"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Convergencia Débil y Compacidad en Espacios de Medidas de Probabilidad

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Luis Andrés Burruel Durán

Director de tesis: Dr. Fernando Luque Vásquez.

Hermosillo, Sonora, México, Junio de 2023

SINODALES

Dra. Carmen Geraldi Higuera Chan
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Óscar Vega Amaya
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo recibido para la realización de este trabajo por medio del proyecto Ciencia Frontera 87787 "Juegos estocásticos de grandes poblaciones".

Agradecimientos

Agradezco en gran manera a mi familia por su apoyo y amor incondicional durante mi vida, así como por sus consejos y ánimos. Sin ustedes no hubiera sido posible cursar esta carrera, y más importante aún, no sería la persona que soy.

A mi director de tesis, Dr. Fernando Luque Vásquez por haberme guiado en la realización de este trabajo con paciencia y dedicación, así como por su contribución en mi formación como matemático en una muy buena parte de la licenciatura.

Agradezco también a la Dra. Carmen Geraldi Higuera Chan, al Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa y al Dr. Óscar Vega Amaya por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, así como por cada uno de sus comentarios y sugerencias para la realización de este proyecto.

A todos mis compañeros y amigos de licenciatura, que hicieron esta etapa más amena. Gabriel, Hisaki, Chao, Nadia, Germán, quienes compartimos buenos momentos y algunas horas de estudio durante este proceso. También quiero agradecer a "Los punteros a NULL", esto es, Rodrigo, Juventino, Abraham y Héctor, quienes me acompañaron en mi último año de formación.

Muchas gracias a todos por haber sido parte de esta experiencia, verdaderamente reconozco que de alguna u otra forma contribuyeron a mi desarrollo como persona.

Por último, lo más importante, quiero expresar mi gratitud a ti, Dios. Muchas gracias por todas las oportunidades y personas que me haz puesto en este camino. Gracias Señor, pues a pesar de mis debilidades, y aún en ocasiones sin yo saberlo, fuiste siempre mi guía y mi sostén.

Soli Deo Gloria

Índice general

Introducción

Un concepto fundamental en topología, análisis matemático y sus aplicaciones es el de compacidad el cual juega, en particular, un papel central en los problemas de optimización. En diversos problemas de este tipo, resulta relevante considerar la compacidad en un espacio de medidas de probabilidad bajo cierta topología. Ejemplos de estos problemas se presentan en áreas como la teoría de juegos, teoría de control minimax, entre otras.

El objetivo principal de este trabajo es presentar los resultados básicos relacionados con la compacidad de conjuntos en un espacio de medidas de probabilidad bajo la llamada topología débil, así como los principales resultados sobre la convergencia correspondiente a esta topología. En particular se dan demostraciones del teorema de portmanteau y del teorema de Prokhorov.

En el primer capítulo se dará una exposición general de los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo y de otros temas relacionados. Se inicia describiendo algunas propiedades importantes de la σ-álgebra de Borel en un espacio métrico, después se dan algunas caracterizaciones importantes de la compacidad en espacios métricos, así como otros resultados relacionados a este concepto. Posteriormente, se describen y se definen clases de medidas en espacios métricos, poniendo énfasis en las medidas de probabilidad y desarrollando algunas de las propiedades que estas adquieren al ser definidas en la σ-álgebra de Borel de un espacio métrico.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de la convergencia débil de medidas de probabilidad, así como una topología en donde la convergencia de sucesiones es equivalente a la débil. Se darán algunas condiciones en las que dicha topología es metrizable, así como una métrica que la induce y se prueba el teorema de portmanteau en el cual se presentan varias caracterizaciones de la convergencia débil. En el tercer capítulo se demuestra el teorema de Prokhorov el cual es uno de los resultados más importantes de este trabajo, probando además algunas de sus consecuencias.

Finalmente, en el capítulo 4 se analiza la compacidad y la σ-compacidad de ciertos subconjuntos de medidas de probabilidad, abordando además el caso especial cuando el espacio métrico es $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana usual.

En cuanto a las referencias, para el desarrollo de los temas relacionados a medidas de probabilidad y su convergencia se utilizaron principalmente las referencias [2, 3, 9, 12, 14]. Por otro lado, para aspectos de topología se consultaron en las referencias [4, 10, 11]. Para los resultados del capítulo 4 se consultó [8] y [13] y finalmente las referencias [1, 5–7] fueron utilizadas para complementar y realizar la investigación del tema.

Capítulo 1

Preliminares

Iniciamos este trabajo describiendo la σ-álgebra de Borel de un espacio métrico (X, d) así como algunas de sus propiedades, pues será esta la familia de subconjuntos de X en donde se definen distintas clases de medidas a lo largo de este trabajo. Se dan también caracterizaciones de la compacidad en espacios métricos, se introducen las familias continuas y semi-continuas y la relación que tienen con los conjuntos compactos y finalmente nos enfocaremos en el estudio de medidas de probabilidad definidas en espacios métricos.

1.1. La σ-álgebra de Borel

Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F}$ una familia arbitraria de subconjuntos de X. Definimos la *σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$* (denotada por $\sigma(\mathcal{F})$) como la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos en $\mathcal{F}$. En particular, definimos la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ como la σ-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de X y a cada elemento de $\mathcal{B}(X)$ se le llama boreliano. Puesto que $\mathcal{B}(X)$ es una familia cerrada bajo complementos y contiene a todos los abiertos, entonces $\mathcal{B}(X)$ contiene además a todos los subconjuntos cerrados de X.

Se define la familia de conjuntos G_δ como la familia de subconjuntos de X que pueden expresarse como la intersección numerable de conjuntos abiertos y se dice que un elemento de esta familia es un conjunto G_δ. Por otro lado, definimos la familia de conjuntos F_σ como la familia de subconjuntos de X que pueden expresarse como la unión numerable de conjuntos cerrados y se dice que un elemento de esta familia es un conjunto F_σ.

Observación 1.1.1. Todos los conjuntos G_δ y F_σ son borelianos. Además, si A es un G_δ entonces A^c es un F_σ y viceversa.

Ahora, consideremos un subconjunto A de X. A la función $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

se le llama la función *distancia de x al conjunto A*. De forma similar, para dos subconjuntos A, B de X definimos el número real $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A \text{ y } y \in B\}$.

Teorema 1.1.2. La función $d(\cdot, A)$ satisface la desigualdad

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{1.1}$$

Además, $d(\cdot, A)$ es uniformemente continua en X.

Demostración. Por la desigualdad del triángulo se tiene que para toda $z \in A$ y $x, y \in X$,

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Tomando el ínfimo sobre $z \in A$ se obtiene que

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

y de forma similar se obtiene $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$. Utilizando estas dos desigualdades se concluye que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

De esta desigualdad se sigue que la función $d(x, A)$ es uniformemente continua en X, pues si $d(x, y) < \varepsilon$, entonces $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < \varepsilon$. ■

Teorema 1.1.3. Todo subconjunto cerrado es G_δ y todo abierto es F_σ.

Demostración. Sea $A \subset X$ un subconjunto cerrado. Se probará primero que $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in A$. Si $d(x, A) = 0$, por la propiedad del ínfimo, se sigue que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $d(x, x_n) < 1/n$, es decir, $x_n \to x$ lo cual implica que x es un punto de acumulación de A y por lo tanto $x \in A$ puesto que A es cerrado. Por otro lado, es claro que si $x \in A$ entonces $d(x, A) = 0$.

De lo anterior, se tiene que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : d(x, A) < 1/n\}.$$

Por el Teorema 1.1.2 la función $h(x) = d(x, A)$ es continua, por ende $\{x \in X : d(x, A) < 1/n\}$ es un subconjunto abierto para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que A es G_δ.

Como el complemento de un subconjunto cerrado es un abierto, de la Observación 1.1.1 se sigue que todo abierto es F_σ. ■

Teorema 1.1.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\mathcal{B}(X)$ es la familia más pequeña de subconjuntos de X que contiene a todos los abiertos (cerrados) y que es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ la familia más pequeña de subconjuntos de X que contiene a todos lo subconjuntos abiertos y es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables. Probaremos que $\mathcal{D}$ es cerrada bajo complementos. Sea $\mathcal{D}'$ la clase de todos los subconjuntos A de X tales que $A^c \in \mathcal{D}$. Como todo subconjunto cerrado es un G_δ entonces todo cerrado pertenece a $\mathcal{D}$, lo cual implica que todo abierto pertenece a $\mathcal{D}'$. Como $\mathcal{D}'$ es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables, entonces $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ lo cual implica que $\mathcal{D}$ es cerrada bajo complementos. Así, se concluye que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D}$. ■

Teorema 1.1.5. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces, f es medible.

Demostración. Para cada abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X y por lo tanto pertenece a $\mathcal{B}(X)$. Consideremos ahora la familia $\mathcal{F} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)\}$. Entonces, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra en Y y por lo anterior, se tiene que todo abierto está contenido en $\mathcal{F}$ lo cual implica que $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{F}$. De esto, se sigue que para todo boreliano $B \subset Y$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$. ■

Teorema 1.1.6. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X y $F \subset X$. Entonces, $\sigma(\mathcal{A} \cap F) = \sigma(\mathcal{A}) \cap F$, donde $\sigma(\mathcal{A} \cap F)$ es la σ-álgebra de subconjuntos de F generada por $\{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$.

