



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Análisis de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Juana Vicente Santiago

Director de tesis: Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro

Hermosillo, Sonora, México

30 de Abril de 2015

Sinodales

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

Dr. Fernando Verduzco González
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

M. C. Horacio Leyva Castellanos
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora.

Dedicatoria

A mi Madre
Sra. María Juana Santiago Guadalupe

A la memoria de mi Padre
Sr. Herculano Vicente Jacinta

A mis hermanos

A Dios

Agradecimientos

Gracias a Dios por todas las bendiciones recibidas hasta hoy, en especial, por haberme brindado la oportunidad de estudiar esta licenciatura. Gracias Señor, por las personas que has puesto en mi camino, y porque es gracias a ti que he logrado esto.

Agradecer a mi familia, fuente de apoyo incondicional en toda mi vida, y más aún, en mis años de carrera profesional. En especial, mi más grande agradecimiento y admiración a mi madre, Juanita, quien es el pilar principal en mi vida, y de quien sus palabras me sirvieron como fuerza para seguir adelante. A mi padre, Herculano, de quien su ausencia física no fue impedimento para sentirme protegida. A mis hermanos, Lupita, Santiago, José, Maximino y Luis por sus consejos y tiempo en mensajes de apoyo. A mis sobrinos y ahijada, por esas sonrisas tan tiernas. A mis tios y primos.

A mis compañeros en la licenciatura, pero sobre todo a aquellos quienes se convirtieron en más que compañeros, amigos. Betti, Yessi, Anel, Ubaldo y Armando, gracias por su apoyo, y por esos momentos tan agradables que compartimos. A todos los maestros, compañeros y amigos que han sido parte de mi formación académica y personal.

Agradecer también a mi asesor de tesis, Dr. Francisco A. Carrillo N. por todo su apoyo, sus conocimientos, y tiempo invertido. A Dr. Fernando Verduzco González, Dr. Daniel Olmos Liceaga, M. C. Horacio Leyva Castellanos, quienes formaron parte del comité revisor de mi tesis, gracias por sus correcciones y observaciones.

Por tanto apoyo recibido, a mi padrino, Ing. Jorge H. Meza. Bendiciones a él, a su familia, y a quienes a pesar de la distancia, sus acciones y frases fueron ejemplo de motivación y superación. A todas las personas que han formado parte de mi vida, gracias!.

*Juanita Vicente Santiago.
“El tiempo de Dios es perfecto” S. N.*

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares Matemáticos	1
1.1. Técnicas de simplificación	1
1.2. Teoría de la Variedad Central	1
1.3. Teoría de Formas Normales	5
2. La Bifurcación de Hopf	9
2.1. Bifurcación de Hopf	10
2.2. Teorema de la Bifurcación de Hopf	10
3. La Bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3	17
3.1. Planteamiento del problema	17
3.2. Dinámica sobre la variedad central	17
4. Coeficientes de Estabilidad	29
4.1. Equivalencia Topológica entre la dinámica sobre la variedad central y la deformación versal de la Bifurcación de Hopf . . .	29
4.2. Teorema Principal	47
5. Aplicación: Una reacción química	49
Conclusiones	57
Apéndice	59
Bibliografía	62

Introducción

El comportamiento dinámico de muchos procesos físicos o de la ingeniería de sistemas viene modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales. En general estas ecuaciones son no lineales y, además, dependen de ciertos parámetros. La elección de los valores concretos de los parámetros del sistema determina los posibles estados de equilibrio del mismo y su modo de respuesta dinámica ante las pequeñas perturbaciones de cada estado de equilibrio. Al evolucionar con continuidad los valores de los parámetros, los posibles estados de equilibrio van cambiando, de manera que pueden surgir algunos nuevos equilibrios, desaparecer otros o simplemente cambiar sus propiedades.

El término bifurcación de Hopf (también llamado a veces bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf) se refiere al nacimiento local o muerte de una solución periódica de un equilibrio cuando un parámetro cruza un valor crítico. En una ecuación diferencial de una bifurcación de Hopf se produce normalmente cuando un par complejo conjugado de valores propios del flujo en un punto fijo se convierte puramente imaginario. Esto implica que una bifurcación de Hopf sólo puede ocurrir en los sistemas de dimensión dos o superior.

La bifurcación de Hopf subyace en muchas oscilaciones “espontáneas”, como oscilaciones inducidas por el viento (por ejemplo, los que causaron el colapso del puente Tacoma-Narrows), en los sistemas de ingeniería estructural, desprendimiento de vórtices en el flujo de fluido alrededor de un cuerpo sólido a velocidad de la corriente suficientemente alta, las oscilaciones de LCR en los circuitos eléctricos, el disparo periódico de las neuronas en los sistemas nerviosos (por ejemplo, en la ecuación de Fitzhugh-Nagumo se modelan estos fenómenos), las oscilaciones en las reacciones químicas autocatalíticas (por ejemplo, la reacción de Belousov-Zhabotinsky), las oscilaciones en las poblaciones de peces (como se describe en los modelos depredador-presa), fluctuaciones periódicas en el número de individuos que sufren de una enfermedad infecciosa (tal como se describe por los modelos epidémicos), etc.

En este trabajo hacemos un análisis sobre la bifurcación de Hopf en sistemas no lineales de dimensión tres.

El objetivo principal que nos trazamos es, dado un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ y $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, $r \geq 3$, encontrar dadas las condiciones para que el sistema experimente la bifurcación de Hopf, una reformulación a los coeficientes de estabilidad conocidos como la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov.

Con dicho objetivo, empezamos nuestro análisis en el capítulo uno, en el cual, retomamos conceptos que nos ayudarán en el desarrollo tales como: “Teoría de la Variedad Central” y “Teoría de Formas Normales”.

En el capítulo dos utilizamos la teoría de la Bifurcación de Hopf, donde se abordan los conceptos que nos ayudarán en nuestro análisis tales como la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov, los cuales nos darán pie a determinar las características de la bifurcación dado un sistema no lineal.

En el capítulo tres nos planteamos el problema

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ y $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, $r \geq 3$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ tal que cumple con las condiciones de no hiperbolicidad

H1) $f(x_0, \mu_0) = 0$.

H2) $Df(x_0, \mu_0) \sim J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ y $Re(\lambda) \neq 0$, es decir, $\sigma[Df(x_0, \mu_0)] = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda_{1,2} = \pm i\omega, Re(\lambda_3) \neq 0\}$.

La metodología para la resolución del problema es, teniendo cumplidas las condiciones de no hiperbolicidad H1), H2), encontrar la dinámica sobre la variedad central de tal forma que éste sea topológicamente equivalente a la forma normal (o deformación versal) de la bifurcación de Hopf en una ϵ -vecindad de x_0 para $\mu \approx \mu_0$.

En el capítulo cuatro teniendo ya la dinámica sobre la variedad central, y más aún, la variedad central, nos basamos de [8] para encontrar los coeficientes de estabilidad (velocidad de cruce y primer coeficiente de Lyapunov) que nos determinarán si existe bifurcación y cual es la estabilidad del ciclo límite de esta bifurcación.

En el capítulo cinco se abordó un problema de aplicación sobre una reacción química donde se usan las nuevas reformulaciones para los coeficientes de estabilidad, usando el software científico maple 18 para obtener las simulaciones de los retratos fase de dicha reacción química.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

En este capítulo, se verán algunos conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo. Basado en [3, 2, 6].

1.1. Técnicas de simplificación

La teoría de la variedad central y teoría de formas normales nos permiten determinar el comportamiento dinámico de las soluciones en una vecindad de un punto de equilibrio no hiperbólico.

El teorema de la variedad central proporciona un medio para reducir la dimensión del espacio de estados proyectando la dinámica sobre una variedad adecuada llamada “variedad central” y que se corresponde con los valores propios con parte real nula.

El cálculo de formas normales permite simplificar los términos no lineales presentes en el sistema, de forma que el nuevo sistema mantiene sólo aquellos términos que son fundamentales para determinar la dinámica del sistema.

1.2. Teoría de la Variedad Central

La teoría de la variedad central se lleva a cabo en campos vectoriales y campos vectoriales parametrizados.

1.2.1. Campos Vectoriales

Considere el sistema no lineal

$$\dot{w} = X(w), \tag{1.1}$$

donde $w \in \mathbb{R}^n$ y X es un campo vectorial suave.

Capítulo 1

Supóngase que $X(0) = 0$ y que $DX(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donde A es una matriz $k \times k$ con valores propios con parte real cero y B una matriz $(n-k) \times (n-k)$ con valores propios con parte real negativa.

Luego, de manera natural podemos hacer

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con $x \in \mathbb{R}^k$ y $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, obteniendo la siguiente representación para el sistema (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ y $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$, $f, g \in \mathcal{C}^r$, con $r \geq 2$.

Definición 1.2.1. Una variedad invariante será llamada variedad central para el sistema (1.2) si puede ser representado, de manera local, como sigue

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

para δ lo suficientemente pequeña.

Observación 1.2.1. El hecho de que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ nos garantiza que la variedad central $W_{loc}^c(0)$ es tangente al eigenespacio central E^c en el origen.

Los siguientes tres teoremas, están demostrados en [7]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

Teorema 1.2.1. Existe una \mathcal{C}^r variedad central para el sistema (1.2). La dinámica del sistema (1.2), restringida a la variedad central, está dada, para u suficientemente pequeña, por el siguiente k -dimensional sistema

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \tag{1.3}$$

con $u \in \mathbb{R}^k$.

El siguiente resultado establece que la dinámica de (1.3) cerca de $u = 0$, determina la dinámica de (1.2) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 1.2.2. (i) Suponga que $u = 0$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable)(inestable)del sistema (1.3), entonces $(x, y) = (0, 0)$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.2).

(ii) Suponga que el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ del sistema (1.2) es estable. Entonces, si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.1) con $(x(0), y(0))$ lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución $u(t)$ de (1.3) tal que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

Observación 1.2.2. *Lo que nos dice el teorema anterior es que la solución $u(t)$ del sistema (1.3), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.2), sobre el eigenespacio $E^c \cong \mathbb{R}^k$. Ver figura (1.1)*

El último teorema proporciona un método para aproximar la función $h(x)$, cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciarlo, encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya incógnita es justamente nuestra función $h(x)$.

Sea $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c(0)$, luego, se cumple que, $y(t) = h(x(t))$, y derivando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (1.4)$$

Pero todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (1.2), por lo tanto, la ecuación (1.4) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$N(h(x)) \equiv Dh(x)(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (1.5)$$

Luego, nuestro problema es encontrar $h(x)$ tal que satisfaga (1.5). La solución en derivadas parciales es un problema más complejo que resolver el sistema (1.2), sin embargo, el siguiente teorema nos permitirá aproximar la solución de (1.5) con el grado de precisión que se desee.

Teorema 1.2.3. *Sea $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de clase C^1 , con $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ tal que $N(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces*

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \quad \text{cuando } x \rightarrow 0.$$

1.2.2. Campos Vectoriales parametrizados

Considere el sistema parametrizado no lineal, escrito en su forma de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (1.6)$$

con $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^p$, donde A posee valores propios con parte real cero y B posee valores propios con parte real negativa, con $f(0) = Df(0) = 0$ y $g(0) = Dg(0) = 0$.

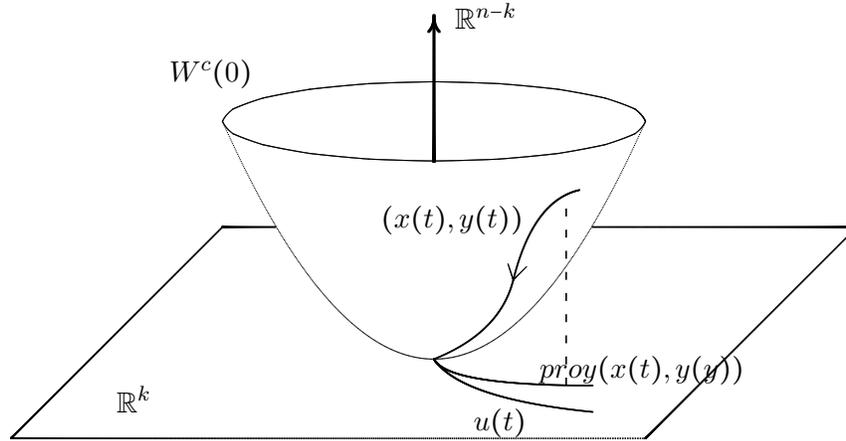


Figura 1.1: 1: Esquematzación gráfica del Teorema 1.1.2

Supongamos por un momento que $\mu \in \mathbb{R}^p$ es un vector de estados, entonces podemos reescribir (1.6) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned} \tag{1.7}$$

llamado el *sistema suspendido*, que a su vez lo reescribimos como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = By + g(x, y, \mu).$$

Tenemos entonces un eigenspacio central de dimensión $k + p$, por lo que existe una función $y = h(x, \mu)$ cuya gráfica es la variedad central, localmente alrededor del origen $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$, del sistema (1.7). Luego, la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, h(x, \mu), \mu) \\ \dot{\mu} &= 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

y la ecuación para determinar $h(x, \mu)$ es

$$N(h(x, \mu)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, \mu)(Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x, \mu) - g(x, h(x, \mu), \mu) \equiv 0. \tag{1.9}$$

1.3. Teoría de Formas Normales

La teoría de formas normales consiste en, dado un sistema no lineal

$$\dot{x} = X(x),$$

con $X(0) = 0$, buscar un cambio de coordenadas $x = y + h(y)$ tal que el sistema en las nuevas coordenadas tenga la expresión “más simple posible”.

Supongamos que el campo X ha sido desarrollado en serie de Taylor alrededor del equilibrio $x = 0$, y que, además, su parte lineal se encuentra en forma de Jordan

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots, \quad (1.10)$$

donde $F_r : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r . Supongamos que el campo cuenta con términos de grado r en adelante, esto es

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots \quad (1.11)$$

Consideramos el cambio de coordenadas cercano a la identidad

$$x = y + h_r(y), \quad (1.12)$$

donde $h_r : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r . La idea aquí es encontrar h_r tal que el sistema (1.11) en las nuevas coordenadas no posea términos de grado r .

Derivando (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y))\dot{y}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

pero $I + Dh_r(y)$ es una matriz cercana a la identidad, invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots,$$

luego, de (1.13) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1}\dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots), \end{aligned}$$

pero $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \dots$, luego entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(J(y + h_r(y)) + F_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1})) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy + \mathcal{O}(|y|^{r+1})) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}), \end{aligned}$$

donde $\tilde{F}_r(y) = F_r(y) - (Dh_r(y)Jy - Jh_r(y))$.

Capítulo 1

Observación 1.3.1. *Observe que si el campo vectorial X posee términos no lineales a partir de orden r , entonces el cambio de coordenadas $x = y + h_r(y)$ produce un nuevo campo vectorial también con términos no lineales a partir de orden r .*

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$.

Considerese el espacio vectorial H^r de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , y sea $L_J : H^r \rightarrow H^r$ el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y),$$

tal operación se conoce como el paréntesis de Lie entre los campos vectoriales Jy y $h_r(y)$.

Basta probar que L_J es invertible, ya que $\tilde{F}_r = 0 \Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$. Ahora bien, L_J será invertible si y sólo si todos sus valores propios son diferentes de cero. Calculemos entonces sus valores propios.

Supongamos que J posee n valores propios reales diferentes λ_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, y como está en forma de Jordan, entonces es diagonal, y además sus vectores propios son los elementos de la base canónica en \mathbb{R}^n , e_i , para $i = 1, \dots, n$.

Regresemos ahora al espacio vectorial H^r y tratemos de ubicar su base canónica. Por ejemplo, para $r = 2$ y $n = 2$, la base canónica posee seis elementos

$$\beta_{H^2} = \left\{ \left(\begin{array}{c} y_1^2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} y_1 y_2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} y_2^2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ y_1^2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ y_1 y_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ y_2^2 \end{array} \right) \right\}.$$

Si definimos $y^m = y_1^{m_1} y_2^{m_2}$, con $m_1 + m_2 = 2$ y $m_i \geq 0$, entonces

$$\beta_{H^2} = y^m e_i | m_1 + m_2 = 2, i = 1, 2.$$

En general, si $y^m = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$, con $\sum_{j=1}^n m_j = r$ y $m_j \geq 0$, entonces la base canónica en H^r está dada por

$$\beta_{H^r} = \left\{ y^m e_i \mid \sum_{j=1}^n m_j = r, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Ahora bien,

$$L_J(y^m e_i) = D(y^m e_i)Jy - J(y^m e_i),$$

pero

$$D(y^m e_i) = D \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \frac{m_1}{y_1} y^m & \frac{m_2}{y_2} y^m & \dots & \frac{m_n}{y_n} y^m \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

y $Jy = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$D(y^m e_i) Jy = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1 \lambda_1 y^m + \dots + m_n \lambda_n y^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (m \cdot \lambda) y^m e_i,$$

donde $m = (m_1, \dots, m_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} L_J(y^m e_i) &= D(y^m e_i) Jy - J(y^m e_i) \\ &= (m \cdot \lambda) y^m e_i - \lambda_i y^m e_i \\ &= (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i, \end{aligned}$$

es decir, $y^m e_i$ es un vector propio de L_J con valor propio

$$\Lambda_{m,i} = (m \cdot \lambda) - \lambda_i. \quad (1.14)$$

Luego, L_J será invertible si y sólo si $\Lambda_{m,i} \neq 0$ para toda m y toda $i = 1, \dots, n$. Esto nos lleva al siguiente concepto.

