las propias características geométricas del sistema. Esta dinámica, conocida como *dinámica deslizante*, no aparece en la teoría clásica y genera comportamientos que no tienen análogos suaves, como pseudo-equilibrios, equilibrios frontera y otras singularidades degeneradas.

A pesar de su origen en problemas de control, electrónica de potencia, biomecánica y modelos con fricción, la teoría formal de los sistemas Filippov en dimensión tres aún dista de estar completa, pues esta área de investigación es relativamente nueva. La introducción de una superficie de discontinuidad produce fenómenos que no se manifiestan en sistemas suaves y la clasificación de sus bifurcaciones requiere herramientas propias. Un ejemplo representativo es la *singularidad de Teixeira*, un punto en la superficie de discontinuidad donde los campos laterales y la dinámica deslizante pierde regularidad. Esta singularidad actúa como origen de varios mecanismos de bifurcación que, hasta hace relativamente poco, carecían de un marco unificado.

Entre los fenómenos característicos asociados a Teixeira destacan la *bifurcación pseudo-Hopf*, donde un ciclo límite de cruce nace de la singularidad en una *bifurcación compuesta*, en la que la aparición del ciclo límite se combina con una bifurcación estacionaria en el campo deslizante. En sistemas suaves, ser capaz de distinguir estos procesos es relativamente sencillo; en el contexto Filippov, la interacción entre la discontinuidad y la dinámica de cruce exige nuevos invariantes y técnicas de reducción.

El objetivo de esta tesis es establecer un marco analítico claro para identificar y distinguir la bifurcación pseudo-Hopf y las bifurcaciones compuestas en sistemas Filippov en  $\mathbb{R}^3$ , con especial énfasis en aquellos que presentan una singularidad de Teixeira. Para ello, se desarrolla una reducción sistemática sobre la variedad central y se obtienen condiciones explícitas sobre los coeficientes no lineales que determinan el tipo de bifurcación. Estas condiciones no sólo permiten clasificar los comportamientos posibles, sino que también delimitan aquellos escenarios en los que dicha bifurcación es imposible.

Como aporte principal, se presentan familias concretas de sistemas Filippov que realizan cada uno de los fenómenos de bifurcación estudiados. En particular, se construyen ejemplos que exhiben bifurcación compuesta de tipo I, bifurcación compuesta de tipo II y una versión degenerada de la bifurcación pseudo-Hopf, fenómeno que, hasta donde llega la bibliografía consultada, no contaba con un tratamiento explícito en dimensión tres. Además, se muestra que el número de pseudo-equilibrios del campo deslizante está acotado, aplicando una versión real del teorema de Bézout para garantizar que no puedan aparecer más de cuatro de ellos.

Esta tesis no pretende agotar el tema, pero sí ofrece un puente entre la intuición geométrica de los ejemplos y las herramientas analíticas necesarias para comprenderlos.

El documento se organiza de la siguiente manera. En los *Preliminares* se presentan las nociones básicas de sistemas Filippov, el campo deslizante y los elementos necesarios para el desarrollo de este trabajo de tesis. En el Capítulo 2 se introducen una forma normal para los sistemas Filippov, el campo deslizante y la singularidad de Teixeira. En el Capítulo 3 se estudian la bifurcación pseudo-Hopf y las bifurcaciones compuestas, estableciendo las condiciones necesarias para su aparición. El Capítulo 4 presenta las familias de ejemplos que realizan los distintos escenarios teóricos. Finalmente, las conclusiones sintetizan los aportes y señalan direcciones posibles para trabajos futuros.



---

## Capítulo 1

# Preliminares

---

Consideremos el sistema Filippov en 3D con dos campos separados por el plano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma(x) = n^\top x - k_0 = 0\}$ ,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0 \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $b_1, b_2, n \in \mathbb{R}^3$  y  $k_0 \in \mathbb{R}$ .

Definimos los planos  $\pi_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid n^\top (A_i x + b_i) = 0\}$  para  $i = 1, 2$  cuyas intersecciones con el plano de conmutación definen a las rectas  $L_i = \pi_i \cap \Sigma$  para  $i = 1, 2$ . Estas rectas forman un conjunto de puntos donde los campos  $f^-(x)$  y  $f^+(x)$  son tangentes al plano de conmutación. Si estas rectas se intersectan de manera transversal (ver Figura 1.1), será en un único punto  $\hat{x} \in \Sigma$  donde existirá una tangencia a ambos lados de  $\Sigma$ , a este punto  $\hat{x}$  lo llamaremos *punto de doble-tangencia*. En la Figura 1.1 se ilustra la configuración geométrica genérica de una singularidad de doble tangencia.

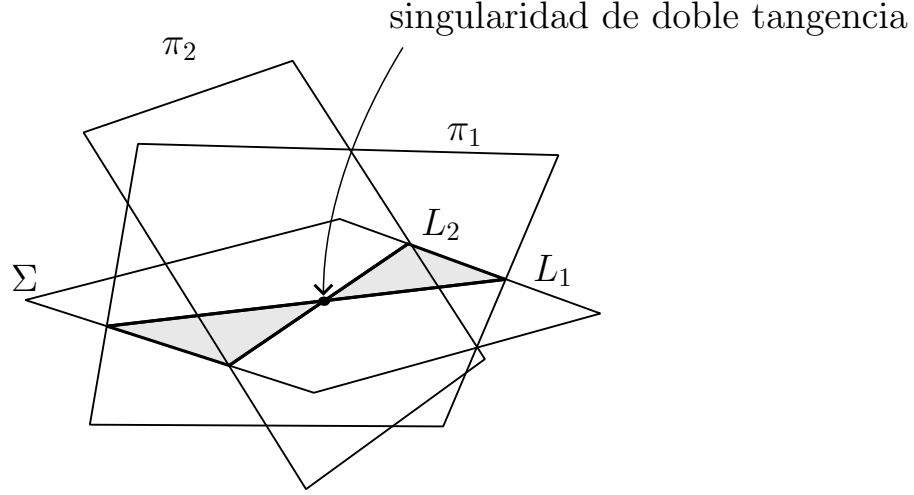
De esta manera, la existencia de un punto de doble-tangencia en el sistema (1.1) está determinada por la existencia de una única solución del sistema algebraico

$$\begin{aligned} n^\top x - k_0 &= 0 \\ n^\top A_1 x + n^\top b_1 &= 0 \\ n^\top A_2 x + n^\top b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Reescribiendo el sistema anterior, tenemos

$$Tx = b \quad (1.2)$$

$$\text{donde } T = \begin{pmatrix} n^\top \\ n^\top A_1 \\ n^\top A_2 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} k_0 \\ -n^\top b_1 \\ -n^\top b_2 \end{pmatrix}.$$

Figura 1.1: *Caso genérico.*

Se distinguen tres regiones que se encuentran presentes en el plano de conmutación  $\Sigma$  que se caracterizan por el comportamiento del flujo a ambos lados de  $\Sigma$ :

La región *deslizante atractiva*:

$$\Sigma_{as} = \{x \in \Sigma \mid n^\top f^-(x) > 0 \text{ y } n^\top f^+(x) < 0\},$$

la región *deslizante repulsiva*:

$$\Sigma_{rs} = \{x \in \Sigma \mid n^\top f^-(x) < 0 \text{ y } n^\top f^+(x) > 0\},$$

y la región *de cruce*:

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma \mid (n^\top f^-(x)) (n^\top f^+(x)) > 0\}.$$

En la Figura 1.2 se muestran las dinámicas típicas sobre el plano de conmutación, distinguiendo la región de cruce y las regiones deslizantes atractiva y repulsiva.

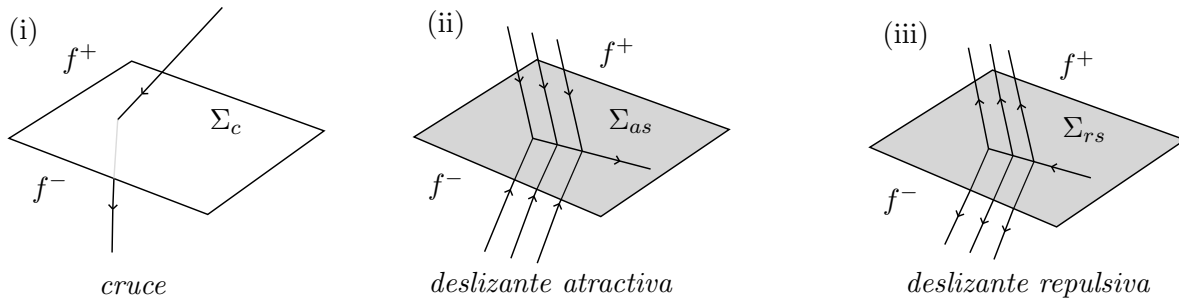


Figura 1.2: *Dinámicas en las regiones deslizantes del plano de conmutación en un sistema suave por pedazos en tres dimensiones. El campo vectorial cambia entre  $f^-$  y  $f^+$ . Una solución del sistema puede: (i) cruzar el plano de conmutación, (ii) alcanzarlo en algún tiempo  $t$  y seguir al campo deslizante  $f_s$ , o (iii) tocarlo y escapar en algún tiempo finito  $t$ , pero puede deslizarse sobre el plano por algún tiempo antes de escapar.*

Definiremos que significa ser un punto de tangencia para el sistema (1.1), los cuales están caracterizados por el orden de las derivadas de  $\sigma(x)$  con respecto al tiempo en el punto de contacto.

**Definición 1.** *Un punto  $p \in \Sigma$  del sistema (1.1) es un punto de tangencia si*

$$(i) \quad n^\top f^-(p) = 0 \text{ o bien}$$

$$(ii) \quad n^\top f^+(p) = 0$$

*Un punto de tangencia  $p \in \Sigma$  del sistema (1.1) es una singularidad de doblez si*

$$(i) \quad r_1 \neq 0 \text{ o bien}$$

$$(ii) \quad r_2 \neq 0$$

donde

$$r_1 = n^\top A_1 f^-(p) \quad y \quad r_2 = n^\top A_2 f^+(p).$$

**Definición 2.** *Un punto de tangencia  $p \in \Sigma$  es un punto cúspide de (1.1) si*

$$(i) \quad r_1 = 0, \quad n^\top A_1^2 f^-(p) \neq 0 \text{ y el conjunto } \{\nabla \sigma(p), \nabla n^\top f^-(p), \nabla n^\top A_1 f^-(p)\} \text{ es linealmente independiente, o bien,}$$

$$(ii) \quad r_2 = 0, \quad n^\top A_2^2 f^+(p) \neq 0 \text{ y el conjunto } \{\nabla \sigma(p), \nabla n^\top f^+(p), \nabla n^\top A_2 f^+(p)\} \text{ es linealmente independiente.}$$

**Observación 1.** *Como el sistema (1.1) es lineal por pedazos, la última condición se da automáticamente. Es decir, si*

$$n^\top f^-(p) = 0, \quad n^\top A_1 f^-(p) = 0 \quad y \quad n^\top A_1^2 f^-(p) \neq 0,$$

*entonces el conjunto  $\{\nabla \sigma(p), \nabla n^\top f^-(p), \nabla n^\top A_1 f^-(p)\}$  es linealmente independiente.*

**Proposición 1.** *Si  $n^\top f^-(p) = 0, n^\top A_1 f^-(p) = 0$  y el conjunto  $\{\nabla \sigma(p), \nabla n^\top f^-(p), \nabla n^\top A_1 f^-(p)\}$  es linealmente dependiente, entonces  $n^\top A_1^2 f^-(p) = 0$ .*

*Demostración.* Primero, observemos que

$$\nabla \sigma(x) = \nabla(n^\top x - k_0) = n^\top,$$

$$\nabla n^\top f^-(x) = \nabla(n^\top (A_1 x + b_1)) = n^\top A_1,$$

$$\nabla n^\top A_1 f^-(x) = \nabla(n^\top A_1 (A_1 x + b_1)) = n^\top A_1^2.$$

Luego, si el conjunto  $\{\nabla \sigma(p), \nabla n^\top f^-(p), \nabla n^\top A_1 f^-(p)\}$  es linealmente dependiente, entonces, sin pérdida de generalidad, existen escalares  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que

$$n^\top A_1^2 = \lambda_1 n^\top + \lambda_2 n^\top A_1.$$

Sea  $p \in \Sigma$  un punto de tangencia. Multiplicando a ambos lados por  $f^-(p)$  se tiene

$$n^\top A_1^2 f^-(p) = \lambda_1 n^\top f^-(p) + \lambda_2 n^\top A_1 f^-(p),$$

y como  $n^\top f^-(p) = n^\top A_1 f^-(p) = 0$ , se sigue que

$$n^\top A_1^2 f^-(p) = 0$$

como se quería demostrar. ■

**Definición 3.** Una singularidad de doblez (o punto de tangencia cuadrática) se puede clasificar en visible o invisible de la siguiente manera:

(i) El punto  $p \in \Sigma$  es un punto de doblez invisible (visible) para el campo  $f^-$  si

$$n^\top f^-(p) = 0 \quad \text{y} \quad r_1 > 0 (< 0)$$

(ii) El punto  $p \in \Sigma$  es un punto de doblez invisible (visible) para el campo  $f^+$  si

$$n^\top f^+(p) = 0 \quad \text{y} \quad r_2 < 0 (> 0)$$

Entonces, si el punto de doble tangencia es un punto de tangencia cuadrática en ambos lados, es llamada *singularidad de doble-doblez*. Particularmente, si ambas tangencias son invisibles, la singularidad de doble-doblez es llamada una *singularidad de Teixeira*. En la Figura 1.3 se ilustran los mecanismos de tangencia en un sistema Filippov

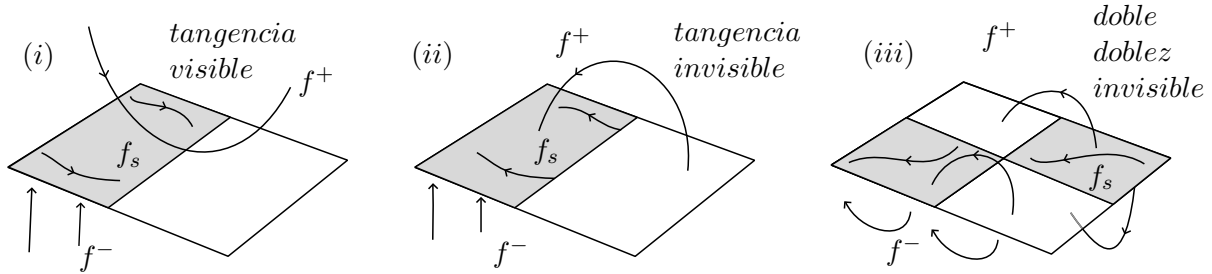


Figura 1.3: Tangencias en un sistema Filippov: (i) una tangencia visible, (ii) una tangencia invisible; estas forman la frontera entre deslizamiento (zona gris) y cruce (zona blanca), (iii) una tangencia de doble doblez; ambos campos vectoriales son tangentes al plano de conmutación (en el caso ilustrado, ambas tangencias son invisibles).

Las soluciones para la *región deslizante*  $\Sigma_s = \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$  se obtienen mediante el método convexo de Filippov [4]. El método convexo de Filippov toma una combinación convexa de los campos vectoriales  $f^+(x)$  y  $f^-(x)$  para cada punto deslizante  $x \in \Sigma_s$ , es decir,

$$f_s(x) = (1 - \gamma(x))f^-(x) + \gamma(x)f^+(x), \quad (1.3)$$

donde la función  $\gamma(x)$  se define como

$$\gamma(x) = \frac{n^\top f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))} \in (0, 1), \quad \forall x \in \Sigma_s$$

y es tal que  $n^\top f_s(x) = 0$ .

Si sustituimos esta expresión en (1.3) encontramos que

$$\begin{aligned} f_s(x) &= \left(1 - \frac{n^\top f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))}\right) f^-(x) + \left(\frac{n^\top f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))}\right) f^+(x) \\ &= \left(\frac{n^\top (f^-(x) - f^+(x))}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))} - \frac{n^\top f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))}\right) f^-(x) + \left(\frac{n^\top f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))}\right) f^+(x) \\ &= \frac{(-n^\top f^+(x))f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))} + \frac{(n^\top f^-(x))f^+(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))} \\ &= \frac{(n^\top f^-(x))f^+(x) - (n^\top f^+(x))f^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión explícita para el campo deslizando  $f_s(x)$  está dada por

$$f_s(x) = \frac{f_r(x)}{\Delta x} \quad (1.4)$$

- $f_r(x) = (n^\top f^-(x))f^+(x) - (n^\top f^+(x))f^-(x)$
- $\Delta x = n^\top (f^-(x) - f^+(x))$

con  $\Delta x \neq 0$ . El campo  $f_s$  es llamado el *campo deslizando* mientras que  $f_r$  es llamado el *campo deslizando regularizado*. En la Figura 1.4 se ilustra la construcción geométrica que se obtiene utilizando el método convexo de Filippov.

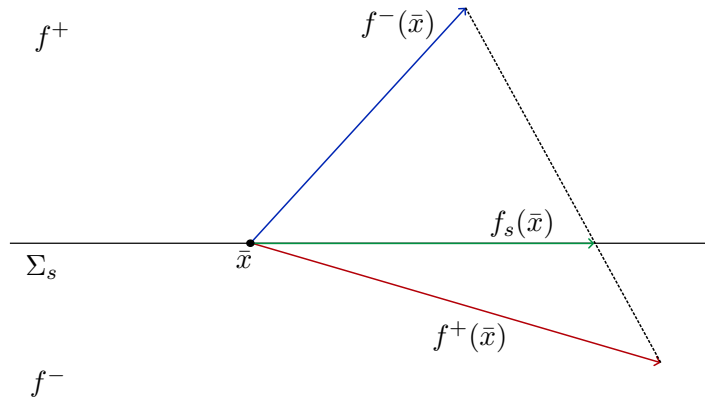


Figura 1.4: Construcción geométrica del campo deslizando mediante el método convexo de Filippov. El vector  $f_s(\bar{x})$  es la única combinación convexa de  $f^-(\bar{x})$  y  $f^+(\bar{x})$  tangente a  $\Sigma_s$ , y describe la dirección de deslizamiento sobre la superficie de conmutación.

Daremos la definición del siguiente concepto que será importante para el desarrollo de este trabajo:

**Definición 4.** Los campos  $f^-$  y  $f^+$  se dicen ser antiparalelos si existe  $k < 0$  tal que

$$f^-(x) - kf^+(x) = 0.$$

En la Figura 1.5 se presenta una representación esquemática del antiparalelismo de los campos  $f^-$  y  $f^+$ .

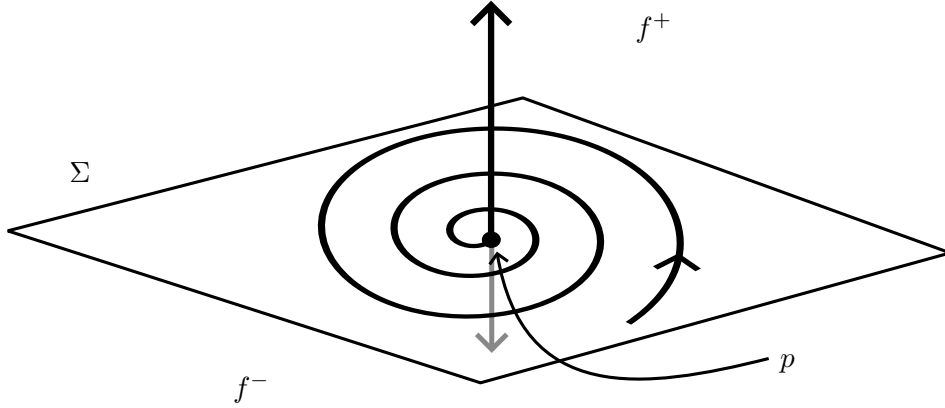


Figura 1.5: Representación esquemática del antiparalelismo de los campos laterales. En el punto  $p$  los vectores  $f^+(p)$  y  $f^-(p)$  son colineales y apuntan en sentidos opuestos, como se sugiere con las flechas negra y gris. Nótese que esta relación fija sólo la dirección y el sentido de los vectores: sus normas no tienen por qué coincidir.

Podemos identificar a los puntos de equilibrio del sistema (1.1) de la siguiente manera:

**Definición 5.**

- (a) Un punto  $x \in \mathbb{R}^3$  es un punto de equilibrio admisible de (1.1) si
  - (i)  $f^-(x) = 0$  y  $\sigma(x) < 0$  o
  - (ii)  $f^+(x) = 0$  y  $\sigma(x) > 0$
- (b) Un punto  $x \in \mathbb{R}^3$  es un punto de equilibrio virtual de (1.1) si
  - (i)  $f^-(x) = 0$  y  $\sigma(x) > 0$  o
  - (ii)  $f^+(x) = 0$  y  $\sigma(x) < 0$
- (c) Un punto  $x \in \Sigma$  es un **pseudo-equilibrio** de (1.1) si  $f_s(x) = 0$ . El pseudo-equilibrio es **admissible** si  $x \in \Sigma_s$  o es **virtual** si  $x \in \Sigma_c$ .