Demostración. $\sigma(\mathcal{A}) \cap F = \{H \cap F : H \in \sigma(\mathcal{A})\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de F que contiene a $\mathcal{A} \cap F$ y por lo tanto $\sigma(\mathcal{A} \cap F) \subset \sigma(\mathcal{A}) \cap F$. Recíprocamente, se tiene que $\{H \in \sigma(\mathcal{A}) : H \cap F \in \sigma(\mathcal{A} \cap F)\}$ es una σ-álgebra contenida en $\sigma(\mathcal{A})$ que a su vez contiene a $\mathcal{A}$, coincidiendo así con $\sigma(\mathcal{A})$, por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}) \cap F \subset \sigma(\mathcal{A} \cap F)$. ■

Corolario 1.1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$. Entonces, $\mathcal{B}(Y) = \{E \cap Y : E \in \mathcal{B}(X)\}$. En particular, si Y es un boreliano en X, entonces $\mathcal{B}(Y)$ es la familia de todos los subconjuntos de Y que son borelianos en X.

Demostración. $\mathcal{B}(Y)$ es la σ-álgebra de Borel en el subespacio Y, esto es, la σ-álgebra generada por la familia de abiertos en Y, los cuales son de la forma $A \cap Y$, donde A es un abierto en X. Denotando τ_d como el conjunto de todos los abiertos en X, se tiene que $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\tau_d \cap Y) = \sigma(\tau_d) \cap Y$. Por otro lado, notemos que si $Y \in \mathcal{B}(X)$ y $E \in \mathcal{B}(X)$, entonces $E \cap Y \in \mathcal{B}(X)$. ■

Lema 1.1.8. Si X es un espacio métrico separable, entonces $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra generada por las bolas abiertas (cerradas) de X.

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra generada por las bolas abiertas (cerradas) de X es claro que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$. Sea D un subconjunto denso numerable en X, y sea $U \subset X$ un abierto. Para $x \in U$, tomamos $r > 0$, con $r \in \mathbb{Q}_+$ tal que $B(x, r) \subset U$. Como D es un subconjunto denso, existe $y_x \in D \cap B(x, r/3)$. Así, $x \in B(y_x, r/2) \subset B(x, r)$. Tomando $r_x = r/2$ se obtiene que

$$U = \bigcup_{x \in U} B(y_x, r_x).$$

Puesto que $\{y_x : x \in U\} \subset D$ es un conjunto numerable, esto implica que $U \in \mathcal{A}$ y como U es un subconjunto abierto arbitrario se concluye que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. ■

Teorema 1.1.9 (Lema de Urysohn). Si X es un espacio métrico y A y B son dos conjuntos cerrados disjuntos de X, entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(a) $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$;

(b) $f(x) = 0$ para $x \in A$, $f(x) = 1$ para $x \in B$.

Además, si $\inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) = \delta > 0$, entonces se puede escoger una función f uniformemente continua.

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Es sencillo verificar las primeras dos condiciones.

Para verificar la continuidad uniforme, utilizando la desigualdad (1.1) se tiene que

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} - \frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,B)}\right|$$

$$= \left|\frac{d(x,A)(d(y,A)+d(y,B)) - d(y,A)(d(x,A)+d(x,B))}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}\right|$$

$$= \left|\frac{d(x,A)d(y,B) - d(y,A)d(x,B)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}\right|$$

$$= \left|\frac{d(x,A)d(y,B) - d(y,A)d(y,B) + d(y,A)d(y,B) - d(y,A)d(x,B)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}\right|$$

$$= \left|\frac{d(y,B)(d(x,A)-d(y,A)) + d(y,A)(d(y,B)-d(x,B))}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}\right|$$

$$\leq \left|\frac{d(y,B)(d(x,A)-d(y,A))}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}\right| + \left|\frac{d(y,A)(d(y,B)-d(x,B))}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}\right|$$

$$\leq \frac{d(y,B)|d(x,A)-d(y,A)|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} + \frac{d(y,A)|d(y,B)-d(x,B)|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}$$

$$\leq \frac{d(y,B)d(x,y)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} + \frac{d(y,A)d(x,y)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))}$$

$$= \frac{d(x,y)}{d(x,A)+d(x,B)} \implies |f(x)-f(y)| \leq \frac{d(x,y)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

Si $\inf_{x\in A, y\in B} d(x,y) = \delta > 0$, entonces para $a \in A$, $b \in B$ y $x \in X$ cualesquiera se tiene que

$$0 < \delta \leq d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b),$$

de donde se sigue que

$$0 < \delta \leq d(x,A) + d(x,B)$$

y por lo tanto

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{d(x,y)}{d(x,A)+d(x,B)} \leq \frac{d(x,y)}{\delta}.$$

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario se tiene que si $d(x,y) < \varepsilon\delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ concluyendo así que f es uniformemente continua. ∎

Teorema 1.1.10. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra más pequeña de X tal que todas las funciones reales continuas y acotadas son medibles.

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la σ-álgebra más pequeña donde todas las funciones continuas y acotadas son medibles. Por el Teorema 1.1.5, $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(X)$. Probaremos ahora que todo subconjunto cerrado C pertenece a $\mathcal{H}$. Como todo cerrado es un G_δ, entonces existe una sucesión decreciente de subconjuntos abiertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $C = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$. Como C y U_n^c son conjuntos disjuntos, entonces existe una función f_n continua y acotada tal que $0 \leq f_n(x) \leq 1$, $f_n(x) = 1$ para todo $x \in C$ y $f_n(x) = 0$ para todo $x \in U_n^c$. Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$. Debido a que la serie converge uniformemente, f también es continua y acotada. Es claro que $f(x) = 1$ si y sólo si $f_n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por ende $C = \{x : f(x) = 1\} = f^{-1}(\{1\})$, es decir, $C \in \mathcal{H}$.

Así, todo cerrado está contenido en $\mathcal{H}$, lo cual implica que $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(X)$. ∎

1.2. Compacidad y σ-compacidad en espacios métricos

Definición 1.2.1. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Una familia de subconjuntos $\{U_i : i \in I\}$ es llamada una cubierta abierta de A si U_i es un abierto para cada $i \in I$ y $A \subset \cup_{i\in I} U_i$. Adicionalmente, si $J \subset I$ es tal que $A \subset \cup_{i\in J} U_i$, se dice que $\{U_i : i \in J\}$ es una subcubierta de A.

Definición 1.2.2. Un espacio métrico es compacto si toda cubierta abierta $\mathcal{G}$ de X posee una subcubierta finita, esto es, existe una colección finita $\{G_1, ..., G_n\} \subset \mathcal{G}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

Decimos además que X es un espacio métrico *σ-compacto* si puede expresarse como la unión numerable de subconjuntos compactos de X, esto es, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde cada K_n es compacto. Ante esto, es claro que todo espacio métrico compacto es σ-compacto, sin embargo, el recíproco no es cierto. Un ejemplo sencillo para justificar esta afirmación es $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana usual. Por el teorema de Heine-Borel se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ el subconjunto $[-n, n]$ es compacto y se cumple que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$.

Definición 1.2.3. Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X, d). Decimos que A es totalmente acotado si para toda $\varepsilon > 0$, existe una cantidad finita de elementos $x_1, ..., x_n$ en X, tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Proposición 1.2.4. Si (X, d) es un espacio métrico compacto, entonces X es totalmente acotado.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, la familia $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, entonces existe una subcubierta finita $\{B(x_i, \varepsilon) : 1 \leq i \leq n\}$, lo que implica que X es totalmente acotado puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. ∎

Corolario 1.2.5. Todo espacio métrico compacto es separable.

Demostración. Si X es compacto, por la proposición anterior X es totalmente acotado, lo cual implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito A_n tal que $X = \bigcup_{x \in A_n} B(x, \frac{1}{n})$. Definimos ahora el conjunto numerable $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Se probará que A es denso en X.

Sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$ arbitrarios y consideremos la bola $B(x, \varepsilon)$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Entonces, $x \in X = \bigcup_{y \in A_{n_0}} B(y, \frac{1}{n_0})$, lo cual implica que existe $a \in A_{n_0}$ tal que $d(x, a) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, es decir, $a \in A \cap B(x, \varepsilon)$. Se concluye así que A es denso en X. ■

Proposición 1.2.6. Todo espacio métrico σ-compacto es separable.

Demostración. Sea X un espacio métrico σ-compacto. Entonces, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde K_n es un subconjunto compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos primero el conjunto K_1. Entonces, la familia $\{B(x, 1)\}_{x \in K_1}$ es una cubierta abierta de K_1, por lo tanto, existe un subconjunto finito A_1^1 tal que $\{B(x, 1)\}_{x \in A_1^1}$ es una subcubierta de K_1. De la misma forma, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que la cubierta $\{B(x, \frac{1}{m})\}_{x \in K_1}$ posee una subcubierta $\{B(x, \frac{1}{m})\}_{x \in A_m^1}$, donde A_m^1 es un subconjunto finito de K_1. Consideremos así el conjunto $A_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^1$, el cual es numerable.

Utilizando argumentos similares para cada $n \in \mathbb{N}$, formamos el conjunto $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^n$, donde para cada par $n, m \in \mathbb{N}$ el conjunto A_m^n es finito y la familia $\{B(x, \frac{1}{m})\}_{x \in A_m^n}$ es una subcubierta de $\{B(x, \frac{1}{m})\}_{x \in K_n}$, la cual a su vez es cubierta de K_n.