Definición 1.3.1. Diremos que la n -tupla de valores propios $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es resonante de orden r si es posible encontrar una relación entera de la forma

$$\lambda_i = \sum_{j=i}^n m_j \lambda_j,$$

para algún m con $\sum_{j=1}^n m_j = r$, y alguna $i = 1, \dots, n$.

Observación 1.3.2. Puede probarse que la expresión (1.14) también es válida para el caso en que J no es diagonal.

Tenemos entonces probado el teorema de linealización de Poincaré.

Capítulo 1

Teorema 1.3.1. (Poincaré) *Si los valores propios de la matriz J son no resonantes, entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = Jx + \dots, \quad (1.15)$$

puede ser reducido al sistema lineal

$$\dot{y} = Jy,$$

por un cambio formal de coordenadas $x = y + \dots$

Veamos como determinar h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$, es decir, determinar h_r tal que $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$. Expresemos h_r y F_r en términos de los vectores canónicos de H^r ,

$$\begin{aligned} h_r(y) &= \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \\ F_r(y) &= \sum_{m,i} F_{m,i} y^m e_i, \end{aligned}$$

con $\sum_{j=1}^n m_j = r$, luego,

$$\begin{aligned} L_J(h_r(y)) &= L_J \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \\ &= \sum_{m,i} L_J(y^m e_i) \\ &= \sum_{m,i} (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i. \end{aligned}$$

Ahora bien, $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$ si y sólo si

$$h_{m,i} = \frac{F_{m,i}}{m \cdot \lambda - \lambda_i}. \quad (1.16)$$

Como los valores propios de J son no resonantes, la expresión anterior siempre tiene sentido.

Teorema 1.3.2. (Teorema de Poincaré -Dulac) *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = X(x), \quad (1.17)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $X(0) = 0$ y X un campo vectorial suave. Existe una transformación polinomial $x = y + h(y)$, tal que transforma el sistema (1.17) en

$$\dot{y} = Jy + \sum_{r=2}^N \alpha w_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{N+1}), \quad (1.18)$$

donde todos los monomios en $w_r(y)$ son resonantes.

El lado derecho en (1.18) es llamado la forma normal del campo X .

Capítulo 2

La Bifurcación de Hopf

En las dinámicas de los campos vectoriales sobre la recta real todas las soluciones tienden a un punto fijo o se van a $\pm\infty$. Este comportamiento es algo trivial y nos hace preguntarnos, ¿qué pasaría si el sistema dependiera de parámetros? Uno podría pensar que habría algún cambio en el comportamiento del flujo y efectivamente, la estructura cualitativa de éste puede cambiar al variar los parámetros ocasionando que puntos fijos puedan ser creados, destruidos o con un cambio en su estabilidad. Estos cambios cualitativos en las dinámicas son llamadas *bifurcaciones* y los valores de los parámetros en los cuales ocurren son llamados *valores de bifurcación*.

Definición 2.0.2. *Un punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$ de una familia uni-paramétrica de campos vectoriales uni-dimensionales se dice que experimenta una bifurcación en $\mu = 0$ si el flujo para μ y x cerca de cero no es cualitativamente el mismo que el flujo cerca de $x = 0$ en $\mu = 0$.*

Observación 2.0.3. *La condición de que el punto fijo sea no hiperbólico, es decir, que $Df(x_0, \mu_0)$ tenga algún valor propio sobre el eje imaginario, es necesaria pero no es suficiente para que la bifurcación ocurra en una familia uni-paramétrica de campos vectoriales.*

La codimensión de una bifurcación es la dimensión más pequeña del espacio de parámetros, los cuales contienen a la bifurcación. Las siguientes son las bifurcaciones más simples y son representadas por las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales que dependen todas sobre un parámetro real μ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 && \text{(silla-nodo),} \\ \dot{x} &= \mu x - x^2 && \text{(transcrítica),} \\ \dot{x} &= \mu x - x^3 && \text{(tenedor),} \\ \begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{cases} &&& \text{(Hopf).} \end{aligned}$$

2.1. Bifurcación de Hopf

Supongamos que un sistema bidimensional tiene un punto fijo estable y queremos saber cuáles son las posibles formas en las que éste puede perder su estabilidad al variar un cierto parámetro μ . Aquí los valores propios de la Jacobiana serán la clave. Si el punto fijo es estable, los valores propios λ_1, λ_2 deben estar en el semiplano $Re\lambda < 0$ ya que ambos valores propios satisfacen una ecuación cuadrática con coeficientes reales, tenemos dos posibles escenarios: que los valores propios sean reales y negativos (figura 2.1a) o que sean complejos conjugados (figura 2.1b). Para desestabilizar al punto fijo, necesitamos que uno o ambos valores propios crucen al semiplano $Re\lambda > 0$ al variar μ .

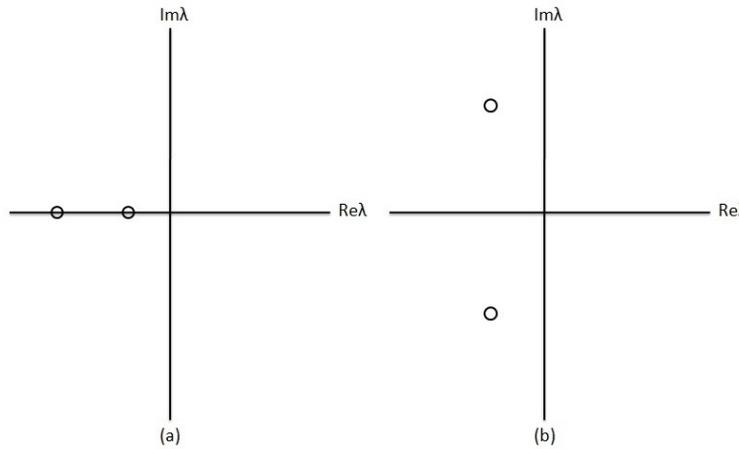


Figura 2.1: Posibles escenarios para λ_1 y λ_2 .

A continuación presentaremos el teorema de la bifurcación de Hopf considerando el escenario en el que dos eigenvalores complejos conjugados cruzan al semiplano $Re\lambda > 0$ al variar el parámetro μ .

El teorema de la Variedad Central, introducido anteriormente, nos ayudará a entender de mejor forma el siguiente teorema.

2.2. Teorema de la Bifurcación de Hopf

Consideremos aquí un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{2.1}$$

con $\mu = \mu_0$ y un punto fijo $x = x_0$, en el cual $Df(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios puramente imaginarios, $\pm i\omega$, con $\omega > 0$ y ningún otro valor propio con parte real cero.

El teorema de la función implícita garantiza (ya que $Df(x_0, \mu_0)$ es invertible) que para cada μ cerca de μ_0 existirá un punto de equilibrio $p(\mu)$ cerca de x_0 el cual varía suavemente con μ . No obstante las dimensiones de las variedades estable e inestable en $p(\mu)$ cambia si los valores propios de $Df(p(\mu))$ cruzan el eje imaginario en μ_0 . Este cambio cualitativo en el flujo local cerca de $p(\mu)$ se debe marcar por algunos otros cambios locales en los retratos fase que no implican puntos fijos.

Una pista de qué sucede en el problema genérico de la bifurcación que implica un equilibrio con valores propios imaginarios puros se puede obtener de examinar los sistemas lineales en los cuales hay un cambio de este tipo. Por ejemplo, considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y,\end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Cuando $\mu < 0$, las soluciones espirales convergen al origen, y cuando $\mu > 0$ las soluciones espirales se alejan del origen. Cuando $\mu = 0$, todas las soluciones son periódicas. Incluso en una familia uni-paramétrica de ecuaciones, es frecuente encontrar un valor del parámetro en el cual haya una familia completa de órbitas periódicas, más aún, hay una superficie de órbitas periódicas que aparece en el problema genérico (2.1).

Tomando el problema genérico dado por el sistema (2.1), donde la matriz de la parte lineal del campo vectorial $f(x, \mu)$ tiene como valores propios a $\lambda = \alpha(\mu) \pm \beta(\mu)i$, con $\alpha(\mu) = d\mu + \mathcal{O}(\mu^2)$ y $\beta(\mu) = c\mu + \omega + \mathcal{O}(\mu^2)$, siendo c , d y ω constantes. Mediante cambios de coordenadas suaves, la serie de Taylor de grado 3 (tomando $k = 1$) para el problema general puede ser trasladado a la forma (ver apéndice):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + l_1(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ \dot{y} &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + l_1(x^2 + y^2))y,\end{aligned}\tag{2.2}$$

la cual puede ser expresada en coordenadas polares haciendo

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Derivando la primera expresión

$$\begin{aligned}r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x[(d\mu + l_1(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y] \\ &\quad + y[(\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + l_1(x^2 + y^2))y] \\ &= d\mu r^2 + r^2 [x(l_1x - by) + y(bx) + l_1y] \\ &= r^2(d\mu + l_1r^2).\end{aligned}$$

Capítulo 2

Entonces

$$\dot{r} = (d\mu + l_1 r^2)r.$$

Ahora, derivando la segunda expresión

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} \\ (1 + \tan^2 \theta) \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} \\ \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} \\ r^2 \dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\ &= x[(\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + l_1(x^2 + y^2))y] \\ &\quad - y[(d\mu + l_1(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y] \\ &= (\omega + c\mu)r^2 + r^2[x(bx + l_1y) - y(l_1x - by)] \\ &= (\omega + c\mu)r^2 + r^2(br^2) \\ &= r^2(\omega + c\mu + br^2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2.$$

Así, nuestro sistema en coordenadas polares queda como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Deseamos bosquejar el retrato fase en una vecindad del origen. Si $\mu = 0$ y $l_1 \neq 0$ entonces

$$\dot{r} = (l_1 r^2)r = l_1 r^3.$$

En esta situación, si $l_1 > 0$ entonces $\dot{r} > 0$ y tenemos espirales que se alejan del origen, es decir, tenemos un foco inestable. Si $l_1 < 0$, entonces $\dot{r} < 0$ y lo que obtenemos son espirales que convergen al origen, es decir, un foco estable.

Ahora, para μ suficientemente pequeña en \dot{r} de (2.3) tenemos que $\dot{r} = 0$ si y sólo si $r = 0$ o $d\mu + l_1 r^2 = 0$ (lo cual representa una órbita periódica). Determinemos cuándo nace esta órbita periódica.

Tenemos que

$$r^2 = -\frac{d\mu}{l_1},$$

entonces

$$r = \sqrt{-\frac{d\mu}{l_1}} \text{ si } \frac{d\mu}{l_1} < 0.$$

Supongamos que $\frac{d}{dt} \mu > 0$, entonces si $\mu < 0$ se cumple que $\frac{d\mu}{l_1} < 0$, es decir, existe una órbita periódica, y si $\mu > 0$ entonces no existe órbita periódica.

De manera similar, supongamos ahora que $\frac{d}{l_1} < 0$ entonces si $\mu > 0$ se cumple que $\frac{d\mu}{l_1} < 0$, es decir existe una órbita periódica, y si $\mu < 0$ entonces no existe órbita periódica.

De esta forma vemos que tenemos los siguientes casos

1. $l_1 < 0$ y $d > 0$
2. $l_1 < 0$ y $d < 0$
3. $l_1 > 0$ y $d > 0$
4. $l_1 > 0$ y $d < 0$.

Analicemos el primer caso:

Para $\mu = 0$, el origen es un foco estable.

Si $\mu < 0$, entonces $\dot{r} = (d\mu + l_1 r^2)r < 0$ y por lo tanto el origen es un foco estable.

Si $\mu > 0$, sabemos que existe la órbita periódica $r = r_0 = \sqrt{-\frac{d\mu}{l_1}}$.

Consideremos la solución que inicia con la condición inicial (θ_1, r_1) en el interior de la órbita periódica, es decir, con $0 < r_1 < r_0$. Entonces

$$\begin{aligned} r_1^2 &< r_0^2 = -\frac{d\mu}{l_1} \\ r_1^2 &< -\frac{d\mu}{l_1} \\ d\mu + l_1 r_1^2 &> 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{r}|_{(\theta_1, r_1)} = (d\mu + l_1 r^2) > 0,$$

entonces el origen es un foco inestable. Consideremos ahora una condición inicial (θ_2, r_2) , exterior a la órbita periódica, es decir, con $r_2 > r_0 > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} r_2^2 &> r_0^2 = -\frac{d\mu}{l_1} \\ r_2^2 &> -\frac{d\mu}{l_1} \\ d\mu + l_1 r_1^2 &< 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{r}|_{(\theta_2, r_2)} = (d\mu + l_1 r^2) < 0,$$

entonces las soluciones se acercan a la órbita periódica.

Concluimos entonces que $r = r_0$ es una órbita periódica atractora (figura 2.2).

Para los otros casos se realiza un procedimiento similar.

Capítulo 2

El teorema de la bifurcación de Hopf establece que las propiedades cualitativas de (2.2) cerca del origen permanecen sin cambio si se agregan los términos de orden superior al sistema.

Teorema 2.2.1. (Teorema de la Bifurcación de Hopf)

Supongamos que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, tiene un punto de equilibrio (x_0, μ_0) tal que

(H1) $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero.

(H2) Sean $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ los valores propios de $D_x f(x_0, \mu)$ los cuales son imaginarios en $\mu = \mu_0$, tales que

$$d = \frac{d}{d\mu} (\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0.$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave para el cual la expansión de Taylor de grado tres sobre la variedad central, en coordenadas polares, es dada por:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2.\end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$, entonces existe una superficie de soluciones periódicas en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el eigenspacio de $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ que coincide en dimensión dos con el paraboloido $\mu = -\frac{l_1}{d}r^2$. Si $l_1 < 0$, entonces esas soluciones periódicas son estables, mientras que si $l_1 > 0$ son ciclos límite inestables.

Observación 2.2.1. Si $l_1 < 0$, se dice que la bifurcación de Hopf es supercrítica, mientras que si $l_1 > 0$, se dice que la bifurcación de Hopf es subcrítica. Los coeficientes de estabilidad d y l_1 son llamados velocidad de cruce y primer coeficiente de Lyapunov, respectivamente.

Observación 2.2.2. La dirección hacia donde abre la superficie de soluciones periódicas en la variedad central nos la proporciona el signo del producto $d \cdot l_1$. Si $d \cdot l_1 > 0$ abre hacia la izquierda del valor de la bifurcación, si $d \cdot l_1 < 0$ abre hacia la derecha del valor de la bifurcación.

Observación 2.2.3. Existen cuatro diferentes direcciones para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf que dependen de los signos de d y l_1 . Ver figura 2.3.

Una de estas direcciones esta representada en figura 2.4.

De figura 2.3, observamos
Si $d > 0$, $l_1 < 0$. El origen es estable para $\mu < 0$, inestable para $\mu > 0$ y

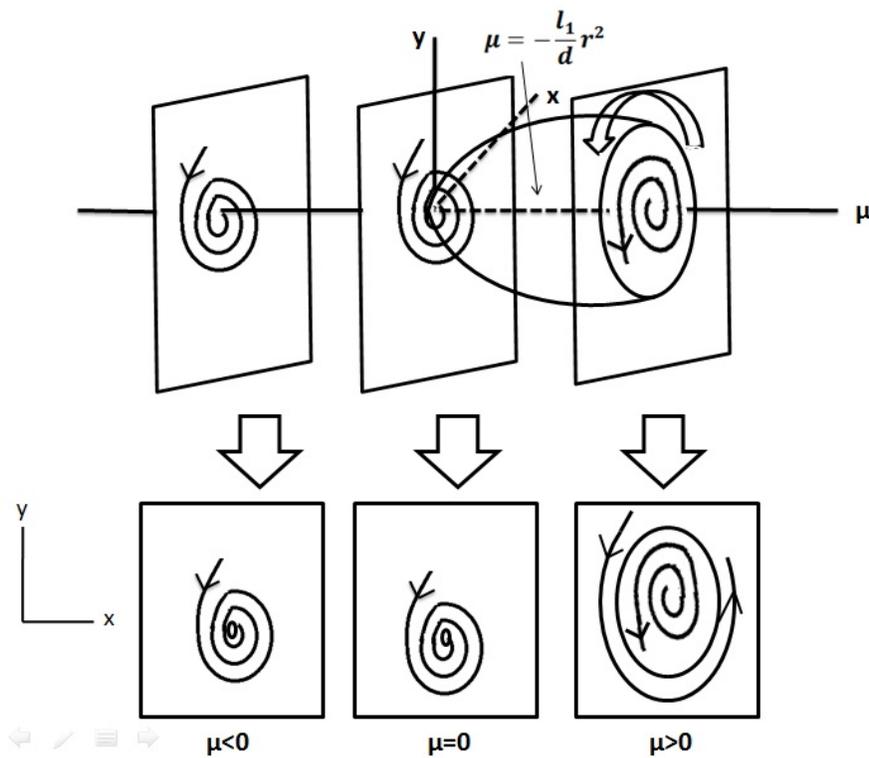


Figura 2.2: Caso $l_1 < 0$ y $d > 0$.

rodeado por una órbita periódica para $\mu > 0$.

Si $d < 0$, $l_1 < 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$, y estable para $\mu > 0$. El origen es rodeado por una órbita periódica para $\mu < 0$.