Un tipo de equilibrios muy particulares y de los que se hará mención más adelante son los siguientes:

---

**Definición 6** (Equilibrio frontera). *Sea  $\Sigma$  la superficie de discontinuidad de un sistema Filippov. Un punto  $p \in \Sigma$  se denomina equilibrio frontera si*

$$f^-(p) = 0 \quad \text{o} \quad f^+(p) = 0.$$

*En este caso,  $p$  es un equilibrio de uno de los campos laterales que se encuentra sobre la superficie de discontinuidad.*

**Observación 2.** *Nótese que un pseudo-equilibrio admisible se comporta como un equilibrio admisible, esto es, en un pseudo-equilibrio admisible  $x_0$  se tiene que  $f_s(x_0) = 0$ , con  $(n^\top f^-(x_0)) (n^\top f^+(x_0)) < 0$ ; con un cálculo directo podemos ver que  $f^+(x_0) = \left( \frac{n^\top f^+(x_0)}{n^\top f^-(x_0)} \right) f^-(x_0)$ , lo que nos dice que los campos son antiparalelos.*





---

## Capítulo 2

# Forma normal

---

En este capítulo se introduce una forma normal para los sistemas Filippov en  $\mathbb{R}^3$  que presentan una singularidad de doble tangencia. Partiendo del sistema general (1.1) y bajo la hipótesis de existencia y unicidad del punto de doble tangencia, se construye un cambio lineal de coordenadas centrado en dicho punto y adaptado a la geometría del plano de conmutación. Este cambio transforma al sistema original en el sistema (2.2), en el que el plano de conmutación y las rectas de tangencia se alinean con los planos coordenados y la singularidad adquiere una configuración canónica. La forma normal resultante sólo depende de 16 parámetros, reduciendo el número original de 27 parámetros y manteniendo toda la información geométrica relevante. En las secciones siguientes se describe cómo esta transformación afecta la dinámica en las regiones deslizantes y de cruce, se obtiene una expresión explícita para el campo deslizante asociado y se utiliza esta forma normal como punto de partida para acotar el número de pseudo-equilibrios y para el análisis de las bifurcaciones que se estudiarán en los capítulos posteriores.

### 2.1. Construcción de la forma normal

Sea el sistema (1.1) de la forma

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0 \\ f^+(x) = A_2x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0 \end{cases}$$

con  $\sigma(x) = n^\top x - k_0$ , donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $b_1, b_2, n \in \mathbb{R}^3$  y  $k_0 \in \mathbb{R}$ .

Se busca que el sistema presente una singularidad de doble-tangencia, es decir, busquemos que las rectas se intersecten en un único punto  $\hat{x}$ . Para esto, supongamos que se cumple la siguiente hipótesis:

$$(\mathbf{H}_1) \text{ rango}(T) = 3$$

Si esto se cumple, por el teorema de Rouché-Frobenius<sup>1</sup>, entonces el sistema (1.2) tiene solución única.

---

<sup>1</sup>También conocido como teorema de Rouché-Capelli

En el siguiente teorema se presenta una forma normal para los sistemas Filippov que satisfacen la hipótesis ( $\mathbf{H}_1$ ).

**Teorema 2.1** ([9]). *Supongamos que el sistema (1.1) satisface la hipótesis  $\mathbf{H}_1$ , el cambio de coordenadas*

$$y = h(x) = T(x - \hat{x}) \quad (2.1)$$

donde  $T = \begin{pmatrix} n^\top \\ n^\top A_1 \\ n^\top A_2 \end{pmatrix}$  y  $\hat{x}$  es el punto de doble tangencia, transforma al sistema (1.1) en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{y} = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\text{donde } \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}, \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

con  $r_i = n^\top A_i(A_i \hat{x} + b_i)$ , para  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* Primeramente, observemos que

$$TT^{-1} = \begin{pmatrix} n^\top T^{-1} \\ n^\top A_1 T^{-1} \\ n^\top A_2 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \quad (2.3)$$

Aplicando el cambio de coordenadas (2.1) a  $\Sigma$ , teniendo en cuenta que como  $\hat{x} \in \Sigma$ , entonces  $n^\top \hat{x} - k_0 = 0$

$$\begin{aligned} n^\top \hat{x} - k_0 &= 0, \\ n^\top (T^{-1}y + \hat{x}) - k_0 &= 0, \\ n^\top T^{-1}y + n^\top \hat{x} - k_0 &= 0, \\ n^\top T^{-1}y &= 0. \end{aligned}$$

Por la relación (2.3) tenemos que  $n^\top T^{-1} = e_1^\top$ , por tanto, se sigue que  $n^\top T^{-1}y = 0$  si y solo si  $y_1 = 0$ .

Ahora, apliquemos el cambio de coordenadas  $h(x)$  a ambos campos.

El sistema (1.1) tiene la forma

$$\dot{x} = A_i x + b_i, \quad i = 1, 2.$$

Tenemos que

$$y = T(x - \hat{x}),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= T\dot{x}, \\
 &= T(A_i x + b_i), \\
 &= T(A_i(T^{-1}y + \hat{x}) + b_i), \\
 &= TA_i T^{-1}y + TA_i \hat{x} + Tb_i, \\
 &= TA_i T^{-1}y + T(A_i \hat{x} + b_i),
 \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2$ . De aquí, nombraremos

$$\tilde{A}_i = TA_i T^{-1} \quad \text{y} \quad \tilde{b}_i = T(A_i \hat{x} + b_i).$$

Cuando  $\sigma(x) < 0$ , tenemos que  $\dot{y} = \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1$ , donde

$$\tilde{A}_1 = TA_1 T^{-1} = \begin{pmatrix} n^\top A_1 T^{-1} \\ n^\top A_1^2 T^{-1} \\ n^\top A_2 A_1 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^\top \\ n^\top A_1^2 T^{-1} \\ n^\top A_2 A_1 T^{-1} \end{pmatrix},$$

pero, sabemos que

$$T^{-1}I = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_2^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} = w_1 e_1^\top + w_2 e_2^\top + w_3 e_3^\top,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1 &= \begin{pmatrix} e_2^\top \\ n^\top A_1^2 w_1 e_1^\top + n^\top A_1^2 w_2 e_2^\top + n^\top A_1^2 w_3 e_3^\top \\ n^\top A_2 A_1 T^{-1} w_1 e_1^\top + n^\top A_2 A_1 T^{-1} w_2 e_2^\top + n^\top A_2 A_1 T^{-1} w_3 e_3^\top \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 c_1 &= n^\top A_1^2 w_1, & c_4 &= n^\top A_2 A_1 w_1, \\
 c_2 &= n^\top A_1^2 w_2, & c_5 &= n^\top A_2 A_1 w_2, \\
 c_3 &= n^\top A_1^2 w_3, & c_6 &= n^\top A_2 A_1 w_3.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= T(A_1\hat{x} + b_1), \\ &= \begin{pmatrix} n^\top(A_1\hat{x} + b_1) \\ n^\top A_1(A_1\hat{x} + b_1) \\ n^\top A_2(A_1\hat{x} + b_1) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ n^\top A_2(A_1\hat{x} + b_1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Análogamente, para  $\sigma(x) > 0$ , tenemos  $\dot{y} = \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2$ , donde

$$\tilde{A}_2 = T A_2 T^{-1} = \begin{pmatrix} e_3^\top \\ n^\top A_1 A_2 T^{-1} \\ n^\top A_2^2 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned}d_1 &= n^\top A_1 A_2 w_1, & d_4 &= n^\top A_2^2 w_1, \\ d_2 &= n^\top A_1 A_2 w_2, & d_5 &= n^\top A_2^2 w_2, \\ d_3 &= n^\top A_1 A_2 w_3, & d_6 &= n^\top A_2^2 w_3,\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\tilde{b}_2 &= T(A_2\hat{x} + b_2), \\ &= \begin{pmatrix} n^\top(A_2\hat{x} + b_2) \\ n^\top A_1(A_2\hat{x} + b_2) \\ n^\top A_2(A_2\hat{x} + b_2) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ n^\top A_1(A_2\hat{x} + b_2) \\ r_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

■

## 2.2. Dinámicas normalizadas en las regiones deslizando y de cruce

Es de interés conocer como esta transformación afecta la dinámica en las regiones deslizando y de cruce. Para eso, en el siguiente corolario se muestra la  $\Sigma$ -equivalencia bajo el cambio de coordenadas  $h(x)$ .

**Corolario 1.** *Bajo el cambio de coordenadas (2.1) se tiene que  $h(\Sigma_u) = \tilde{\Sigma}_u$  para  $u \in \{as, rs, c\}$ .*

*Demostración.* Para  $x \in \Sigma$ , se tiene que  $h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ n^\top A_1(x - \hat{x}) \\ n^\top A_2(x - \hat{x}) \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{aligned} e_1^\top \tilde{f}^-(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} n^\top A_1(x - \hat{x}) \\ c_2 n^\top A_1(x - \hat{x}) + c_3 n^\top A_1(x - \hat{x}) \\ c_5 n^\top A_1(x - \hat{x}) + c_6 n^\top A_1(x - \hat{x}) \end{pmatrix} \\ &= n^\top A_1(x - \hat{x}) + n^\top b_1 - n^\top b_1 \\ &= n^\top (A_1 x + b_1) - n^\top (A_1 \hat{x} + b_1) \\ &= n^\top f^-(x), \end{aligned}$$

análogamente, se tiene

$$\begin{aligned} e_1^\top \tilde{f}^+(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} n^\top A_2(x - \hat{x}) \\ d_2 n^\top A_2(x - \hat{x}) + d_3 n^\top A_2(x - \hat{x}) \\ d_5 n^\top A_2(x - \hat{x}) + d_6 n^\top A_2(x - \hat{x}) \end{pmatrix} \\ &= n^\top A_2(x - \hat{x}) + n^\top b_2 - n^\top b_2 \\ &= n^\top (A_2 x + b_2) - n^\top (A_2 \hat{x} + b_2) \\ &= n^\top f^+(x). \end{aligned}$$

■

**Observación 3.** En esta forma normal, el nuevo plano de conmutación es

$$\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = 0\},$$

y los planos  $\pi_i$  se convierten en los planos

$$\tilde{\pi}_1 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 0\},$$

$$\tilde{\pi}_2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0\};$$

por tanto, las rectas de tangencia son los ejes coordenados

$$\tilde{L}_1 = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_1 = \{(0, 0, y_3)\} \quad y \quad \tilde{L}_2 = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_2 = \{(0, y_2, 0)\},$$

dejándonos con el punto de doble tangencia en el origen.

En la figura 2.1 se ilustra la acción del cambio de coordenadas (2.1) a un sistema genérico

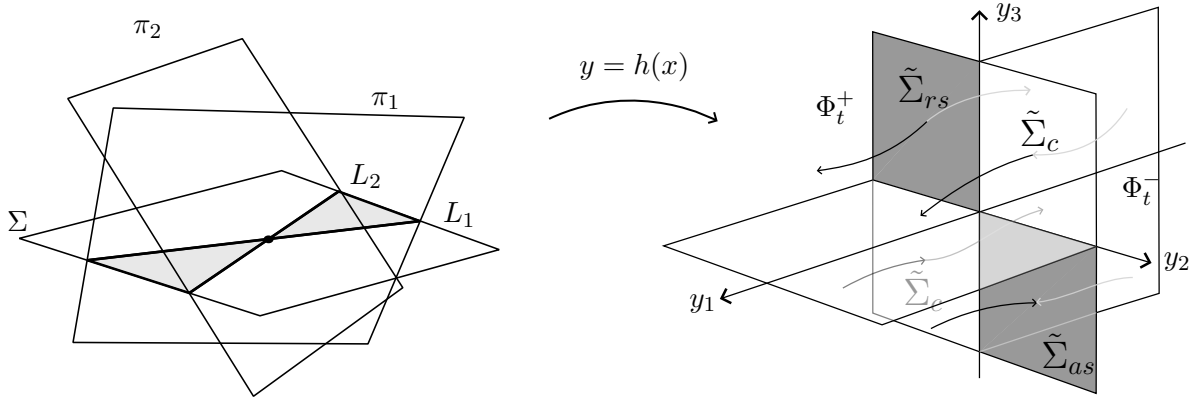


Figura 2.1: Cambio de coordenadas (2.1).

De esta manera, en el sistema normalizado, las regiones de cruce, deslizamiento atractivo y deslizamiento repulsivo son los conjuntos

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{as} &= \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > 0 \text{ y } y_3 < 0\} \\ \tilde{\Sigma}_{rs} &= \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 < 0 \text{ y } y_3 > 0\} \\ \tilde{\Sigma}_c &= \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 y_3 > 0\}\end{aligned}$$

Con esto, de acuerdo a las definiciones dadas en el Capítulo 1, podemos clasificar los puntos de tangencia de (2.2) de la siguiente manera:

**Definición 7.** Un punto de tangencia  $y_L = (0, 0, y_3) \in \tilde{L}_1$  será una singularidad de doblez de (2.2) si

$$\tilde{r}_1(y_L) = e_1^\top \tilde{A}_1 \tilde{f}^-(y_L) = r_1 + c_3 y_3 \neq 0$$

de tipo invisible si  $\tilde{r}_1(y_L) > 0$  o de tipo visible si  $\tilde{r}_1(y_L) < 0$ . Este punto de tangencia será un punto cúspide si

$$\tilde{r}_1(y_L) = 0 \text{ y } e_1^\top \tilde{A}_1^2 \tilde{f}^-(y_L) = c_3 s_1 - c_6 r_1 \neq 0$$

Un punto de tangencia  $y_L = (0, y_2, 0) \in \tilde{L}_2$  será una singularidad de doblez de (2.2) si

$$\tilde{r}_2(y_L) = e_1^\top \tilde{A}_2 \tilde{f}^+(y_L) = r_2 + d_5 y_2 \neq 0$$

de tipo invisible si  $\tilde{r}_2(y_L) < 0$  o de tipo visible si  $\tilde{r}_2(y_L) > 0$ .

Este punto de tangencia será un punto cúspide si

$$\tilde{r}_2(y_L) = 0 \text{ y } e_1^\top \tilde{A}_2^2 \tilde{f}^+(y_L) = d_5 s_2 - d_2 r_2 \neq 0$$

De esta manera, el punto de doble tangencia será una singularidad de Teixeira (es decir, del tipo invisible-invisible) si  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ .

El siguiente lema establece la equivalencia topológica entre el nuevo campo deslizante  $\tilde{f}_s(y)$  definido en  $\tilde{\Sigma}_s$  y el campo deslizante original  $f_s(x)$ .

**Lema 1.** Para  $x \in \Sigma_s$  y para  $y = h(x) \in \tilde{\Sigma}_s$ , se tiene que  $\tilde{f}_s(h(x)) = Tf_s(x)$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \tilde{\Sigma}_s$ , con

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n^\top A_1(x - \hat{x}) \\ n^\top A_2(x - \hat{x}) \end{pmatrix},$$

donde  $x \in \Sigma_s$ . Recordemos que la expresión para el campo deslizante  $f_s(x)$  es

$$f_s(x) = \frac{f_r(x)}{\Delta x},$$

donde  $f_r(x) = (n^\top f^-(x))f^+(x) - (n^\top f^+(x))f^-(x)$  y  $\Delta x = n^\top(f^-(x) - f^+(x))$ .

Con esto, tenemos que

$$\tilde{f}_s(h(x)) = \frac{\left(e_1^\top \tilde{f}^-(h(x))\right) \tilde{f}^+(h(x)) - \left(e_1^\top \tilde{f}^+(h(x))\right) \tilde{f}^-(h(x))}{e_1^\top \left(\tilde{f}^-(h(x)) - \tilde{f}^+(h(x))\right)} \quad (2.4)$$

Además, por el Corolario 1, tenemos que

$$e_1^\top \tilde{f}^\mp(h(x)) = n^\top f^\mp(h(x)),$$

y considerando que

$$\dot{y} = T\dot{x} \iff \tilde{f}^\mp = Tf^\mp,$$

entonces, (2.4) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s(h(x)) &= \frac{(n^\top f^-(x)) Tf^+(x) - (n^\top f^+(x)) Tf^-(x)}{n^\top (f^-(x) - f^+(x))} \\ &= Tf_s(x) \end{aligned}$$

■

Con esto, vemos que el campo vectorial deslizante  $\tilde{f}_s(y)$  tiene la forma

$$\tilde{f}_s(y) = \frac{\tilde{f}_r(y)}{\tilde{\Delta}(y)}, \quad (2.5)$$

$$\text{donde } \tilde{f}_r(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 y_2^2 + (d_3 - c_2) y_2 y_3 - c_3 y_3^2 + s_2 y_2 - r_1 y_3 \\ d_5 y_2^2 + (d_6 - c_5) y_2 y_3 - c_6 y_3^2 + r_2 y_2 - s_1 y_3 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{\Delta}(y) = y_2 - y_3.$$

**Observación 4.** Los campos vectoriales  $\tilde{f}_s(y)$  y  $\tilde{f}_r(y)(-\tilde{f}_r(y))$  son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_{as}(\tilde{\Sigma}_{rs})$ .

Por conveniencia, vamos a considerar (2.5) en dos dimensiones, omitiendo su componente trivial.

### 2.3. Máximo número de pseudo-equilibrios

En esta sección mostramos que el campo deslizante regularizado  $\tilde{f}_r$  asociado al campo deslizante  $\tilde{f}_s$  puede poseer a lo más cuatro equilibrios. El resultado se deduce directamente de la estructura polinómica de  $\tilde{f}_r$  y de una aplicación del Teorema de Bézout. (ver [18])

Recordemos que, en las coordenadas  $(y_2, y_3)$  sobre el plano de conmutación  $\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = 0\}$ , el campo deslizante regularizado está dado por

$$\tilde{f}_r(y_2, y_3) = \begin{pmatrix} f_{r,2}(y_2, y_3) \\ f_{r,3}(y_2, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 y_2^2 + (d_3 - c_2)y_2 y_3 - c_3 y_3^2 + s_2 y_2 - r_1 y_3 \\ d_5 y_2^2 + (d_6 - c_5)y_2 y_3 - c_6 y_3^2 + r_2 y_2 - s_1 y_3 \end{pmatrix}$$

Un pseudo-equilibrio (admisible o virtual) del sistema Filippov corresponde a un punto  $(\bar{y}_2, \bar{y}_3)$  tal que  $\tilde{f}_r(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = 0$ , es decir, una solución del sistema algebraico

$$\begin{cases} f_{r,2}(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = 0, \\ f_{r,3}(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = 0. \end{cases}$$

Este sistema está formado por dos polinomios cuadráticos en dos variables. Por el *Teorema de Bézout*, dos curvas algebraicas planas de grado  $d_1$  y  $d_2$  pueden intersectarse en, a lo más,  $d_1 d_2$  puntos, contando multiplicidades y soluciones complejas.

En nuestro caso,  $d_1 = d_2 = 2$ , de modo que el número máximo de intersecciones es 4.

**Nota 1.** El Teorema de Bézout se formula en el plano proyectivo complejo, pero su conclusión proporciona automáticamente una cota superior válida para las soluciones reales de un sistema polinómico. En efecto, si  $P_1(x, y)$  y  $P_2(x, y)$  son polinomios de grados  $d_1$  y  $d_2$ , toda solución real del sistema

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0$$

es también una solución compleja. Por lo tanto,

$$\#\{\text{soluciones reales}\} \leq \#\{\text{soluciones complejas}\} \leq d_1 d_2,$$

donde la última desigualdad es precisamente la cota establecida por Bézout.

Esto permite emplear el teorema en contextos puramente reales. En particular, como el campo deslizante regularizado correspondiente a la forma normal de una singularidad de doble tangencia está definido por dos polinomios cuadráticos, se deduce que el sistema  $\{f_{r,2} = 0, f_{r,3} = 0\}$  puede poseer a lo más cuatro soluciones reales.

De esta manera, enunciamos lo siguiente:

**Proposición 2.** El campo deslizante regularizado  $\tilde{f}_r$  asociado a la forma normal de una singularidad de doble tangencia puede poseer a lo más cuatro equilibrios.

Notemos que la cota es óptima: mediante una selección adecuada de los parámetros de la forma normal se pueden obtener hasta cuatro pseudo-equilibrios reales distintos.