Con los conjuntos previamente descritos, definimos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se tiene que A es numerable pues para cada $n \in \mathbb{N}$ A_n es numerable. Probaremos ahora que A es denso en X. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ y consideremos la bola $B(x, \varepsilon)$. Tomemos además $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_m$. Como $K_m \subset \bigcup_{x \in A_{n_0}^n} B(x, \frac{1}{n_0})$, existe $x' \in A_{n_0}^n \subset A$ tal que $x \in B(x', \frac{1}{n_0})$. Entonces $x' \in A \cap B(x, \varepsilon)$ y puesto que $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ son arbitrarios, se concluye que A es denso en X. ■

Teorema 1.2.7. (Caracterizaciones de espacios métricos compactos). Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es compacto.

(b) X es completo y totalmente acotado.

(c) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

(d) Toda sucesión en X posee una subsucesión convergente.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Supongamos que X es compacto. Por la Proposición 1.2.4, X es totalmente acotado. Ahora, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe n_k tal que $d(x_n, x_{n_k}) < 1/k$ para todo $n > n_k$. Definimos el conjunto

$$U_k := \{x \in X : d(x, x_{n_k}) > \frac{1}{k}\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, U_k es abierto, pues es el complemento de la bola cerrada con radio $1/k$ y centro x_{n_k}. Se tiene que la familia $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no posee subcubierta finita de X. En efecto, si suponemos que $\{U_{k_i}\}_{i\in\{1,..,m\}}$ es una subcubierta finita de X, esto es, $X = \bigcup_{i=1}^m U_{k_i}$, tomando $n > \max\{n_{k_1}, ..., n_{k_m}\}$, se tiene que $x_n \notin U_{k_i}$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Así, $\{U_{k_i}\}_{i\in\{1,..,m\}}$ no puede ser cubierta de X. Como $\{U_{k_i}\}_{i\in\{1,..,m\}}$ es una subfamilia arbitraria de $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces $X \setminus \bigcup_{k=1}^\infty U_k \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Entonces, $d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $x_{n_k} \to x$. Se sigue entonces que $x_n \to x$, puesto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy arbitraria, se concluye que X es completo.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Sea A un subconjunto infinito de X y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea F_n un conjunto finito de X tal que $X = \bigcup_{x\in F_n} B(x, \frac{1}{n})$. Para $n = 1$ existe $x_1 \in F_1$ tal que $A \cap B(x_1, 1)$ es infinito. Análogamente, para $n = 2$ existe $x_2 \in F_2$ tal que $A \cap B(x_1, 1) \cap B(x_2, \frac{1}{2})$ es un conjunto infinito. Realizando un proceso inductivo, escogemos $x_n \in F_n$ tal que $A \cap (\bigcap_{k=1}^n B(x_{n_k}, \frac{1}{k}))$ es infinito y formamos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta sucesión es de Cauchy, pues si $n > m$, escogiendo $a \in A \cap B(x_m, \frac{1}{m}) \cap B(x_n, \frac{1}{n})$ se obtiene que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{m}.$$

Como por hipótesis X es completo, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x \in X$. Como la función $x \mapsto d(x, x_n)$ es continua y $x_m \to x$, entonces $d(x, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n)$, y como $d(x_m, x_n) < \frac{2}{n}$ para $m > n$, entonces $d(x, x_n) \leq 2/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x, \frac{4}{n})$. En efecto, si $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$, entonces

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{2}{n} = \frac{3}{n} < \frac{4}{n}$$

Como $B(x_n, \frac{1}{n})$ contiene una infinidad de elementos de A, y $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x, \frac{4}{n})$, se concluye que x es un punto de acumulación de A.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ su imagen. Si A es finito, es claro que existe una subsucesión convergente constante. Por otro lado, si A es infinito, por la afirmación (c) A posee un punto de acumulación $x \in X$, lo cual implica que existen elementos x_{n_k} tal que $d(x, x_{n_k}) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $x_{n_k} \to x$.

(d) $\implies$ (a) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X. Para $x \in X$, sea

$$r_x = \sup\{r \in \mathbb{R} : B(x, r) \subset U_\alpha \text{ para algún } \alpha\}$$

Definimos $\varepsilon = \operatorname{ínf}\{r_x : x \in X\} \geq 0$. Se tienen dos casos: cuando ε es finito y cuando $\varepsilon = \infty$. Consideremos primero el caso cuando ε es finito. Si $\varepsilon = 0$, se tiene que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $r_{x_n} \to 0$. Por hipótesis, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta de X, entonces $x \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in I$ y por lo tanto existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U_\alpha$. Debido a que $x_{n_k} \to x$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \frac{r}{2}$ para $k \geq k_0$. Esto implica que $r_{x_{n_k}} \geq \frac{r}{2}$ para todo $k \geq k_0$ lo cual contradice el hecho de que $r_{x_n} \to 0$. Así, se cumple que $\varepsilon > 0$.

Sea $x_1 \in X$ y escogemos de forma inductiva $x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B(x_k, \varepsilon/2)$. Si suponemos que podemos realizar lo anterior para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la cual cumple que $d(x_n, x_m) > \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \neq m$, lo cual implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no posee una subsucesión convergente, obteniendo así una contradicción. Ante esto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon/2)$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que existe $\alpha_k \in I$ tal que $B(x_k, \varepsilon/2) \subset U_{\alpha_k}$, entonces $X = \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}$, es decir, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ posee una subcubierta finita y por lo tanto X es compacto.

Por otro lado, si $\varepsilon = \infty$, entonces $r_x = \infty$ para todo $x \in X$. Realizando un procedimiento análogo al anterior, podemos obtener una colección finita de bolas tal que $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, 1)$. Nuevamente, como para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_k \in I$ tal que $B(x_k, 1) \subset U_{\alpha_k}$, entonces $X = \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}$, es decir X es compacto. ∎

Otro concepto relacionado a la compacidad es la compacidad relativa. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ de un espacio métrico es *relativamente compacto* si su cerradura es un conjunto compacto. Un ejemplo sencillo de conjunto relativamente compacto es el intervalo $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$, pues su cerradura es $[0, 1]$. Utilizando la caracterización (d) del Teorema 1.2.7, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 1.2.8. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Un subconjunto A es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.

Demostración. ($\implies$) Sea $A \subset X$ un subconjunto relativamente compacto. Para $r > 0$ arbitrario consideremos la familia de bolas abiertas $\{B(x, r)\}_{x \in A}$, la cual es una cubierta abierta de $\bar{A}$. En efecto, si $z \in \bar{A}$, entonces $z \in A$ o $z \in A'$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A. Si $z \in A$, entonces $z \in B(z,r) \subset \bigcup_{x\in A} B(x,r)$. Por otro lado, si $z \in A'$, entonces existe $y \in A$ tal que $d(z,y) < r$, lo cual implica que $z \in B(y,r) \subset \bigcup_{x\in A} B(x,r)$. Como $z \in \bar{A}$ es arbitrario, se tiene que $\bar{A} \subset \bigcup_{x\in A} B(x,r)$.

Como $\{B(x,r)\}_{x\in A}$ es una cubierta abierta de $\bar{A}$ y este último conjunto es compacto, entonces existe una subcubierta finita, esto es, existe un subconjunto finito $A_r \subset A$ tal que $\bar{A} \subset \bigcup_{x\in A_r} B(x,r)$. Como $A \subset \bar{A}$, entonces $A \subset \bigcup_{x\in A_r} B(x,r)$, por lo tanto, como $r > 0$ es arbitrario se sigue que A es totalmente acotado.

($\Longleftarrow$) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A. Como A es totalmente acotado, existe una colección finita de bolas de radio 1 que cubren lo cubren, lo cual implica que existe una bola B_1 que contiene una infinidad de elementos de la sucesión x_n. Definimos $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_1\}$, y tomamos $n_1 \in N_1$. Aplicando el mismo argumento, existe una colección finita de bolas de radio $1/2$ que cubren a A, y por ende, existe una bola B_2 tal que el conjunto $N_2 = \{n > n_1 : x_n \in B_1 \cap B_2\}$ es infinito. Tomamos así $n_2 \in N_2$ y realizando el procedimiento anterior de forma inductiva, tomamos la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Esta subsucesión posee la propiedad de que para todo $k \geq m$, $x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{m} B_i$, donde B_i es una bola de radio $1/i$. Esto implica que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es un espacio métrico completo, entonces esta subsucesión converge a un elemento de X. Así, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria, se concluye que A es relativamente compacto. ■

1.3. Medidas en espacios métricos

Definición 1.3.1. Sea (X,d) un espacio métrico y μ una medida σ-finita en (X,S), donde S es una σ-álgebra. Decimos que μ es:

(i) regular interior si $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ es compacto}, K \subset A\}$ para todo $A \in S$.

(ii) regular exterior si $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ es abierto}, A \subset U\}$ para todo $A \in S$.

(iii) regular si μ es regular interior y regular exterior.