Si $d > 0$, $l_1 > 0$. El origen es estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. Además, el origen es rodeado por una órbita periódica para $\mu < 0$.

Si $d < 0$, $l_1 > 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$, estable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica para $\mu > 0$.

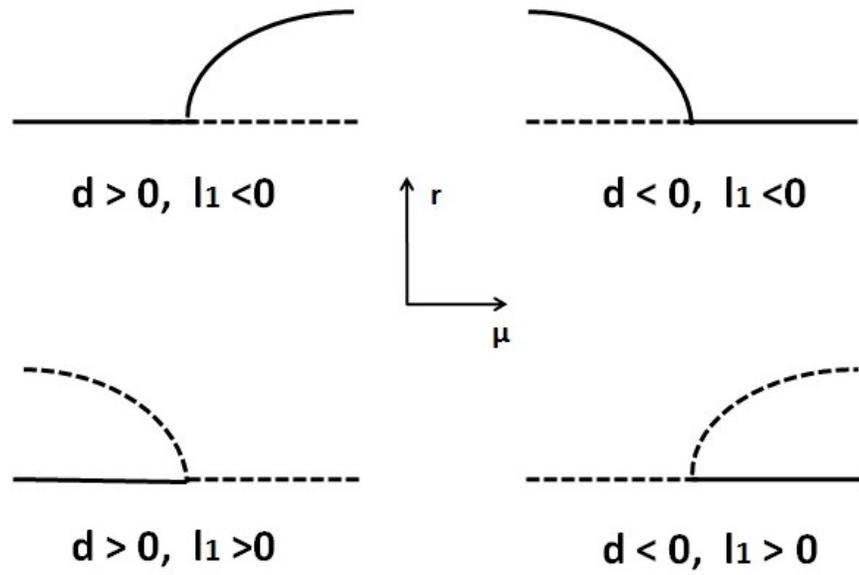


Figura 2.3: Direcciones y estabilidades de la bifurcación de Hopf.

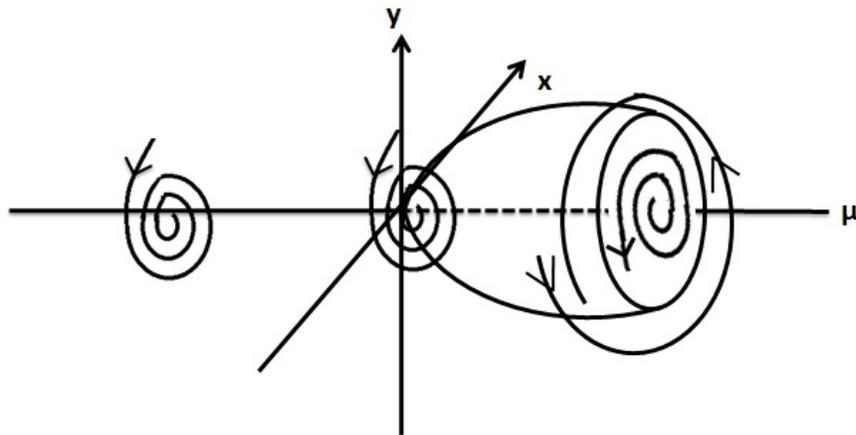


Figura 2.4: Familia uni-paramétrica de órbitas periódicas S resultantes de la bifurcación de Hopf, en un punto de equilibrio no hiperbólico x_0 y un valor de bifurcación $\mu = \mu_0$.

Capítulo 3

La Bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3

3.1. Planteamiento del problema

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ y $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, $r \geq 3$.

Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ tal que cumple con las condiciones de no hiperbolicidad

$$\text{H1)} \quad f(x_0, \mu_0) = 0.$$

$$\text{H2)} \quad Df(x_0, \mu_0) \sim J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ donde } J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \text{Re}(\lambda) \neq 0, \text{ es} \\ \text{decir, } \sigma[Df(x_0, \mu_0)] = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda_{1,2} = \pm i\omega, \text{Re}(\lambda_3) \neq 0\}.$$

Nuestro objetivo es dar las condiciones suficientes para que el sistema (3.1) experimente la bifurcación de Hopf en m parámetros, y en base a esto, ofrecer una reformulación para los coeficientes de estabilidad d y l_1 .

La idea es obtener el sistema donde se dé la dinámica sobre la variedad central y a partir de dicha dinámica compararla topológicamente con la forma normal de la bifurcación de Hopf, tomando como referencia [8], para obtener nuevas fórmulas para la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov.

3.2. Dinámica sobre la variedad central

Usaremos la teoría de la variedad central para encontrar la dinámica sobre la variedad central.

Sea (x_0, μ_0) el punto de equilibrio del sistema (3.1). Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio, analicemos la parte lineal del campo,

para eso hacemos el sistema (3.1) en su forma de Jordan, trasladando al mismo tiempo el punto de equilibrio al origen para facilitar los cálculos.

3.2.1. Forma de Jordan

Consideremos la serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio (x_0, μ_0) para el campo vectorial $f(x, \mu)$ en (3.1)

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= f(x_0, \mu_0) + Df(x_0, \mu_0)(x - x_0) + D_\mu f(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} D^2 f(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} D_\mu^2 f(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, \mu - \mu_0) + \frac{1}{6} D^3 f(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0, x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{6} D_{\mu}^3 f(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, \mu - \mu_0, \mu - \mu_0) + \dots \end{aligned}$$

De H2), tenemos que $Df(x_0, \mu_0)$ es similar a la matriz $J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Llamémosle A a $Df(x_0, \mu_0)$, es decir, $A = Df(x_0, \mu_0)$.

Dado que A es similar a J , esto quiere decir que cuentan con los mismos valores propios.

Sean p_1, p_2 vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 0$ y sea p_3 el vector propio asociado al valor propio λ_3 , es decir, tenemos que: $v = p_2 + ip_1$ tal que $[Df(x_0, \mu_0) - i\omega I]v = 0$ y p_3 tal que $[Df(x_0, \mu_0) - \lambda_3 I]p_3 = 0$.

Hagamos

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

a la matriz que contiene los vectores propios derechos asociados a los valores propios de la matriz A .

Teniendo en cuenta

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

podemos enunciar el siguiente

Lema 3.2.1. Sea P dado por (3.2), si $P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{pmatrix}$, donde $q_i \in \mathbb{R}^3$, con $i =$

$1, 2, 3$, entonces $\nu = q_1 + iq_2 \in \mathbb{R}^3$ es un vector propio izquierdo de $Df(x_0, \mu_0)$ asociado al valor propio $\lambda_1 = i\omega$, esto es que $\nu^T Df(x_0, \mu_0) = i\omega \nu^T$, además q_3^T es un vector propio izquierdo de $Df(x_0, \mu_0)$ asociado al valor propio λ_3 , esto es $q_3^T Df(x_0, \mu_0) = \lambda_3 q_3^T$.

Demostración. Obsérvenos que

$$\begin{aligned} P^{-1}Df(x_0, \mu_0)P &= \begin{pmatrix} q_1^T Df(x_0, \mu_0)p_1 & q_1^T Df(x_0, \mu_0)p_2 & q_1^T Df(x_0, \mu_0)p_3 \\ q_2^T Df(x_0, \mu_0)p_1 & q_2^T Df(x_0, \mu_0)p_2 & q_2^T Df(x_0, \mu_0)p_3 \\ q_3^T Df(x_0, \mu_0)p_1 & q_3^T Df(x_0, \mu_0)p_2 & q_3^T Df(x_0, \mu_0)p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y

$$PP^{-1} = p_1q_1^T + p_2q_2^T + p_3q_3^T = I_3. \quad (3.4)$$

Multiplicamos (3.4) por la matriz $Df(x_0, \mu_0)$ y obtenemos

$$Df(x_0, \mu_0) = Df(x_0, \mu_0)p_1q_1^T + Df(x_0, \mu_0)p_2q_2^T + Df(x_0, \mu_0)p_3q_3^T. \quad (3.5)$$

De (3.3) y (3.5) se sigue que

$$\begin{aligned} q_1^T Df(x_0, \mu_0) &= q_1^T Df(x_0, \mu_0)p_1q_1^T + q_1^T Df(x_0, \mu_0)p_2q_2^T + q_1^T Df(x_0, \mu_0)p_3q_3^T = -\omega q_2^T \\ q_2^T Df(x_0, \mu_0) &= q_2^T Df(x_0, \mu_0)p_1q_1^T + q_2^T Df(x_0, \mu_0)p_2q_2^T + q_2^T Df(x_0, \mu_0)p_3q_3^T = \omega q_1^T \\ q_3^T Df(x_0, \mu_0) &= q_3^T Df(x_0, \mu_0)p_1q_1^T + q_3^T Df(x_0, \mu_0)p_2q_2^T + q_3^T Df(x_0, \mu_0)p_3q_3^T = \lambda_3 q_3^T \end{aligned}$$

Multiplicamos $q_2^T Df(x_0, \mu_0)$ por i , y tenemos $iq_2^T Df(x_0, \mu_0) = i\omega q_1^T$.

Entonces

$$\begin{aligned} (q_1 + iq_2)^T Df(x_0, \mu_0) &= -\omega q_2^T + i\omega q_1^T \\ &= i\omega(q_1^T + iq_2^T) \\ &= \lambda_1 \nu^T. \end{aligned}$$

y

$$q_3^T Df(x_0, \mu_0) = \lambda_3 q_3^T$$

□

3.2.2. Cambio de coordenadas

Usaremos un primer cambio de coordenadas para poner el campo en su forma de Jordan.

Definamos el cambio de coordenadas y de parámetros

$$y = P^{-1}(x - x_0), \quad \text{y} \quad \alpha = \mu - \mu_0,$$

Capítulo 3

entonces (3.1) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} \\ &= P^{-1}\left[Df(x_0, \mu_0)(Py) + D_\mu f(x_0, \mu_0)(\alpha) + \frac{1}{2}D^2f(x_0, \mu_0)(Py, Py) \right. \\ &\quad + D_{\mu x}f(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \frac{1}{2}D^2_\mu f(x_0, \mu_0)(\alpha, \alpha) \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}D^3f(x_0, \mu_0)(Py, Py, Py) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por lo que nos queda

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + P^{-1}D_\mu f(x_0, \mu_0)(\alpha) + \frac{1}{2}P^{-1}D^2f(x_0, \mu_0)(Py, Py) \\ &\quad + P^{-1}D_{\mu x}f(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \frac{1}{2}P^{-1}D^2_\mu f(x_0, \mu_0)(\alpha, \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{6}P^{-1}D^3f(x_0, \mu_0)(Py, Py, Py) + \dots \end{aligned}$$

Definamos

$$V = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

con $y_1 \in \mathbb{R}^2$, $y_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} V & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} W \\ q_3^T \end{pmatrix},$$

así

$$Py = \begin{pmatrix} V & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Vy_1 + p_3y_2.$$

Entonces la forma bilineal para el término $D^2f(x_0, \mu_0)(Py, Py)$ es

$$\begin{aligned} (Py, Py) &= (Vy_1 + p_3y_2, Vy_1 + p_3y_2) \\ &= (Vy_1, Vy_1) + 2(Vy_1, p_3y_2) + (p_3y_2, p_3y_2), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} D^2f(x_0, \mu_0)(Py, Py) &= D^2f(x_0, \mu_0)(Vy_1 + p_3y_2, Vy_1 + p_3y_2) \\ &= D^2f(x_0, \mu_0)(Vy_1, Vy_1) \\ &\quad + 2D^2f(x_0, \mu_0)(Vy_1, p_3y_2) \\ &\quad + D^2f(x_0, \mu_0)(p_3y_2, p_3y_2). \end{aligned}$$

De manera similar para los términos restantes.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= J_0 y_1 + W \left[D_\mu f(x_0, \mu_0)(\alpha) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0, \mu_0)(V y_1, V y_1) \right. \\
 &\quad + D^2 f(x_0, \mu_0)(V y_1, p_3 y_2) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3 y_2, p_3 y_2) \\
 &\quad + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, V y_1) + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, p_3 y_2) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} D^3 f(x_0, \mu_0)(V y_1, V y_1, V y_1) + \dots \right] \\
 \\
 \dot{y}_2 &= \lambda_3 y_2 + q_3^T \left[D_\mu f(x_0, \mu_0)(\alpha) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0, \mu_0)(V y_1, V y_1) \right. \\
 &\quad + D^2 f(x_0, \mu_0)(V y_1, p_3 y_2) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3 y_2, p_3 y_2) \\
 &\quad + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, V y_1) + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, p_3 y_2) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} D^3 f(x_0, \mu_0)(V y_1, V y_1, V y_1) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos de la parte no lineal del último sistema, daremos la siguiente

Definición 3.2.1. *Dados $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ y $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times (r \times s)}$, $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)^T$, donde $L_i \in \mathbb{R}^{r \times s}$, definamos*

$$v \bullet \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n v_i L_i.$$

Entonces, los cálculos los podemos representar como

$$\begin{aligned}
 W D^2 f(x_0, \mu_0)(V y_1, V y_1) &= \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (V y_1)^T D^2 f_1(x_0, \mu_0) V y_1 \\ (V y_1)^T D^2 f_2(x_0, \mu_0) V y_1 \\ (V y_1)^T D^2 f_3(x_0, \mu_0) V y_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 q_{1i} (V y_1)^T D^2 f_i(x_0, \mu_0) V y_1 \\ \sum_{i=1}^3 q_{2i} (V y_1)^T D^2 f_i(x_0, \mu_0) V y_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (V y_1)^T \sum_{i=1}^3 q_{1i} D^2 f_i(x_0, \mu_0) V y_1 \\ (V y_1)^T \sum_{i=1}^3 q_{2i} D^2 f_i(x_0, \mu_0) V y_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (V y_1)^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) V y_1 \\ (V y_1)^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) V y_1 \end{pmatrix} \\
 &= [(W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(V, V)](y_1, y_1).
 \end{aligned}$$

De manera similar, para los términos restantes aplicamos la definición, y también de manera similar podemos reemplazar W por q_3^T .

Por lo tanto, el sistema lo podemos escribir en su forma extendida (o suspendida)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2, \alpha) \\ 0 \\ F_2(y_1, y_2, \alpha) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_1(y_1, y_2, \alpha) &= \frac{1}{2} [(W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(V, V)](y_1, y_1) \\
 &\quad + [(W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(V, p_3)](y_1, y_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} [(W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(p_3, p_3)](y_2, y_2) \\
 &\quad + [(W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0))(V)](\alpha, y_1) \\
 &\quad + [(W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0))(p_3)](\alpha, y_2) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(y_1, y_2, \alpha) &= \frac{1}{2} [(q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(V, V)](y_1, y_1) \\
 &\quad + [(q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(V, p_3)](y_1, y_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} [(q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(p_3, p_3)](y_2, y_2) \\
 &\quad + [(q_3 \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0))(V)](\alpha, y_1) \\
 &\quad + [(q_3 \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0))(p_3)](\alpha, y_2) + \dots
 \end{aligned}$$

3.2.3. Cálculo de la variedad central

Para calcular la variedad central local m -parametrizada en el punto de equilibrio, consideramos un segundo cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix},$$

con $z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_2 \in \mathbb{R}$.