**Observación 5.** Recordemos que, en la forma normal, el campo deslizante sobre el plano de conmutación  $\tilde{\Sigma}$  se escribe como

$$\tilde{f}_s(y) = \frac{\tilde{f}_r(y)}{\tilde{\Delta}(y)}, \quad y = (y_2, y_3),$$

donde  $\tilde{f}_r(y)$  es el campo deslizante regularizado y

$$\tilde{\Delta}(y) = y_2 - y_3$$

es el denominador que aparece en la fórmula del método convexo de Filippov (véase la Sección 2.2).

En nuestro caso, el origen  $y_0 = (0, 0)$  corresponde a la singularidad de doble tangencia. Por construcción, se tiene

$$\tilde{f}_r(0, 0) = 0,$$

es decir, el origen es siempre un equilibrio del campo regularizado  $\tilde{f}_r$ . Sin embargo,

$$\tilde{\Delta}(0, 0) = 0,$$

de modo que la expresión de  $\tilde{f}_s$  no está definida en  $y_0$ . Esto refleja el hecho de que el origen no es un pseudo-equilibrio ordinario, sino la singularidad de doble tangencia, donde colapsa la definición del campo deslizante.

En consecuencia, aunque el origen sí cuenta como solución del sistema algebraico

$$\tilde{f}_r(y) = 0,$$

en general, no debe interpretarse como un pseudo-equilibrio del sistema Filippov (excepto en el caso en el que tengamos una singularidad de doble tangencia y se satisfaga la condición de paralelismo en ella).

**Corolario 2** (Número máximo de pseudo-equilibrios). Sea  $\tilde{f}_r$  el campo deslizante regularizado asociado al campo deslizante  $\tilde{f}_s$ . Entonces, el sistema Filippov puede tener a lo más tres pseudo-equilibrios distintos.

*Demostración.* Por la proposición anterior, el sistema algebraico

$$\tilde{f}_r(y_2, y_3) = 0$$

puede tener a lo más cuatro soluciones (en  $\mathbb{C}^2$  contando multiplicidades, y en particular a lo más cuatro soluciones reales en el plano  $(y_2, y_3)$ ). Además, por la observación precedente, el origen  $y_0 = (0, 0)$  es siempre una de esas soluciones, ya que  $\tilde{f}_r(0, 0) = 0$ .

Por otro lado, un pseudo-equilibrio corresponde a un punto  $\hat{y} = (\hat{y}_2, \hat{y}_3)$  tal que

$$\tilde{f}_r(\hat{y}) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\Delta}(\hat{y}) = \hat{y}_2 - \hat{y}_3 \neq 0,$$

es decir, un cero de  $\tilde{f}_r$  que no pertenece a la recta  $y_2 = y_3$  donde el campo deslizante  $\tilde{f}_s$  no está definido.

Como a lo más hay cuatro soluciones de  $\tilde{f}_r(y) = 0$  y una de ellas es siempre el origen, obtenemos que pueden existir a lo más tres puntos adicionales  $\hat{y}$  con  $\tilde{f}_r(\hat{y}) = 0$  y  $\hat{y}_2 \neq \hat{y}_3$ . Cada uno de esos puntos define un pseudo-equilibrio del sistema Filippov.

Por tanto, el número máximo de pseudo-equilibrios (distintos de la singularidad de doble tangencia) es tres. ■

**Nota 2.** El Teorema de Bézout (Teorema A.2) requiere que los polinomios  $f_{r,2}$  y  $f_{r,3}$  no compartan un factor irreducible común. En nuestro contexto esto corresponde a excluir el caso degenerado en el que el campo deslizante regularizado  $f_r$  tiene una curva continua de pseudo-equilibrios en  $\Sigma$ . En adelante supondremos explícitamente que no ocurre dicha degeneración, de modo que el número de pseudo-equilibrios es finito y a lo más tres.

### 2.3.1. Ejemplo

Consideremos la siguiente familia de sistemas Filippov dados en forma normal

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\delta & \delta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & \delta & -\delta \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Los equilibrios de este sistema son los puntos

$$p_1 = \begin{pmatrix} \delta\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p_2 = \begin{pmatrix} -\delta\mu \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $p_1$  es equilibrio del campo  $f^-$  y  $p_2$  es equilibrio del campo  $f^+$ . Veamos la estabilidad de estos equilibrios: la matriz jacobiana en cualquier punto de las regiones  $y_1 < 0$  y  $y_1 > 0$  está dado por  $A_1$  y  $A_2$ , con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\delta & \delta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & \delta & -\delta \end{pmatrix},$$

respectivamente.

El polinomio característico de  $A_1$  es

$$g_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = (-1 - \lambda)(\lambda^2 + \delta\lambda + 1),$$

de donde se obtiene

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}.$$

Es decir, el espectro de la matriz  $A_1$  es

$$\sigma(A_1) = \left\{ -1, \frac{1}{2} \left( -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4} \right) \right\}.$$

El mismo cálculo muestra que  $\sigma(A_2) = \sigma(A_1)$ . Ahora, como

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = -1 < 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) < 0 \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

En particular, para  $\delta > 0$  se tiene siempre  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ , de modo que  $p_1$  y  $p_2$  son equilibrios estables. Más aún, la naturaleza del equilibrio depende del valor de  $\delta$ :

- si  $0 < \delta < 2$ , entonces  $\delta^2 - 4 < 0$  y  $\lambda_{2,3}$  forman un par complejo conjugado con parte real negativa, por lo que el equilibrio es de tipo foco estable;
- si  $\delta = 2$ , se obtiene un doble valor propio real  $\lambda_{2,3} = -1$ ;
- si  $\delta > 2$ , los tres valores propios son reales negativos distintos y el equilibrio es de tipo nodo estable.

En el contexto de este sistema, cuando  $\delta\mu < 0$  los puntos  $p_1$  y  $p_2$  son equilibrios admisibles (es decir, pertenecen a las regiones  $y_1 < 0$  y  $y_1 > 0$  donde fueron definidos). Cuando  $\delta\mu > 0$  se convierten en equilibrios virtuales. Por último, si  $\delta = 0$ , tenemos que los equilibrios son frontera.

Ahora, para precisar la naturaleza de los pseudo-equilibrios de esta familia, es conveniente tener presente la relación entre el campo deslizante  $f_s$  y el campo deslizante regularizado  $\tilde{f}_r$ . En la forma normal (2.2), restringiendo al plano de conmutación

$$\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0\}$$

y usando las coordenadas  $(y_2, y_3)$ , se obtiene que

$$\Delta(y_2, y_3) = y_2 - y_3,$$

y que el campo deslizante regularizado está dado por

$$\tilde{f}_r(y_2, y_3) = (\tilde{f}_{r,2}(y_2, y_3), \tilde{f}_{r,3}(y_2, y_3))^T,$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{r,2}(y_2, y_3) &= -y_2^2 - \mu y_2 + \delta y_2 y_3 - \delta y_3^2, \\ \tilde{f}_{r,3}(y_2, y_3) &= \delta y_2^2 - \delta y_2 y_3 + y_3^2 - \mu y_3. \end{aligned}$$

En particular, sobre la región deslizante

$$\tilde{\Sigma}_s = \{(y_2, y_3) : y_2 y_3 < 0\}$$

el campo deslizante viene dado por

$$\tilde{f}_s(y_2, y_3) = \frac{\tilde{f}_r(y_2, y_3)}{\Delta(y_2, y_3)}.$$

Los pseudo-equilibrios de (2.2) son, por definición, los ceros del campo deslizante, esto es, los puntos  $(\bar{y}_2, \bar{y}_3)$  tales que

$$\tilde{f}_r(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta(\bar{y}_2, \bar{y}_3) \neq 0.$$

En esta familia, además del origen, aparecen tres soluciones no triviales  $(\bar{y}_2, \bar{y}_3)$  de  $\tilde{f}_r$  que denotaremos por  $q_1, q_2, q_3$ . Sus expresiones en las coordenadas  $(y_2, y_3)$  son

$$q_1 = \left( -\frac{\mu}{1+2\delta}, \frac{\mu}{1+2\delta} \right),$$

y

$$q_2 = \left( -\frac{\mu - \delta\mu + \sqrt{-(-1+\delta)^2(-1+4\delta)}\mu^2}{2(-1+\delta)^2}, -\frac{(-1+\delta)\mu + \sqrt{-(-1+\delta)^2(-1+4\delta)}\mu^2}{2(-1+\delta)^2} \right),$$

$$q_3 = \left( \frac{-\mu + \delta\mu + \sqrt{-(-1+\delta)^2(-1+4\delta)}\mu^2}{2(-1+\delta)^2}, \frac{-(-1+\delta)\mu + \sqrt{-(-1+\delta)^2(-1+4\delta)}\mu^2}{2(-1+\delta)^2} \right).$$

Obsérvese que el término bajo la raíz puede reescribirse como

$$-(-1+\delta)^2(-1+4\delta)\mu^2 = (1-4\delta)(\delta-1)^2\mu^2,$$

de modo que  $q_2$  y  $q_3$  son reales si y sólo si

$$1-4\delta \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \leq \frac{1}{4}.$$

Para estudiar la naturaleza de estos puntos, linealizamos primero el campo deslizante regularizado. La matriz jacobiana de  $\tilde{f}_r$  está dada por

$$D\tilde{f}_r(y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_{r,2}}{\partial y_2} & \frac{\partial \tilde{f}_{r,2}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \tilde{f}_{r,3}}{\partial y_2} & \frac{\partial \tilde{f}_{r,3}}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta y_3 - \mu - 2y_2 & \delta y_2 - 2\delta y_3 \\ 2\delta y_2 - \delta y_3 & -\delta y_2 - \mu + 2y_3 \end{pmatrix}.$$

Como el campo deslizante se obtiene mediante

$$\tilde{f}_s(y_2, y_3) = \frac{1}{\Delta(y_2, y_3)} \tilde{f}_r(y_2, y_3),$$

al derivar se tiene

$$D\tilde{f}_s(y_2, y_3) = \frac{1}{\Delta(y_2, y_3)} D\tilde{f}_r(y_2, y_3) + \tilde{f}_r(y_2, y_3) \nabla \left( \frac{1}{\Delta(y_2, y_3)} \right)^T.$$

En un pseudo-equilibrio  $q = (\bar{y}_2, \bar{y}_3)$  se cumple  $\tilde{f}_r(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = 0$ , de modo que el segundo término desaparece y se obtiene la relación

$$D\tilde{f}_s(q) = \frac{1}{\Delta(q)} D\tilde{f}_r(q). \quad (2.7)$$

En particular, los valores propios de la matriz jacobiana de  $\tilde{f}_s$  en un pseudo-equilibrio  $q$  se obtienen multiplicando por el factor  $1/\Delta(q)$  los valores propios de  $D\tilde{f}_r(q)$ . En lo siguiente, se usará la notación  $\lambda_j^{(r)}$  para los valores propios del campo regularizado y  $\lambda_j^{(s)}$  para los del campo deslizante.

**Caso  $q_1$ .** Para el pseudo-equilibrio

$$q_1 = \left( -\frac{\mu}{1+2\delta}, \frac{\mu}{1+2\delta} \right)$$

se tiene la relación

$$\bar{y}_3 = -\bar{y}_2,$$

de donde, sustituyendo en la jacobiana,

$$D\tilde{f}_r(q_1) = D\tilde{f}_r(\bar{y}_2, -\bar{y}_2) = \frac{\mu}{1+2\delta} \begin{pmatrix} 1-\delta & -3\delta \\ -3\delta & 1-\delta \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1^{(r)} = \mu, \quad \lambda_2^{(r)} = \frac{(1-4\delta)\mu}{1+2\delta}.$$

Además,

$$\Delta(q_1) = \bar{y}_2 - \bar{y}_3 = -\frac{2\mu}{1+2\delta}.$$

Usando (2.7), los valores propios de la matriz jacobiana del campo deslizante  $\tilde{f}_s$  en  $q_1$  son

$$\lambda_1^{(s)} = \frac{\lambda_1^{(r)}}{\Delta(q_1)} = -\left(\delta + \frac{1}{2}\right), \quad \lambda_2^{(s)} = \frac{\lambda_2^{(r)}}{\Delta(q_1)} = 2\delta - \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, para  $\delta \neq -\frac{1}{2}$  y  $\delta \neq \frac{1}{4}$  el punto  $q_1$  es hiperbólico y su naturaleza sólo depende del signo de  $\delta$ :

- Si  $-\frac{1}{2} < \delta < \frac{1}{4}$ , se tiene  $\lambda_1^{(s)} < 0$  y  $\lambda_2^{(s)} < 0$ , de modo que  $q_1$  es un nodo estable.
- Si  $\delta < -\frac{1}{2}$  o  $\delta > \frac{1}{4}$ , los valores propios tienen signos opuestos y  $q_1$  es una silla.

Obsérvese que la estabilidad de  $q_1$  para el campo deslizante no depende del signo de  $\mu$ : el parámetro  $\mu$  sólo determina si  $q_1$  pertenece a la región deslizante atractiva ( $\mu < 0$ ) o a la región deslizante repulsiva ( $\mu > 0$ ).

**Casos  $q_2$  y  $q_3$ .** Los puntos  $q_2$  y  $q_3$  dados arriba satisfacen, para  $\mu \neq 0$ ,

$$q_{21}q_{22} = q_{31}q_{32} = -\frac{\delta\mu^2}{(\delta-1)^2},$$

de donde se deduce que

$$q_{j1}q_{j2} < 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \delta > 0, \delta \neq 1, \quad j = 2, 3.$$

Tomando en cuenta la condición  $\delta \leq \frac{1}{4}$  obtenida anteriormente, se ve que  $q_2$  y  $q_3$  son pseudo-equilibrios admisibles (es decir, pertenecen a  $\tilde{\Sigma}_s$ ) si y sólo si

$$0 < \delta \leq \frac{1}{4},$$

mientras que para  $\delta < 0$  son pseudo-equilibrios virtuales (pues caen en la región de cruce  $\tilde{\Sigma}_c$ ) y para  $\delta > \frac{1}{4}$ , los equilibrios dejan de ser reales.

Para la linealización, un cálculo directo muestra que

$$D\tilde{f}_r(q_2) = D\tilde{f}_r(q_3)$$

y que los valores propios de la matriz jacobiana de  $\tilde{f}_r$  en  $q_2$  (y, por tanto, también en  $q_3$ ) están dados por

$$\lambda_1^{(r)} = \mu, \quad \lambda_2^{(r)} = \frac{(1-4\delta)\mu}{\delta-1}.$$

Por otra parte,

$$\Delta(q_2) = \Delta(q_3) = \frac{\mu}{\delta-1},$$

de modo que, usando (2.7) nuevamente, los valores propios de la jacobiana del campo deslizante en estos puntos son

$$\lambda_1^{(s)} = \frac{\lambda_1^{(r)}}{\Delta(q_2)} = \delta - 1, \quad \lambda_2^{(s)} = \frac{\lambda_2^{(r)}}{\Delta(q_2)} = 1 - 4\delta.$$

En particular, siempre que  $q_2$  y  $q_3$  sean reales se cumple

$$\lambda_1^{(s)} < 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2^{(s)} > 0 \quad \text{para} \quad \delta < \frac{1}{4},$$

por lo que  $q_2$  y  $q_3$  son puntos silla del campo deslizante (admisibles si  $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$ , virtuales si  $\delta < 0$ ). En el caso en el que  $\delta = \frac{1}{4}$  se tiene  $q_2 = q_3$  y

$$\lambda_1^{(s)} = -\frac{3}{4} < 0, \quad \lambda_2^{(s)} = 0,$$

de modo que el pseudo-equilibrio es no hiperbólico. Para  $\delta > \frac{1}{4}$  los puntos  $q_2$  y  $q_3$  dejan de existir como pseudo-equilibrios reales.

Como resumen, para  $\mu \neq 0$  y para el parámetro  $\delta$ , se obtiene que el campo deslizando admite a lo más tres pseudo-equilibrios: uno de tipo nodo estable ( $q_1$ ) y dos de tipo silla ( $q_2$  y  $q_3$ ) cuando  $0 < \delta < \frac{1}{4}$ ; para  $-\frac{1}{2} < \delta < 0$  únicamente  $q_1$  es un pseudo-equilibrio admisible (nodo estable) y  $q_2, q_3$  son virtuales; mientras que, al cruzar  $\delta = \frac{1}{4}$ , los pseudo-equilibrios  $q_2$  y  $q_3$  se aniquilan, volviéndose equilibrios no hiperbólicos y  $q_1$  cambia de ser un nodo estable a una silla del campo deslizando.

**Nota 3.** *Cabe destacar que los pseudo-equilibrios no deben confundirse con los equilibrios frontera. Los primeros son equilibrios de la dinámica deslizando y dependen de la estructura convexa del sistema, mientras que los segundos provienen de los campos laterales y son objetos de naturaleza distinta.*

Las figuras que se presentan a continuación muestran la dinámica en los distintos cuadrantes determinados por la superficie de conmutación.

En particular, en la Figura 2.4 se muestra el movimiento de los equilibrios del sistema, además de mostrar la ocurrencia de un ciclo límite de cruce.

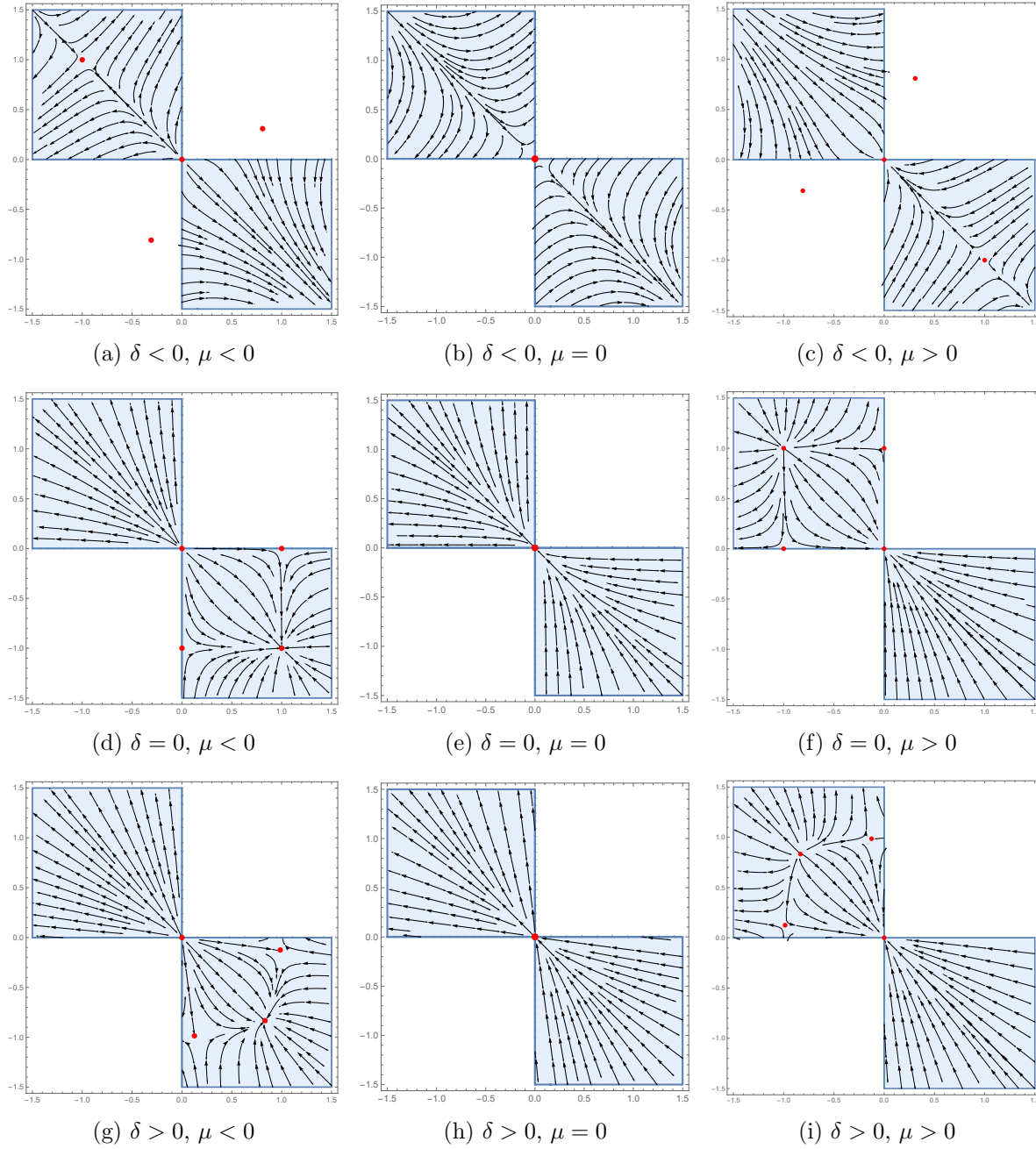


Figura 2.2: Dinámica del campo regularizado  $\tilde{f}_r$  del ejemplo 2.3.1. Notemos que para  $\delta > 0$  tenemos únicamente un pseudo-equilibrio admisible. Para  $\delta = 0$ , tenemos un pseudo-equilibrio admisible, además de tener dos equilibrios frontera. Finalmente, para  $\delta < 0$  vemos que tenemos tres pseudo-equilibrios admisibles.