Definimos además los siguientes conjuntos:

$$M(X) := \{\mu : \mu \text{ es una medida en } (X, \mathcal{B}(X))\}$$

$$M_f(X) := \{\mu : \mu \text{ es una medida finita en } (X, \mathcal{B}(X))\}$$

$$\mathbb{P}(X) := \{\mu \in M_f(X) : \mu(X) = 1\}$$

Si $\mu \in M(X)$ decimos que μ es una *medida de Borel* y si $\mu \in \mathbb{P}(X)$, μ es una *medida de probabilidad.*

Lema 1.3.2. Si μ es una medida finita en X y $\mathcal{A}$ es una colección de borelianos ajenos de X, entonces a lo más una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{A}$ no son de medida cero.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) > 1/n\}$. Para una colección finita de conjuntos distintos $A_1, ..., A_k \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

$$\mu(X) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) > k/n$$

lo cual implica que la cardinalidad de $\mathcal{A}_n$ está acotada por $n\mu(X)$. Así, la familia $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ es numerable. ■

Proposición 1.3.3. Toda medida finita en un espacio métrico (X, d) es regular exterior, y cumple que para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \subset B,\ C \text{ cerrado}\}$.

Demostración. Definimos $\mathcal{R}$ como la colección de subconjuntos A de X tales que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ cerrado }\}$$

y

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U \text{ es abierto}\}.$$

Se probará que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{R}$. Primero, se cumple que $\emptyset \in \mathcal{R}$. Sea $A \in \mathcal{R}$, $\varepsilon > 0$ y sea C un conjunto cerrado y U un abierto con $C \subset A \subset U$ tales que $\mu(A) < \mu(C) + \varepsilon$ y $\mu(U) - \varepsilon < \mu(A)$. Entonces, $U^c \subset A^c \subset C^c$ y

$$\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A) > \mu(X) - \mu(C) - \varepsilon = \mu(C^c) - \varepsilon$$

$$\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A) < \mu(X) - \mu(U) + \varepsilon = \mu(U^c) + \varepsilon$$

Puesto que U^c es un cerrado, C^c es un abierto y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $A^c \in \mathcal{R}$.

Sea ahora $A_1, A_2, ... \in \mathcal{R}$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea U_n un abierto y C_n un cerrado tales que $C_n \subset A_n \subset U_n$ y $\mu(U_n) - \mu(A_n) < 2^{-n}\varepsilon$, $\mu(A_n) - \mu(C_n) < 2^{-n}\varepsilon/2$.

Se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, donde $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ es un abierto tal que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \setminus A_n)) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(U_n) - \mu(A_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon$$

Por otro lado, como $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{m} C_n)$ entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{K} C_n) < \varepsilon/2$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{K} C_n$ es un conjunto cerrado contenido en $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, tal que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{K} C_n) < \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) + \varepsilon/2 \le \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) + \varepsilon/2$$

$$\le \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus C_n)) + \varepsilon/2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus C_n) + \varepsilon/2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(A_n) - \mu(C_n)) + \varepsilon/2 \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$\Longrightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{K} C_n) < \varepsilon$$

Así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. De lo anterior, se concluye que $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra. Probaremos ahora que $\mathcal{R}$ contiene a todos los subconjuntos cerrados de X.

Sea B un subconjunto cerrado de X. Es claro que $\mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \subset B, C \text{ cerrado }\}$. Definiendo $U_n = \{x \in X : d(x, B) < 1/n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que U_n es un abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, donde $U_m \subset U_n$ si $n \le m$. Así, $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n)$. Con esto, se obtiene que

$$\mu(B) \le \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto }\} \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n) = \mu(B)$$

$$\Longrightarrow \mu(B) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto }\}.$$

Así, $B \in \mathcal{R}$. Como B es un subconjunto cerrado arbitrario, se concluye que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{R}$. ■

Corolario 1.3.4. Si μ y ν son dos medidas finitas en un espacio métrico X y $\mu(A) = \nu(A)$ para todo abierto A entonces $\mu = \nu$.

Definición 1.3.5. Sea X un espacio métrico. Una medida μ es *tensa* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto K de X tal que $\mu(K^c) < \varepsilon$.

Corolario 1.3.6. Si μ es una medida finita tensa, entonces μ es regular interior.

Se presentará ahora un resultado sobre una cierta clase particular de espacios métricos. Decimos que un espacio métrico (X, d) es *polaco* si es completo y separable. Un ejemplo sencillo de espacio métrico polaco es $\mathbb{R}^n$, pues $\mathbb{Q}^n$ es un subconjunto denso numerable y con la métrica euclidiana es completo. También, $C[a, b]$ (el conjunto de funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$) es un espacio métrico polaco con la métrica inducida por la norma del supremo, ya que por el teorema de aproximación de Weierstrass el conjunto de polinomios definidos en $[a, b]$ con coeficientes racionales es denso en $C[a, b]$.

Teorema 1.3.7. Si (X, d) es un espacio métrico polaco y μ una medida finita, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto K tal que $\mu(K^c) < \varepsilon$, es decir, toda medida finita en un espacio polaco es tensa.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, como X es un espacio métrico separable, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $x_1^n, x_2^n, ... \in X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i^n, 1/n)$. Sea $N_n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu((\bigcup_{i=1}^{N_n} B(x_i^n, 1/n))^c) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Definimos

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_n} B(x_i^n, 1/n)$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $A \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} B(x_i^n, 1/n)$, entonces A es totalmente acotado, y como X es un espacio métrico completo, entonces A es relativamente compacto, esto es, $\bar{A}$ es compacto. Se sigue que

$$\mu((\bar{A})^c) \leq \mu(A^c) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{N_n} (B(x_i^n, 1/n))^c)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((\bigcup_{i=1}^{N_n} B(x_i^n, 1/n))^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

$$\implies \mu((\bar{A})^c) < \varepsilon$$

Así, con $K = \bar{A}$ la proposición queda demostrada. ■

1.4. Continuidad y semi-continuidad

1.4.1. Funciones continuas y conjuntos compactos

A lo largo de este trabajo, consideraremos las familias de funciones $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}$ y $U_d(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es uniformemente continua}\}$, donde X es un espacio métrico.

Teorema 1.4.1.1. Sean (X, d_x) y (Y, d_y) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es un espacio métrico compacto, entonces $f(X)$ es un conjunto compacto en Y.

Demostración. Sea $\{G_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de $f(X)$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(G_i)$ es un subconjunto abierto de X para cada $i \in I$. Esto implica que $\{f^{-1}(G_i) : i \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es un espacio compacto, entonces existen $i_1, ..., i_n \in I$ tales que

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{i_k})$$

Esto implica que

$$f(X) = f(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(G_{i_k})) \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k},$$

esto es, $\{G_{i_k} : k = 1, ..., n\}$ es una subcubierta finita de $f(X)$. Como $\{G_i : i \in I\}$ es una cubierta abierta arbitraria, se concluye que $f(X)$ es compacto. ∎

Teorema 1.4.1.2. Sea f una función continua real en un espacio métrico compacto. Entonces, f es acotada y alcanza su supremo e ínfimo, esto es, si $M = \sup f(X)$ y $m = \inf f(X)$, entonces existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = M$ y $f(y) = m$.

Demostración. Por el teorema anterior, $f(X)$ es un conjunto compacto, lo cual implica que es cerrado y acotado. Como $f(X)$ es acotado, el supremo y el ínfimo de este conjunto existen, y debido a que es cerrado, entonces estos pertenecen al conjunto. Por definición de $f(X)$, se tiene que existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = \sup f(X)$ y $f(y) = \inf f(X)$. ∎

1.4.2. Semi-continuidad

Definicion 1.4.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es *semi-continua inferiormente* en X si $\{x \in X : f(x) > a\}$ es un subconjunto abierto de X para cada $a \in \mathbb{R}$. De forma análoga, f es *semi-continua superiormente* si $\{x \in X : f(x) < a\}$ es un abierto en X para cada $a \in \mathbb{R}$.

Observación 1.4.2.2. Sea X un espacio métrico. La función indicadora I_A de un conjunto A es semi-continua inferiormente si y sólo si A es abierto. De forma análoga, I_A es semi-continua superiormente si y sólo si A es cerrado.

Teorema 1.4.2.3. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semi-continua inferiormente si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $x \in X$, se tiene que $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$. De forma análoga, f es semi-continua superiormente si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente $x \in X$, se cumple que $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)$.

Demostración. Sea f una función semi-continua inferiormente, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a $x \in X$. Si $b < f(x)$, entonces $x \in f^{-1}(b,\infty)$, y como este conjunto es abierto, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(b,\infty)$ para $n \geq n_0$, esto es, $f(x_n) > b$ para $n \geq n_0$. Como b es arbitrario, se tiene que $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$.

Por otro lado, supongamos ahora que si $x_n \to x$, entonces $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$. Probaremos que para $a \in \mathbb{R}$, $A = \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es un conjunto cerrado. Sea $z \in X$ un punto de acumulación de A. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to z$. Por hipótesis, se tiene que $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(z)$, y como $x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x_n) \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que

$$f(z) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq a \implies f(z) \leq a \implies z \in A.$$

Así, todo punto de acumulación en A pertenece a A, lo cual implica que A es un subconjunto cerrado de X, esto es, $A^c = \{x \in X : f(x) > a\}$ es un subconjunto abierto.

Para probar la propiedad análoga para funciones semi-continuas superiormente, simplemente se debe notar que si f es una función semi-continua superiormente, entonces $-f$ es semi-continua inferiormente. Utilizando esto y un procedimiento similar al anterior, se obtiene la propiedad mencionada. ■

Teorema 1.4.2.4. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función semi-continua inferiormente. Entonces, f alcanza su ínfimo. (Análogamente, si f es semi-continua superiormente, entonces f alcanza su supremo).