Demostremos que existe una matriz \mathcal{P} invertible, tal que

$$\mathcal{P}^{-1} \bar{J} \mathcal{P} = J$$

donde

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} J_0 & W \bullet D_{\mu} f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 \bullet D_{\mu} f(x_0, \mu_0) & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\bar{J} \mathcal{P} = \mathcal{P} J$$

Si

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix},$$

por un lado tenemos

$$\bar{J}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= J_0 P_{11} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{21}, & \rho_{12} &= J_0 P_{12} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22}, \\ \rho_{13} &= J_0 P_{13} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{23}, & \rho_{31} &= q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{21} + \lambda_3 P_{31}, \\ \rho_{32} &= q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} + \lambda_3 P_{32}, & \rho_{33} &= q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{23} + \lambda_3 P_{33}, \end{aligned}$$

y por el otro

$$\mathcal{P}J = \begin{pmatrix} P_{11}J_0 & 0 & P_{13}\lambda_3 \\ P_{21}J_0 & 0 & P_{23}\lambda_3 \\ P_{31}J_0 & 0 & P_{33}\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo lo anterior, para encontrar la matriz \mathcal{P} igualamos entrada a entrada, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} J_0 P_{11} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{21} &= P_{11} J_0 \\ q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{23} + \lambda_3 P_{33} &= P_{33} \lambda_3 \\ J_0 P_{13} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{23} &= P_{13} \lambda_3 \\ q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{21} + \lambda_3 P_{31} &= P_{31} J_0 \\ J_0 P_{12} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} &= 0 \\ J_0 P_{12} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} &= 0 \\ &0 = P_{21} J_0 \\ &0 = P_{23} \lambda_3 \\ J_0 P_{12} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} &= 0 \\ q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} + \lambda_3 P_{32} &= 0, \end{aligned}$$

de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} P_{11} &= I_2, & P_{13} &= 0, & P_{21} &= 0 \\ P_{22} &= I_m, & P_{23} &= 0, & P_{31} &= 0, & P_{33} &= 1, \end{aligned}$$

sin embargo, para P_{12} resolvemos

$$\begin{aligned} J_0 P_{12} + W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} &= 0 \\ J_0^{-1} J_0 P_{12} &= -J_0^{-1} W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) \\ P_{12} &= -J_0^{-1} W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0), \end{aligned}$$

y para P_{32}

$$\begin{aligned} q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} + \lambda_3 P_{32} &= 0 \\ \lambda_3^{-1} q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) P_{22} &= -\lambda_3^{-1} \lambda_3 P_{32} \\ P_{32} &= -\lambda_3^{-1} q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Por lo que llegamos a

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & -J_0^{-1}W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -\lambda_3^{-1}q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar \mathcal{P}^{-1} utilizamos el método de eliminación gaussiana

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} I_2 & -J_0^{-1}W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & -\lambda_3^{-1}q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

del cual llegamos a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} I_2 & 0 & 0 & I_2 & J_0^{-1}W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda_3^{-1}q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 1 \end{array} \right),$$

de donde podemos ver que

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & J_0^{-1}W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & \lambda_3^{-1}q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Con el fin de simplificar cálculos posteriores, hacemos

$$b_1 = J_0^{-1}W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0), \quad b_2 = \lambda_3^{-1}q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0).$$

Del cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix},$$

vemos que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & -b_1 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix},$$

de aquí que $y_i = z_i - b_i\alpha$ con $i = 1, 2$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} &= \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_2 & b_1 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 & W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & -b_1 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} F_1(z_1 - b_1\alpha, z_2 - b_2\alpha, \alpha) \\ 0 \\ F_2(z_1 - b_1\alpha, z_2 - b_2\alpha, \alpha) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_2 & b_1 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 & J_0 b_1 - W \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 \bullet D_\mu f(x_0, \mu_0) - b_2 \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z_1 - b_1\alpha, z_2 - b_2\alpha, \alpha) \\ 0 \\ F_2(z_1 - b_1\alpha, z_2 - b_2\alpha, \alpha) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Para la parte no lineal correspondiente a F_1 y F_2 , desarrollamos cada término de manera similar a

$$\begin{aligned}
 W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V y_1, p_3 y_2) &= W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V z_1, p_3 z_2) \\
 &\quad - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V z_1, p_3 b_2 \alpha) \\
 &\quad - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V b_1 \alpha, p_3 z_2) \\
 &\quad + W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V b_1 \alpha, p_3 b_2 \alpha).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema nos queda

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(z_1 - b_1\alpha, z_2 - b_2\alpha, \alpha) \\ 0 \\ \tilde{F}_2(z_1 - b_1\alpha, z_2 - b_2\alpha, \alpha) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_1(z_1, z_2, \alpha) &= \frac{1}{2} W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V z_1, V z_1) - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3 z_2, p_3 b_2 \alpha) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3 z_2, p_3 z_2) - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V z_1, V b_1 \alpha) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V b_1 \alpha, V b_1 \alpha) + W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V z_1, p_3 z_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3 b_2 \alpha, p_3 b_2 \alpha) + W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, V z_1) \\
 &\quad - W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, V b_1 \alpha) - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V b_1 \alpha, p_3 z_2) \\
 &\quad - W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, p_3 b_2 \alpha) + W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V b_1 \alpha, p_3 b_2 \alpha) \\
 &\quad - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V z_1, p_3 b_2 \alpha) + W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, p_3 z_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W \bullet D_\mu^2 f(x_0, \mu_0)(\alpha, \alpha) + \frac{1}{6} W \bullet D^3 f(x_0, \mu_0)(V z_1, V z_1, V z_1) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_2(z_1, z_2, \alpha) = & \frac{1}{2}q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vz_1) - q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3z_2, p_3b_2\alpha) \\
& + \frac{1}{2}q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3z_2, p_3z_2) - q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vb_1\alpha) \\
& + \frac{1}{2}q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vb_1\alpha, Vb_1\alpha) + q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, p_3z_2) \\
& + \frac{1}{2}q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(p_3b_2\alpha, p_3b_2\alpha) + q_3 \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, Vz_1) \\
& - q_3 \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, Vb_1\alpha) - q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vb_1\alpha, p_3z_2) \\
& - q_3 \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, p_3b_2\alpha) + q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vb_1\alpha, p_3b_2\alpha) \\
& - q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, p_3b_2\alpha) + q_3 \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)(\alpha, p_3z_2) \\
& + \frac{1}{2}q_3 \bullet D_{\mu}^2 f(x_0, \mu_0)(\alpha, \alpha) + \frac{1}{6}q_3 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vz_1, Vz_1) + \dots
\end{aligned}$$

De la teoría de la variedad central, el sistema anterior tiene una variedad central $z_2 = h(z_1, \alpha)$, $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, con $h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0$ y la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\dot{z}_1 = J_0 z_1 + \bar{F}_1(z_1, z_2, \alpha) \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{F}_1(z_1, z_2, \alpha) = & \frac{1}{2}W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vz_1) \\
& + W \bullet [(-b_1^T V^T - b_2^T p_3^T) D^2 f(x_0, \mu_0) + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)](\alpha, Vz_1) \\
& + W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, p_3z_2) \\
& + \frac{1}{6}W \bullet D^3 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vz_1, Vz_1) + \dots
\end{aligned}$$

Con lo anterior hemos demostrado el siguiente

Lema 3.2.2. *Dado el sistema no lineal $\dot{x} = f(x, \mu)$, donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ y $f \in C^r(\mathbb{R})$, $r \geq 3$. Supongamos que existe un punto de equilibrio (x_0, μ_0) tal que H1) y H2) (Condiciones de no hiperbolicidad). Entonces, la dinámica sobre la variedad central bidimensional en $x = x_0$, cuando $\mu = \mu_0$, está dada por*

$$\dot{z}_1 = J_0 z_1 + \bar{F}_1(z_1, z_2, \alpha),$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{F}_1(z_1, z_2, \alpha) = & \frac{1}{2}W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vz_1) \\
& + W \bullet [(-b_1^T V^T - b_2^T p_3^T) D^2 f(x_0, \mu_0) + D_{\mu x} f(x_0, \mu_0)](\alpha, Vz_1) \\
& + W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, p_3h(z_1, \alpha)) \\
& + \frac{1}{6}W \bullet D^3 f(x_0, \mu_0)(Vz_1, Vz_1, Vz_1) + \dots
\end{aligned}$$

Notemos que es necesario calcular la variedad central $h(z_1, \alpha)$ porque afecta a los términos cuadráticos en \bar{F}_1 , en particular a $WD^2f(x_0, \mu_0)(Vz_1, p_3z_2)$.

La variedad central en nuestro caso vendrá dada de la forma $z_2 = H(z_1, z_1)$ la cual también la podemos escribir como

$$z_2 = z_1^T H z_1, \quad (3.7)$$

de aquí obtenemos

$$Dh(z_1, \alpha) = 2H z_1 = 2z_1^T H$$

Para calcular la variedad central, partimos de la ecuación homológica

$$\dot{z}_2 = Dh(z_1, \alpha) \dot{z}_1,$$

sustituyendo, y truncando hasta orden 2.

$$\begin{aligned} \lambda_3 z_2 + \bar{F}_2(z_1, z_2, \alpha) &= 2z_1^T H (J_0 z_1 + \bar{F}_1(z_1, z_2, \alpha)) \\ \lambda_3 z_1^T H z_1 + \frac{1}{2} (V z_1)^T q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) V z_1 &= 2z_1^T H J_0 z_1 \\ \lambda_3 z_1^T H z_1 + \frac{1}{2} z_1^T V^T q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) V z_1 &= 2z_1^T H J_0 z_1 \\ 2\lambda_3 z_1^T H z_1 + z_1^T V^T q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) V z_1 &= 4z_1^T H J_0 z_1 \\ z_1^T 2\lambda_3 H z_1 + z_1^T V^T q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) V z_1 - 4z_1^T H J_0 z_1 &\equiv 0 \\ z_1^T (2\lambda_3 H + V^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) V - 4H J_0) z_1 &\equiv 0 \quad \forall z_1 \end{aligned}$$

Observación 3.2.1. Sea $(A - B)x \equiv 0 \quad \forall x$, la condición suficiente y necesaria para cumplir esta ecuación es: $(A - B) + (A - B)^T = 0$, donde si A y B son simétricas, tenemos $A^T = A$ y $B^T = B$ entonces $A = B$

En nuestro caso, hacemos

$$M = 2\lambda_3 H + V^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) V - 4H J_0,$$

la cual es antisimétrica. Y debe cumplir

$$M + M^T = 0. \quad (3.8)$$

Al resolver (3.8) estaremos encontrando H .

Sean

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}, \\ \Sigma &= V^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) V = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= p_1^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1, & \Sigma_{12} &= p_1^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \\ \Sigma_{13} &= p_2^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1, & \Sigma_{14} &= p_2^T (q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Por lo tanto

$$M = \begin{pmatrix} 2H_{11}\lambda_3 + \Sigma_{11} - 4H_{12}\omega & 2H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{12} + 4H_{11}\omega \\ 2H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{13} - 4H_{22}\omega & 2H_{22}\lambda_3 + \Sigma_{14} + 4H_{12}\omega \end{pmatrix},$$

tenemos también

$$M^T = \begin{pmatrix} 2H_{11}\lambda_3 + \Sigma_{11} - 4H_{12}\omega & 2H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{13} - 4H_{22}\omega \\ 2H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{12} + 4H_{11}\omega & 2H_{22}\lambda_3 + \Sigma_{14} + 4H_{12}\omega \end{pmatrix},$$

hacemos $\tilde{M} = M + M^T$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 4H_{11}\lambda_3 + 2\Sigma_{11} - 8H_{12}\omega & 4H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{12} + \Sigma_{13} + 4H_{11}\omega - 4H_{22}\omega \\ 4H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{12} + \Sigma_{13} + 4H_{11}\omega - 4H_{22}\omega & 4H_{22}\lambda_3 + 2\Sigma_{14} + 8H_{12}\omega \end{pmatrix},$$

de (3.8) tenemos

$$\begin{aligned} 4H_{11}\lambda_3 + 2\Sigma_{11} - 8H_{12}\omega &= 0 \\ 4H_{22}\lambda_3 + 2\Sigma_{14} + 8H_{12}\omega &= 0 \\ 4H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{12} + \Sigma_{13} + 4H_{11}\omega - 4H_{22}\omega &= 0 \\ 4H_{12}\lambda_3 + \Sigma_{12} + \Sigma_{13} + 4H_{11}\omega - 4H_{22}\omega &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{2\omega^2\Sigma_{11} + 2\omega^2\Sigma_{14} + \omega\Sigma_{12}\lambda_3 + \omega\Sigma_{13}\lambda_3 + \Sigma_{11}\lambda_3^2}{\lambda_3(4\omega^2 + \lambda_3^2)} \\ H_{12} &= \frac{1}{4} \frac{2\omega\Sigma_{11} - 2\omega\Sigma_{14} - \Sigma_{12}\lambda_3 - \Sigma_{13}\lambda_3}{4\omega^2 + \lambda_3^2} \\ H_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{2\omega^2\Sigma_{11} + 2\omega^2\Sigma_{14} - \omega\Sigma_{12}\lambda_3 - \omega\Sigma_{13} + \Sigma_{14}\lambda_3^2}{\lambda_3(4\omega^2 + \lambda_3^2)}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Por lo que la variedad central dada por (3.7) es

$$\begin{aligned} z_2 &= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} \\ &= H_{11}z_{11}^2 + 2H_{12}z_{11}z_{12} + H_{22}z_{12}^2. \end{aligned}$$

Teniendo la dinámica sobre la variedad central, en el siguiente capítulo, tomaremos como base [8] para llegar a las reformulaciones para los coeficientes de estabilidad d y l_1 .

Capítulo 4

Coeficientes de Estabilidad

4.1. Equivalencia Topológica entre la dinámica sobre la variedad central y la deformación versal de la Bifurcación de Hopf

Considerando el desdoblamiento universal de la bifurcación de Hopf dada por [8].

$$\dot{\xi} = J_0\xi + \lambda K\xi + N(\xi, \xi, \xi), \quad (4.1)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$K = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N(\xi, \xi, \xi) = \begin{pmatrix} l_1 & -b \\ b & l_1 \end{pmatrix} |\xi|^2 \xi,$$

donde d es el coeficiente de estabilidad llamada la velocidad de cruce y l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov.

Considerando ahora la dinámica sobre la variedad central dada por (3.6), la cual, reescribiendola

$$\dot{z}_1 = J_0 z_1 + \alpha^T R_1 z_1 + \frac{1}{2} z_1^T R_2 z_1 + R_3(z_1, z_1, z_1) + \dots \quad (4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= W \bullet D_{\mu x} f(x_0, \mu_0) V - W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) [(V, V b_1) + (V, p_3 b_2)] \\ R_2 &= W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) (V, V) \\ R_3 &= W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) (V, p_3) + \frac{1}{6} W \bullet D^3 f(x_0, \mu_0) (V, V, V) \end{aligned}$$

Probaremos que existe un difeomorfismo entre (4.2) y (5) tal que hace que sean topológicamente equivalentes.

Sea

$$z_1 = G(\xi) = \xi + \alpha^T L_1 \xi + h_2(\xi) + h_3(\xi), \quad (4.3)$$

Capítulo 4

el difeomorfismo, el cual transforma (4.2) en (5). De (4.3) tenemos

$$\dot{z}_1 = DG(\xi)\dot{\xi} \Leftrightarrow \dot{\xi} = (DG(\xi))^{-1}\dot{z}_1|_{z_1=G(\xi)}.$$

De (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} DG(\xi) &= \dot{\xi} + \alpha^T L_1 \dot{\xi} + (Dh_2(\xi))\dot{\xi} + (Dh_3(\xi))\dot{\xi} \\ &= (I + \alpha^T L_1 + (Dh_2(\xi)) + (Dh_3(\xi)))\dot{\xi}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} (DG(\xi))^{-1} &= I - \alpha^T L_1 - Dh_2(\xi) - Dh_3(\xi) + (\alpha^T L_1)^2 \\ &\quad + (Dh_2(\xi))^2 + (Dh_3(\xi))^2 + 2\alpha^T L_1 Dh_2(\xi) \\ &\quad + 2\alpha^T L_1 Dh_3(\xi) + 2h_2(\xi) Dh_3(\xi), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{z}_1|_{z_1=G(\xi)} &= J_0 G(\xi) + \alpha^T R_1 G(\xi) + \frac{1}{2} (G(\xi))^T R_2 G(\xi) + R_3(G(\xi), G(\xi), G(\xi)) \\ &= J_0 \xi + J_0 \alpha^T L_1 \xi + J_0 h_2(\xi) + J_0 h_3(\xi) + \alpha^T R_1 \xi + \alpha^T R_1 \alpha^T L_1 \xi \\ &\quad + \alpha^T R_1 h_2(\xi) + \alpha^T R_1 h_3(\xi) + \frac{1}{2} (\xi^T R_2 \xi + \xi^T R_2 \alpha^T L_1 \xi + \xi^T R_2 h_2(\xi) \\ &\quad + \xi^T R_2 h_3(\xi) + \xi^T L_1^T \alpha R_2 \xi + \xi^T L_1^T \alpha R_2 \alpha^T L_1 \xi + \xi^T L_1^T \alpha R_2 h_2(\xi) \\ &\quad + \xi^T L_1^T \alpha R_2 h_3(\xi) + h_2^T(\xi) R_2 \xi + h_2^T(\xi) R_2 \alpha^T L_1 \xi + h_2^T(\xi) R_2 h_2(\xi) \\ &\quad + h_2^T(\xi) R_2 h_3(\xi) + h_3^T(\xi) R_2 \xi + h_3^T(\xi) R_2 \alpha^T L_1 \xi + h_3^T(\xi) R_2 h_2(\xi) \\ &\quad + h_3^T(\xi) R_2 h_3(\xi)) + R_3(\xi, \xi, \xi) + \dots \end{aligned}$$

por lo que finalmente llegamos a

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= J_0 \xi + J_0 \alpha^T L_1 \xi + J_0 h_2(\xi) + J_0 h_3(\xi) + \alpha^T R_1 \xi + \frac{1}{2} \xi^T R_2 \xi \\ &\quad + R_3(\xi, \xi, \xi) - \alpha^T L_1 J_0 \xi - Dh_2(\xi) J_0 \xi - Dh_2(\xi) J_0 h_2(\xi) \\ &\quad - Dh_3(\xi) J_0 \xi - Dh_2(\xi) R_3 + \frac{1}{2} h_2^T(\xi) R_2 \xi + \frac{1}{2} \xi^T R_2 h_2(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{2} Dh_2(\xi) \xi^T R_2 \xi + (Dh_2(\xi))^2 J_0 \xi + \dots \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observación 4.1.1. Los términos $\frac{1}{2} h_2^T(\xi) R_2 \xi$ y $\frac{1}{2} \xi^T R_2 h_2(\xi)$ los podemos reescribir como $\frac{1}{2} R_2(\xi, h_2(\xi))$. Por lo que la suma de ambos es $R_2(\xi, h_2(\xi))$.