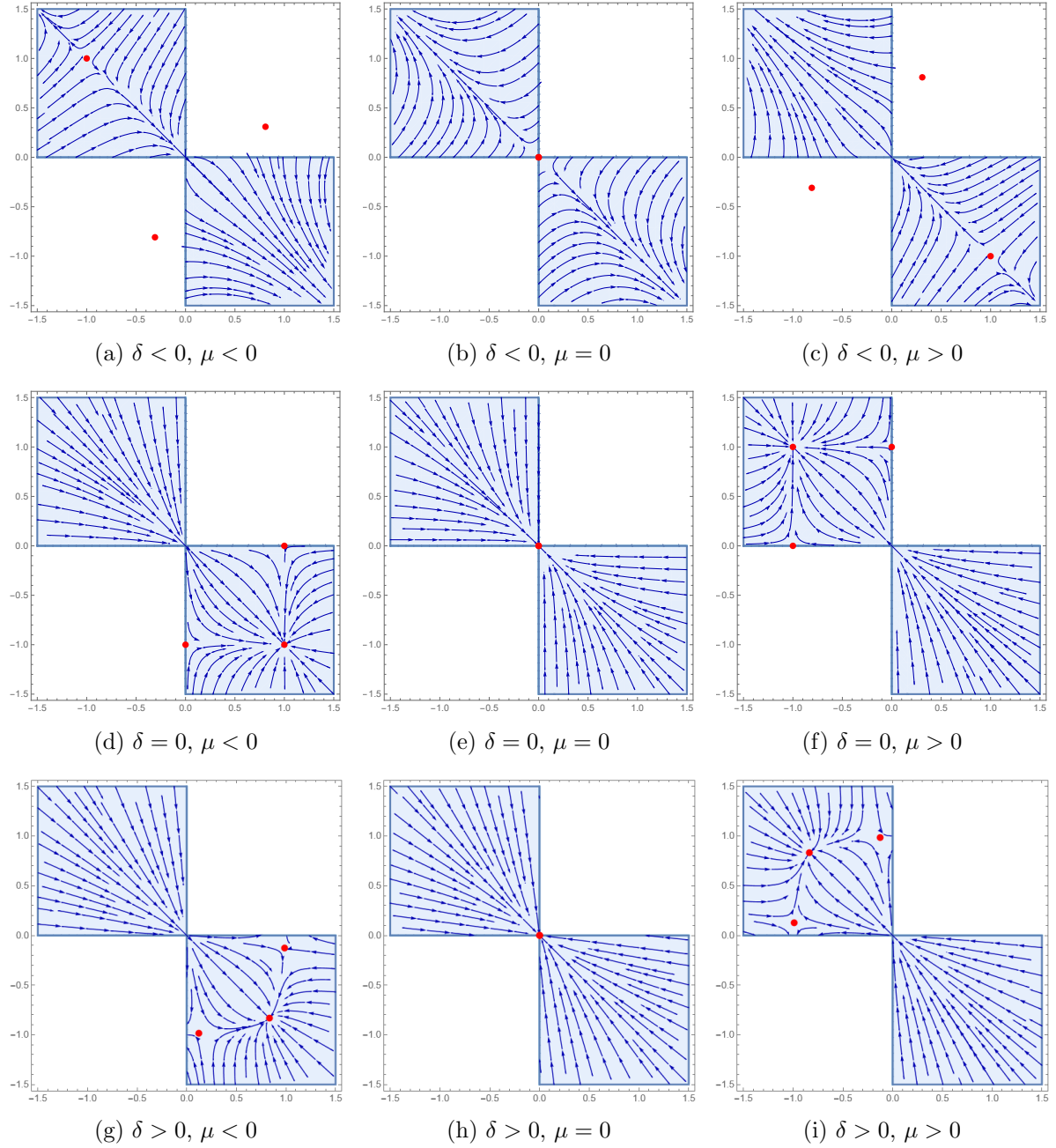


Figura 2.3: Dinámica del campo deslizante  $\tilde{f}_s$  del ejemplo 2.3.1. Notemos que tenemos las mismas dinámicas para los distintos signos de  $\delta$ , pero el flujo en  $\tilde{\Sigma}_{rs}$  (II cuadrante) está invertido. Esto se debe al comportamiento del campo deslizante bajo la forma normal.

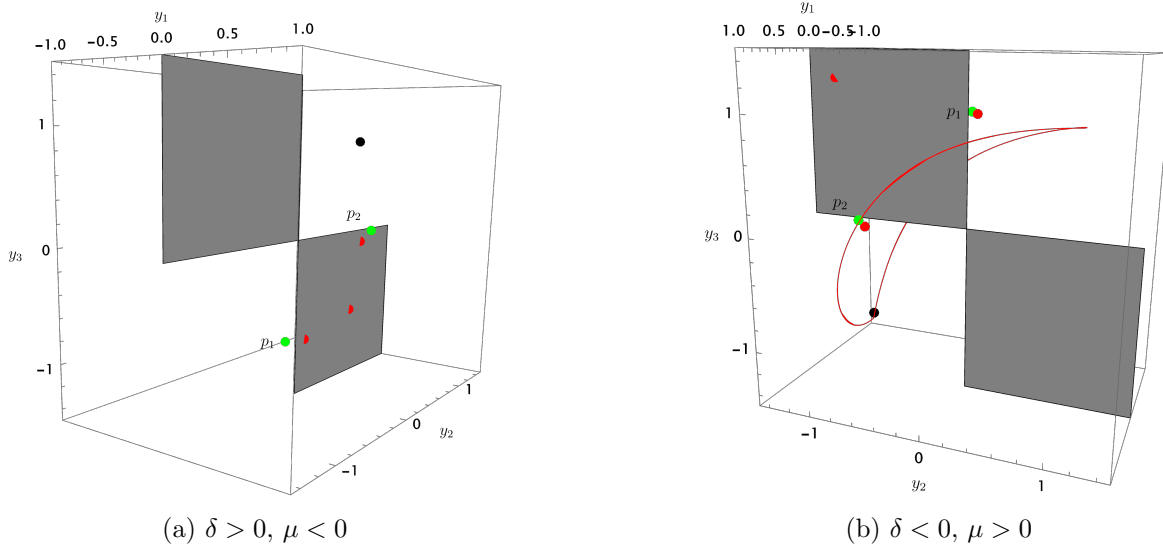


Figura 2.4: Los equilibrios (verde), pseudo-equilibrios (rojo) y el punto fijo del mapeo de Poincaré (negro). Notemos que cuando el producto  $\delta\mu > 0$ , los equilibrios del sistema son virtuales.

**Observación 6.** En esta familia, el punto de doble tangencia es el origen  $\hat{y} = (0, 0, 0) \in \tilde{\Sigma}$ . Recordemos que, en la forma normal, las rectas de tangencia son  $\tilde{L}_1 = \{(0, 0, y_3)\}$  y  $\tilde{L}_2 = \{(0, y_2, 0)\}$ .

Entonces, se tiene

$$r_1 = 0, \quad s_1 = \mu, \quad s_2 = -\mu, \quad r_2 = 0, \quad c_3 = \delta, \quad c_6 = -1, \quad d_5 = \delta, \quad d_2 = -1.$$

Así, sobre  $\tilde{L}_1$  se obtiene

$$\tilde{r}_1(0, 0, y_3) = r_1 + c_3 y_3 = \delta y_3,$$

por lo que  $\tilde{r}_1(\hat{y}) = 0$ , y además

$$e_1^T \tilde{A}_1^2 \tilde{f}^-(\hat{y}) = c_3 s_1 - c_6 r_1 = \delta \mu.$$

Análogamente, sobre  $\tilde{L}_2$  se tiene

$$\tilde{r}_2(0, y_2, 0) = r_2 + d_5 y_2 = \delta y_2,$$

de donde  $\tilde{r}_2(\hat{y}) = 0$ , y

$$e_1^T \tilde{A}_2^2 \tilde{f}^+(\hat{y}) = d_5 s_2 - d_2 r_2 = -\delta \mu.$$

En consecuencia, siempre que  $\delta\mu \neq 0$ , el origen satisface las condiciones de cúspide en ambos lados de  $\tilde{\Sigma}$  y, por tanto,  $\hat{y}$  es una singularidad cúspide-cúspide del sistema (2.6). En los casos degenerados  $\delta\mu = 0$  estas condiciones se anulan y la tangencia pierde el carácter cúspide (requiriendo un tratamiento separado).

Notemos que sucede algo interesante en las columnas 1 y 3 (de izquierda a derecha); al variar el parámetro  $\delta$ , tenemos distintos comportamientos de dos pseudo-equilibrios. En la columna uno, vemos que los pseudo-equilibrios no admisibles se vuelven frontera y luego entran en la dinámica del campo deslizante. En la tercera, podemos ver como los equilibrios *virtuales* del sistema colisionan con la frontera de  $\tilde{\Sigma}_{as}$ , volviéndolos pseudo-equilibrios admisibles. A este tipo de fenómeno se le llama *bifurcación de equilibrio frontera*, al primero se le llama *silla-nodo* y al segundo, *persistencia*.

Con esto, enunciamos lo siguiente

**Proposición 3.** *El sistema (2.6) presenta una doble bifurcación de equilibrios frontera en uno de los siguientes dos escenarios:*

- **Doble persistencia:** Si  $\mu > 0$ , para  $\delta < 0$  los equilibrios  $p_1$  y  $p_2$  del sistema son admisibles. Estos equilibrios se convierten en equilibrios frontera cuando  $\delta = 0$  y para  $\delta > 0$  se convierten en dos pseudo-equilibrios  $q_2, q_3$  en el campo deslizante.
- **Doble silla-nodo:** Si  $\mu < 0$ , para  $\delta < 0$  los equilibrios  $p_1$  y  $p_2$  del sistema son virtuales. Estos equilibrios se convierten en equilibrios frontera cuando  $\delta = 0$  y para  $\delta > 0$  se convierten en dos pseudo-equilibrios  $q_2, q_3$  en el campo deslizante.

Con el propósito de organizar los elementos identificados en el ejemplo anterior, a continuación se muestra una tabla que resume las propiedades más relevantes del sistema en función del signo de los parámetros involucrados. Esta información permitirá reconocer, de manera inmediata, cuántos pseudo-equilibrios admite el campo deslizante y en qué región de la superficie de discontinuidad se localizan.

| Parámetro   | Condición       | Comportamiento                               |
|-------------|-----------------|----------------------------------------------|
| $\delta\mu$ | $\delta\mu < 0$ | $p_1$ y $p_2$ admisibles                     |
|             | $\delta\mu > 0$ | $p_1$ y $p_2$ virtuales                      |
| $\delta$    | $\delta < 0$    | 1 pseudo-equilibrio admisible y 2 virtuales  |
|             | $\delta = 0$    | 2 equilibrios frontera y 1 pseudo-equilibrio |
|             | $\delta > 0$    | 3 pseudo-equilibrios admisibles              |
| $\mu$       | $\mu > 0$       | pseudo-equilibrios en $\Sigma_{rs}$          |
|             | $\mu < 0$       | pseudo-equilibrios en $\Sigma_{as}$          |

Cuadro 2.1: Resumen del número y tipo de pseudo-equilibrios del campo deslizante según el signo de los parámetros de control del ejemplo.



---

## Capítulo 3

# Bifurcaciones en una singularidad de doble tangencia

---

En este capítulo se estudian las bifurcaciones asociadas a una singularidad de doble tangencia en la forma normal obtenida en el Capítulo 2. El punto de partida es la bifurcación pseudo-Hopf, en la que la ruptura del antiparalelismo de los campos laterales produce la creación de un ciclo límite de cruce. A partir de la construcción explícita del mapeo de Poincaré asociado y de una reducción sobre la variedad central, se obtienen condiciones en los coeficientes de la forma normal, expresadas en términos de escalares como  $\Lambda$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_2$ , que determinan la existencia, estabilidad y tipo (nodo, foco o silla) del ciclo límite de cruce. En la segunda parte del capítulo se analizan las bifurcaciones estacionarias en el campo deslizante regularizado, que aparecen como componentes de las bifurcaciones compuestas y controlan la creación, destrucción o colisión de pseudo-equilibrios. En conjunto, estos resultados proporcionan un criterio sistemático para distinguir entre la bifurcación pseudo-Hopf y las distintas bifurcaciones compuestas que se ilustrarán en el Capítulo 4.

### 3.1. La bifurcación pseudo-Hopf

En sistemas dinámicos suaves, la bifurcación de Hopf es un fenómeno bien conocido que describe la aparición o desaparición de ciclos límite debido a la interacción de valores propios complejos que cruzan el eje imaginario, alterando la estabilidad del punto de equilibrio.

Para los sistemas Filippov, los autores en [6] llamaron bifurcación *pseudo-Hopf* a aquella que ocurre cuando un pseudo-equilibrio pierde estabilidad y aparece o desaparece un ciclo límite de cruce como consecuencia. En la Figura 3.1 se ilustra un ciclo límite de cruce.

Para que suceda esta bifurcación, necesitaremos que el sistema (1.1)

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0 \\ f^+(x) = A_2x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

satisfaga la siguiente hipótesis,

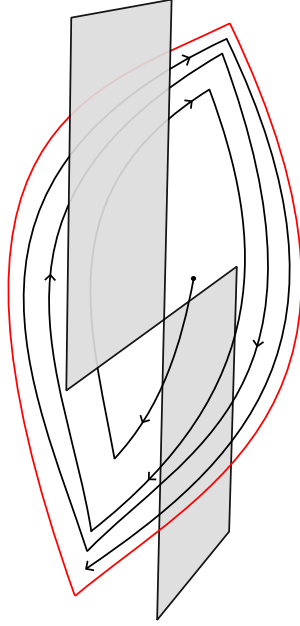


Figura 3.1: Ciclo límite de cruce (rojo)

(**H<sub>2</sub>**) Existe un parámetro  $\varepsilon$  tal que para el valor crítico  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , los campos vectoriales  $f^\mp(x, \varepsilon)$  satisfacen que  $f^+(\hat{x}, \varepsilon_0) - kf^-(\hat{x}, \varepsilon_0) = 0$ , con  $k < 0$ .

Bajo la hipótesis (**H<sub>2</sub>**), los campos vectoriales  $\tilde{f}^\mp(x, \varepsilon)$  son antiparalelos en la singularidad de Teixeira cuando el parámetro de bifurcación toma el valor crítico  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . En [1, 2, 5] los autores probaron que esta condición es necesaria para la creación de un ciclo límite de cruce cuando el parámetro se aleja de  $\varepsilon_0$ . En la forma normal (2.2), tenemos

$$\tilde{f}^+(0, \varepsilon_0) - k\tilde{f}^-(0, \varepsilon_0) = 0, \quad k < 0,$$

es decir,

$$s_2(\varepsilon_0) - kr_1(\varepsilon_0) = 0 \quad \text{y} \quad r_2(\varepsilon_0) - ks_1(\varepsilon_0) = 0.$$

Consideremos, sin pérdida de generalidad a  $k = \frac{r_2(\varepsilon_0)}{s_1(\varepsilon_0)}$ , entonces

$$\tilde{f}^-(0, \varepsilon_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1(\varepsilon_0) \\ s_1(\varepsilon_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{f}^+(0, \varepsilon_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_1(\varepsilon_0)r_2(\varepsilon_0)}{s_1(\varepsilon_0)} \\ r_2(\varepsilon_0) \end{pmatrix}$$

Esto es, vamos a romper el antiparalelismo de los campos vectoriales si perturbamos sus partes constantes en la forma normal (2.2). Para eso, vamos a considerar el desdoblamiento

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ s_1 + \mu \end{pmatrix} & y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_1 r_2}{s_1} \\ r_2 + \mu \end{pmatrix} & y_1 > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

En el siguiente teorema, vamos a abordar la bifurcación pseudo-Hopf. (ver [9])

**Teorema 3.1** (Teorema de la bifurcación pseudo-Hopf). *Consideremos el desdoblamiento (3.2). Si  $r_1 > 0, r_2 < 0$  y  $s_1 > 0$ , entonces, para  $\mu$  suficientemente pequeña con  $\mu\Lambda > 0$ , el sistema (3.2) tiene un ciclo límite de cruce. Si  $\alpha_1 > 0$  ( $< 0$ ) y  $\Lambda > 0$  el ciclo límite de cruce es estable (inestable), de tipo foco si  $\beta_2 < 0$  o de tipo nodo si  $\beta_2 > 0$ . Si  $\Lambda < 0$ , el ciclo límite de cruce es de tipo silla, donde*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{(c_4 + c_5 c_6) r_1^2 r_2^2 + r_1 r_2 \gamma_1 s_1 - \gamma_2 s_1^2 + \gamma_3 s_1^3 + (d_1 + d_2 d_3) s_1^4}{3 r_1^3 r_2^2 s_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{c_3 r_2 s_1 + (s_1 (3d_2 + 2d_6) - r_2 (2c_2 + 3c_6)) r_1 - d_5 r_1^2}{3 r_1^2 r_2}, \\ \beta_2 &= \alpha_1^2 - 8\Lambda, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (c_2 - c_6) d_5 r_1 - (c_1 + c_3 c_5 - c_6^2) r_2, \\ \gamma_2 &= d_2 d_5 r_1^2 + (c_2 d_2 - 2c_3 d_5 + c_6 d_6) r_1 r_2 + c_3 c_6 r_2^2, \\ \gamma_3 &= (d_2^2 - d_4 - d_3 d_5) r_1 + c_3 (d_6 - d_2) r_2. \end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos el mapeo de Poincaré dado por la composición de los mapeos de medio retorno  $\phi^-$  y  $\phi^+$  (véase el Apéndice B para las expresiones de dichos mapeos y los detalles sobre su construcción). Esto es,  $\mathbf{P} : \{\tilde{\Sigma} : u, v < 0\} \rightarrow \{\tilde{\Sigma} : u, v < 0\}$  dado por

$$\mathbf{P}(u, v, \mu) = \phi^+(\phi^-(u, v, \mu)) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1(u, v, \mu) \\ \mathbf{P}_2(u, v, \mu) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(u, v, \mu) &= \left( \frac{3r_2 s_1 + \mu(4r_2 - s_1)}{s_1(r_2 + \mu)} \right) u - \frac{2r_1 r_2}{s_1(r_2 + \mu)} v + O(|u, v|^2), \\ \mathbf{P}_2(u, v, \mu) &= \frac{2(s_1 + \mu)u}{r_1} - v + O(|u, v|^2). \end{aligned}$$

Los puntos fijos  $(u, v)$  de este mapeo están dados por

$$\mathbf{P}(u, v, \mu) = (u, v)^\top \quad \text{o} \quad \begin{cases} \mathbf{P}_1(u, v, \mu) &= u, \\ \mathbf{P}_2(u, v, \mu) &= v. \end{cases} \quad (3.3)$$

Para resolver el sistema anterior, definimos las funciones

$$H_1(u, v, \mu) = \mathbf{P}_1(u, v, \mu) - u,$$

y

$$H_2(u, v, \mu) = \mathbf{P}_2(u, v, \mu) - v.$$

Así, resolver (3.3) es equivalente a resolver  $H_1(u, v, \mu) = 0$  y  $H_2(u, v, \mu) = 0$ . Primeramente, observemos que

$$H_1(0, 0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H_1}{\partial v}(0, 0, 0) = -\frac{2r_1}{s_1},$$

entonces, por el teorema de la función implícita, existe una función  $G(u, \mu)$  tal que  $H_1(u, G(u, \mu), \mu) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0, 0)$ . Esta función está dada por

$$v = G(u, \mu) = a_{1\mu}u + a_{2\mu}u^2 + O(|u|^3), \quad (3.4)$$

donde

$$a_{1\mu} = \frac{r_2(s_1 + 2\mu) - s_1\mu}{r_1r_2},$$

$$a_{2\mu} = \frac{r_2s_1(d_5r_1^2 + (d_6s_1 - c_2r_2)r_1 - c_3r_2s_1)}{3r_1^3r_2}.$$