Demostración. Sea $a = \inf f(x)$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $f(x_n) \to a$. Debido a que el espacio es compacto, existe una subsucesión x_{n_k} que converge a un $x \in X$. Por el teorema anterior, $\liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq f(x)$. Sin embargo, como $f(x_n) \to a$, entonces $f(x_{n_k}) \to a$. Así, $a = \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq f(x)$, es decir, $f(x) \leq a$, lo cual implica que $f(x) = a$. ■

Teorema 1.4.2.5. Si f_i es una función semi-continua inferiormente en X para cada $i \in I$, entonces la función $\sup_{i\in I} f_i$ es semi-continua inferiormente. Además, si I es un conjunto finito, entonces $\min_{i\in I} f_i$ es semi-continua inferiormente. (Análogamente, si f_i es semi-continua superiormente para cada $i \in I$, entonces $\inf_{i\in I} f_i$ es semi-continua superiormente, y $\max_{i\in I} f_i$ es semi-continua superiormente si I es finito).

Demostración. Sea $f = \sup_{i\in I} f_i$. Entonces, para $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{i\in I}\{x : f_i(x) > a\}.$$

Como cada f_i es semi-continua inferiormente para cada $i \in I$, entonces $\{x : f_i(x) > a\}$ es un subconjunto abierto para cada $i \in I$, lo cual implica que $\{x \in X : f(x) > a\}$ es un subconjunto abierto. Así, $f = \sup_{i\in I} f_i$ es semi-continua inferiormente.

Ahora, si I es finito, definiendo $g = \min_{i\in I} f_i = \min\{f_1, ..., f_m\}$ se tiene que

$$\{x \in X : g(x) > a\} = \bigcap_{i=1}^{m}\{x \in X : f_i(x) > a\}$$

es un conjunto abierto. ∎

Teorema 1.4.2.6. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, donde X es un espacio métrico. Definimos

$$\underline{f}(x) = \liminf_{y\to x} f(y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{y\in B(x,\frac{1}{n})} f(y).$$

Entonces, $\underline{f}$ es una función semi-continua inferiormente en X y $\underline{f} \leq f$. Además, si g es semi-continua inferiormente y $g \leq f$, entonces $g \leq \underline{f}$. De forma análoga, si definimos

$$\bar{f}(x) = \limsup_{y\to x} f(y) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{y\in B(x,\frac{1}{n})} f(y)$$

se tiene que esta función es semi-continua superiormente y que $\bar{f} \geq f$. Si $g \geq f$ es una función semi-continua superiormente, entonces $\bar{f} \leq g$.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X con $x_n \to x$, y supongamos que $\liminf_{n\to\infty} \underline{f}(x_n) < b < \underline{f}(x)$. Si V es una vecindad abierta de x, como $x_n \to x$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ y $\underline{f}(x_n) < b$. Como V también es vecindad de x_n, entonces

$$b > \underline{f}(x_n) \geq \inf_{y\in V} f(y)$$

$$\Longrightarrow \underline{f}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{y\in B(x,\frac{1}{n})} f(y) \leq b < \underline{f}(x).$$

Sin embargo, esto es una contradicción. Así, si $x_n \to x$, entonces $\underline{f}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \underline{f}(x_n)$, es decir, $\underline{f}$ es semi-continua inferiormente y por definición de $\underline{f}$, $\underline{f} \leq f$.

Si g es semi-continua inferiormente, y $g \leq f$, entonces $\underline{f}(x) = \liminf_{y\to x} f(y) \geq \liminf_{y\to x} g(y) \geq g(x)$. ■

Teorema 1.4.2.7. Sea X un espacio métrico y f una función semi-continua inferiormente en X. Entonces existe una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \uparrow f$. (Así, si f es semi-continua superiormente, entonces existe una sucesión de funciones continuas f_n tal que $f_n \downarrow f$). Además, si $|f| \leq M < \infty$, podemos escoger la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|f_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos primero que $f \geq 0$. Definimos $g(x) = \inf\{f(z) + td(x,z) : z \in X\}$, donde $t > 0$ es fijo. Se tiene que

$$g(x) = \inf\{f(z) + td(x,z) : z \in X\} \leq f(x) + td(x,x) = f(x)$$

esto es, $0 \leq g \leq f$. Ahora, si $x, y \in X$, entonces $f(z) + td(x,z) \leq f(z) + td(x,y) + t(y,z)$. Tomando el ínfimo sobre $z \in X$, se tiene que $g(x) \leq g(y) + td(x,y)$. Aplicando el mismo argumento, se puede obtener que $g(y) \leq g(x) + td(x,y)$, por lo tanto

$$|g(x) - g(y)| \leq td(x,y)$$

lo cual implica que g es continua en X.

Definimos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n(x) = \inf\{f(z) + nd(x,z) : z \in X\}$, y consideremos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas (nótese además que $f_n \in U_d(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pues $|g(x) - g(y)| \leq nd(x,y)$) . Se tiene que $0 \leq f_n \uparrow f$. Así, para $\varepsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, por la propiedad del ínfimo podemos escoger $z_n \in X$ tal que

$$f_n(x) + \varepsilon > f(z_n) + nd(x, z_n) \geq nd(x, z_n).$$

Como $f_n(x) + \varepsilon \leq f(x) + \varepsilon$, entonces

$$nd(x, z_n) < f_n(x) + \varepsilon \leq f(x) + \varepsilon \implies d(x, z_n) < \frac{f(x) + \varepsilon}{n}$$

por lo tanto $d(x, z_n) \to 0$. Como f es semi-continua inferiormente, entonces $\liminf_{n\to\infty} f(z_n) \geq f(x)$, lo cual implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z_n) > f(x) - \varepsilon$. Así, para $n \geq n_0$ se tiene que

$$f_n(x) > f(z_n) - \varepsilon + nd(x, z_n) \geq f(z_n) - \varepsilon > f(x) - 2\varepsilon.$$

Con esto, $0 \leq f_n \uparrow f$.

Por otro lado, si $|f| \leq M < \infty$, entonces $f + M$ también es una función semi-continua inferiormente y no negativa, por lo tanto, por lo probado anteriormente se tiene que existe una sucesión de funciones continuas $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no negativas tal que $0 \leq g_n \uparrow f + M$. Definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n = g_n - M$, se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas tales que $f_n \uparrow f$ y $|f_n| \leq M$. ∎

1.5. Familias separadoras

Definición 1.5.1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es Lipschitz si existe una constante $K < \infty$, llamada una constante de Lipschitz, tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)$ para toda $x, y \in X$. Denotamos con $\mathrm{Lip}_K(X; Y)$ al conjunto de funciones Lipschitz con constante K, y $\mathrm{Lip}(X; Y) = \bigcup_{K>0} \mathrm{Lip}_K(X; Y)$ al conjunto de funciones Lipschitz en X.

Denotamos además por $\mathcal{L}_1(\mu)$ la familia de funciones integrables con respecto a la medida μ.

Definición 1.5.2. Sea $\mathcal{F} \subset M(X)$ una familia de medidas de Borel. Una familia $\mathcal{C}$ de funciones medibles $f : X \to \mathbb{R}$ es una *familia separadora* de $\mathcal{F}$ si para cualesquiera dos medidas $\mu, \nu \in \mathcal{F}$ se cumple que:

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\nu \text{ para toda } f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}_1(\mu) \cap \mathcal{L}_1(\nu) \text{ implica } \mu = \nu.$$

Lema 1.5.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, para todo conjunto cerrado $C \subset X$ y $\varepsilon > 0$ existe una función Lipschitz $\rho_{C,\varepsilon} : X \to [0, 1]$ con constante de Lipschitz $1/\varepsilon$ y $\rho_{C,\varepsilon}(x) = 1$ si $x \in C$ y $\rho_{C,\varepsilon}(x) = 0$ si $d(x, C) \geq \varepsilon$.

Demostración. Sea $\phi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida por $\phi(x) = (x \vee 0) \wedge 1$. Para $x \in X$, definimos $\rho_{C,\varepsilon}(x) = 1 - \phi(\varepsilon^{-1} d(x, C))$. ∎

Teorema 1.5.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $\mathrm{Lip}_1(X, [0, 1])$ es una familia separadora de $\mathcal{M}_f(X)$.

Demostración. Sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_f$ tales que $\int_X f d\mu_1 = \int_X f d\mu_2$ para toda $f \in \mathrm{Lip}_1(X, [0,1])$. Sea C un subconjunto cerrado de X y dada $\varepsilon > 0$ consideremos la función $\rho_{C,\varepsilon} : X \to [0,1]$ construida utilizando el procedimiento del lema anterior. Se tiene que $0 \leq \rho_{C,\varepsilon} \leq 1$, por lo tanto, $\rho_{C,\varepsilon} \in \mathcal{L}_1(\mu_1) \cap \mathcal{L}_1(\mu_2)$ para toda $\varepsilon > 0$.