Reescribiendo (4.4)

$$\dot{\xi} = J_0 \xi + \alpha^T \bar{R}_1 \xi + \xi^T \bar{R}_2 \xi + \xi^T \xi^T \bar{R}_3 \xi, \tag{4.5}$$

donde

$$\bar{R}_1 = R_1 + J_0 L_1 - L_1 J_0 \quad (4.6)$$

$$\xi^T \bar{R}_2 \xi = J_0 h_2(\xi) - Dh_2(\xi) J_0 \xi + \frac{1}{2} R_2(\xi, \xi) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \xi^T \xi^T \bar{R}_3 \xi &= J_0 h_3(\xi) + R_2(\xi, h_2(\xi)) - Dh_3(\xi) J_0 \xi + R_3(\xi, \xi, \xi) \\ &\quad - Dh_2(\xi) J_0 h_2(\xi) + (Dh_2(\xi))^2 J_0 \xi - \frac{1}{2} Dh_2(\xi) \xi^T R_2 \xi, \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observación 4.1.2. De (4.8) tenemos que los últimos tres términos los podemos reescribir como

$$-Dh_2(\xi) \left(J_0 h_2(\xi) - Dh_2(\xi) J_0 \xi + \frac{1}{2} \xi^T R_2 \xi \right)$$

de donde podemos ver que es igual a $-Dh_2(\xi) \xi^T \bar{R}_2 \xi$, del cual, veremos que $\xi^T \bar{R}_2 \xi = 0$, por lo que (4.8) vendrá dada por

$$\bar{R}_3 = J_0 h_3(\xi) + R_2(\xi, h_2(\xi)) - Dh_3(\xi) J_0 \xi + R_3(\xi, \xi, \xi), \quad (4.9)$$

Ya que el difeomorfismo dado por (4.3) transforma (4.2) en (5), entonces, por la teoría de formas normales, existe un cambio de variables $h_2(\xi)$ y $h_3(\xi)$ tal que se cumple lo siguiente

$$\alpha^T \bar{R}_1 = \lambda K \quad (4.10)$$

$$\xi^T \bar{R}_2 \xi = 0 \quad (4.11)$$

$$\xi^T \xi^T \bar{R}_3 \xi = N(\xi, \xi, \xi). \quad (4.12)$$

4.1.1. Velocidad de cruce

Tenemos que el coeficiente de la velocidad de cruce d , se encuentra en la matriz K del término $\lambda K \xi$, notamos que en nuestro caso nos afecta en el término $\alpha^T \bar{R}_1 \xi$, donde \bar{R}_1 es dado por (4.6), por lo que tenemos que probar que existe L_1 , tal que (4.10),

donde

$$\bar{R}_1 = \begin{pmatrix} \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{11}^1 & \bar{R}_{11}^2 \\ \bar{R}_{12}^1 & \bar{R}_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

es decir,

$$\alpha^T \bar{R}_1 = \lambda K \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^T \bar{R}_{11}^1 & \alpha^T \bar{R}_{11}^2 \\ \alpha^T \bar{R}_{12}^1 & \alpha^T \bar{R}_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d & -\lambda c \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \alpha^T \bar{R}_{11}^1 &= \alpha^T \bar{R}_{12}^2 \\ \alpha^T \bar{R}_{11}^2 &= -\alpha^T \bar{R}_{12}^1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\overline{R}_{11}^1 &= \overline{R}_{12}^2 \\ \overline{R}_{11}^2 &= -\overline{R}_{12}^1.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Entonces si podemos encontrar L_1 , la velocidad de cruce será dada por

$$d = \frac{d}{d\mu} \left(\alpha^T \overline{R}_{11}^1 \right) = \overline{R}_{11}^1, \quad (4.15)$$

ya que (5) lo podemos reescribir como $(J_0 + \lambda k)\xi + N(\xi, \xi, \xi)$ donde la parte lineal es

$$\begin{aligned}J_0 + \lambda k &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda d & -\lambda c \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda d & -(\omega_0 + \lambda c) \\ \omega_0 + \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},\end{aligned}$$

cuyos valores propios $\lambda_{1,2} = \lambda d \pm (\omega_0 + \lambda c)i$.

En nuestro caso (4.5), la parte lineal es

$$\begin{aligned}J_0 + \alpha^T \overline{R}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \alpha^T \begin{pmatrix} \overline{R}_{11}^1 & \overline{R}_{11}^2 \\ \overline{R}_{12}^1 & \overline{R}_{12}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^T \overline{R}_{11}^1 & -\omega \alpha^T \overline{R}_{11}^2 \\ \omega \alpha^T \overline{R}_{12}^1 & \alpha^T \overline{R}_{12}^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo que los valores propios son $\lambda_{1,2} = \alpha^T \overline{R}_{11}^1 \pm (\omega + \omega \alpha^T \overline{R}_{11}^2)i$.

Procedemos a encontrar L_1 , el cual debe ser de la forma

$$\begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{12}^1 & L_{12}^2 \end{pmatrix},$$

entonces, observamos que

$$\begin{aligned}\overline{R}_1 &= R_1 + J_0 L_1 - L_1 J_0 \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}^1 & R_{11}^2 \\ R_{12}^1 & R_{12}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{12}^1 & L_{12}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{12}^1 & L_{12}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}^1 & R_{11}^2 \\ R_{12}^1 & R_{12}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega L_{12}^1 & -\omega L_{12}^2 \\ \omega L_{11}^1 & \omega L_{11}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega L_{11}^2 & -\omega L_{11}^1 \\ \omega L_{12}^2 & -\omega L_{12}^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}^1 - \omega L_{12}^1 - \omega L_{11}^2 & R_{11}^2 - \omega L_{12}^2 + \omega L_{11}^1 \\ R_{12}^1 + \omega L_{11}^1 - \omega L_{12}^2 & R_{12}^2 + \omega L_{11}^2 + \omega L_{12}^1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De (4.13), tenemos

$$\overline{R}_1 = \begin{pmatrix} \overline{R}_{11}^1 & \overline{R}_{11}^2 \\ \overline{R}_{12}^1 & \overline{R}_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^1 - \omega L_{12}^1 - \omega L_{11}^2 & R_{11}^2 - \omega L_{12}^2 + \omega L_{11}^1 \\ R_{12}^1 + \omega L_{11}^1 - \omega L_{12}^2 & R_{12}^2 + \omega L_{11}^2 + \omega L_{12}^1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

y de (4.14), entonces

$$R_{11}^1 - \omega L_{12}^1 - \omega L_{11}^2 = R_{12}^2 + \omega L_{11}^2 + \omega L_{12}^1 \quad (4.17)$$

$$R_{12}^1 + \omega L_{11}^1 - \omega L_{12}^2 = -R_{11}^2 + \omega L_{12}^2 - \omega L_{11}^1. \quad (4.18)$$

Resolviendo para (4.17)

$$\begin{aligned} -\omega L_{12}^1 - \omega L_{11}^2 - \omega L_{11}^2 - \omega L_{12}^1 &= R_{12}^2 - R_{11}^1 \\ -2\omega L_{12}^1 - 2\omega L_{11}^2 &= R_{12}^2 - R_{11}^1 \\ -2\omega(L_{11}^2 + L_{12}^1) &= R_{12}^2 - R_{11}^1 \\ L_{11}^2 + L_{12}^1 &= -\frac{1}{2\omega}(R_{12}^2 - R_{11}^1), \end{aligned}$$

y para (4.18)

$$\begin{aligned} \omega L_{11}^1 - \omega L_{12}^2 - \omega L_{12}^2 + \omega L_{11}^1 &= -R_{11}^2 - R_{12}^1 \\ 2\omega L_{11}^1 - 2\omega L_{12}^2 &= -R_{11}^2 - R_{12}^1 \\ 2\omega(L_{11}^1 - L_{12}^2) &= -(R_{11}^2 + R_{12}^1) \\ L_{11}^1 - L_{12}^2 &= -\frac{1}{2\omega}(R_{11}^2 + R_{12}^1). \end{aligned}$$

Por lo que seleccionamos L_1 , tal que

$$L_{11}^2 + L_{12}^1 = -\frac{1}{2\omega}(R_{12}^2 - R_{11}^1) \quad (4.19)$$

$$L_{11}^1 - L_{12}^2 = -\frac{1}{2\omega}(R_{11}^2 + R_{12}^1).$$

Con esta selección tenemos que de (4.16) y (4.19), la velocidad de cruce dada por (4.15) es

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}^1 &= R_{11}^1 - \omega L_{12}^1 - \omega L_{11}^2 \\ &= R_{11}^1 - \omega(L_{12}^1 + L_{11}^2) \\ &= R_{11}^1 - \omega\left(\frac{-1}{2\omega}(R_{12}^2 - R_{11}^1)\right) \\ &= R_{11}^1 + \left(\frac{1}{2}(R_{12}^2 - R_{11}^1)\right) \\ &= R_{11}^1 + \frac{1}{2}R_{12}^2 - \frac{1}{2}R_{11}^1 \\ &= \frac{1}{2}R_{11}^1 + \frac{1}{2}R_{12}^2 \\ &= \frac{1}{2}(R_{11}^1 + R_{12}^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Lema 4.1.1. Si definimos $M_0 = vJ_0^{-1}W$ y $m_1 = p_3\lambda_3^{-1}q_3^T$, entonces $(Df(x_0, \mu_0))^{-1} = M_0 + I_3m_1$

Demostración. Sean

$$P = \begin{pmatrix} V & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} W \\ q_3^T \end{pmatrix},$$

sabemos que

$$P^{-1}Df(x_0, \mu_0)P = J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} W \\ q_3^T \end{pmatrix} (V \quad p_3) = \begin{pmatrix} WV & Wp_3 \\ q_3^T V & q_3^T p_3 \end{pmatrix} = I. \quad (4.21)$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} P^{-1}(M_0 + I_3 m_1)P &= \begin{pmatrix} W \\ q_3^T \end{pmatrix} (V J_0^{-1}W + p_3 \lambda_3^{-1} q_3^T) (V \quad p_3) \\ &= \begin{pmatrix} WV J_0^{-1}W + Wp_3 \lambda_3 q_3^T \\ q_3^T V J_0^{-1}W + q_3^T p_3 \lambda_3 q_3^T \end{pmatrix} (V \quad p_3), \end{aligned}$$

por (4.21)

$$\begin{aligned} P^{-1}(M_0 + I_3 m_1)P &= \begin{pmatrix} J_0^{-1}W \\ \lambda_3^{-1} q_3^T \end{pmatrix} (V \quad p_3) \\ &= \begin{pmatrix} J_0^{-1}WV & J_0^{-1}Wp_3 \\ \lambda_3^{-1} q_3^T V & \lambda_3^{-1} q_3^T p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_0^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} \\ &= J^{-1}, \end{aligned}$$

entonces

$$I = JJ^{-1} = P^{-1}Df(x_0, \mu_0)PP^{-1}(M_0 + I_3 m_1)P,$$

esto es

$$Df(x_0, \mu_0)(M_0 + I_3 m_1) = I.$$

□

El siguiente lema ofrece una expresión para la velocidad de cruce

Lema 4.1.2. *Si definimos*

$$\mathcal{R} = D_{\mu x} f(x_0, \mu_0) - [(M_0 + I_3 m_1)D_{\mu} f(x_0, \mu_0)]^T D^2 f(x_0, \mu_0),$$

entonces la velocidad de cruce viene dada por

$$d = \frac{1}{2} [(q_1 \bullet \mathcal{R})p_1 + (q_2 \bullet \mathcal{R})p_2]$$

Demostración. Observemos que

$$R_1 = W \left[D_{\mu x} f(x_0, \mu_0) - [(M_0 + I_3 m_1) D_{\mu} f(x_0, \mu_0)]^T D^2 f(x_0, \mu_0) \right] V,$$

entonces

$$R_1 = (W \bullet \mathcal{R})V = \begin{pmatrix} q_1 \bullet \mathcal{R} \\ q_2 \bullet \mathcal{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} R_{11}^1 & R_{11}^2 \\ R_{12}^1 & R_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_1 \bullet \mathcal{R})p_1 & (q_1 \bullet \mathcal{R})p_2 \\ (q_2 \bullet \mathcal{R})p_1 & (q_2 \bullet \mathcal{R})p_2 \end{pmatrix},$$

de aquí que

$$R_{11}^1 + R_{12}^2 = (q_1 \bullet \mathcal{R})p_1 + (q_2 \bullet \mathcal{R})p_2,$$

de (4.20), llegamos a

$$d = \frac{1}{2} [(q_1 \bullet \mathcal{R})p_1 + (q_2 \bullet \mathcal{R})p_2]. \quad (4.22)$$

□

4.1.2. Primer Coeficiente de Lyapunov

Existe una expresión en los sistemas bidimensionales para encontrar el primer coeficiente de Lyapunov l_1 .

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix},$$

con $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$.

Entonces

$$l_1 = \frac{1}{16\omega} (T_1 + \omega T_2), \quad (4.23)$$

donde

$$T_1 = [F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2}]|_{x=0}, \quad (4.24)$$

y

$$T_2 = [F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_2x_1x_1} + F_{2x_2x_2x_2}]|_{x=0}. \quad (4.25)$$

Capítulo 4

En nuestro caso, debido a que por la teoría de formas normales, los términos cuadráticos son eliminados, entonces (4.23) será dado por

$$l_1 = \frac{1}{16}T_2. \quad (4.26)$$

Por lo que una vez resolviendo (4.11), obtendremos $h_2(\xi)$, el cual deberá ser de la forma siguiente

$$h_2(\xi) = \begin{pmatrix} h_{11}\xi_1^2 + h_{12}\xi_1\xi_2 + h_{13}\xi_2^2 \\ h_{21}\xi_1^2 + h_{22}\xi_1\xi_2 + h_{23}\xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

de donde podemos obtener $Dh_2(\xi)$,

$$Dh_2(\xi) = \begin{pmatrix} 2h_{11}\xi_1 + h_{12}\xi_2 & h_{12}\xi_2 + 2h_{13}\xi_2 \\ 2h_{21}\xi_1 + h_{22}\xi_2 & h_{22}\xi_2 + 2h_{23}\xi_2 \end{pmatrix},$$

Para resolver (4.11), cada término de (4.7) lo desarrollaremos como un “tensor”.

El primer término de (4.7)

$$\begin{aligned} J_0h_2(\xi) &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11}\xi_1^2 + h_{12}\xi_1\xi_2 + h_{13}\xi_2^2 \\ h_{21}\xi_1^2 + h_{22}\xi_1\xi_2 + h_{23}\xi_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega h_{21}\xi_1^2 - \omega h_{22}\xi_1\xi_2 - \omega h_{23}\xi_2^2 \\ \omega h_{11}\xi_1^2 + \omega h_{12}\xi_1\xi_2 + \omega h_{13}\xi_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \xi^T \Theta_{21} \xi \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_{21} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -\omega h_{21} & -\frac{1}{2}\omega h_{22} \\ \frac{1}{2}\omega h_{22} & -\omega h_{23} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega h_{11} & \frac{1}{2}\omega h_{12} \\ \frac{1}{2}\omega h_{12} & \omega h_{13} \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

El segundo término de (4.7)

$$\begin{aligned} Dh_2(\xi)J_0\xi &= \begin{pmatrix} 2h_{11}\xi_1 + h_{12}\xi_2 & h_{12}\xi_2 + 2h_{13}\xi_2 \\ 2h_{21}\xi_1 + h_{22}\xi_2 & h_{22}\xi_2 + 2h_{23}\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega h_{12}\xi_1 + 2\omega h_{13}\xi_2 & -2\omega h_{11}\xi_1 - \omega h_{12}\xi_2 \\ \omega h_{22}\xi_1 + 2\omega h_{23}\xi_2 & -2\omega h_{21}\xi_1 - \omega h_{22}\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega h_{12}\xi_1^2 + 2\omega h_{13}\xi_1\xi_2 - 2\omega h_{11}\xi_1\xi_2 - \omega h_{12}\xi_2^2 \\ \omega h_{22}\xi_1^2 + 2\omega h_{23}\xi_1\xi_2 - 2\omega h_{21}\xi_1\xi_2 - \omega h_{22}\xi_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \xi^T \Theta_{22} \xi \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_{22} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega h_{12} & \omega h_{13} - \omega h_{11} \\ \omega h_{13} - \omega h_{11} & -\omega h_{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega h_{22} & \omega h_{23} - \omega h_{21} \\ \omega h_{23} - \omega h_{21} & -\omega h_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

El tercer y último término de (4.7)

$$\begin{aligned}
 R_2(\xi, \xi) &= \xi^T [W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V, V)] \xi \\
 &= \xi^T \left[\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V, V) \right] \xi \\
 &= \xi^T \left[V^T \begin{pmatrix} q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) \\ q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} V \right] \xi \\
 &= \xi^T \Theta_{23} \xi
 \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_{23} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 & p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 & p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 & p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 & p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

Por lo que (4.7), viene dado por

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_2 &= \Theta_{21} + \Theta_{22} + \Theta_{23} \\
 &= \Theta_2,
 \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{11}^1 & \Theta_{12}^1 \\ \Theta_{21}^1 & \Theta_{22}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Theta_{11}^2 & \Theta_{12}^2 \\ \Theta_{21}^2 & \Theta_{22}^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
 \Theta_{11}^1 &= -\omega h_{12} - \omega h_{21} + \frac{1}{2} p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\
 \Theta_{12}^1 &= -\frac{1}{2} \omega h_{22} + \omega h_{11} - \omega h_{13} + \frac{1}{2} p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\
 \Theta_{21}^1 &= -\frac{1}{2} \omega h_{22} + \omega h_{11} - \omega h_{13} + \frac{1}{2} p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\
 \Theta_{22}^1 &= \omega h_{12} - \omega h_{23} + \frac{1}{2} p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\
 \Theta_{11}^2 &= \omega h_{11} - \omega h_{22} + \frac{1}{2} p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\
 \Theta_{12}^2 &= \frac{1}{2} \omega h_{12} + \omega h_{21} - \omega h_{23} + \frac{1}{2} p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\
 \Theta_{21}^2 &= \frac{1}{2} \omega h_{12} + \omega h_{21} - \omega h_{23} + \frac{1}{2} p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\
 \Theta_{22}^2 &= \omega h_{13} + \omega h_{22} + \frac{1}{2} p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2.
 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Para resolver para $h_2(\xi)$ utilizamos la condición antisimétrica, es decir, $\bar{R}_2 + \bar{R}_2^T = 0$, por lo que llegamos a

$$\begin{aligned}
h_{11} &= -\frac{1}{6\omega} \left[p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 \right. \\
&\quad \left. + p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 + 2p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right] \\
h_{12} &= \frac{1}{6\omega} \left[2p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 - 2p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\
&\quad \left. + p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 \right] \\
h_{13} &= \frac{1}{6\omega} \left[p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 \right. \\
&\quad \left. - 2p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 - p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right] \\
h_{21} &= \frac{1}{6\omega} \left[p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 + 2p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\
&\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 - p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 \right] \\
h_{22} &= -\frac{1}{6\omega} \left[p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 \right. \\
&\quad \left. - 2p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 + 2p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right] \\
h_{23} &= \frac{1}{6\omega} \left[2p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 + p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\
&\quad \left. + p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 \right].
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por lo tanto, tenemos $h_2(\xi)$, es decir, (4.27).