Ahora, sustituimos (3.4) en  $H_2$  y obtenemos

$$H_2(u, G(u, \mu), \mu) = -\frac{2u}{135r_1^8r_2^4}H_0(u, \mu),$$

donde

$$H_0(u, \mu) = 135r_1^7r_2^3(r_2 - s_1)\mu + R_1u\mu + R_2u^2 + O(|u|^3).$$

Observemos que  $H_0(0, 0) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0)$  y  $\frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0, 0) = 135r_1^7r_2^3(r_2 - s_1)$ , por lo que, nuevamente, por el teorema de la función implícita existe una función

$$\mu = m(u) = \mathcal{K}_2u^2 + \mathcal{K}_3u^3 + \mathcal{K}_4u^4 + O(|u|^5), \quad (3.5)$$

donde

$$\mathcal{K}_2 = \left( \frac{r_2s_1}{r_2 - s_1} \right) \Lambda,$$

$$\mathcal{K}_3 = -\frac{2}{3} \frac{c_2r_1 + c_3s_1}{r_1^2} \mathcal{K}_2,$$



tal que  $H_0(u, m(u)) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0)$  y  $H_2(u, G(u, m(u)), m(u)) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0, 0)$ . Como  $r_2 < 0$  y  $s_1 > 0$  entonces para cada  $\mu$  suficientemente pequeña con  $\mu\Lambda > 0$ , existe una  $u < 0$  tal que

$$\mathbf{P}(u, g(u), m(u)) = (u, g(u))^T,$$

esto es, hemos encontrado un ciclo límite de cruce. Finalmente, para determinar la estabilidad de dicho ciclo límite de cruce, necesitamos calcular los valores propios de la matriz Jacobiana de  $\mathbf{P}(u, g(u), m(u))$ , los cuales están dados por

$$\lambda_{1,2} = 1 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + O(|u|^3) \pm \sqrt{(\beta_2 u^2 + O(|u|^3))}$$

donde

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_1^2 - 8\Lambda, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} k \alpha_1 - 4\Lambda,\end{aligned}$$

con

$$k = \frac{-2d_5 r_1 - 6(c_2 + c_6)r_2 + (6d_2 + 4d_6)s_1}{3r_1 r_2}.$$

Entonces, como  $u < 0$ , si  $\alpha_1 u > 0$  ( $\alpha_1 < 0$ ) y  $\Lambda > 0$ , el ciclo límite de cruce es estable (inestable) de tipo nodo si  $\alpha_1^2 > 8\Lambda$  o de tipo foco si  $\alpha_1^2 < 8\Lambda$ . Si  $\Lambda < 0$ , el ciclo límite de cruce es de tipo silla. ■

**Corolario 3** (Bifurcación pseudo-Hopf degenerada). *Consideremos nuevamente el desdoblamiento (3.2) y supongamos que  $\Lambda = 0$  y  $\mathcal{K}_4 \neq 0$ . Si  $r_1 > 0$ ,  $r_2 < 0$  y  $s_1 > 0$ , entonces para  $\mu$  suficientemente pequeña con  $\mu\mathcal{K}_4 > 0$ , el sistema (3.2) tiene un ciclo límite de cruce.*

## 3.2. Bifurcaciones estacionarias en el campo deslizando regularizado

En [10], los autores nombraron como *bifurcación compuesta* a aquella en la que sucede una bifurcación de ciclo límite de cruce y una bifurcación transcítica deslizando, la cual ocurre en el campo deslizando regularizado. El término “compuesto” hace referencia al hecho de que la bifurcación ocurre gracias a dos bifurcaciones que ocurren al mismo tiempo, por lo que tiene sentido hablar de una bifurcación compuesta que involucra a una bifurcación con un ciclo límite de cruce y una bifurcación estacionaria en el campo deslizando regularizado.

En el artículo antes mencionado, los autores se dedican solamente al caso genérico, pues considerar una bifurcación estacionaria en el campo deslizando regularizado implica calcular una condición adicional no-genérica. Notemos que una bifurcación silla-nodo en el campo deslizando regularizado no es posible, pues el origen siempre es un equilibrio de dicho campo.

En este trabajo, para mostrar que la ocurrencia de las bifurcaciones trinche y transcrítica, consideremos el desdoblamiento (3.2):

$$\dot{y} = \begin{cases} \tilde{f}^-(y, \mu) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1(\mu), & y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y, \mu) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2(\mu), & y_1 > 0, \end{cases}$$

con

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_1(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ s_1 + \mu \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_1 r_2}{s_1} \\ r_2 + \mu \end{pmatrix}.$$

El plano de conmutación es

$$\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0\},$$

y el vector normal es  $n = e_1 = (1, 0, 0)^\top$ . El método convexo de Filippov nos dice que

$$\tilde{f}_s(y) = \frac{(e_1^\top \tilde{f}^-(y))\tilde{f}^+(y) - (e_1^\top \tilde{f}^+(y))\tilde{f}^-(y)}{e_1^\top (\tilde{f}^-(y) - \tilde{f}^+(y))}, \quad y \in \tilde{\Sigma}.$$

El *campo deslizando regularizado*  $\tilde{f}_r$  es el numerador:

$$\tilde{f}_r(y) = (e_1^\top \tilde{f}^-(y))\tilde{f}^+(y) - (e_1^\top \tilde{f}^+(y))\tilde{f}^-(y).$$

En este escenario, el primer componente de  $\tilde{f}^-$  y  $\tilde{f}^+$  (es decir,  $e_1^\top \tilde{f}^\pm$ ) es sencillo:

$$e_1^\top \tilde{f}^-(y) = y_2, \quad e_1^\top \tilde{f}^+(y) = y_3,$$

porque la primera fila de  $\tilde{A}_1$  y  $\tilde{A}_2$  es  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ , respectivamente, y la primera componente de  $\tilde{b}_1(\mu)$  y  $\tilde{b}_2(\mu)$  es cero.

Por tanto,

$$\tilde{f}_r(y) = y_2 \tilde{f}^+(y) - y_3 \tilde{f}^-(y).$$

Ahora, si evaluamos el campo  $\tilde{f}_r$  sobre el plano  $\tilde{\Sigma}$ , es decir, imponiendo  $y_1 = 0$ . Escribimos, separando los componentes:

$$\tilde{f}^-(y)|_{y_1=0} = \begin{pmatrix} f_1^-(y) \\ f_2^-(y) \\ f_3^-(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ c_2 y_2 + c_3 y_3 + r_1 \\ c_5 y_2 + c_6 y_3 + s_1 + \mu \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}^+(y, \mu)|_{y_1=0} = \begin{pmatrix} f_1^+(y) \\ f_2^+(y) \\ f_3^+(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ d_2 y_2 + d_3 y_3 + \frac{r_1 r_2}{s_1} \\ d_5 y_2 + d_6 y_3 + r_2 + \mu \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\tilde{f}_r(y) = y_2 \begin{pmatrix} f_1^+(y) \\ f_2^+(y) \\ f_3^+(y) \end{pmatrix} - y_3 \begin{pmatrix} f_1^-(y) \\ f_2^-(y) \\ f_3^-(y) \end{pmatrix}.$$

El primer componente no nos interesa (pues corresponde a la dinámica transversal en  $\tilde{\Sigma}$ ). Nos centramos en el segundo y tercer componente.

$$f_{r,2}(y) = y_2 f_2^+(y) - y_3 f_2^-(y), \quad f_{r,3}(y) = y_2 f_3^+(y) - y_3 f_3^-(y).$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} f_{r,2}(y) &= y_2(d_2 y_2 + d_3 y_3 + \frac{r_1 r_2}{s_1}) - y_3(c_2 y_2 + c_3 y_3 + r_1) \\ &= \underbrace{d_2 y_2^2 + (d_3 - c_2) y_2 y_3 - c_3 y_3^2}_{\text{parte no lineal}} + \underbrace{\left(\frac{r_1 r_2}{s_1} y_2 - r_1 y_3\right)}_{\text{parte lineal}}, \\ f_{r,3}(y) &= y_2(d_5 y_2 + d_6 y_3 + r_2 + \mu) - y_3(c_5 y_2 + c_6 y_3 + s_1 + \mu) \\ &= \underbrace{d_5 y_2^2 + (d_6 - c_5) y_2 y_3 - c_6 y_3^2}_{\text{parte no lineal}} + \underbrace{\left((r_2 + \mu) y_2 - (s_1 + \mu) y_3\right)}_{\text{parte lineal}}. \end{aligned}$$

Así, podemos escribir al campo deslizante regularizado de la siguiente manera:

$$\tilde{f}_r(y, \mu) = L(\mu)y + f_2(y_2, y_3), \quad (3.6)$$

donde

$$L(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{s_1} & -r_1 \\ r_2 + \mu & -(s_1 + \mu) \end{pmatrix},$$

y el término no lineal está dado por

$$f_2(y_2, y_3) = \begin{pmatrix} d_2 y_2^2 + (d_3 - c_2) y_2 y_3 - c_3 y_3^2 \\ d_5 y_2^2 + (d_6 - c_5) y_2 y_3 - c_6 y_3^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, observemos que el determinante de la matriz  $L(\mu)$  es

$$\det(L(\mu)) = \frac{\mu r_1 (s_1 - r_2)}{s_1}.$$

Por la condición de Teixeira invisible-invisible, se tiene que  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ , por tanto, la desigualdad  $s_1 - r_2 > 0$  se cumple. Se sigue que el determinante se anula si y solamente si  $\mu = 0$ . Notemos que para  $y_0 = (0, 0)^\top$  y  $\mu = 0$  se tiene que  $\tilde{f}_r(y_0, 0) = 0$ .

Para  $\mu = 0$  escribimos  $L_0 = L(0)$ . Su polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - L_0) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{r_1 r_2}{s_1} & r_1 \\ -r_2 & \lambda + s_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda \left( s_1 - \frac{r_1 r_2}{s_1} \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{r_1 r_2 - s_1^2}{s_1},$$

con  $\frac{r_1 r_2 - s_1^2}{s_1} < 0$ .

Para encontrar un vector propio asociado a  $\lambda_0 = 0$  resolvemos

$$L_0 \omega_0 = 0.$$

Escribiendo  $\omega_0 = (\omega_{11}, \omega_{12})^\top$ , el sistema lineal se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{s_1} & -r_1 \\ r_2 & -s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la segunda fila se obtiene  $r_2 \omega_{11} - s_1 \omega_{12} = 0$ , y por tanto

$$\omega_{11} = \frac{s_1}{r_2} \omega_{12}.$$

Tomando  $\omega_{12} = 1$  se puede elegir

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{r_2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De manera análoga, para  $\lambda_1$  consideramos

$$(L_0 - \lambda_1 I) \omega_1 = 0.$$

Una verificación directa muestra que

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{s_1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a  $\lambda_1$ .

De esta manera, tenemos que el subespacio central  $E^c$  y el subespacio estable  $E^s$  están generados de la siguiente manera:

$$E^c = \text{span}\{\omega_0\}, \quad E^s = \text{span}\{\omega_1\}.$$

Ahora, vamos a calcular la dinámica que gobierna a la variedad central tangente a  $E^c$  en el punto  $y_0$  siguiendo el teorema 3 del Apéndice A. Primero, expresamos (3.6) en forma extendida considerando al parámetro  $\mu$  como una variable de estado, es decir,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{\mu} \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{s_1} & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & -s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ \mu \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{21}(y_2, y_3) \\ 0 \\ f_{22}(y_2, \mu, y_3) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{21}(y_2, y_3) &= d_2 y_2^2 + (d_3 - c_2) y_2 y_3 - c_3 y_3^2, \\ f_{22}(y_2, \mu, y_3) &= \mu(y_2 - y_3) + d_5 y_2^2 + (d_6 - c_5) y_2 y_3 - c_6 y_3^2. \end{aligned}$$

Notemos que este sistema no está en forma de Jordan. Para tomarlo en la forma deseada, simplemente consideremos el término  $\mu(y_2 - y_3)$  como un término no lineal en el sistema (3.6); entonces, tenemos el sistema

$$\dot{y} = L_0 y + f_2(y_2, \mu, y_3), \quad (3.7)$$

donde

$$f_2(y_2, \mu, y_3) = \begin{pmatrix} f_{21}(y_2, y_3) \\ f_{22}(y_2, \mu, y_3) \end{pmatrix}.$$

El sistema (3.7) es llevado a forma de Jordan bajo el cambio de coordenadas

$$\varphi = P^{-1} y$$

donde  $P = (\omega_0 \ \omega_1)$  y  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top$ , obteniendo el siguiente sistema extendido en su forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\mu} \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \mu \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1^\top P^{-1} f_2(\varphi_1, \mu, \varphi_2) \\ 0 \\ e_2^\top P^{-1} f_2(\varphi_1, \mu, \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{r_1 r_2 - s_1^2}{s_1},$$

y

$$f_2(\varphi_1, \mu, \varphi_2) = \begin{pmatrix} f_{21}(e_1^\top P \varphi, e_2^\top P \varphi) \\ f_{22}(e_1^\top P \varphi, \mu, e_2^\top P \varphi) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que

$$\varphi_2 = \ell(\varphi_1, \mu) = a\varphi_1^2 + b\varphi_1\mu + c\mu^2. \quad (3.9)$$

Derivando (3.9) con respecto a  $\varphi_1$  implica que la ecuación de la variedad central está dada por

$$\mathcal{N}(\ell(\varphi_1, \mu)) = (2a\varphi_1 + b\mu)e_1^\top P^{-1} f_2(\varphi_1, \mu, \ell(\varphi_1, \mu)) - \left( \lambda_0 \ell(\varphi_1, \mu) + e_2^\top P^{-1} f_2(\varphi_1, \mu, \ell(\varphi_1, \mu)) \right) = 0.$$

Igualando los coeficientes de cada potencia de  $\varphi_1$  a cero, obtenemos que

$$a = \frac{c_3 r_2^3 s_1^2 + (c_2 - c_6 - d_3) r_2^2 s_1^3 + (d_6 - c_5 - d_2) r_2 s_1^4 + d_5 s_1^5}{\lambda_0^2 s_1^2 r_2^2},$$

$$b = \frac{s_1^3 (s_1 - r_2)}{\lambda_0^2 s_1^2 r_2},$$

$$c = 0.$$

Ahora, si sustituimos (3.9) en la primera ecuación de (3.8), obtenemos la dinámica en la variedad central, la cual enunciamos en el siguiente lema. Además, en la Figura 3.2 se ilustra la descomposición en subespacios invariantes asociada al análisis local y la geometría de la variedad central  $W_{loc}^c$ .

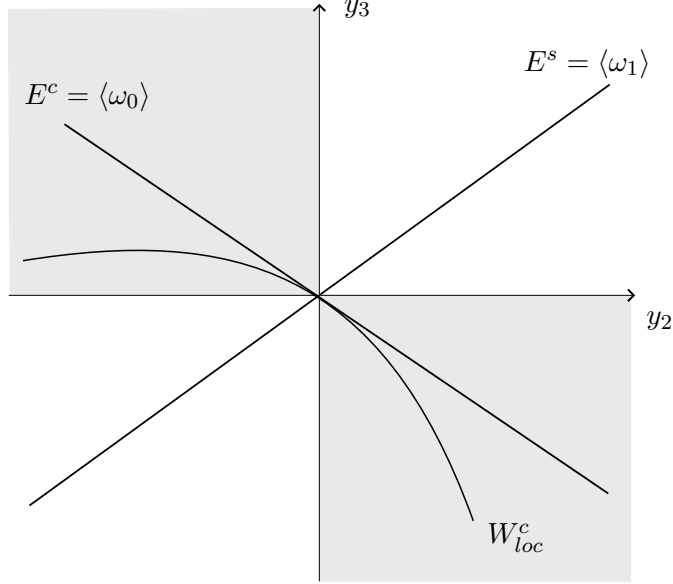


Figura 3.2: Subespacios del sistema y la variedad central

**Lema 2.** *La dinámica de (3.6) restringida a la variedad central, para  $\varphi_1$  suficientemente pequeña, está dada por el siguiente campo vectorial unidimensional:*

$$\dot{\varphi}_1 = \mu a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_1^2 + a_3 \varphi_1^3 + O(|\varphi_1|^4),$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r_1(s_1 - r_2)}{\lambda_1 s_1}, \\ a_2 &= \frac{\psi_1 - \psi_2}{\lambda_1 s_1 r_2}, \\ a_3 &= \frac{(s_1 \psi_3 - c_3 r_2^3) \psi_4}{\lambda_1^3 s_1^2 r_2^2}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (d_5 r_1 + (c_2 - d_3) r_2) s_1^2 - d_2 s_1^3, \\ \psi_2 &= c_6 r_1 r_2^2 - r_2 (c_3 r_2 + (d_6 - c_5) r_1) s_1, \\ \psi_3 &= (d_3 - c_2 + c_6) r_2^2 + (c_5 + d_2 - d_6) r_2 s_1 - d_5 s_1^2, \\ \psi_4 &= (c_5 - d_6) r_1^2 r_2 + r_1 ((d_3 - c_2 + 2c_6) r_2 - 2d_5 r_1) s_1 \end{aligned}$$

$$+ ((c_5 + 2d_2 - d_6)r_1 - 2c_3r_2)s_1^2 + (d_3 - c_2)s_1^3.$$

Notemos que  $a_1 < 0$ . Ahora, siguiendo el teorema A.5 del apéndice A, tenemos que

- (i) El sistema (3.6) sufre una bifurcación trasncrítica en  $y_0$  cuando el parámetro  $\mu = 0$  si  $a_2 \neq 0$ .
- (ii) El sistema (3.6) sufre una bifurcación trinche en  $y_0$  cuando el parámetro  $\mu$  cruza el valor critico  $\mu = 0$  si  $a_2 = 0$  y  $a_3 \neq 0$ .

Estos últimos enunciados nos permiten establecer el siguiente resultado:

**Proposición 4.** *Los siguientes enunciados se cumplen.*

- (i) *El sistema (3.2) sufre una bifurcación compuesta I (CB I)<sup>1</sup> si se satisfacen las hipótesis del teorema 3.1 con  $a_2 \neq 0$*
- (ii) *El sistema (3.2) sufre una bifurcación compuesta II (CB II) si se satisfacen las hipótesis del teorema 3.1 con  $a_2 = 0$  y  $a_3 \neq 0$ .*

Por lo tanto, en el sistema (3.2) puede ocurrir la bifurcación compuesta de dos maneras: (i) cuando un pseudo-equilibrio cruza la singularidad de Teixeira en una bifurcación transcritical y (ii) cuando dos pseudo-equilibrios se destruyen o nacen como resultado de una bifurcación trinche.

El hecho de que la variedad central es tangente al vector propio  $\omega_0$  asegura que los pseudo-equilibrios están localizados en la región deslizante, al menos, localmente.

---

<sup>1</sup>Las siglas vienen del inglés, *compound bifurcation*.





---

## Capítulo 4

# Familias Representativas

---

En este capítulo se presentan familias concretas de sistemas Filippov en  $\mathbb{R}^3$  que realizan los distintos escenarios de bifurcación descritos en el Capítulo 3. La primera familia, dada por (4.1), está construida en la forma normal y depende de un conjunto reducido de parámetros que permite observar, según las relaciones entre ellos, una bifurcación compuesta de tipo I (CB I), una bifurcación compuesta de tipo II (CB II) y un régimen en el que no ocurre bifurcación compuesta, ilustrando el papel de los escalares  $\Lambda$ ,  $\mathcal{K}_2$ ,  $\mathcal{K}_3$  y  $\mathcal{K}_4$  en la dinámica local. La segunda familia se elige de manera que no presente bifurcaciones compuestas, aun cuando admite un ciclo límite de cruce, y sirve para mostrar que las condiciones obtenidas en el Capítulo 3 son, en efecto, necesarias. Con el fin de facilitar la ilustración de los ciclos límite, en ambos casos se construyó de forma que no existan equilibrios en los campos laterales, se analiza el campo deslizante regularizado asociado y se incluyen simulaciones numéricas que ilustran la dinámica cerca de la singularidad de doble tangencia.

### 4.1. Una familia con CB I, CB II y sin CB

Consideremos la siguiente familia de sistemas Filippov en  $\mathbb{R}^3$

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & \eta \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ r_1 + \mu \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \delta_2 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ r_2 + \mu \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

con  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ .

Veamos que el sistema (4.1) no presenta equilibrios en ningún lado del plano de conmutación; en efecto, consideremos a la matriz

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

Notemos que la segunda fila de  $\tilde{A}_1$  es una fila de ceros, la cual no aporta nada al rango de la matriz. Ahora, veamos que las filas 1 y 3 son linealmente independientes:

Supongamos que

$$\alpha_1(0, 1, 0) + \alpha_2(\delta_1, 0, \eta) = 0,$$

esto nos da las ecuaciones

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot \delta_1 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot \eta = 0.$$

De la segunda ecuación se tiene que  $\alpha_1 = 0$  y de la primera y tercer ecuación se sigue que  $\alpha_2\delta_1 = 0$  y  $\alpha_2\eta = 0$ , por lo que se tiene que  $\alpha_2 = 0$ , o bien, que  $\delta_1 = \eta = 0$ . Así, si  $\delta_1 \neq 0$  o  $\eta \neq 0$  tenemos que  $\text{rango}(\tilde{A}_1) = 2$ . En otro caso, si  $\delta_1 = \eta = 0$  entonces  $\text{rango}(\tilde{A}_1) = 1$

Ahora, consideremos a la matriz aumentada

$$[\tilde{A}_1 \mid \tilde{b}_1] = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \\ \delta_1 & 0 & \eta & r_1 + \mu \end{array} \right).$$

Es claro que las filas 1 y 3 son linealmente independientes, además, veamos que la fila 2 es distinta de cero (pues  $r_1 > 0$ ) y que no es posible conseguirla mediante una combinación lineal de las otras dos. Por tanto, tenemos que  $\text{rango}([\tilde{A}_1 \mid \tilde{b}_1]) = 3$ .

Así, como  $\text{rango}(\tilde{A}_1) < \text{rango}([\tilde{A}_1 \mid \tilde{b}_1])$ , por el teorema de Rouché-Frobenius, se tiene que el sistema es incompatible, por lo que el campo  $f^-$  no tiene ningún equilibrio.

Similarmente, para el campo  $f^+$ , consideremos a la matriz

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \delta_2 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fila 3 es una fila de ceros, por lo que no aporta al rango de la matriz. Veamos que

- Si  $\delta_2 = 0$ , entonces la segunda fila es combinación lineal de la primera fila, o bien, es una fila de ceros (si  $\rho = 0$ ). Es decir, en este caso se tiene que  $\text{rango}(A_2) = 1$

- Si  $\delta_2 \neq 0$ , entonces la primera y segunda fila son linealmente independientes (sin importar el valor de  $\rho$ ), por lo que tenemos  $\text{rango}(A_2) = 2$ .

Ahora, para la matriz aumentada

$$[\tilde{A}_2 \mid \tilde{b}_2] = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta_2 & 0 & \rho & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 + \mu \end{array} \right).$$

Notemos que la fila 3 es linealmente independiente y no es una fila de ceros (pues  $r_2 < 0$ ) y que la primera y segunda fila son linealmente independientes. Así,  $\text{rango}([A_2 \mid b_2]) = 3$ .

En conclusión, se tiene que  $\text{rango}(A_2) < \text{rango}([A_2 \mid b_2])$ , por lo que, por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible y así el campo  $f^+$  no tiene ningún equilibrio.

Por otro lado, notemos que el sistema (4.1) genera al siguiente campo deslizante regularizado sobre  $\tilde{\Sigma}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho y_2 y_3 + r_2 y_2 - r_1 y_3 \\ -\eta y_3^2 + (r_2 + \mu) y_2 - (r_1 + \mu) y_3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

de donde se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, \\ a_2 &= \frac{r_2 \eta + r_1 \rho}{r_1 - r_2}, \\ a_3 &= -\frac{r_1(\eta + \rho)(2r_2 \eta + (r_1 + r_2)\rho)}{(r_1 - r_2)^3}. \end{aligned}$$

los cuales nos serán de utilidad para determinar si ocurre una bifurcación en este campo y que tipo de bifurcación es.

Ahora, en esta familia de sistemas, la expresión de la curva de puntos fijos:

$$\mu = m(u) = \mathcal{K}_2 u^2 + \mathcal{K}_4 u^4 + O(|u|^5).$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 &= \left( \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1} \right) \Lambda, \\ \mathcal{K}_4 &= \frac{5r_1^3 \delta_2 (2r_2^2 \delta_1 - r_1(r_1 - 3r_2)\delta_2) + r_2^2 ((6r_1 - r_2)r_2^2 \delta_1 + 5r_1^2(2r_1 + r_2)\delta_2) \eta^2 + (6r_1 - r_2)r_2^4 \eta^4}{45 r_1^3 (r_1 - r_2)^2 r_2^3}, \end{aligned}$$

con

$$\Lambda = \frac{1}{3} \left( \frac{\delta_2}{r_2^2} + \frac{\delta_1 + \eta^2}{r_1^2} \right).$$

Los valores propios de la matriz Jacobiana de la expansión de Taylor hasta grado 5 de  $\mathbf{P}(u, g(u), m(u))$  están dados por

$$\lambda_{1,2} = 1 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5 + O(|u|^6) \pm \sqrt{(\beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + O(|u|^5))},$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{\eta}{r_1}, \\
\alpha_2 &= -\frac{1}{3r_1^2 r_2^2} (\alpha_{20} + \alpha_{21} \eta^2), \\
\alpha_3 &= \frac{2\eta}{3r_1^3 r_2^2} (\alpha_{30} + \alpha_{31} \eta^2), \\
\alpha_4 &= \frac{1}{45r_1^4 (r_1 - r_2) r_2^4} (\alpha_{40} + \alpha_{41} \eta^2 + \alpha_{42} \eta^4), \\
\alpha_5 &= \frac{4\eta}{45r_1^5 (r_1 - r_2) r_2^4} (\alpha_{50} + \alpha_{51} \eta^2 + \alpha_{52} \eta^4), \\
\beta_2 &= -\frac{1}{3r_1^2 r_2^2} (\beta_{20} + \beta_{21} \eta^2), \\
\beta_3 &= \frac{2\eta}{3r_1^3 r_2^2} (\beta_{30} + \beta_{31} \eta^2), \\
\beta_4 &= \frac{1}{45r_1^4 (r_1 - r_2) r_2^3} (\beta_{40} + \beta_{41} \eta^2 + \beta_{42} \eta^4).
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\alpha_{20} &= 4(r_1^2 \delta_2 + r_2^2 \delta_1), & \alpha_{21} &= r_2^2 \\
\alpha_{30} &= 2(r_1^2 \delta_2 + r_2^2 \delta_1), & \alpha_{31} &= r_2^2 \\
\alpha_{40} &= -20r_1(-r_2^2 \delta_1 + r_1^2 \delta_2)(2r_1^2 \delta_2 - r_2(r_2 \delta_1 + 3r_1 \delta_2)) \\
\alpha_{41} &= 4r_1^3(-13r_1 r_2 \delta_1 + 8r_2^2 \delta_1 + 5r_1^2 \delta_2), & \alpha_{42} &= 17r_2^4(r_2 - r_1) \\
\alpha_{50} &= 5r_1(\delta_1^2 r_2^4 + 15\delta_1 \delta_2 r_1^2 r_2^2 - 15\delta_1 \delta_2 r_1 r_2^3 + 2\delta_2^2 r_1^4 - 3\delta_2^2 r_1^3 r_2) \\
\alpha_{51} &= r_2^2(-4\delta_1 r_1 r_2^2 + 9\delta_1 r_2^3 + 70\delta_2 r_1^3 - 75\delta_2 r_1^2 r_2), & \alpha_{52} &= 9r_2^4(r_2 - r_1) \\
\beta_{20} &= 8(r_2^2 \delta_1 + r_1^2 \delta_2), & \beta_{21} &= 5r_2^2 \\
\beta_{30} &= \beta_{20}, & \beta_{31} &= \beta_{21} \\
\beta_{40} &= 40\left((r_1 - 2r_2)r_2^3 \delta_1^2 + 7r_1^2(r_1 - r_2)r_2 \delta_1 \delta_2 + r_1^4 \delta_2^2\right) \\
\beta_{41} &= 8r_2\left(-23r_1 r_2^2 \delta_1 + 18r_2^3 \delta_1 - 10r_1^3 \delta_2 + 15r_1^2 r_2 \delta_2\right), & \beta_{42} &= 119r_2^3(r_2 - r_1)
\end{aligned}$$

**Observación 7.** Notemos que el producto de los valores propios es

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 - \frac{2u\eta}{r_1} + \frac{2u^2\eta(4r_1^2\delta_2 + r_2^2(4\delta_1 + \eta(3r_1 + 2\eta)))}{3r_1^3 r_2^2} + O(|\eta, u|^3).$$

Haciendo  $\eta = 0$  tenemos que  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , además, se sigue que  $\alpha_1 = 0$ , por lo que los valores propios se reducen a

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= 1 - 4\Lambda u^2 + O(|u|^3) \pm \sqrt{-8\Lambda u^2 + O(|u|^3)}, \\ &= 1 \pm \sqrt{-8\Lambda} u - 4\Lambda u^2 + O(|u|^3).\end{aligned}$$

De estas relaciones, podemos concluir

- Si  $\Lambda < 0$ , el ciclo límite de cruce es tipo silla,
- Si  $\Lambda > 0$ , el ciclo límite de cruce es tipo foco no hiperbólico.

Veamos la veracidad de la segunda afirmación. En efecto; si el ciclo límite es de tipo foco, esto implica que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , por tanto

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 = |\lambda_{1,2}|^2.$$

Así,

$$|\lambda_{1,2}| = 1$$

lo que demuestra la no hiperbolicidad.

Si en esta familia consideramos

$$\delta_2 = \frac{-r_2^2 (\delta_1 + \eta^2)}{r_1^2}, \delta_1 \neq -\eta^2 \quad \text{y} \quad \delta_1 \neq -\frac{3}{5}\eta^2$$

se sigue que  $\Lambda = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$ , por lo que se tiene

$$\mathcal{K}_4 = \frac{-r_2 (\delta_1 + \eta^2) (5\delta_1 + 3\eta^2)}{15r_1^3 (r_1 - r_2)} \neq 0$$

y la curva de puntos fijos tiene la expresión

$$\mu = \mathcal{K}_4 u^4 + O(|u|^5).$$

Con esto, de acuerdo al Corolario 3, la familia presenta una bifurcación pseudo-Hopf degenerada.

#### **Caso I: Bifurcaciones del campo deslizante regularizado.**

**BCR I.** Si consideramos a  $\eta \neq -\frac{r_1}{r_2}\rho$ , el sistema (4.1) sufre una bifurcación transcítica en  $y_0$  cuando  $\mu = 0$ . Los equilibrios para este sistema son  $y_0$  y los puntos

$$\begin{aligned}p_1 &= \left( \frac{r_2^2 \eta + r_2(r_1 - \mu)\rho + 2r_1\mu\rho - r_2\sqrt{\Omega}}{2(r_2 + \mu)\rho^2}, \frac{-r_2\eta - (r_1 + \mu)\rho + \sqrt{\Omega}}{2\eta\rho} \right), \\ p_2 &= \left( \frac{r_2^2 \eta + r_2(r_1 - \mu)\rho + 2r_1\mu\rho + r_2\sqrt{\Omega}}{2(r_2 + \mu)\rho^2}, -\frac{r_2\eta + (r_1 + \mu)\rho + \sqrt{\Omega}}{2\eta\rho} \right),\end{aligned}$$

donde  $\Omega = 4(r_1 - r_2)\eta\mu\rho + (r_2\eta + (r_1 + \mu)\rho)^2$ .

Necesitamos encontrar cual de estos dos equilibrios es el que colisiona en  $y_0$ , lo cual dará paso a la bifurcación que estamos buscando. Para esto, veamos lo siguiente; tomando  $\mu = 0$ , el discriminante se reduce a

$$\Omega = (r_2\eta + r_1\rho)^2.$$

- Si  $r_2\eta + r_1\rho > 0$ , tenemos que sustituyendo  $\Omega$  en  $p_{1,2}$ , tenemos para  $p_1$

$$p_1|_{\mu=0} = \left( \frac{r_2^2\eta + r_1r_2\rho - r_2(r_2\eta + r_1\rho)}{2r_2\rho^2}, \frac{-r_2\eta + r_1\rho - (r_2\eta + r_1\rho)}{2\eta\rho} \right) = (0, 0).$$

Similarmente, para el punto  $p_2$  se tiene que

$$p_2|_{\mu=0} = \left( \frac{r_2^2\eta + r_1r_2\rho + r_2(r_2\eta + r_1\rho)}{2r_2\rho^2}, \frac{-r_2\eta + r_1\rho + (r_2\eta + r_1\rho)}{2\eta\rho} \right) = \left( \frac{r_2\eta + r_1\rho}{\rho^2}, -\frac{r_1}{\eta} - \frac{r_2}{\rho} \right).$$

- Si  $r_2\eta + r_1\rho < 0$ , tenemos que sustituyendo  $\Omega$  en  $p_{1,2}$ , tenemos para  $p_2$

$$p_2|_{\mu=0} = \left( \frac{r_2^2\eta + r_1r_2\rho + r_2(r_2\eta + r_1\rho)}{2r_2\rho^2}, \frac{-r_2\eta + r_1\rho + (r_2\eta + r_1\rho)}{2\eta\rho} \right) = (0, 0).$$

Similarmente, para el punto  $p_1$  se tiene que

$$p_1|_{\mu=0} = \left( \frac{r_2^2\eta + r_1r_2\rho - r_2(r_2\eta + r_1\rho)}{2r_2\rho^2}, \frac{-r_2\eta + r_1\rho - (r_2\eta + r_1\rho)}{2\eta\rho} \right) = \left( \frac{r_2\eta + r_1\rho}{\rho^2}, -\frac{r_1}{\eta} - \frac{r_2}{\rho} \right).$$

Ahora, analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio. La matriz Jacobiana del sistema es

$$J(y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \rho y_3 + r_2 & \rho y_2 - r_1 \\ r_2 + \mu & -2\eta y_3 - (r_1 + \mu) \end{pmatrix},$$

y evaluándola en  $y_0 = (0, 0)$ , tenemos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_2 & r_1 \\ r_2 + \mu & -r_1 - \mu \end{pmatrix}.$$

Para encontrar los valores propios, utilizaremos el polinomio característico de la matriz  $J$ , el cual

$$\lambda^2 + (r_1 + \mu - r_2)\lambda + \mu(r_1 - r_2) = 0.$$

de aquí encontramos que  $\lambda_1 = -\mu$  y  $\lambda_2 = \mu(r_1 - r_2)$ . Recordemos que  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ , por lo que el término  $(r_1 - r_2)$  en el segundo valor propio es siempre positivo. Con esto, podemos ver que

- Para  $\mu < 0$

Se tiene que  $y_0$  es un punto silla, pues  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$ .

- Para  $\mu = 0$

Aquí tenemos un equilibrio no hiperbólico pues  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

- Para  $\mu > 0$

De igual manera, se tiene un punto silla, pero ahora  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 > 0$ .

Ahora, analicemos el punto  $p_1$ ; de igual manera que en el equilibrio anterior, evaluamos la matriz Jacobiana en las coordenadas del punto, así tenemos

$$J(p_1) = \begin{pmatrix} r_2 + \frac{-r_2 \eta - (r_1 + \mu) \rho + \sqrt{\Omega}}{2\eta} & -r_1 + \frac{r_2^2 \eta + r_2 (r_1 - \mu) \rho + 2 r_1 \mu \rho - r_2 \sqrt{\Omega}}{2(r_2 + \mu) \rho} \\ r_2 + \mu & -r_1 - \mu - \frac{-r_2 \eta - (r_1 + \mu) \rho + \sqrt{\Omega}}{\rho} \end{pmatrix}$$

de igual manera se tiene que  $\Omega = 4(r_1 - r_2)\eta\mu\rho + (r_2\eta + (r_1 + \mu)\rho)^2$ . En la Figura 4.1 se muestra una simulación para este caso cuando  $\mu > 0$  y  $\Lambda > 0$ .

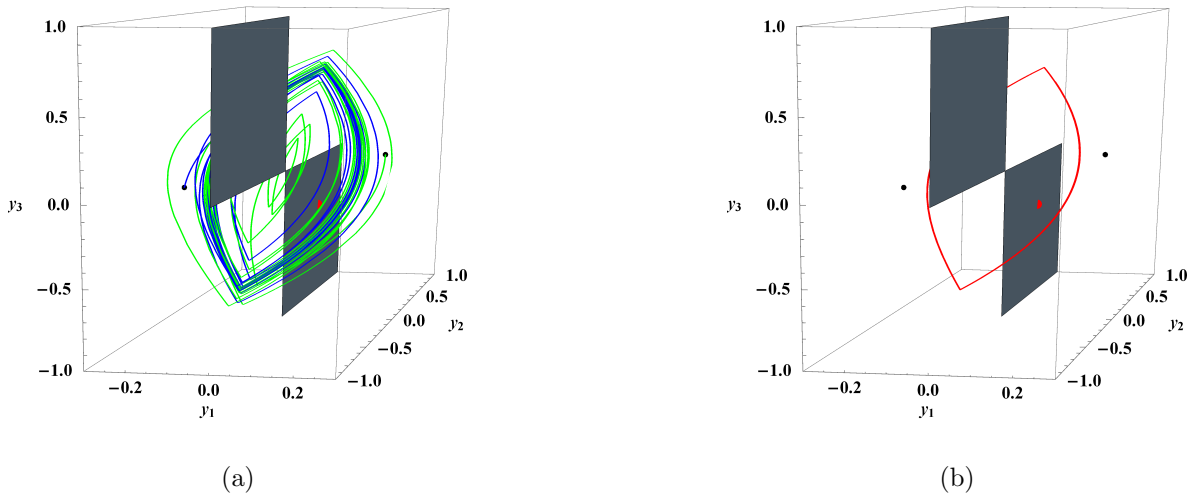


Figura 4.1: Simulación de **BCR I** tomando  $\delta_1 = \delta_2 = r_1 = 1, r_2 = \rho = -1, \eta = -0.5$  y  $\mu = 0.15$ . En (a) podemos ver la evolución de dos soluciones del sistema, los puntos negros representan las condiciones iniciales  $(-0.25, -0.1, -0.1)$  y  $(0.25, 0.1, 0.1)$ , en (b) podemos ver el ciclo límite de cruce. Los puntos rojos denotan los pseudo-equilibrios del sistema.

Si en este caso, para los valores de los parámetros tomados en la simulación, pedimos que

$$\delta_2 = -\frac{1}{4} - \delta_1, \quad \delta_1 \neq -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \delta_1 \neq -\frac{3}{8},$$

tenemos que  $\Lambda = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$ , en consecuencia,

$$\mathcal{K}_4 = \frac{1}{160} + \frac{\delta_1}{15} + \frac{\delta_1^2}{6} \neq 0,$$

de modo que, visto como función de  $\delta_1$ , se trata de un polinomio cuadrático con coeficiente principal positivo. Con un cálculo sencillo, vemos que las raíces son

$$\delta_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \delta_1 = -\frac{3}{20}.$$

Como el coeficiente principal es positivo, la parábola abre hacia arriba y, por tanto,

$$\mathcal{K}_4(\delta_1) \begin{cases} < 0, & \text{si } -\frac{1}{4} < \delta_1 < -\frac{3}{20}, \\ > 0, & \text{si } \delta_1 < -\frac{1}{4} \text{ o } \delta_1 > -\frac{3}{20}. \end{cases}$$

Así, vemos que la ocurrencia de una bifurcación pseudo-Hopf degenerada es factible para valores apropiados de  $\mu$ .

**BCR II.** Considerando  $\eta = -\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\rho$ , el campo (4.2) sufre una bifurcación trinche en  $y_0$  cuando  $\mu = 0$ . Los puntos de equilibrio de este sistema son  $y_0$  y

$$p_{1,2} = \left( \frac{2r_1\mu\rho - r_2\mu\rho \mp \sqrt{\Psi}}{2(r_2 + \mu)\rho^2}, \frac{r_2\mu\rho \mp \sqrt{\Psi}}{2r_1\rho^2} \right)$$

$$\text{con } \Psi = r_2\mu(-4r_1^2 + 4r_1r_2 + r_2\mu)\rho^2.$$

Para que los equilibrios existan, es necesario que  $\Psi > 0$ . Notemos que el término  $\rho^2$  no depende de  $\mu$ , por lo que no será necesario considerarlo en este análisis, además, el término  $r_2\mu$  es positivo cuando  $\mu$  es negativa y es negativo cuando  $\mu$  es positiva. Con esto, haciendo los cálculos encontramos que

$$\begin{aligned} (-4r_1^2 + 4r_1r_2 + r_2\mu) &> 0, \\ \mu &> \frac{(-4r_1^2 + 4r_1r_2 + r_2)}{r_2}, \\ \mu &> \frac{4r_1(r_1 - r_2)}{r_2}. \end{aligned}$$

Llamemos a este valor de la siguiente forma:

$$\mu^* = \frac{4r_1(r_1 - r_2)}{r_2}.$$

Ahora, veamos que

- Para  $\mu < \mu^*$ , no existen equilibrios reales además de  $y_0$ .
- Para  $\mu^* < \mu < 0$ , existen los equilibrios  $p_1, p_2$  y son reales.
- Para  $\mu = 0$ , los tres equilibrios  $y_0, p_1, p_2$  colapsan en el origen.
- Para  $\mu > 0$ , los equilibrios  $p_1$  y  $p_2$  no son reales.