Considerando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\rho_{C,\varepsilon_n} \to I_C$ cuando $n \to \infty$. Por el teorema de la convergencia dominada, se tiene que para $i = 1, 2$

$$\mu_i(C) = \int_X I_C d\mu_i = \lim_{n\to\infty} \int_X \rho_{C,\varepsilon_n} d\mu_i.$$

Notemos que, para cualquier $\varepsilon \in (0,1]$, $\varepsilon\rho_{C,\varepsilon_n} \in \mathrm{Lip}_1(X;[0,1])$. Se sigue entonces que

$$\int_X \rho_{C,\varepsilon_n} d\mu_1 = \varepsilon^{-1} \int_X (\varepsilon\rho_{C,\varepsilon_n}) d\mu_1 = \varepsilon^{-1} \int_X (\varepsilon\rho_{C,\varepsilon_n}) d\mu_2 = \int_X \rho_{C,\varepsilon_n} d\mu_1$$

concluyendo así que

$$\mu_1(C) = \lim_{n\to\infty} \int_X \rho_{C,\varepsilon_n} d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_X \rho_{C,\varepsilon_n} d\mu_2 = \mu_2(C)$$

Como $C \subset X$ es un subconjunto cerrado arbitrario de X, entonces $\mu_1(C) = \mu_2(C)$ para todo cerrado $C \subset X$ lo cual implica que $\mu_1 = \mu_2$. ■

Capítulo 2

Convergencia débil de medidas

En esta parte del trabajo definiremos una noción de convergencia en el conjunto de medidas de probabilidad de un espacio métrico (X, d) y la *topología débil* en $\mathbb{P}(X)$ así como algunas de sus propiedades, incluyendo su relación con la convergencia previamente mencionada. Se probará además el *teorema de portmanteau* en el que se dan varias caracterizaciones de la convergencia débil y posteriormente se introducirá la distancia de Prokhorov en $\mathbb{P}(X)$ la cual, bajo ciertas condiciones, induce la topología previamente descrita.

2.1. La topología débil

Definición 2.1.1. (Convergencia débil). Sea X un espacio métrico. Decimos que una sucesión de medidas de probabilidad $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a una medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ si

$$\int_X f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$$

para toda $f \in C_b(X)$. Denotamos esta convergencia como $\mu_n \Rightarrow \mu$ o $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Otra noción de convergencia de medidas es la llamada *convergencia fuerte* o *convergencia conjuntista*. Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos $(X, \mathcal{B}(X))$. Decimos que una sucesión de medidas de probabilidad en X $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a una medida μ si para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ se cumple que $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

Ejemplo 2.1.2. Para $x \in X$, la medida de Dirac concentrada en x es la función $\delta_x : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Consideremos en $\mathbb{R}$ la métrica usual y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento $x \in \mathbb{R}$ y consideremos la sucesión de medidas de Dirac $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, para una función continua acotada f se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_{x_n} = f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f d\delta_x.$$

Como $f \in C_b(X)$ es una función arbitraria, se sigue que $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$.

Utilizando el teorema de portmanteau (véase Teorema 2.2.1) se puede probar que el hecho de que una sucesión de medidas converja fuertemente implica que también converge débilmente, sin embargo, la afirmación recíproca no es verdadera.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el espacio métrico $\mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ la medida μ_n concentrada en los racionales del intervalo $[0,1]$ de la forma $\frac{j}{n}$, con $j = 1, ..., n$ y $\mu_n(\{\frac{j}{n}\}) = \frac{1}{n}$. Entonces, la sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la medida $\mu(A) = \lambda(A \cap [0,1])$, donde λ es la medida de Lebesgue. En efecto, debido a que una función continua en un intervalo cerrado es Riemann integrable, para toda función $f \in C_b(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Lema 2.1.4. Sea (X, d) un espacio métrico, y μ, ν medidas de probabilidad en X. Si $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ para toda $f \in C_b(X)$ entonces $\mu = \nu$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X y consideremos la función distancia $d(x, U^c)$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = \text{mín}(1, nd(x, U^c))$. Entonces, $f_n \in C_b(X)$ y $f_n \uparrow I_U$. Así, por la hipótesis y el teorema de la convergencia monótona se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\nu \Longrightarrow \mu(U) = \nu(U).$$

Como U es un subconjunto abierto arbitrario y $\mu(U) = \nu(U)$, se concluye que $\mu = \nu$. ∎

Observación 2.1.5. La familia $C_b(X)$ es una familia separadora en $\mathbb{P}(X)$.

Corolario 2.1.6. El límite definido en la convergencia débil es único.

Introduciremos ahora una topología en $\mathbb{P}(X)$ donde la convergencia de sucesiones es justamente la convergencia débil. Dada $\varepsilon > 0$, $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y $f \in C_b(X)$ definimos el conjunto

$$V_\varepsilon(\mu; f) := \{\nu \in \mathbb{P}(X) : |\int_X f d\mu - \int_X f d\nu| < \varepsilon\}.$$

Para $D \subset C_b(X)$ consideremos la familia de subconjuntos de $\mathbb{P}(X)$

$$\mathcal{V}(D) := \{V_\varepsilon(\mu; f) : \varepsilon > 0, \mu \in \mathbb{P}(X), f \in D\}.$$

Definimos $\tau(D)$ como la topología más débil en $\mathbb{P}(X)$ que contiene a la colección $\mathcal{V}(D)$, esto es, aquella topología donde $\mathcal{V}(D)$ es una subbase (véase Definición B.0.5).

Lema 2.1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y $D \subset C_b(X)$. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{P}(X)$ y $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Entonces, $\mu_n \to \mu$ (convergencia relativa a la topología $\tau(D)$) si y sólo si $\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu$ para toda $f \in D$.

Demostración. Supongamos que $\mu_n \longrightarrow \mu$ y $f \in D$. Entonces, dada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que $\mu_n \in V_\varepsilon(\mu; f)$, esto es, $|\int_X f d\mu - \int_X f d\mu_n| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ y $f \in D$ son arbitrarios, se tiene entonces que $\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu$ para toda $f \in D$.

Recíprocamente, si $\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu$ para toda $f \in D$, y $G \in \tau(D)$ es tal que $\mu \in G$, entonces existe un elemento básico de la forma $\bigcap_{k=1}^n V_{\varepsilon_k}(\mu; f_k)$ tal que $\mu \in \bigcap_{k=1}^n V_{\varepsilon_k}(\mu; f_k) \subset G$, donde $\varepsilon_k > 0$ y $f_k \in D$ para $k = 1, ..., n$. Como $\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu$ para toda $f \in D$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$|\int_X f_k d\mu_n - \int_X f_k d\mu| < \varepsilon_k$$

para $k = 1, ..., n$. Así, para $n \geq n_0$ se tiene que $\mu_n \in \bigcap_{k=1}^n V_{\varepsilon_k}(\mu; f_k) \subset G$, es decir, $\mu_n \in G$. Como G es un abierto arbitrario tal que $\mu \in G$ se sigue entonces $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. ∎

Con las consideraciones anteriores definimos la *topología débil* en $\mathbb{P}(X)$ como $\tau(C_b(X))$.

El siguiente lema es una consecuencia directa del Teorema 1.4.2.7, ya que si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces es semi-continua inferiormente y semi-continua superiormente.

Lema 2.1.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f \in C_b(X)$, entonces existen sucesiones $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $U_d(X)$ tales que $g_n \uparrow f$ y $h_n \downarrow f$.

Lema 2.1.9. Si (X, d) un espacio métrico, entonces $\tau(C_b(X)) = \tau(U_d(X))$.

Demostración. Es claro que $\tau(U_d(X)) \subset \tau(C_b(X))$. Probaremos ahora que todo subconjunto en $\mathcal{V}[C_b(X)]$ es un abierto en la topología $\tau[U_d(X)]$. Sea $V_\varepsilon(\mu; f) \in \mathcal{V}[C_b(X)]$ y $\mu_0 \in V_\varepsilon(\mu; f)$. Entonces existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $V_{\varepsilon_0}(\mu_0; f) \subset V_\varepsilon(\mu; f)$. Por el Lema 2.1.8 existen funciones $g, h \in U_d(X)$ tales que $g \leq f \leq h$ y

$$\int_X f d\mu_0 < \int_X g d\mu_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad \int_X h d\mu_0 < \int_X f d\mu_0 + \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Si $\nu \in V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\mu_0; g) \cap V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\mu_0; h)$ entonces

$$\int_X f d\mu_0 < \int_X g d\mu_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} < \int_X g d\nu + \varepsilon_0 \leq \int_X f d\nu + \varepsilon_0$$

y además

$$\int_X f d\nu \leq \int_X h d\nu < \int_X h d\mu_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} < \int_X f d\mu_0 + \varepsilon_0$$

lo cual implica que

$$|\int_X f d\nu - \int_X f d\mu_0| < \varepsilon_0$$

esto es, $\nu \in V_{\varepsilon_0}(\mu_0; f)$ y $V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\mu_0; g) \cap V_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\mu_0; h) \subset V_\varepsilon(\mu; f)$, lo cual implica que $V_\varepsilon(\mu; f)$ es un abierto en $\tau(U_d(X))$.

Como $V_\varepsilon(\mu; f) \in \mathcal{V}[C_b(X)]$ es un subbásico arbitrario entonces todo subbásico es un abierto en $\tau(U_d(X))$, lo cual implica que todo abierto de $\tau(C_b(X))$ es un abierto en $\tau(U_d(X))$, es decir, $\tau(C_b(X)) \subset \tau(U_d(X))$. ■

Lema 2.1.10. Sea (X, d) un espacio métrico. Si D es denso en $U_d(X)$ (con la norma del supremo) entonces $\tau(U_d(X)) = \tau(D)$.