Con esto, hemos demostrado el siguiente

Lema 4.1.3. *Si h_{ij} para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$, están dados por (4.28), entonces existe $h_2(\xi)$ definido por (4.27) tal que $\xi^T \bar{R}_2 \xi = 0$.*

Ahora, resolviendo (4.12), obtendremos $h_3(\xi)$, el cual deberá tener la forma siguiente

$$h_3(\xi) = \begin{pmatrix} \eta_{11}\xi_1^3 + \eta_{12}\xi_1^2\xi_2 + \eta_{13}\xi_1\xi_2^2 + \eta_{14}\xi_2^3 \\ \eta_{21}\xi_1^3 + \eta_{22}\xi_1^2\xi_2 + \eta_{23}\xi_1\xi_2^2 + \eta_{24}\xi_2^3 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

de donde podemos obtener $Dh_3(\xi)$,

$$Dh_3(\xi) = \begin{pmatrix} 3\eta_{11}\xi_1^2 + 2\eta_{12}\xi_1\xi_2 + \eta_{13}\xi_2^2 & 3\eta_{12}\xi_1^2 + 2\eta_{13}\xi_1\xi_2 + \eta_{14}\xi_2^2 \\ 3\eta_{21}\xi_1^2 + 2\eta_{22}\xi_1\xi_2 + \eta_{23}\xi_2^2 & 3\eta_{22}\xi_1^2 + 2\eta_{23}\xi_1\xi_2 + \eta_{24}\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

De (5) tenemos

$$\begin{aligned}
N(\xi, \xi, \xi) &= \begin{pmatrix} l_1 & -b \\ b & l_1 \end{pmatrix} |\xi|^2 \xi = \begin{pmatrix} l_1 & -b \\ b & l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^3 + \xi_1\xi_2^2 \\ \xi_1^2\xi_2 + \xi_2^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_1\xi_1^3 + l_1\xi_1\xi_2^2 - b\xi_1^2 - \xi_2^3 \\ b\xi_1^2\xi_2 + b\xi_2^3 + l_1\xi_1^2 + l_1\xi_2^3 \end{pmatrix} \\
&= \xi^T \xi^T \Theta_N \xi.
\end{aligned}$$

donde

$$\Theta_N = \begin{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_1 \end{pmatrix} \right) \\ \left(\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \right) \\ \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) \\ \left(\begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_1 \end{pmatrix} \right) \end{bmatrix}.$$

Por lo que para resolver (4.12), desarrollaremos uno a uno cada término de (4.9), de tal manera que nos quede como un “tensor de tensores”, esto para facilitar los cálculos.

Comenzamos con el primer término de (4.9)

$$\begin{aligned} J_0 h_3(\xi) &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11}\xi_1^3 + \eta_{12}\xi_1^2\xi_2 + \eta_{13}\xi_1\xi_2^2 + \eta_{14}\xi_2^3 \\ \eta_{21}\xi_1^3 + \eta_{22}\xi_1^2\xi_2 + \eta_{23}\xi_1\xi_2^2 + \eta_{24}\xi_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega\eta_{21}\xi_1^3 - \omega\eta_{22}\xi_1^2\xi_2 - \omega\eta_{23}\xi_1\xi_2^2 - \omega\eta_{24}\xi_2^3 \\ \omega\eta_{11}\xi_1^3 + \omega\eta_{12}\xi_1^2\xi_2 + \omega\eta_{13}\xi_1\xi_2^2 + \omega\eta_{14}\xi_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \xi^T \xi^T \Theta_{31} \xi \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_{31} = \begin{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} -\omega\eta_{21} & 0 \\ 0 & -\omega\eta_{23} \end{pmatrix} \right) \\ \left(\begin{pmatrix} -\omega\eta_{22} & 0 \\ 0 & -\omega\eta_{24} \end{pmatrix} \right) \\ \left(\begin{pmatrix} \omega\eta_{11} & 0 \\ 0 & \omega\eta_{13} \end{pmatrix} \right) \\ \left(\begin{pmatrix} \omega\eta_{12} & 0 \\ 0 & \omega\eta_{14} \end{pmatrix} \right) \end{bmatrix},$$

El segundo término de (4.9)

$$\begin{aligned}
 \xi^T R_2 h_2(\xi) &= \begin{bmatrix} (\xi_1 \ \xi_2) \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{13} & \mathcal{B}_{14} \end{pmatrix} \\ (\xi_1 \ \xi_2) \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \\ \mathcal{B}_{23} & \mathcal{B}_{24} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{11}\xi_1^2 + h_{12}\xi_1\xi_2 + h_{13}\xi_2^2 \\ h_{21}\xi_1^2 + h_{22}\xi_1\xi_2 + h_{23}\xi_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \xi^T \xi^T \Theta_{32} \xi
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1 &= (\mathcal{B}_{11}h_{11} + \mathcal{B}_{12}h_{21})\xi_1^3 + (\mathcal{B}_{11}h_{12} + \mathcal{B}_{13}h_{11} + \mathcal{B}_{12}h_{22} + \mathcal{B}_{14}h_{21})\xi_1^2\xi_2 \\
 &\quad + (\mathcal{B}_{11}h_{13} + \mathcal{B}_{13}h_{12} + \mathcal{B}_{12}h_{23} + \mathcal{B}_{14}h_{22})\xi_1\xi_2^2 + (\mathcal{B}_{13}h_{13} + \mathcal{B}_{14}h_{23})\xi_2^3 \\
 \mathcal{B}_2 &= (\mathcal{B}_{21}h_{11} + \mathcal{B}_{22}h_{21})\xi_1^3 + (\mathcal{B}_{21}h_{12} + \mathcal{B}_{23}h_{11} + \mathcal{B}_{22}h_{22} + \mathcal{B}_{24}h_{21})\xi_1^2\xi_2 \\
 &\quad + (\mathcal{B}_{21}h_{13} + \mathcal{B}_{23}h_{12} + \mathcal{B}_{22}h_{23} + \mathcal{B}_{24}h_{22})\xi_1\xi_2^2 + (\mathcal{B}_{23}h_{13} + \mathcal{B}_{24}h_{23})\xi_2^3
 \end{aligned}$$

$$\Theta_{32} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (\mathcal{B}_{11}h_{11} + \mathcal{B}_{12}h_{21}) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{11}h_{13} + \mathcal{B}_{13}h_{12} + \mathcal{B}_{12}h_{23} + \mathcal{B}_{14}h_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}h_{12} + \mathcal{B}_{13}h_{11} + \mathcal{B}_{12}h_{22} + \mathcal{B}_{14}h_{21} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{14}h_{13} + \mathcal{B}_{14}h_{23} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (\mathcal{B}_{21}h_{11} + \mathcal{B}_{22}h_{21}) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{21}h_{13} + \mathcal{B}_{13}h_{12} + \mathcal{B}_{22}h_{23} + \mathcal{B}_{24}h_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{21}h_{12} + \mathcal{B}_{23}h_{11} + \mathcal{B}_{22}h_{22} + \mathcal{B}_{24}h_{21} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{24}h_{13} + \mathcal{B}_{24}h_{23} \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{11} &= p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 & \mathcal{B}_{12} &= p_1^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \\
 \mathcal{B}_{13} &= p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 & \mathcal{B}_{14} &= p_2^T (q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \\
 \mathcal{B}_{21} &= p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 & \mathcal{B}_{22} &= p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \\
 \mathcal{B}_{23} &= p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 & \mathcal{B}_{24} &= p_2^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2
 \end{aligned}$$

El tercer término de (4.9)

$$\begin{aligned}
 Dh_3(\xi) J_0 \xi &= \begin{pmatrix} 3\eta_{11}\xi_1^2 + 2\eta_{12}\xi_1\xi_2 + \eta_{13}\xi_2^2 & 3\eta_{12}\xi_1^2 + 2\eta_{13}\xi_1\xi_2 + \eta_{14}\xi_2^2 \\ 3\eta_{21}\xi_1^2 + 2\eta_{22}\xi_1\xi_2 + \eta_{23}\xi_2^2 & 3\eta_{22}\xi_1^2 + 2\eta_{23}\xi_1\xi_2 + \eta_{24}\xi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\eta_{11}\xi_1^2 + 2\eta_{12}\xi_1\xi_2 + \eta_{13}\xi_2^2 & 3\eta_{12}\xi_1^2 + 2\eta_{13}\xi_1\xi_2 + \eta_{14}\xi_2^2 \\ 3\eta_{21}\xi_1^2 + 2\eta_{22}\xi_1\xi_2 + \eta_{23}\xi_2^2 & 3\eta_{22}\xi_1^2 + 2\eta_{23}\xi_1\xi_2 + \eta_{24}\xi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega\xi_2 \\ \omega\xi_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \omega\eta_{12}\xi_1^3 + (-3\omega\eta_{11} + 2\omega\eta_{13})\xi_1^2\xi_2 + (-2\omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{14})\xi_1\xi_2^2 - \omega\eta_{13}\xi_2^3 \\ \omega\eta_{22}\xi_1^3 + (-3\omega\eta_{21} + 2\omega\eta_{23})\xi_1^2\xi_2 + (-2\omega\eta_{22} + 3\omega\eta_{24})\xi_1\xi_2^2 - \omega\eta_{23}\xi_2^3 \end{pmatrix} \\
 &= \xi^T \xi^T \Theta_{35} \xi
 \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_{33} = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} \omega\eta_{12} & 0 \\ 0 & -2\omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{14} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} -3\omega\eta_{11} + 2\omega\eta_{13} & 0 \\ 0 & -\omega\eta_{13} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \omega\eta_{22} & 0 \\ 0 & -2\omega\eta_{22} + 3\omega\eta_{24} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} -3\omega\eta_{21} + 2\omega\eta_{23} & 0 \\ 0 & -\omega\eta_{23} \end{array} \right) \end{bmatrix}.$$

El cuarto y último término de (4.9)

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{6}V^T[W \bullet D^3 f(x_0, \mu_0)]V + V^T[W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)]p_3 \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1^1 \\ \mathcal{G}_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1^2 \\ \mathcal{G}_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \xi^T \xi^T \Theta_{37}^1 \xi + \xi^T \xi^T \Theta_{37}^2 \xi, \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_{34}^1 = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{11}^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{12}^1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{13}^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{14}^1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{21}^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{22}^1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{23}^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{24}^1 \end{array} \right) \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{34}^2 = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{11}^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{12}^2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{13}^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{14}^2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{21}^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{22}^2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{G}_{23}^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{24}^2 \end{array} \right) \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_1^1 &= (p_1^T(p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1)\xi_1^3 + (p_2^T(p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2)\xi_2^3 \\
 &\quad + (p_1^T(p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_1^T(p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1 \\
 &\quad + p_2^T(p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1)\xi_1^2\xi_2 + (p_1^T(p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 \\
 &\quad + p_2^T(p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_2^T(p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1)\xi_1\xi_2^2 \\
 \mathcal{G}_2^1 &= (p_1^T(p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1)\xi_1^3 + (p_2^T(p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2)\xi_2^3 \\
 &\quad + (p_1^T(p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_1^T(p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1 \\
 &\quad + p_2^T(p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1)\xi_1^2\xi_2 + (p_1^T(p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 \\
 &\quad + p_2^T(p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_2^T(p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1)\xi_1\xi_2^2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_2^2 &= (H_{11}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_1^3 + (H_{22}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_2^3 \\
 &\quad + (2H_{12}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + H_{11}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_1^2\xi_2 \\
 &\quad + (H_{22}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + 2H_{12}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_1\xi_2^2 \\
 \mathcal{G}_2^2 &= (H_{11}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_1^3 + (H_{22}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_2^3 \\
 &\quad + (2H_{12}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + H_{11}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_1^2\xi_2 \\
 &\quad + (H_{22}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + 2H_{12}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3)\xi_1\xi_2^2.
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{12}^2 &= H_{22}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + 2H_{12}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{13}^2 &= 2H_{12}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + H_{11}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{22}^2 &= H_{22}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + 2H_{12}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{23}^2 &= 2H_{12}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + H_{11}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{11}^2 &= H_{11}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{14}^2 &= H_{22}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{21}^2 &= H_{11}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\
 \mathcal{G}_{24}^2 &= H_{22}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3.
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{12}^1 &= p_1^T (p_2^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 + p_2^T (p_1^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 \\
 &\quad + p_2^T (p_2^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 \mathcal{G}_{13}^1 &= p_1^T (p_1^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 + p_1^T (p_2^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 &\quad + p_2^T (p_1^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 \mathcal{G}_{22}^1 &= p_1^T (p_2^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 + p_2^T (p_1^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 \\
 &\quad + p_2^T (p_2^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 \mathcal{G}_{23}^1 &= p_1^T (p_1^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 + p_1^T (p_2^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 &\quad + p_2^T (p_1^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 \mathcal{G}_{14}^1 &= p_2^T (p_2^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 \\
 \mathcal{G}_{11}^1 &= p_1^T (p_1^T (q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1 \\
 \mathcal{G}_{24}^1 &= p_2^T (p_2^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_2 \\
 \mathcal{G}_{21}^1 &= p_1^T (p_1^T (q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))) p_1.
 \end{aligned}$$

Por lo que (4.9) está dado por

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_3 &= \Theta_{31} + \Theta_{32} + \Theta_{33} + \Theta_{34}^1 + \Theta_{34}^2 \\
 &= \Theta_3
 \end{aligned}$$

donde

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \left(\left(\begin{array}{cc} \Theta_{31}^1 & 0 \\ 0 & \Theta_{32}^1 \end{array} \right) \right) \\ \left(\left(\begin{array}{cc} \Theta_{33}^1 & 0 \\ 0 & \Theta_{34}^1 \end{array} \right) \right) \\ \left(\left(\begin{array}{cc} \Theta_{31}^2 & 0 \\ 0 & \Theta_{32}^2 \end{array} \right) \right) \\ \left(\left(\begin{array}{cc} \Theta_{33}^2 & 0 \\ 0 & \Theta_{34}^2 \end{array} \right) \right) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \Theta_{32}^1 &= -\omega\eta_{23} + 2\omega\eta_{12} - 3\omega\eta_{14} + \Upsilon_{12}^1, & \Theta_{31}^2 &= \omega\eta_{11} - \omega\eta_{22} + \Upsilon_{11}^2 \\
 \Theta_{33}^1 &= -\omega\eta_{22} + 3\omega\eta_{11} - 2\omega\eta_{13} + \Upsilon_{13}^1, & \Theta_{34}^2 &= \omega\eta_{14} + \omega\eta_{23} + \Upsilon_{14}^2 \\
 \Theta_{32}^2 &= \omega\eta_{13} + 2\omega\eta_{22} - 3\omega\eta_{24} + \Upsilon_{12}^2, & \Theta_{31}^1 &= -\omega\eta_{21} - \omega\eta_{12} + \Upsilon_{11}^1 \\
 \Theta_{33}^2 &= \omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{21} - 2\omega\eta_{23} + \Upsilon_{13}^2, & \Theta_{34}^1 &= -\omega\eta_{24} + \omega\eta_{13} + \Upsilon_{14}^1.
 \end{aligned}$$