Con esto, podemos ver que los equilibrios tienen sentido cuando  $\mu \in \left[ \frac{4r_1(r_1 - r_2)}{r_2}, 0 \right]$ . La matriz Jacobiana de este sistema es

$$J(y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \rho y_3 + r_2 & \rho y_2 - r_1 \\ r_2 + \mu & \frac{2r_1 y_3 \rho}{r_2} - r_1 - \mu \end{pmatrix}.$$

En la Figura 4.2 se muestra una simulación para este caso con  $\mu > 0$  y  $\Lambda > 0$ .

Ahora, para los valores de los parámetros tomados en la simulación, si pedimos que

$$\delta_2 = -1 - \delta_1, \quad \delta_1 \neq 1 \quad \text{y} \quad \delta_1 \neq -\frac{3}{5},$$

tenemos que  $\Lambda = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$ , en consecuencia,

$$\mathcal{K}_4 = \frac{1}{6}\delta_1^2 + \frac{4}{15}\delta_1 + \frac{1}{10} \neq 0,$$

de donde podemos calcular que sus raíces son

$$\delta_1 = -1 \quad \text{y} \quad \delta_1 = -\frac{3}{5}.$$

Como el coeficiente principal es positivo, la parábola abre hacia arriba y, por tanto,

$$K_4(\delta_1) \begin{cases} < 0, & \text{si } -1 < \delta_1 < -\frac{3}{5}, \\ > 0, & \text{si } \delta_1 < -1 \text{ o } \delta_1 > -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Por el Corolario 3, en este escenario puede ocurrir un ciclo límite de cruce.

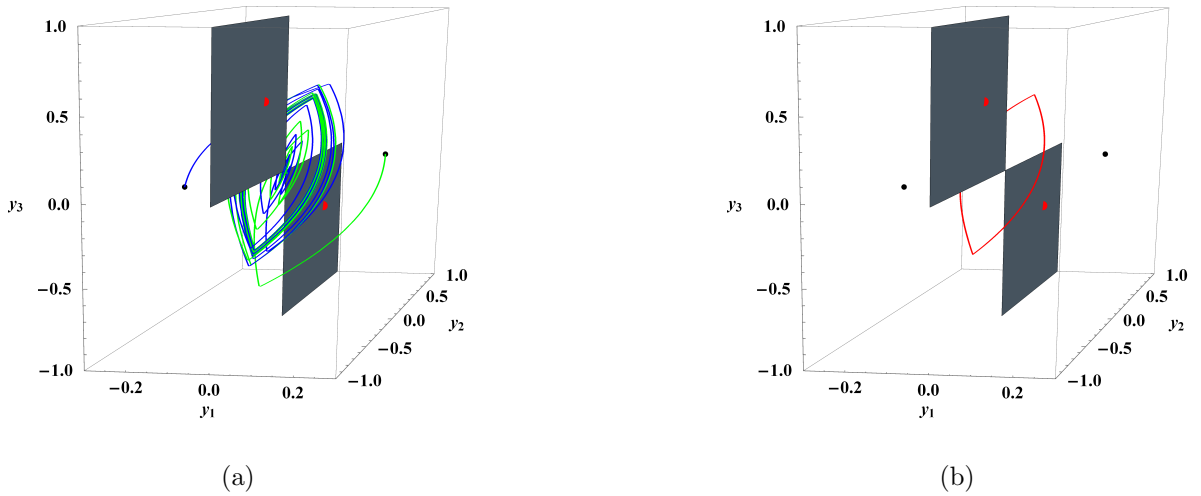


Figura 4.2: Simulación de **BCR II** tomando  $\delta_1 = \delta_2 = r_1 = 1$ ,  $r_2 = \rho = \eta = -1$  y  $\mu = 0.1$ . En (a) podemos ver la evolución de dos soluciones del sistema, los puntos negros representan las condiciones iniciales  $(-0.25, -0.1, -0.1)$  y  $(0.25, 0.1, 0.1)$ , en (b) podemos ver el ciclo límite de cruce. Los puntos rojos denotan los pseudo-equilibrios del sistema.

### Caso II: Sin bifurcación compuesta

En el caso en que  $\eta = \rho = 0$ , en el sistema (4.1) se cumple que  $a_2 = a_3 = 0$ , por lo que no puede ocurrir una bifurcación estacionaria en el campo deslizante. Notemos además que el único equilibrio del sistema es  $y_0$ . En este escenario, tenemos que

$$\Lambda = \frac{1}{3} \left( \frac{\delta_1}{r_1^2} + \frac{\delta_2}{r_2^2} \right), \quad \beta_2 = -\frac{8}{3} \left( \frac{\delta_1}{r_1^2} + \frac{\delta_2}{r_2^2} \right) \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_4 = \frac{\delta_2 (2r_2^2\delta_1 - r_1(r_1 - 3r_2)\delta_2)}{9(r_1 - r_2)^2 r_2^3},$$

por lo que si podemos hacer uso del teorema 3.1 para encontrar un ciclo límite de cruce; sin embargo, como  $\alpha_1 = 0$ , la estabilidad del ciclo límite se verifica por lo visto en la Observación 7.

En la Figura 4.3 se muestra una simulación para este caso con  $\mu > 0$  y  $\Lambda > 0$ .

Ahora, para los valores de los parámetros tomados en la simulación, si pedimos que

$$\delta_2 = -\delta_1 \quad \text{y} \quad \delta_1 \neq 0,$$

tenemos que  $\Lambda = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$ , en consecuencia,

$$\mathcal{K}_4 = \frac{1}{6} \delta_1^2.$$

En particular,  $\mathcal{K}_4(\delta_1) \geq 0$  para todo  $\delta_1 \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{K}_4(\delta_1) > 0$  siempre que  $\delta_1 \neq 0$ , mientras que  $\mathcal{K}_4(0) = 0$ . Por el Corolario 3, este escenario permite la aparición de un ciclo límite de cruce cuando  $\mu > 0$ .

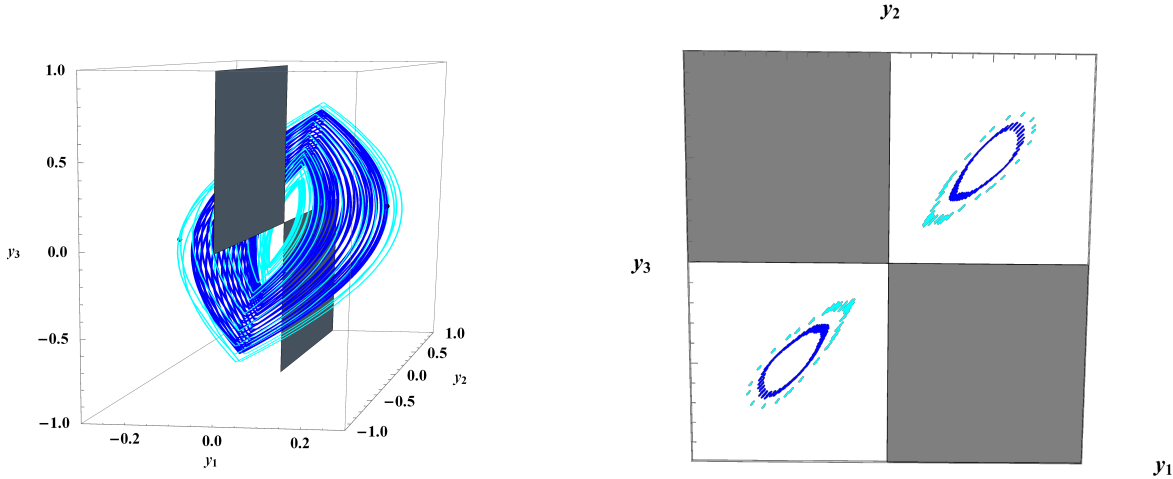


Figura 4.3: Simulación de **Caso II** tomando  $\delta_1 = \delta_2 = r_1 = 1$ ,  $r_2 = -1$ ,  $\eta = \rho = 0$  y  $\mu = 0.1$ . En este caso, estamos observando un ciclo límite de cruce del tipo foco no hiperbólico. En la imagen de la derecha podemos ver como las órbitas del mapeo de Poincaré son centros.

## 4.2. Una familia sin bifurcación compuesta

Ahora, vamos a considerar a la siguiente familia:

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & d_3 & 0 \\ c_4 & d_6 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ s_1 + \mu \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & c_2 \\ d_4 & 0 & c_5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_1 r_2}{s_1} \\ r_2 + \mu \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

Mediante un análisis similar al hecho en la familia (4.1), es posible demostrar que el sistema (4.3) no presenta equilibrios en ningún lado del plano de conmutación.

Por otro lado, el sistema (4.3) genera el siguiente campo deslizante

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = L(\mu)y = \begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{s_1} y_2 - r_1 y_3 \\ (r_2 + \mu) y_2 - (s_1 + \mu) y_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

el cual resulta ser lineal y satisface que  $a_2 = a_3 = 0$ .

**Observación 8.** *Veamos que el único equilibrio para este campo es el origen, como era de esperarse.*

Ahora bien, la curva de puntos fijos es en este caso

$$\mu = \mathcal{K}_2 u^2 + \mathcal{K}_3 u^3 + \mathcal{K}_4 u^4 + O(|u|^5),$$

donde

$$\mathcal{K}_2 = \left( \frac{r_2 s_1}{r_2 - s_1} \right) \Lambda, \quad \mathcal{K}_3 = -\frac{2}{3} \frac{c_2}{r_1} \mathcal{K}_2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4 = & \frac{1}{135 r_1^6 r_2^3 (r_2 - s_1)^2} \left( 3c_1^2 r_1^2 r_2^4 s_1 (-4r_2 + 9s_1) + c_2^2 r_1 r_2^2 (r_2 - s_1) (22c_4 r_1^2 r_2^2 + 25s_1^3 (-d_4 r_1 + d_1 s_1)) \right. \\ & + 3s_1^3 \left( -5c_4 r_1^2 r_2^2 (d_4 r_1 - 2d_1 s_1) + s_1^2 (d_4 r_1 - d_1 s_1) (c_5^2 r_1 (r_2 - s_1) + d_4 r_1 (6r_2 - s_1) + 5d_1 s_1 (-3r_2 + s_1)) \right) \\ & \left. + c_1 r_1 r_2^2 \left( 3c_4 r_1^2 r_2^2 (4r_2 - 9s_1) + s_1 (22c_2^2 r_1 r_2^2 (-r_2 + s_1) + 15s_1^2 (d_4 r_1 (r_2 + s_1) - d_1 s_1 (r_2 + 2s_1))) \right) \right). \end{aligned}$$

con

$$\Lambda = \frac{c_4 r_1^2 r_2^2 - c_1 r_1 r_2^2 s_1 - d_4 r_1 s_1^3 + d_1 s_1^4}{3r_1^3 r_2^2 r_1}.$$

Por lo que el sistema presenta un ciclo límite de cruce si  $\mu\Lambda > 0$ .

Luego, los valores propios de la matriz Jacobiana de  $\mathbf{P}$  son

$$\lambda_{1,2} = 1 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + O(|u|^3) \pm \sqrt{\beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + O(|u|^4)},$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{2(-c_2 r_2 + c_5 r_1)}{3r_1 r_2}, \\ \alpha_2 &= \frac{4(-c_4 r_1^2 r_2^2 + c_1 r_1 r_2^2 s_1 + s_1^3(d_4 r_1 - d_1 s_1))}{3r_1^3 r_2^2 s_1}, \\ \beta_2 &= \alpha_1^2 - 8\Lambda, \\ \beta_3 &= \frac{-6c_4 r_2 + 4c_5 s_1}{3r_1 r_2} \beta_2.\end{aligned}$$

Si en esta familia consideramos sin pérdida de generalidad

$$c_4 = \frac{c_1 r_1 r_2^2 s_1 + d_4 r_1 s_1^3 - d_1 s_1^4}{r_1^2 r_2^2},$$

se sigue que  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$ . Por tanto, la expresión de la curva de puntos fijos es:

$$\mu = \mathcal{K}_4 u^4 + O(|u|^5).$$

con

$$\mathcal{K}_4 = \frac{s_1^3 (d_4 r_1 - d_1 s_1) ((9c_1 - c_2^2) r_1 r_2^2 + (c_5^2 + 6d_4) r_1 s_1^2 - 15d_1 s_1^3)}{45 r_1^6 r_2^3 (r_2 - s_1)}$$

Con esto, de acuerdo al Corolario 3, el sistema (4.3) presenta un ciclo límite de cruce si  $\mu \mathcal{K}_4 > 0$ . En la Figura 4.4 se muestra una simulación para esta familia.

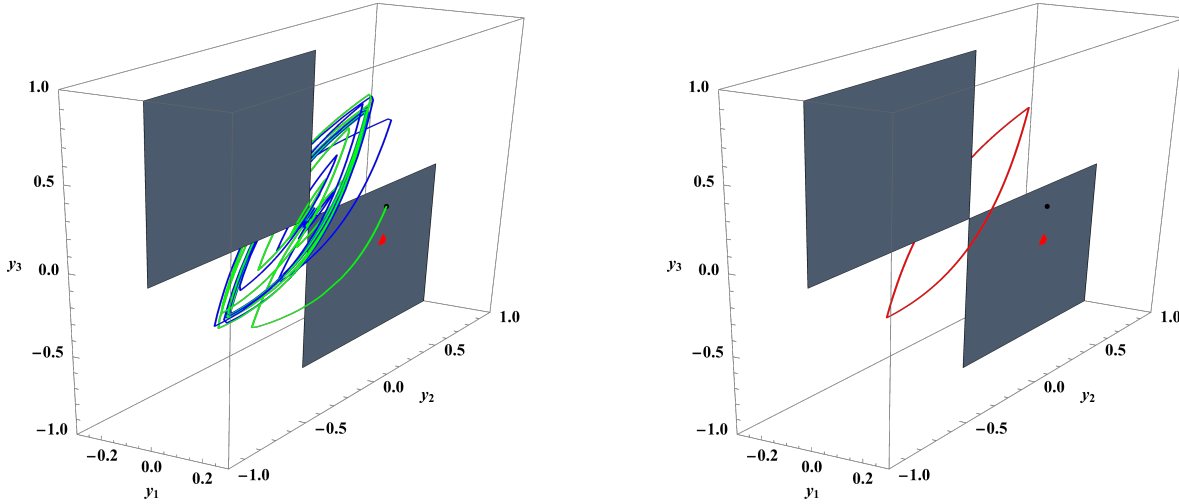


Figura 4.4: Simulación de esta familia **sin BC**, tomando  $c_1 = d_4 = c_2 = c_5 = d_3 = d_6 = r_2 = -1$ ,  $c_4 = r_1 = s_1 = d_1 = 1$  y  $\mu = -0.5$ . En este escenario, obtenemos un ciclo límite de cruce estable del tipo nodo.

---

## Capítulo 5

# Conclusiones

---

En este trabajo se estudió la dinámica local de sistemas Filippov en  $\mathbb{R}^3$  que presentan una singularidad de doble tangencia, con especial énfasis en los mecanismos de bifurcación que involucran ciclos límite de cruce y pseudo-equilibrios del campo deslizante. A partir de un modelo lineal por pedazos con una única superficie de discontinuidad, se desarrolló un marco analítico que permite describir, de manera sistemática, la aparición de la bifurcación pseudo-Hopf y de bifurcaciones compuestas asociadas a la singularidad de doble tangencia, así como acotar el número de pseudo-equilibrios admisibles.

En el Capítulo 1 se fijaron las nociones básicas de sistemas Filippov en dimensión tres: la descomposición del plano de conmutación en regiones de cruce y deslizamiento, la definición del campo deslizante  $f_s$  y del campo deslizante regularizado  $f_r$ , así como la clasificación de los puntos de tangencia y la caracterización de la singularidad de Teixeira como una doble tangencia invisible-invisible. Estos preliminares permitieron formular el problema en un lenguaje geométrico adecuado y precisar el papel de los pseudo-equilibrios y equilibrios frontera en la dinámica sobre el plano de conmutación.

En el Capítulo 2 se obtuvo una forma normal para sistemas Filippov con una singularidad de doble tangencia que satisface una hipótesis natural de solución única. Mediante un difeomorfismo, se llevó el plano de conmutación al plano  $\{y_1 = 0\}$  y se normalizaron los campos laterales de manera que la doble tangencia quedara situada en el origen y las rectas de tangencia coincidieran con los ejes coordenados. Esta forma normal hace explícita la estructura lineal por pedazos del sistema y permite describir de manera uniforme las regiones deslizantes y de cruce. A partir de ella se dedujo una expresión explícita del campo deslizante regularizado en coordenadas  $(y_2, y_3)$ , lo que permitió reducir el estudio de la dinámica sobre el plano de conmutación al análisis de un sistema bidimensional de tipo cuadrático.

La naturaleza polinómica del campo deslizante regularizado posibilitó, además, aplicar una versión real del Teorema de Bézout para acotar el número de pseudo-equilibrios. En efecto, al escribir las componentes de  $f_r$  como dos polinomios cuadráticos en  $(y_2, y_3)$ , se mostró que, bajo una hipótesis de no degeneración (ausencia de factores irreducibles comunes), el número total de ceros en el plano complejo no excede cuatro. De este modo, se concluyó que, el campo deslizante regularizado admite a lo más cuatro equilibrios y, por tanto, como máximo tres pseudo-equilibrios distintos de la propia singularidad de doble tangencia. Este resultado proporciona una restricción estructural para la dinámica local: descarta la posibilidad de

familias continuas de pseudo-equilibrios y delimita el tipo de configuraciones que pueden participar en bifurcaciones compuestas.

En el Capítulo 3 se analizaron las bifurcaciones que surgen al considerar un desdoblamiento del sistema en la forma normal. En primer lugar, se revisitó la bifurcación pseudo-Hopf asociada a la singularidad de Teixeira, estableciendo condiciones explícitas sobre los parámetros lineales del sistema (codificadas en el escalar  $\Lambda$  y en los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\beta_2$  del mapeo de Poincaré) que garantizan la aparición de un ciclo límite de cruce. Se describió cómo el signo de  $\Lambda$  determina el tipo de ciclo (foco o silla), mientras que el signo de  $\beta_2$  distingue entre ciclos de tipo foco y de tipo nodo, y se precisó la influencia de  $\alpha_1$  en la estabilidad del ciclo. De esta manera, se obtuvo un criterio puramente algebraico para detectar y clasificar la bifurcación pseudo-Hopf en sistemas Filippov lineales por pedazos en dimensión tres.

En segundo lugar, se estudiaron las bifurcaciones estacionarias del campo deslizante regularizado asociadas a la singularidad de doble tangencia. Mediante una reducción sobre la variedad central, tangente al vector propio correspondiente al valor propio cero de la matriz Jacobiana, se llevó la dinámica deslizante a una ecuación escalar cuyos coeficientes no lineales dependen de los parámetros originales del sistema. Se mostró que, según la anulación o no de ciertos coeficientes en esta ecuación reducida, pueden aparecer bifurcaciones transcriticals o bifurcaciones de tipo trinche en el campo deslizante regularizado. La combinación de estas bifurcaciones estacionarias con la bifurcación pseudo-Hopf del ciclo de cruce dio lugar a la noción de bifurcación compuesta, distinguiéndose dos tipos principales: una bifurcación compuesta de tipo I, en la que el ciclo límite de cruce coexiste con una bifurcación transcrítica deslizante, y una bifurcación compuesta de tipo II, en la que el ciclo se acopla con una bifurcación trinche.

Finalmente, en el Capítulo 4 se construyeron familias concretas de sistemas Filippov que realizan los distintos escenarios de bifurcación descritos en el análisis teórico. En particular, se presentó una familia que exhibe explícitamente una bifurcación compuesta de tipo I, una bifurcación compuesta de tipo II y un caso en el que sólo aparece la bifurcación pseudo-Hopf sin bifurcación estacionaria en el campo deslizante. En todos estos casos, se verificó la inexistencia de equilibrios de los campos laterales y se comprobó que los pseudo-equilibrios relevantes se localizan en la región deslizante, en concordancia con las propiedades de la variedad central. Además, se mostró cómo las relaciones entre los parámetros de las familias permiten anular los invariantes  $\Lambda$ ,  $\mathcal{K}_2$  y  $\mathcal{K}_3$ , de modo que la dinámica queda gobernada por el coeficiente  $\mathcal{K}_4$  y se obtiene una versión degenerada de la bifurcación pseudo-Hopf en dimensión tres.