Demostración. Claramente $\tau(D) \subset \tau(U_d(X))$. Sea $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(\mu; g) \in \mathcal{V}[U_d(X)]$, $\mu_0 \in V_\varepsilon(\mu; g)$ y $\varepsilon_0 = \varepsilon - |\int_X g d\mu_0 - \int_X g d\mu| > 0$. Sea $h \in D$ tal que $||g - h|| < \varepsilon_0/3$, entonces para toda $\nu \in V_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(\mu_0; h)$ se tiene que

$$|\int_X g d\nu - \int_X g d\mu| \leq |\int_X g d\nu - \int_X h d\nu| + |\int_X h d\nu - \int_X h d\mu_0|$$

$$+|\int_X h d\mu_0 - \int_X g d\mu_0| + |\int_X g d\mu_0 - \int_X g d\mu|$$

$$< \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + |\int_X g d\mu_0 - \int_X g d\mu| = \varepsilon \Longrightarrow |\int_X g d\nu - \int_X g d\mu| < \varepsilon.$$

Esto implica que $V_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(\mu_0; h) \subset V_\varepsilon(\mu; g)$. Como $\mu_0 \in V_\varepsilon(\mu; g)$ es arbitrario y se obtuvo un abierto $V_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(\mu_0; h) \in \tau(D)$ tal que $\mu_0 \in V_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(\mu_0; h) \subset V_\varepsilon(\mu; g)$, entonces $V_\varepsilon(\mu; g) \in \tau(D)$. Como $V_\varepsilon(\mu; g)$ es un subbásico arbitrario de $\tau(U_d(X))$ se concluye que $\tau(U_d(X)) \subset \tau(D)$. ■

2.2. Teorema de portmanteau

A continuación, probaremos un resultado conocido como el teorema de portmanteau (esta última palabra significa *maletín* en francés), en el que se presentan varias condiciones equivalentes al hecho de que una sucesión de medidas de probabilidad converge débilmente a un elemento de $\mathbb{P}(X)$.

Teorema 2.2.1. (Teorema de portmanteau) Sea X un espacio métrico, y $\mu, \mu_1, \mu_2, ...$ medidas de probabilidad en la σ-álgebra de Borel de X. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

(a) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$

(b) $\int_X f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$ para toda $f \in U_d(X)$

(c) $\liminf_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n \geq \int_X f d\mu$ para toda función semi-continua inferiormente y acotada $f : X \to \mathbb{R}$.

(c') $\limsup_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n \leq \int_X f d\mu$ para toda función semi-continua superiormente y acotada $f : X \to \mathbb{R}$.

(d) $\int_X f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f d\mu$ para todas las funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ continuas $\mu - c.d.$

(e) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$ para todo subconjunto cerrado C de X.

(f) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$ para todo subconjunto abierto U de X..

(g) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ con $\mu(\partial A) = 0$.

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) es consecuencia del Lema 2.1.9. Para (a) $\implies$ (c), sea f una función semi-continua inferiormente y acotada. Si $g \leq f$ y g es una función continua entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n \geq \liminf_{n\to\infty} \int_X g d\mu_n = \int_X g d\mu$$

Por el Teorema 1.4.2.7 podemos escoger una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas tales que cada f_n es acotada y $f_n \uparrow f$. Así, por el teorema de la convergencia monótona se obtiene

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n$$

probando así (c). Para la equivalencia entre (c) y (c'), nótese que f es semi-continua inferiormente si y sólo si $-f$ es semi-continua superiormente.

Probaremos ahora que (c) $\implies$ (d). Sea f una función acotada continua $\mu - c.d.$ y consideremos $\underline{f}(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$ y $\bar{f}(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$. Si f es continua en $x \in X$, entonces $\underline{f}(x) = f(x) = \bar{f}(x)$. Por otro lado, como f es acotada y continua μ-c.d., entonces

$$\int_X f d\mu = \int_X \underline{f} d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \underline{f} d\mu_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X \bar{f} d\mu_n \leq \int_X f d\mu.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.$$

Para probar que (d) $\implies$ (f) nótese que $(d) \implies (a) \implies (c)$. Si A es un subconjunto abierto, entonces I_A es una función semi-continua inferiormente, y por (c) se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) = \liminf_{n\to\infty} \int_X I_A d\mu_n \geq \int_X I_A d\mu = \mu(A).$$

Por otro lado, como $I_X = 1$ claramente es una función acotada y continua, por (c) se tiene que $\mu_n(X) \to \mu(X)$.

La equivalencia entre (e) y (f) se prueba utilizando las propiedades básicas del complemento de un conjunto. Para probar que (f) $\implies$ (g) sea A un subconjunto tal que $\mu(\partial A) = 0$. Como $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$, entonces $\mu(\partial A) = \mu(\bar{A}) - \mu(A^\circ) = 0$, esto es, $\mu(\bar{A}) = \mu(A^\circ)$. Como $\mu(A^\circ) \leq \mu(A) \leq \mu(\bar{A})$, entonces $\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\bar{A})$. Por (e) tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\bar{A}) \leq \mu(\bar{A}) = \mu(A). \tag{2.1}$$

Por otro lado, usando (f) se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \geq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A^\circ) \geq \mu(A^\circ) = \mu(A). \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \mu(A) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

Finalmente, probemos que (g) $\implies$ (a). Sea f una función continua y acotada en X y sea $A = \{c \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}\{c\}) \neq 0\}$. Entonces, por el Lema 1.3.2 A es a lo más numerable. Ante esto, si $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}$ podemos escoger una partición $\{t_0, ..., t_j\}$ en $[-M, M]$ tal que $t_i \notin A$, con $i = 0, 1, ..., j$. Definimos

$$B_i = f^{-1}[[t_i, t_{i+1})] = \{x \in X : t_i \leq f(x) < t_{i+1}\} \text{ para } i = 0, ..., j-1.$$

Se tiene que $\bar{B}_i \subset \{x : t_i \leq f(x) \leq t_{i+1}\}$ y $B_i^\circ \supset \{x : t_i < f(x) < t_{i+1}\}$ por lo tanto

$$\mu(\partial B_i) = \mu(\bar{B}_i \setminus B_i^\circ) \leq \mu(\{x : t_i \leq f(x) \leq t_{i+1}\} \setminus \{x : t_i < f(x) < t_{i+1}\})$$

$$\implies \mu(\partial B_i) \leq \mu(f^{-1}\{t_i\}) + \mu(f^{-1}\{t_{i+1}\}) = 0$$

Así, por hipótesis se tiene que

$$\sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i) \to \sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu(B_i)$$

Por otro lado

$$|\int_X f d\mu_n - \int_X f d\mu| \leq |\int_X f d\mu_n - \sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i)|$$

$$+|\sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i) - \sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu(B_i)| + |\sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i) - \int_X f d\mu|$$

$$= |\sum_{i=1}^{j-1} \int_{B_i} (f(x) - t_i) d\mu_n(x)| + |\sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i) - \sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu(B_i)| + |\sum_{i=1}^{j-1} \int_{B_i} (t_i - f(x)) d\mu_n(x)|$$

$$\leq \max_{i\in\{0,...,j-1\}} (t_{i+1} - t_i)\mu_n(X) + |\sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i) - \sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu(B_i)| + \max_{i\in\{0,...,j-1\}} (t_{i+1} - t_i)\mu(X).$$

Primero, tanto $\max_{i\in\{0,...,j-1\}}(t_{i+1} - t_i)\mu_n(X)$ y $\max_{i\in\{0,...,j-1\}}(t_{i+1} - t_i)\mu(X)$ pueden hacerse arbitrariamente pequeños con la elección de la partición debido a que $\mu_n(X) \to$

$\mu(X) < \infty$. Por otro lado, como $\sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu_n(B_i) \to \sum_{i=0}^{j-1} t_i \mu(B_i)$, se tiene que

$$|\sum_{i=0}^{j-1} t_i(\mu_n(B_i) - \mu(B_i))| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Con esto, se obtiene que

$$|\int_X f d\mu_n - \int_X f d\mu| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Como $f \in C_b(X)$ es arbitraria, se concluye (a). ■

Probaremos ahora algunos resultados que son consecuencia del teorema de portmanteau.

Corolario 2.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, el mapeo $\delta : X \to \mathbb{P}(X)$ definido por $\delta(x) = \delta_x$ es una función continua entre X y $\delta(X)$. Además, si $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$ entonces $x_n \to x$.

Demostración. Es claro que la función δ es inyectiva. Sea ahora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$. Si G un subconjunto abierto y $x \in G$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in G$. Por el teorema de portmanteau, esto implica que $\liminf_{n\to\infty} \delta_{x_n}(G) = 1 = \delta_x(G)$. Por otro lado, si $x \notin G$, entonces $\liminf_{n\to\infty} \delta_{x_n}(G) \geq 0 = \delta_x(G)$. Así, como G es un subconjunto abierto arbitrario, se tiene que $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$. Debido a que los espacios métricos son primero numerables (véase Proposición B.0.8), se tiene que δ es una función continua.

Por otro lado, si $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$ y G es una vecindad abierta de x, nuevamente por el teorema de portmanteau se tiene que $\liminf_{n\to\infty} \delta_{x_n}(G) \geq \delta_x(G) = 1$, lo cual implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in G$ para toda $n \geq n_0$. Como G es una vecindad arbitraria, se tiene que $x_n \to x$. ■

La propiedad anterior se puede generalizar con el siguiente lema.