Ahora si podemos resolver (4.12)

$$\Theta_3 = \Theta_N$$

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} \Theta_{31}^1 & 0 \\ 0 & \Theta_{32}^1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \Theta_{33}^1 & 0 \\ 0 & \Theta_{34}^1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \Theta_{31}^2 & 0 \\ 0 & \Theta_{32}^2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \Theta_{33}^2 & 0 \\ 0 & \Theta_{34}^2 \end{array} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} l_1 & 0 \\ 0 & l_1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} -b & 0 \\ 0 & -b \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} b & 0 \\ 0 & b \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} l_1 & 0 \\ 0 & l_1 \end{array} \right) \end{bmatrix},$$

de donde podemos ver

$$\begin{aligned} -\omega\eta_{21} - \omega\eta_{12} + \Upsilon_{11}^1 &= -\omega\eta_{23} + 2\omega\eta_{12} - 3\omega\eta_{14} + \Upsilon_{12}^1 \\ \omega\eta_{11} - \omega\eta_{22} + \Upsilon_{11}^2 &= \omega\eta_{13} + 2\omega\eta_{22} - 3\omega\eta_{24} + \Upsilon_{12}^2 \\ -\omega\eta_{24} + \omega\eta_{13} + \Upsilon_{14}^1 &= -\omega\eta_{22} + 3\omega\eta_{11} - 2\omega\eta_{13} + \Upsilon_{13}^1 \\ \omega\eta_{14} + \omega\eta_{23} + \Upsilon_{14}^2 &= \omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{21} - 2\omega\eta_{23} + \Upsilon_{13}^2, \end{aligned}$$

resolviendo, llegamos a que existe $h_3(\xi)$ tal que

$$\begin{aligned} (\eta_{23} - \eta_{21}) &= \frac{1}{8\omega} (-3(\Upsilon_{14}^2 - \Upsilon_{13}^2) - (\Upsilon_{12}^1 - \Upsilon_{11}^1)) \\ (\eta_{12} - \eta_{14}) &= \frac{1}{8\omega} (3(\Upsilon_{11}^1 - \Upsilon_{12}^1) - (\Upsilon_{14}^2 - \Upsilon_{13}^2)) \\ (\eta_{24} - \eta_{22}) &= \frac{1}{8\omega} (3(\Upsilon_{12}^2 - \Upsilon_{11}^2) + (\Upsilon_{13}^1 - \Upsilon_{14}^1)) \\ (\eta_{13} - \eta_{11}) &= \frac{1}{8\omega} (3(\Upsilon_{13}^1 - \Upsilon_{14}^1) - (\Upsilon_{12}^2 - \Upsilon_{11}^2)), \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11}^1 &= h_{11}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{11}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + H_{11}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + p_1^T p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{12}^1 &= h_{12}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{13}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\ &\quad + h_{13}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 + h_{12}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + H_{22}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + 2H_{12}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\ &\quad + p_1^T p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_2^T p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + p_2^T p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{13}^1 &= h_{11}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{12}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\ &\quad + h_{12}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 + h_{11}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + 2H_{12}p_1^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + H_{11}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\ &\quad + p_1^T p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_1^T p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1 \\ &\quad + p_2^T p_1^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{14}^1 &= h_{13}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{13}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + H_{22}p_2^T(q_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + p_2^T p_2^T(q_1 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11}^2 &= +h_{11}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{11}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + H_{11}p_1^T(q_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + p_1^T p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{12}^2 &= +h_{12}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{13}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \\ &\quad + h_{13}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 + h_{12}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + H_{22}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + 2H_{12}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\ &\quad + p_1^T p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_2^T p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + p_2^T p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{13}^2 &= h_{11}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{12}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 \quad (4.33) \\ &\quad + h_{12}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 + h_{11}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \\ &\quad + 2H_{12}p_1^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + H_{11}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 \\ &\quad + p_1^T p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2 + p_1^T p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1 \\ &\quad + p_2^T p_1^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{14}^2 &= h_{13}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_1 + h_{13}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_2 \quad (4.34) \\ &\quad + H_{22}p_2^T(q_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))p_3 + p_2^T p_2^T(q_2 \bullet D^3 f(x_0, \mu_0))p_2, \end{aligned}$$

Con esto, hemos demostrado el siguiente

Lema 4.1.4. *Sea (4.30), entonces existe $h_3(\xi)$ definido por (4.29) tal que $\overline{R}_3(\xi, \xi, \xi) = N(\xi, \xi, \xi)$.*

Ahora, para el primer coeficiente de Lyapunov

Lema 4.1.5. *Si definimos*

$$R_3 = W \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)(V, p_3) + W \bullet D^3 f(x_0, \mu_0)(V, V, V),$$

entonces el primer coeficiente de Lyapunov viene dado por

$$l_1 = \frac{1}{32} (3\Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{13}^2 + \Upsilon_{12}^1 + 3\Upsilon_{11}^1),$$

donde $\Upsilon_{11}^1, \Upsilon_{12}^1, \Upsilon_{13}^2, \Upsilon_{14}^2$ vienen dados por (4.31-4.34) respectivamente

Capítulo 4

Demostración. De (4.26),

$$T_2 = \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \bar{R}_3 \quad \text{y} \quad \bar{R}_3 = \begin{pmatrix} \bar{R}_{31} \\ \bar{R}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\xi_1^3 + \gamma_{12}\xi_1^2\xi_2 + \gamma_{13}\xi_1\xi_2^2 + \gamma_{14}\xi_2^3 \\ \gamma_{21}\xi_1^3 + \gamma_{22}\xi_1^2\xi_2 + \gamma_{23}\xi_1\xi_2^2 + \gamma_{24}\xi_2^3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -\omega\eta_{21} - \omega\eta_{12} + \Upsilon_{11}^1 \\ \gamma_{12} &= -\omega\eta_{22} + 3\omega\eta_{11} - 2\omega\eta_{13} + \Upsilon_{13}^1 \\ \gamma_{13} &= -\omega\eta_{23} + 2\omega\eta_{12} - 3\omega\eta_{14} + \Upsilon_{12}^1 \\ \gamma_{14} &= -\omega\eta_{24} + \omega\eta_{13} + \Upsilon_{14}^1 \\ \gamma_{21} &= \omega\eta_{11} - \omega\eta_{22} + \Upsilon_{11}^2 \\ \gamma_{22} &= \omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{21} - 2\omega\eta_{23} + \Upsilon_{13}^2 \\ \gamma_{23} &= \omega\eta_{13} + 2\omega\eta_{22} - 3\omega\eta_{24} + \Upsilon_{12}^2 \\ \gamma_{24} &= \omega\eta_{14} + \omega\eta_{23} + \Upsilon_{14}^2. \end{aligned}$$

Por (4.25) tenemos

$$T_2 = (\bar{R}_{31})_{\xi_1, \xi_1, \xi_1} + (\bar{R}_{31})_{\xi_1, \xi_2, \xi_2} + (\bar{R}_{32})_{\xi_1, \xi_1, \xi_2} + (\bar{R}_{32})_{\xi_2, \xi_2, \xi_2},$$

donde

$$\begin{aligned} (\bar{R}_{31})_{\xi_1, \xi_1, \xi_1} &= -\omega\eta_{21} - \omega\eta_{12} + \Upsilon_{11}^1 \\ (\bar{R}_{31})_{\xi_1, \xi_2, \xi_2} &= -\omega\eta_{23} + 2\omega\eta_{12} - 3\omega\eta_{14} + \Upsilon_{12}^1 \\ (\bar{R}_{32})_{\xi_1, \xi_1, \xi_2} &= \omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{21} - 2\omega\eta_{23} + \Upsilon_{13}^2 \\ (\bar{R}_{32})_{\xi_2, \xi_2, \xi_2} &= \omega\eta_{14} + \omega\eta_{23} + \Upsilon_{14}^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} T_2 &= -\omega\eta_{21} - \omega\eta_{12} - \omega\eta_{23} + 2\omega\eta_{12} - 3\omega\eta_{14} + \omega\eta_{12} + 3\omega\eta_{21} \\ &\quad - 2\omega\eta_{23} + \omega\eta_{14} + \omega\eta_{23} + \Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{11}^1 + \Upsilon_{12}^1 + \Upsilon_{13}^2 \\ &= 2\omega\eta_{21} + \omega\eta_{12} - \omega\eta_{14} - \omega\eta_{23} + \Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{11}^1 + \Upsilon_{12}^1 + \Upsilon_{13}^2 \\ &= -2\omega(\eta_{23} - \eta_{21}) + 2\omega(\eta_{12} - \eta_{14}) + \Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{11}^1 + \Upsilon_{12}^1 + \Upsilon_{13}^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo $(\eta_{23} - \eta_{21})$ y $(\eta_{12} - \eta_{14})$ de (4.30)

$$\begin{aligned} T_2 &= -2\omega \left[\frac{-3}{8\omega} (\Upsilon_{14}^2 - \Upsilon_{13}^2) - \frac{1}{8\omega} (\Upsilon_{12}^1 - \Upsilon_{11}^1) \right] \\ &\quad + 2\omega \left[\frac{-1}{8\omega} (\Upsilon_{14}^2 - \Upsilon_{13}^2) + \frac{3}{8\omega} (\Upsilon_{11}^1 - \Upsilon_{12}^1) \right] + \Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{11}^1 + \Upsilon_{12}^1 + \Upsilon_{13}^2 \\ &= \frac{3}{4} (\Upsilon_{14}^2 - \Upsilon_{13}^2) + \frac{1}{4} (\Upsilon_{12}^1 - \Upsilon_{11}^1) + \frac{1}{4} (\Upsilon_{14}^2 - \Upsilon_{13}^2) + \frac{3}{4} (\Upsilon_{11}^1 - \Upsilon_{12}^1) \\ &\quad + \Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{11}^1 + \Upsilon_{12}^1 + \Upsilon_{13}^2 \\ &= \frac{1}{2} (3\Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{13}^2) + \frac{1}{2} (\Upsilon_{12}^1 + 3\Upsilon_{11}^1), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$l_1 = \frac{1}{32} (3\Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{13}^2 + \Upsilon_{12}^1 + 3\Upsilon_{11}^1). \quad (4.35)$$

□

4.2. Teorema Principal

Teorema 4.2.1. *Dado el sistema no lineal $\dot{x} = f(x, \mu)$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ tal que satisface las condiciones*

H1) $f(x_0, \mu_0) = 0$.

H2) $\sigma[Df(x_0, \mu_0)] = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda_{1,2} = \pm i\omega, \operatorname{Re}(\lambda_3) \neq 0\}$.

H3) *La velocidad de cruce es*

$$d = \frac{1}{2} [(q_1 \bullet \mathcal{R})p_1 + (q_2 \bullet \mathcal{R})p_2] \neq 0,$$

donde

$$\mathcal{R} = D_{\mu x} f(x_0, \mu_0) - [(M_0 + I_3 m_1) D_{\mu} f(x_0, \mu_0)]^T D^2 f(x_0, \mu_0),$$

$$M_0 = V J_0^{-1} W \text{ y } m_1 = p_3 \lambda_3^{-1} q_3^T.$$

H4) *El primer coeficiente de Lyapunov es*

$$l_1 = \frac{1}{32} (3\Upsilon_{14}^2 + \Upsilon_{13}^2 + \Upsilon_{12}^1 + 3\Upsilon_{11}^1) \neq 0,$$

donde $\Upsilon_{11}^1, \Upsilon_{12}^1, \Upsilon_{13}^2, \Upsilon_{14}^2$ vienen dados por (4.31-4.34) respectivamente.

Entonces la variedad central bidimensional del sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$ es topológicamente equivalente de manera local a la deformación versal de la bifurcación de Hopf

$$\dot{\xi} = J_0 \xi + \lambda K \xi + N(\xi, \xi, \xi),$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$K = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N(\xi, \xi, \xi) = \begin{pmatrix} l_1 & -b \\ b & l_1 \end{pmatrix} |\xi|^2 \xi,$$

Capítulo 5

Aplicación: Una reacción química

En este capítulo abordaremos un problema de aplicación sobre una reacción química donde utilizaremos las nuevas reformulaciones para la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov que nos determinarán la estabilidad de esta bifurcación, usando el software científico maple 18 para obtener las simulaciones de los retratos fase.

En [9] Wilhelm y Heinrich descubren el “sistema de reacción química más pequeña”, que puede exhibir una bifurcación de Hopf. Al igual que el famoso sistema de Lorenz, es un sistema de tres dimensiones con sólo una única no linealidad cuadrática.

Este sistema viene dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1x - k_6xy \\ \dot{y} &= k_3z - k_2y \\ \dot{z} &= k_4x - k_3z,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $k_i > 0$, $1 \leq i \leq 6$ y $k_1 = kA - k_4$, donde A es la concentración de “la reactante exterior de la reacción autocatalítica”. k_i son constantes de velocidad y k no tiene que ser positivo. Las variables x , y y z denotan concentraciones y por tanto son no negativas.

El reescalamiento $\bar{x} = \frac{x}{a}$, $\bar{y} = \frac{y}{b}$, $\bar{z} = \frac{z}{c}$ y la elección $k_6b = 1$, $k_3c = k_2b$, $k_4a = k_3c$ conduce al sistema

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= k_1\bar{x} - \bar{x}\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} &= k_2(\bar{z} - \bar{y}) \\ \dot{\bar{z}} &= k_3(\bar{x} - \bar{z}),\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde hemos omitido la barra sobre las variables por simplicidad.

Comenzando nuestro análisis.

Capítulo 5

El sistema cuenta con dos puntos de equilibrio

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad (x_0, y_0, z_0) = (k_1, k_1, k_1).$$

La Jacobiana del sistema es

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} k_1 - y & -x & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_3 \end{pmatrix},$$

la cual, valuada en el equilibrio $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$Df(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} k_1 - y & -x & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_3 \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = -k_2$ y $\lambda_3 = -k_3$ por lo que podemos ver que no cuenta con dos valores propios imaginarios y uno real. Contrario a lo que pasa en el equilibrio $(x_0, y_0, z_0) = (k_1, k_1, k_1)$, donde la Jacobiana valuada es

$$Df(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_3 \end{pmatrix},$$

donde para obtener los valores propios deseados, hacemos $k_1 = k_2 + k_3$, teniendo así los valores propios siguientes: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k_2 k_3}$, $\lambda_3 = -k_2 - k_3$. Cumpliendo así las hipótesis H_1 y H_2 . Por lo que analizaremos este punto de equilibrio.

La matriz de vectores propios derechos es

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{k_2 k_3}(k_2 + k_3) & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 k_3 & -k_2 \\ k_3 \sqrt{k_2 k_3} & k_2 k_3 & k_3 \end{pmatrix},$$

y la de vectores izquierdos

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k_2 + k_3}{\sqrt{k_2 k_3}(k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2)} & -\frac{k_2}{\sqrt{k_2 k_3}(k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2)} & \frac{k_2}{\sqrt{k_2 k_3}(k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2)} \\ -\frac{1}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} & \frac{2k_2 + k_3}{k_2(k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2)} & \frac{k_2 + k_3}{k_3(k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2)} \\ -\frac{k_3}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} & -\frac{k_2 + k_3}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} & \frac{k_2 + k_3}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} \end{pmatrix}.$$

Teniendo cumplidas las hipótesis H_1) y H_2), procedemos a calcular la velocidad de cruce.

Para el cálculo de la velocidad cruce, aplicamos (4.22), por lo que la velocidad de cruce es

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{3k_2^2 + 5k_2 k_3 + 3k_3^2}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{k_2 k_3}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{k_2 k_3}{k_2^2 + 3k_2 k_3 + k_3^2} \end{pmatrix}.$$

Notamos que $d \neq 0$, entonces tenemos que hay bifurcación de Hopf. Más aún, en k_1 , la velocidad de cruce es positiva, es decir, $d_1 > 0$.

Ahora, procedemos a calcular el primer coeficiente de Lyapunov, para eso aplicamos la fórmula (4.35), por lo que el primer coeficiente de Lyapunov es

$$l_1 = -\frac{1}{576} \frac{1}{(k_2^2 + 3k_2k_3 + k_3^2)^2 \sqrt{k_2k_3} (k_2^2 + 6k_2k_3 + k_3^2) (k_2 + k_3)} \left(k_2 \left(16\sqrt{k_2k_3} k_2^7 k_3^2 \right. \right. \\ + 160\sqrt{k_2k_3} k_2^6 k_3^3 + 496\sqrt{k_2k_3} k_2^5 k_3^4 + 704\sqrt{k_2k_3} k_2^4 k_3^5 + 496\sqrt{k_2k_3} k_2^3 k_3^6 \\ + 160\sqrt{k_2k_3} k_2^2 k_3^7 + 16\sqrt{k_2k_3} k_2 k_3^8 + 315\sqrt{k_2k_3} k_2^6 k_3 - 18\sqrt{k_2k_3} k_2^3 k_3^3 \\ + 27\sqrt{k_2k_3} k_3^7 - 9\sqrt{k_2k_3} k_2^4 - 9\sqrt{k_2k_3} k_3^4 + 16\sqrt{k_2k_3} k_2^8 k_3^2 \\ + 158\sqrt{k_2k_3} k_2^7 k_3^3 + 494\sqrt{k_2k_3} k_2^6 k_3^4 + 804\sqrt{k_2k_3} k_2^5 k_3^5 + 804\sqrt{k_2k_3} k_2^4 k_3^6 \\ + 494\sqrt{k_2k_3} k_2^3 k_3^7 + 158\sqrt{k_2k_3} k_2^2 k_3^8 + 16k_2 k_3^9 + 1260\sqrt{k_2k_3} k_2^5 k_3^2 \\ + 2358\sqrt{k_2k_3} k_2^4 k_3^3 + 2358\sqrt{k_2k_3} k_2^3 k_3^4 + 1260\sqrt{k_2k_3} k_2^2 k_3^5 + 315\sqrt{k_2k_3} k_2 k_3^6 \\ \left. \left. - 18\sqrt{k_2k_3} k_2 k_3^3 \right) + 9\sqrt{k_2k_3} k_2^2 k_3^2 \right).$$

Analizaremos lo que ocurre, antes durante y después del parámetro de bifurcación k_1 , ($k_1 = k_2 + k_3$).

Donde $d_1 > 0$ y $l_1 < 0$.