En conjunto, los resultados obtenidos ofrecen un marco coherente para entender la interacción entre la singularidad de doble tangencia, la dinámica deslizante y la aparición de ciclos límite de cruce en sistemas Filippov lineales por pedazos. La combinación de la forma normal, la reducción sobre la variedad central y el uso de coeficientes obtenidos del mapeo de Poincaré y proporciona una herramienta flexible para describir y clasificar bifurcaciones compuestas en este contexto.

Quedan, sin embargo, diversas líneas abiertas que invitan a continuar este estudio. En primer lugar, sería natural extender el análisis a sistemas no lineales por pedazos, en los que los campos laterales presentan términos no lineales de orden superior. En segundo lugar, resulta de interés considerar configuraciones con múltiples superficies de discontinuidad o con otros tipos de singularidades (por ejemplo, combinaciones de dobles dobles y cúspide-cúspide),

donde la interacción entre las distintas regiones de deslizamiento y cruce puede generar nuevos mecanismos de bifurcación. Finalmente, la incorporación de métodos numéricos específicos para sistemas Filippov en dimensión tres podría complementar el enfoque analítico desarrollado aquí, permitiendo explorar con mayor detalle la robustez de los fenómenos descritos.

Aunque este trabajo se ha centrado en un escenario particular, los resultados obtenidos sugieren que la singularidad de doble tangencia en dimensión tres sigue siendo una fuente fructífera de comportamientos complejos en sistemas no suaves. El marco propuesto busca servir como punto de partida para desarrollos posteriores, en los que se profundice en la clasificación de bifurcaciones y en la comprensión de su papel en modelos aplicados donde la no suavidad es un rasgo esencial de la dinámica.





---

## Apéndice A

# Teoremas básicos

---

El siguiente teorema nos ayuda a determinar cuando una

**Teorema A.1** (Teorema de Rouché-Frobenius). *Sea el sistema  $Ax = b$ , con  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Se tiene que el sistema es*

- *Compatible determinado si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$ ,*
- *Compatible indeterminado si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$ ,*
- *Incompatible si  $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|b)$ ,*

donde  $(A|b)$  representa la matriz ampliada del sistema.

**Teorema A.2** (Bézout). *Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas algebraicas planas en  $\mathbb{C}^2$ , definidas por polinomios no constantes  $P_1(x, y)$  y  $P_2(x, y)$  de grados  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente, y supongamos que no comparten un factor irreducible común. Entonces, el sistema*

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0$$

*tiene a lo más  $d_1 d_2$  soluciones en  $\mathbb{C}^2$ , contando multiplicidades. En particular, el número de soluciones reales no excede  $d_1 d_2$ .*

El siguiente teorema enuncia uno de los resultados básicos del Cálculo.

**Teorema A.3** (Teorema de la Función Implícita). *Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Denotemos como  $(x, y, z)$  a los puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos que  $(x_0, y_0, z_0)$  es tal que*

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

*Entonces existe un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  que contiene a  $(x_0, y_0)$  y un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}$  que contiene a  $z_0$  y una única función  $g : U \rightarrow V$  tal que*

$$f(x, y, g(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in U$$

**Teorema A.4** (Teorema de la Variedad Central Local). *Sea  $f \in C^r(E)$ , con  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto que contiene al origen y  $r \geq 1$ . Supongamos que  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que  $Df(\mathbf{0})$  tiene  $c$  valores propios con parte real cero y  $s$  valores propios con parte real negativa, donde  $c + s = n$ . Entonces, el sistema  $\dot{x} = f(x)$  puede escribirse en forma diagonal*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\xi_1 + f_1(\xi_1, \xi_2) \\ \dot{y} &= B\xi_2 + f_2(\xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

donde  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ ,  $A$  es una matriz cuadrada con  $c$  valores propios que tienen parte real cero,  $B$  es una matriz cuadrada con  $s$  valores propios con parte real negativa y  $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $Df_1(\mathbf{0}) = Df_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ; además, existe una variedad invariante  $c$ -dimensional tangente al subespacio central  $E^c$  en  $\mathbf{0}$ ,

$$W_{loc}^c(\mathbf{0}) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid \xi_2 = h(\xi_1)\}$$

donde  $h \in C^r(N_\delta(\mathbf{0}))$  para  $\delta > 0$  y satisface que

$$Dh(\xi_1)[A\xi_1 + f_1(\xi_1, h(\xi_1))] - Bh(\xi_1) - f_2(\xi_1, h(\xi_1)) = 0$$

para  $|\xi_1| < \delta$ ; finalmente, el flujo en la variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  está definida por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\xi}_1 = A\xi_1 + f_1(\xi_1, h(\xi_1)),$$

para cada  $\xi_1 \in \mathbb{R}^c$  con  $|\xi_1| < \delta$ .

**Teorema A.5** (Teorema de las bifurcaciones estacionarias). *Sea la siguiente familia de espacios vectoriales de dimensión uno con un parámetro*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Supongamos que (A.1) tiene un equilibrio no hiperbólico en  $(x, \mu) = (0, 0)$ , es decir,

$$f(0, 0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

(i) *El sistema sufre una bifurcación silla-nodo en  $(0, 0)$  si*

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$$

(ii) *El sistema sufre una bifurcación transcítica en  $(0, 0)$  si*

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0.$$

(iii) El sistema sufre una bifurcación trinche en  $(0,0)$  si

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \quad y \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0.$$

**Lema A.1.** Para todo entero  $p \geq 1$ , se cumple que:

$$\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{(p-k)! k!} = \frac{1}{p!}.$$

*Demostración.* Multiplicando por  $p!$ :

$$p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{(p-k)! k!} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \binom{p}{k}.$$

Por el teorema de expansión binomial, se tiene que

$$(1-1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k = 0 \quad (\text{para } p \geq 1),$$

así, si aislamos el término  $k=0$

$$1 + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^k = 0 \implies \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \binom{p}{k} = 1.$$

Por tanto:

$$\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{(p-k)! k!} = \frac{1}{p!}.$$

■

**Proposición A.1.** Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . La solución para el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x) = Ax + b, \quad x(0) = x_0,$$

puede representarse como

$$x(t) = x_0 + tM(t)f(x_0),$$

donde

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} A^k.$$

*Demostración.* Recordemos la representación en serie de potencias para  $e^{tA}$  y  $e^{-sA}$

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad e^{-sA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s)^m A^m}{m!}.$$

Sabemos que el sistema  $\dot{x} = Ax + b$  tiene como solución

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} b ds \right) \quad (\text{A.2})$$

Ahora, vamos a encontrar el valor de la integral en la ecuación (A.2):

$$\int_0^t e^{-sA} b ds = \int_0^t \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s)^m A^m}{m!} \right) b ds.$$

Como esta serie converge uniformemente, podemos intercambiar la suma y la integración, de forma que

$$\int_0^t \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s)^m A^m}{m!} \right) b ds = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m b}{m!} \int_0^t (-s)^m ds,$$

de aquí, podemos ver que

$$\int_0^t (-s)^m ds = \frac{(-1)^m t^{m+1}}{(m+1)!}$$

Entonces, se tiene que

$$\int_0^t e^{-sA} b ds = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{m+1} A^m b}{(m+1)!}.$$

Reindexando con  $k = m + 1$ :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k A^{k-1} b}{k!}.$$

Ya que tenemos esta expresión, veamos que la ecuación (A.2) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} b ds \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) x_0 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k A^{k-1} b}{k!} \right).$$

Veamos que el producto de sumas de la parte derecha es un producto de Cauchy (en realidad, es una convolución de series), por lo tanto, lo podemos expresar como una doble suma sobre  $n$  y  $k$ , de forma que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^{n+k} A^{n+k-1} b}{n! k!}.$$

Sea  $p = n + k$ . Para  $p \geq 1$  fija,  $k$  va desde 1 hasta  $p$ , y siendo  $n = p - k$ :

$$= \sum_{p=1}^{\infty} t^p A^{p-1} b \left( \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{(p-k)! k!} \right).$$

Por el Lema A.1, se sigue que

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p A^{p-1} b}{p!}.$$

Ahora, sustituyendo la suma simplificada, obtenemos

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p A^{p-1} b}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{p+1} A^p b}{(p+1)!} = t \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p A^p b}{(p+1)!}.$$

Se define a la función matricial

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{(k+1)!}.$$

Entonces

$$e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b \, ds = tM(t)b. \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, veamos que para  $e^{tA}x_0$

$$\begin{aligned} e^{tA}x_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x_0}{n!} \\ &= x_0 + tA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1} x_0}{n!} \\ &= x_0 + tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x_0}{(n+1)!} \\ &= x_0 + tM(t)Ax_0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Combinando las expresiones (A.3) y (A.4), se tiene que

$$e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} b \, ds \right) = x_0 + tM(t)(Ax_0 + b) = x_0 + tM(t)f(x_0)$$

Así, la solución es

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} b \, ds \right) = x_0 + tM(t)f(x_0), \quad M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{(k+1)!},$$

como se quería probar. ■



---

## Apéndice B

# Construcción de los mapeos de medio retorno

---

**Nota.** Debido a la complejidad algebraica, los cálculos de los desarrollos de los mapeos  $\phi^-$  y  $\phi^+$  fueron realizados con asistencia del software Wolfram 14.2 (antes Mathematica). A continuación, se describe el procedimiento metodológico y se presentan los resultados hasta el orden necesario para el análisis de las bifurcaciones.

Para probar la existencia de un ciclo límite de cruce, tenemos que encontrar  $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$  y  $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ , con  $u_1, v_1 < 0$ ,  $u_2, v_2 > 0$  y los tiempos  $t_1, t_2$  tales que el sistema

$$q_2 = \phi_{t_1}^-(q_1), \tag{B.1}$$

$$q_1 = \phi_{t_2}^+(q_2) \tag{B.2}$$

tiene una solución.

La parte derecha de (B.1) se define como

$$\phi_{t_1}^-(q_1) = e^{t_1 \tilde{A}_1} \left( q_1 + \int_0^{t_1} e^{-s \tilde{A}_1} \tilde{b}_1 ds \right)$$

entonces, por la proposición (A.1) podemos escribir (B.1) como el sistema

$$q_2 = q_1 + t M_1(t_1) \tilde{f}^-(q_1), \tag{B.3}$$

donde

$$M_1(t_1) = I + \frac{t_1}{2!} \tilde{A}_1^2 + \frac{t_1^2}{3!} \tilde{A}_1^3 + \frac{t_1^3}{4!} \tilde{A}_1^4 + \dots$$

La primera ecuación del sistema (B.3) es

$$t_1 e_1^T M_1(t_1) \tilde{f}^-(q_1) = 0,$$

de la cual, podemos observar que la función

$$\begin{aligned} F_1(t_1, u_1, v_1) &= e_1^T M_1(t_1) \tilde{f}^-(q_1) \\ &= u_1 + \frac{t_1}{2}(r_1 + c_2 u_1 + c_3 v_1) + \frac{t_1^2}{3!} \Theta_1 + \dots, \end{aligned}$$

donde  $\Theta_1 = c_2 r_1 + c_3(s_1 + \mu) + (c_1 + c_3 c_5 + c_2^2)u_1 + (c_2 + c_6)c_3 v_1$ , satisface que

$$F_1(0, 0, 0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial t_1}(0, 0, 0) = \frac{r_1}{2}.$$

Entonces, por el teorema de la función implícita, existe una función  $t_1(u_1, v_1)$  tal que  $F_1(t_1(u_1, v_1), u_1, v_1) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0, 0)$ . Esta función está dada por

$$t_1(u_1, v_1) = -\frac{2u_1}{r_1} + \frac{2c_3 u_1 v_1}{r_1^2} + \frac{2(c_2 r_1 - 2c_3(s_1 + \mu)u_1^2)}{3r_1^3} - \frac{2c_3^2 u_1 v_1^2}{r_1} - \frac{4c_3 u_1^2 v_1((c_2 + c_6)r_1 - 3c_3(s_1 + \mu))}{3r_1^4} + \dots.$$

Reemplazando el tiempo de vuelo en la segunda y tercera ecuación de (B.3), obtenemos que

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}^-(u_1, v_1) \\ \phi_{12}^-(u_2, v_2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{11}^-(u_1, v_1) &= -u_1 + \frac{2(c_2 r_1 + c_3 s_1 + c_3 \mu)u_1^2}{3r_1^3} - \frac{2c_3(c_2 r_1 - c_6 r_1 + 2c_3(s_1 + \mu))u_1^2 v_1}{3r_1^3} \\ &\quad - \frac{2(2c_2^2 r_1^2 + c_3 r_1(c_2 + 3c_6)(s_1 + \mu) - 4c_3^2(s_1 + \mu)^2)u_1^3}{9r_1^4} + \dots, \\ \phi_{12}^+(u_1, v_1) &= v_1 - \frac{2(s_1 + \mu)u_1}{r_1} - \frac{2(c_6 r_1 - c_3(s_1 + \mu)u_1^3)}{r_1^2} - \frac{2c_3(c_3(s_1 + \mu) - c_6 r_1)u_1 v_1^2}{r_1^3} \\ &\quad + \frac{2(s_1 + \mu)(c_2 r_1 + 3c_6 r_1 - 2c_3(s_1 + \mu))u_1^2}{3r_1^3} + \frac{2\Gamma_1 u_1^2 v_1}{3r_1^4} + \dots, \end{aligned}$$

con  $\Gamma_1 = c_6 r_1^2(c_2 + 3c_6) - 2r_1 c_3(c_2 + 5c_6)(s_1 + \mu) + 6c_3^2 s_\mu^2$ .

Definimos el mapeo izquierdo  $\phi^- : \{\tilde{\Sigma} : u_1, v_1 < 0\} \rightarrow \{\tilde{\Sigma} : u_2, v_2 > 0\}$  como

$$\phi^-(u_1, v_1, \mu) = \begin{pmatrix} \phi_{11}^-(u_1, v_1, \mu) \\ \phi_{12}^-(u_1, v_1, \mu) \end{pmatrix}.$$

De manera análoga, podemos escribir (B.2) como el sistema

$$q_1 = q_2 + t_2 M_2(t_2) \tilde{f}^+(q_2), \quad (\text{B.5})$$

donde



$$M_2(t_2) = I + \frac{t_2}{2!} \tilde{A}_2^2 + \frac{t_2^2}{3!} \tilde{A}_2^2 + \frac{t_2^3}{4!} \tilde{A}_2^3 + \dots$$

La primera ecuación de (B.3) es

$$t_2 e_1^\top M_2(t_2) \tilde{f}^+(q_2) = 0,$$

de la cual, observamos que la función

$$\begin{aligned} F_2(t_2, u_2, v_2) &= e_1^\top M_2(t_2) \tilde{f}^+(q_2) \\ &= v_2 + \frac{t_2}{2} (\tilde{r}_2 + d_5 u_2 + d_6 v_2) + \frac{t_2^2}{3!} \Theta_2 \dots, \end{aligned}$$

donde  $\Theta_2 = d_6 r_\mu + d_5 s_2 + (d_2 + d_6) d_5 u_2 + (d_4 + d_3 d_5 + d_6^2) v_2$ , con  $s_2 = \frac{r_1 r_2}{s_1}$ , satisface que  $F(0, 0, 0) = \mathbf{0}$  y  $\frac{\partial F_2}{\partial t_2}(0, 0, 0) = \frac{r_2 + \mu}{2}$ . Así, por el teorema de la función implícita, existe una función  $t_2(u_2, v_2)$  tal que  $F_2(t_2(u_2, v_2), u_2, v_2) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0, 0)$ . Esta función está dada por

$$\begin{aligned} t_2(u_2, v_2) &= -\frac{2v_2}{(r_2 + \mu)} + \frac{2d_5 u_2 v_2}{(r_2 + \mu)^2} + \frac{2(d_6(r_2 + \mu) - 2d_5 s_2) v_2^2}{3(r_2 + \mu)^3} \\ &\quad - \frac{2d_5^2 u_2^2 v_2}{(r_2 + \mu)^3} - \frac{4d_5 ((d_2 + d_6)(r_2 + \mu) - 3d_5 s_2) u_2 v_2^2}{3(r_2 + \mu)^4} + \dots \end{aligned}$$

Reemplazando el tiempo de vuelo en la segunda y tercera ecuación de (B.5), obtenemos

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{21}^+(u_2, v_2) \\ \phi_{22}^+(u_2, v_2) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{21}^+(u_2, v_2) &= u_2 - \frac{2s_2 v_2}{(r_2 + \mu)} - \frac{2(d_2(r_2 + \mu) - d_5 s_2) u_2 v_2}{(r_2 + \mu)^2} + \frac{2d_5 (d_2(r_2 + \mu) - d_5 s_2) u_2^2 v_2}{(r_2 + \mu)^3} \\ &\quad + \frac{2s_2 ((3d_2 + d_6)(r_2 + \mu) - 2d_5 s_2) v_2^2}{3(r_2 + \mu)^3} + \frac{2\Gamma_2 u_2 v_2^2}{3(r_2 + \mu)^4} + \dots, \\ \phi_{22}^+(u_2, v_2) &= -v_2 + \frac{2(d_5 s_2 + d_6(r_2 + \mu)) v_2^2}{3(r_2 + \mu)^2} + \frac{2d_5 ((d_2 - d_6)(r_2 + \mu) - 2d_5 s_2) u_2 v_2^2}{3(r_2 + \mu)^3} \\ &\quad - \frac{2(2d_5^2(r_2 + \mu) + s_2 d_5 (3d_2 + d_6)(r_2 + \mu) - 4d_5 s_2^2) v_2^3}{9(r_2 + \mu)^4} + \dots, \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_2 = 6d_5^2 s_2^2 - 2d_5 s_2 (5d_2 - d_6)(r_2 + \mu) + d_2 (3d_2 + d_6)(r_2 + \mu)^2$ . Definimos el mapeo derecho  $\phi^+ : \{\Sigma : u_2, v_2 > 0 \rightarrow \Sigma : u_1, v_1 < 0\}$  como

$$\phi^+(u_2, v_2, \mu) = \begin{pmatrix} \phi_{21}^+(u_2, v_2, \mu) \\ \phi_{22}^+(u_2, v_2, \mu) \end{pmatrix}.$$



# Bibliografía

---

- [1] Colombo A., di Bernardo M., Fossas E. and Jeffrey M.R. *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*. Systems & Control Letters, 59 (2010), pp. 615–622.
- [2] Colombo A. and Jeffrey M.R. *Nondeterministic chaos, and the two-fold singularity in piecewise smooth flows*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 10 (2011), pp. 423–451.
- [3] di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R. and Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer, (2008).
- [4] Filippov A.F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).
- [5] Jeffrey M.R. and Colombo A. *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 8 (2009), pp. 624–640.
- [6] Kuznetsov Y.A., Rinaldi S., Gragnani A. *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 13(8), 2157–2188, (2003).
- [7] Teixeira M.A. *Stability conditions for discontinuous vector fields*. J. of Differential Equations, 88 (1990), pp. 15–29.
- [8] Teixeira M.A. *Generic bifurcation of sliding vector fields*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 176 (1993), pp. 436–457.
- [9] Castillo J. *The pseudo-Hopf bifurcation and derived attractors in 3D Filippov linear systems with a Teixeira singularity*. Chaos, 30 (2020), Art. 113101.
- [10] Cristiano R., Pagano D.J., Freire E. and Ponce E. *Revisiting the Teixeira Singularity Bifurcation Analysis: Application to the Control of Power Converters*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 28(9), 1850106 (2018).
- [11] Castillo J. and Verduzco F. *Pseudo-Bautin bifurcation in 3D Filippov systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 32 (2022), Art. 2250120.
- [12] Islas J.M., Castillo J., Aguirre-Hernandez B. and Verduzco F. *Pseudo-Hopf bifurcation for a class of 3D Filippov linear systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 31 (2021), Art. 2150025.

- [13] Cristiano R., Pagano D.J., Benadero L. and Ponce E. *Bifurcation Analysis of a DC–DC Bidirectional Power Converter Operating with Constant Power Loads*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 26 (2016), 1630010 (18 pages).
- [14] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd edition, Texts in Applied Mathematics, Vol. 7, Springer–Verlag, New York, (2001).
- [15] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2nd edition, Texts in Applied Mathematics, Vol. 2, Springer–Verlag, New York, (2003).
- [16] Kuznetsov Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3rd edition, Applied Mathematical Sciences, Vol. 112, Springer, New York, (2004).
- [17] Marsden J.E. and Tromba A.J. *Vector Calculus*. 6th edition, W.H. Freeman and Company, New York, (2013).
- [18] Cox D., Little J. and O’Shea D. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. 5th edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, (2025).
- [19] Castillo J., Llibre J. and Verduzco F. *The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems*. Nonlinear Dynamics, 90 (2017), pp. 1829–1840.