Con los siguiente valores:

$$k_1 < k_2 + k_3:$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 5 \\ k_3 &= 5 \\ k_1 &= 9.5 \end{aligned}$$

punto de equilibrio estable. (figura 5.1).

$$k_1 = k_2 + k_3:$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 5 \\ k_3 &= 5 \\ k_1 &= 10 \end{aligned}$$

punto de equilibrio estable. (figura 5.2).

$$k_1 > k_2 + k_3:$$

$$\begin{aligned}k_2 &= 5 \\k_3 &= 5 \\k_1 &= 10.5\end{aligned}$$

punto de equilibrio inestable, y surgimiento de la órbita periódica. (figura 5.3).

Con

$$d = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} \\ -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

y

$$l_1 = -\frac{4289}{76800}$$

En (figura 5.4) se pueden ver estos escenarios juntos en el espacio tridimensional.

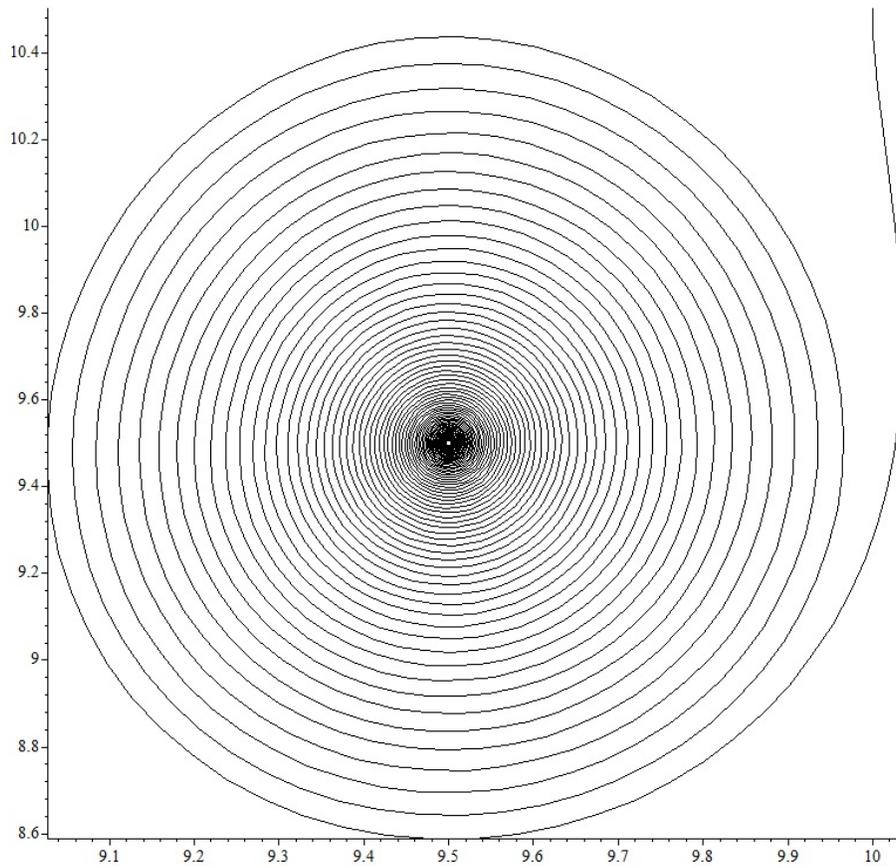


Figura 5.1: $k_1 < k_2 + k_3$: equilibrio estable (plano xy).

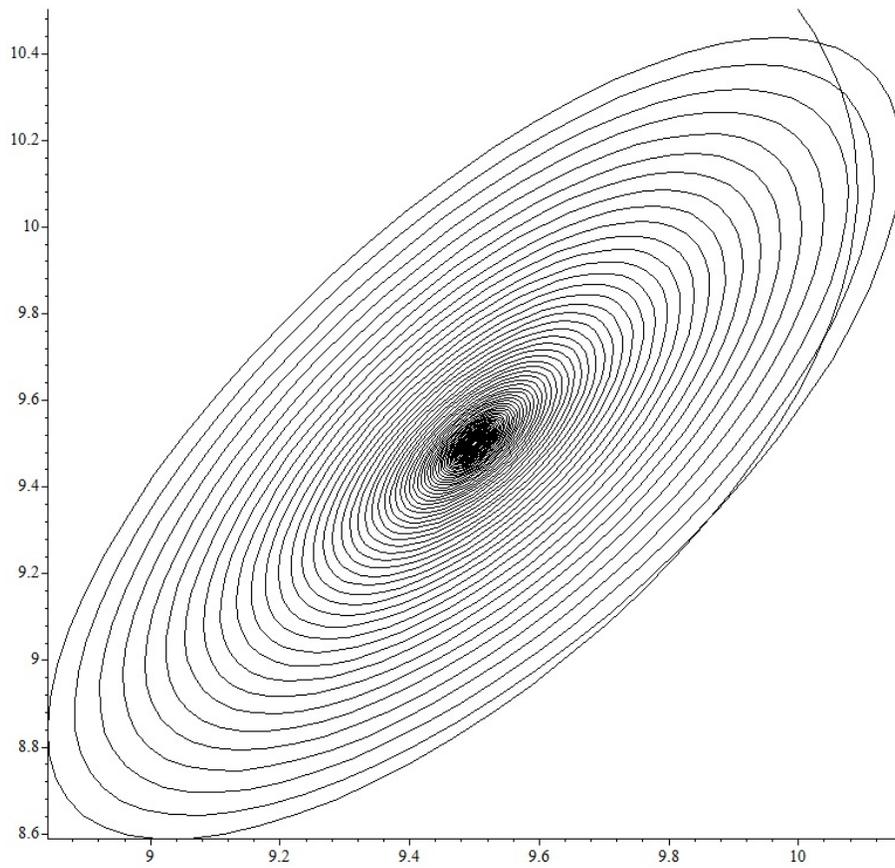


Figura 5.2: $k_1 = k_2 + k_3$: equilibrio estable (plano xz).

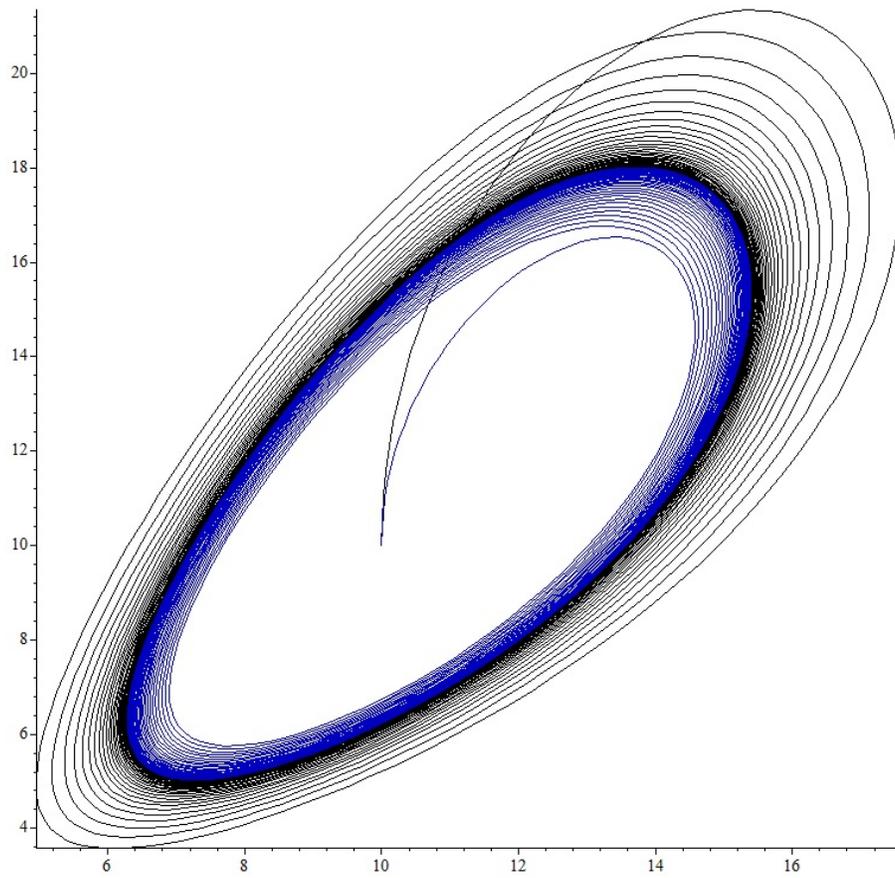


Figura 5.3: $k_1 > k_2 + k_3$: surgimiento de la órbita periódica, equilibrio inestable (plano yz).

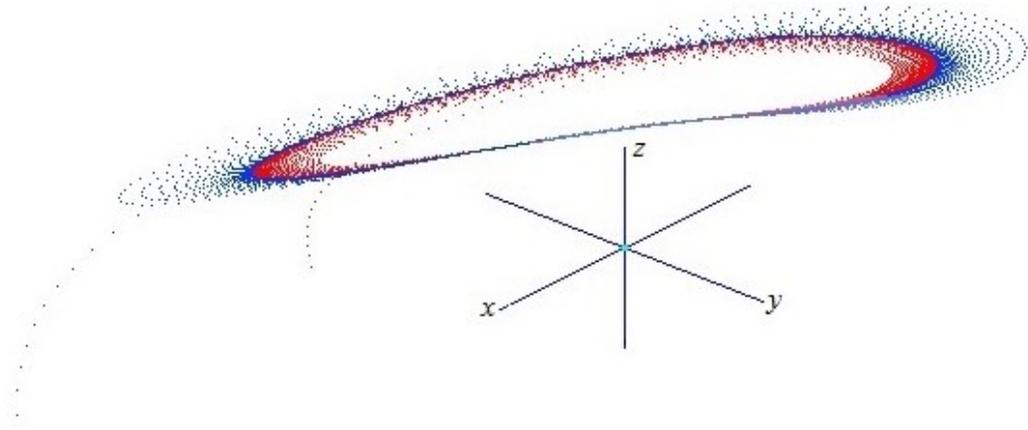


Figura 5.4: Bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3 .

Conclusiones

Se dieron las condiciones suficientes para que el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ y $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, $r \geq 3$, tenga una variedad central bidimensional topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación de Hopf

$$\dot{\xi} = J_0 \xi + \lambda K \xi + N(\xi, \xi, \xi),$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$K = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N(\xi, \xi, \xi) = \begin{pmatrix} l_1 & -b \\ b & l_1 \end{pmatrix} |\xi|^2 \xi,$$

donde d es la velocidad de cruce y l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov; en $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$. Además, se obtuvo una reformulación para los coeficientes de estabilidad d y l_1 .

La ventaja de dichas reformulaciones, es que dado un sistema no lineal, ya no será necesario calcular la variedad central, pues teniendo los coeficientes de estabilidad se podrá determinar si el sistema sufre la bifurcación de Hopf, más aún, se tendrá la dirección y estabilidad del ciclo límite. El coeficiente de la velocidad de cruce es fundamental para que en un sistema no lineal ocurra la bifurcación de Hopf, pues es el que nos indica hacia donde se mueven los parámetros, sin ello no sería posible la bifurcación, es por eso que debe ser cero.

Se hizo el análisis de esta bifurcación en un sistema tridimensional porque aún en esta dimensión es posible visualizar la dinámica del sistema.

Finalmente, los resultados obtenidos del análisis de este trabajo se resumen en el teorema principal (4.2.1)

Apéndice

Desarrollo para encontrar la forma normal de la bifurcación de Hopf

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= d\mu x - (c\mu + \omega)y + f_1(x, y) \\ \dot{y} &= (c\mu + \omega)x + d\mu y + f_2(x, y),\end{aligned}\tag{5.3}$$

donde f_1 y f_2 son la parte no lineal de \dot{x} y \dot{y} respectivamente. Este sistema lo podemos representar de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\mu & -c\mu - \omega \\ c\mu + \omega & d\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.\tag{5.4}$$

Hagamos $z = x + iy$, entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\tag{5.5}$$

y multiplicando (5.5) por la izquierda por la inversa de la matriz 2×2 obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.\tag{5.6}$$

Ahora, usando (5.4), (5.5) y (5.6) calculamos

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} d\mu & -c\mu - \omega \\ c\mu + \omega & d\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) \\ F_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} d\mu + (c\mu + \omega)i & d\mu - (c\mu + \omega)i \\ c\mu + \omega - d\mu i & c\mu + \omega + d\mu i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) \\ F_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} d\mu + (c\mu + \omega)i & 0 \\ 0 & d\mu - (c\mu + \omega)i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) + iF_2(z, \bar{z}) \\ F_1(z, \bar{z}) - iF_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.7}$$

donde

$$\begin{aligned}F_1(z, \bar{z}) &= f_1\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})\right), \\ F_2(z, \bar{z}) &= f_2\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})\right).\end{aligned}$$

Ahora, usando tenemos que

$$m_1(\lambda) + m_2(\bar{\lambda}) = \lambda_j,$$

donde $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ y $m_1 + m_2 = r \geq 2$. Entonces para $j = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} m_1(d\mu + (c\mu + \omega)i) + m_2(d\mu - (c\mu + \omega)i) &= d\mu + (c\mu + \omega)i \\ d\mu(m_1 + m_2) + (c\mu + \omega)(m_1 - m_2)i &= d\mu + (c\mu + \omega)i \end{aligned} \quad (5.9)$$

y vemos que para que se cumpla la igualdad en (5.9) se tiene que cumplir que $m_1 + m_2 = 1$ y $m_1 - m_2 = 1$, pero tenemos que $m_1 + m_2 = r \geq 2$, por lo tanto, sólo consideramos la parte imaginaria en la ecuación (5.9), así

$$(c\mu + \omega)(m_1 - m_2)i = (c\mu + \omega)i,$$

de donde podemos obtener que $m_1 - m_2 = 1$, entonces $m_1 = m_2 + 1$, lo que implica que $z^{k+1}\bar{z}^k e_1$ son los términos correspondientes a $F_1(z, \bar{z})$. Realizando un procedimiento similar obtenemos que para $j = 2$ los términos correspondientes a $F_2(z, \bar{z})$ son $z^k \bar{z}^{k+1} e_2$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(z, \bar{z}) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^{k+1} \bar{z}^k \\ \mathcal{F}_2(z, \bar{z}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k z^k \bar{z}^{k+1} = \bar{\mathcal{F}}_1(z, \bar{z}), \end{aligned}$$

donde $C_k = l_k + b_k i$. Como en la bifurcación de Hopf solamente nos interesan términos hasta de orden 3, tomamos $k = 1$ y usando (5.6), (5.8) y (5.5), tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} d\mu + (c\mu + \omega)i & 0 \\ 0 & d\mu - (c\mu + \omega)i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, \bar{z}) \\ \mathcal{F}_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} d\mu & -c\mu - \omega \\ c\mu + \omega & d\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(z, \bar{z}) + \mathcal{F}_2(z, \bar{z}) \\ (-\mathcal{F}_1(z, \bar{z}) + \mathcal{F}_2(z, \bar{z}))i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d\mu & -c\mu - \omega \\ c\mu + \omega & d\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Cz^2\bar{z} + \bar{C}z\bar{z}^2 \\ (-Cz^2\bar{z} + \bar{C}z\bar{z}^2)i \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

en donde

$$\begin{aligned} Cz^2\bar{z} + \bar{C}z\bar{z}^2 &= (l_1 + b_i)(x + yi)^2(x - yi) + (l_1 - b_i)(x + yi)(x - yi)^2 \\ &= (l_1 + b_i)(x^2 + y^2)(x + yi) + (l_1 - b_i)(x^2 + y^2)(x - yi) \\ &= [(l_1x - by) + (bx + l_1y)i + (l_1x - by) - (l_1y + bx)i](x^2 + y^2) \\ &= 2(l_1x - by)(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

De manera similar podemos probar que

$$Cz^2\bar{z} + \bar{C}z\bar{z}^2 = -2(l_1y + bx)(x^2 + y^2)i,$$

de esta forma el sistema (5.11) es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\mu & -c\mu - \omega \\ c\mu + \omega & d\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(l_1x - by)(x^2 + y^2) \\ -2(l_1y + bx)(x^2 + y^2)i \end{pmatrix},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (d\mu + l_1(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ \dot{y} &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x - (d\mu + l_1(x^2 + y^2))y. \end{aligned} \quad (5.12)$$

El sistema (5.12) es la forma normal de orden 3 del sistema original (5.3).

Bibliografía

- [1] Y.A. Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Sciences, Vol. 112. Springer. Second Edition. 2000.
- [2] S. Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Texts in Applied Mathematics. Vol. 2. Springer-Verlag. Second Edition. 2003.
- [3] J. Guckenheimer y P. Holmes. Nonlinear oscillations, Dynamical systems, y bifurcations of vector fields. Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag. 1993.
- [4] S. Chow, C. Li and D. Wang. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge University Press. 1994.
- [5] Hal L. Smith. Global dynamics of the smallest chemical reaction system with Hopf bifurcation. Vol. 50. Springer. 2012.
- [6] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics, vol. 7. Springer, Second Edition. 1996.
- [7] J. Carr. Applications of Center Manifold Theory. Springer-Verlag. 1981.
- [8] F. Verduzco. Advanced Topics in Nonlinear Chaotic Systems: A collection of papers, chapter 3: On a Formula for the Cross Speed at the Hopf Bifurcation. E. Zeravolic. WAP Lambert Academic Publishing. 2012.
- [9] T. Wilhelm, R. Heinrich. Smallest chemical reaction system with Hopf bifurcation. J. Math. chem. 17, 1-14. 1995.