Lema 2.2.3. Sea X un espacio métrico. Entonces, la función $\delta : X \to \mathbb{P}(X)$ es un homeomorfismo entre X y $\delta(X)$.

Para probar este resultado se requiere utilizar el concepto de red. La demostración es muy similar a la utilizada para el corolario anterior y puede ser consultada en [1] o en [12].

Definición 2.2.4. Para $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ definimos su función de distribución $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ como $F(x) = \mu((-\infty, x])$.

Definición 2.2.5. Sean $F, F_1, F_2, ...$ funciones de distribución de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Decimos que $(F_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge débilmente a F si $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ para todos los puntos de continuidad de F. Denotamos esto como $F = w - \lim_{n\to\infty} F_n$.

Teorema 2.2.6. (Teorema de Helly-Bray) Sean $\mu, \mu_1, \mu_2, ... \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ y $F, F_1, F_2, ...$ las correspondientes funciones de distribución. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$

(ii) $F = w - \lim_{n\to\infty} F_n$

Demostración. $(i) \implies (ii)$. Supongamos que F es continua en $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $\mu(\partial(-\infty, x]) = \mu(\{x\}) = 0$. Por el teorema de portmanteau, como $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ entonces $F_n(x) = \mu_n((-\infty, x])) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu((-\infty, x]) = F(x)$, es decir, $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$.

$(ii) \implies (i)$. Sea $f \in C_b(X)$. Probaremos que $\int_X f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f d\mu$. Como una funcion de distribución es monótona, su conjunto de puntos de discontinuidad es a lo mas numerable. Ante esto, para $\varepsilon > 0$ existen puntos de continuidad a y b de F tales que $F(a) < \varepsilon$ y $F(b) > 1 - \varepsilon$. Escogemos además puntos de continuidad x_i de F tales que $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$ y $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Si $|f(x)| \leq K$ para toda $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_{(-\infty,a)} f d\mu_n + \int_{[a,b]} f d\mu_n + \int_{(b,\infty)} f d\mu_n$$

$$\leq KF_n(a) + \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + \varepsilon)(F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})) + K(1 - F_n(b)$$

Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \leq KF(a) + \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + \varepsilon)(F(x_i) - F(x_{i-1})) + K(1 - F(b))$$

$$\leq K\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + \varepsilon)(F(x_i) - F(x_{i-1})) + K\varepsilon$$

$$= 2K\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + \varepsilon)(F(x_i) - F(x_{i-1})) \leq 4K\varepsilon + 2\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \leq (4K + 2)\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu. \tag{2.3}$$

Realizando este mismo procedimiento con la función $1 - f$, se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1-f) d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}} (1-f) d\mu \implies 1 - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \leq 1 - \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}} f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \tag{2.4}$$

De (2.1) y (2.2) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

Como $f \in C_b(X)$ es arbitraria se concluye que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. ∎

2.3. La métrica de Prokhorov

Para $\varepsilon > 0$ y $B \in \mathcal{B}(X)$ definimos

$$B^{\varepsilon} := \{x \in X : d(x, B) < \varepsilon\}.$$

Adicionalmente, definimos las funciones $d'_P : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{R}$ y $d_P : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{R}$ como

$$d'_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(B) \leq \nu(B^{\varepsilon}) + \varepsilon \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(X)\}$$

y

$$d_P(\mu, \nu) = \max\{d'_P(\mu, \nu), d'_P(\nu, \mu)\}.$$

Proposición 2.3.1. Sean $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $\mu(B) \leq \nu(B^{\varepsilon}) + \varepsilon$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ si y sólo si $\nu(B) \leq \mu(B^{\varepsilon}) + \varepsilon$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Demostración. Supongamos que $\mu(B) \leq \nu(B^{\varepsilon}) + \varepsilon$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Primero que nada, nótese que para todo conjunto $A \subset X$, $(X \setminus A^{\varepsilon})^{\varepsilon} \subset X \setminus A$. En efecto, si $x \in (X \setminus A^{\varepsilon})^{\varepsilon}$ entonces $d(x, X \setminus A^{\varepsilon}) < \varepsilon$ lo que implica que existe $y \in X \setminus A^{\varepsilon}$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Ante esto, $x \in A$ implica que $y \in A^{\varepsilon}$, lo cual es una contradiccón, es decir, se debe cumplir que

$x \in X \setminus A$. Así, para $B \in \mathcal{B}(X)$, se tiene que:

$$(X \setminus B^\varepsilon)^\varepsilon \subset X \setminus B \implies B \subset X \setminus (X \setminus B^\varepsilon)^\varepsilon$$

$$\mu(X \setminus B^\varepsilon) \leq \nu((X \setminus B^\varepsilon)^\varepsilon) + \varepsilon \implies 1 - \mu(B^\varepsilon) \leq 1 - \nu(X \setminus (X \setminus B^\varepsilon)^\varepsilon) + \varepsilon$$

$$\implies \nu(B) \leq \nu(X \setminus (X \setminus B^\varepsilon)^\varepsilon) \leq \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon \implies \nu(B) \leq \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon.$$

De manera análoga se prueba que si $\nu(B) \leq \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, entonces $\mu(B) \leq \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. ■

Corolario 2.3.2. Para todo par $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$, se cumple que $d'_P(\mu, \nu) = d'_P(\nu, \mu) = d_P(\mu, \nu)$.

Teorema 2.3.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, d_P es una métrica en $\mathbb{P}(X)$.

Demostración. Es claro que $d_P(\mu, \nu) \geq 0$ para todo $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ y que, por el corolario anterior, $d_P(\mu, \nu) = d_P(\nu, \mu)$.

Supongamos que $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ son tales que $d_P(\mu, \nu) = 0$ y sea F un conjunto cerrado. Entonces, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^{1/n}$, lo cual implica que

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F^{1/n}) \text{ y } \nu(F) = \lim_{n\to\infty} \nu(F^{1/n}).$$

Así, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu(F) \leq \nu(F^{1/n}) + \frac{1}{n}$, entonces $\mu(F) \leq \nu(F)$. De manera análoga, se obtiene que $\nu(F) \leq \mu(F)$, lo cual implica que $\mu(F) = \nu(F)$. Como F es un cerrado arbitrario, se tiene que $\mu = \nu$. Así, si $d_P(\mu, \nu) = 0$, entonces $\mu = \nu$. Por otro lado, es claro que si $\mu = \nu$, entonces $d_P(\mu, \nu) = 0$.

Finalmente, sean $\mu, \nu, \eta \in \mathbb{P}(X)$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $d_P(\mu, \nu) < x$ y $d_P(\nu, \eta) < y$. Entonces, para $B \in B(X)$,

$$\mu(B) \leq \nu(B^x) + x \leq \eta((B^x)^y) + y + x \leq \eta(B^{x+y}) + x + y$$

por lo tanto, $d_P(\mu, \eta) \leq x + y$. Como $x \in \{z \in \mathbb{R} : \mu(B) \leq \nu(B^z) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(X)\}$ y $y \in \{z \in \mathbb{R} : \nu(B) \leq \eta(B^z) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(X)\}$ son arbitrarios, utilizando las propiedades del ínfimo se obtiene que $d_P(\mu, \eta) \leq d_P(\mu, \nu) + d_P(\nu, \eta)$ con lo que se concluye la demostración. ■

A la función d_P se le llama la *métrica de Prokhorov*. En el siguiente resultado se prueba que la convergencia bajo esta métrica implica la convergencia débil.

Proposición 2.3.4. Sean $\mu, \mu_1, \mu_2, ... \in \mathbb{P}(X)$. Si $d_P(\mu_n, \mu) \to 0$ entonces $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Demostración. Como $d_P(\mu_n, \mu) \to 0$, entonces existe una sucesión de reales $a_n \to 0$ tal que $\mu_n(B) \leq \mu(B^{a_n}) + a_n$ y $\mu(B) \leq \mu_n(B^{a_n}) + a_n$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Así, para un subconjunto cerrado F,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty}(\mu(F^{a_n}) + a_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F^{a_n}) = \mu(F).$$

Como F es un subconjunto cerrado arbitrario, por el teorema de portmanteau se concluye que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. ■

Lema 2.3.5. Sea (X, d) un espacio métrico separable y $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Entonces, para cada $\delta > 0$ existe un conjunto numerable de bolas abiertas (o cerradas) $\{B_1, B_2, ...\}$ tal que el radio de cada B_n es menor a δ, $\mu(\partial B_n) = 0$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$.

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable de X. Para $x \in D$ definimos $S(x, r) = \{y \in X : d(y, x) = r\}$. Tenemos que la frontera de una bola abierta o cerrada con centro en x y radio r está contenida en $S(x, r)$. Nótese que si $\delta > 0$, entonces la colección $\mathcal{S} = \{S(x, r) : \delta/2 < r < \delta\}$ es disjunta y por lo tanto a lo más una cantidad numerable de sus elementos tiene medida positiva. Como claramente $\mathcal{S}$ es no numerable, entonces existe $r \in (\delta/2, \delta)$ tal que $\mu(S(x, r)) = 0$. Repitiendo este procedimiento para cada $x_i \in D$, podemos encontrar una bola B_i con centro en x_i y con radio $r \in (\delta/2, \delta)$ tal que $\mu(\partial B_i) = 0$. Así, se tiene una colección de bolas numerable y como D es denso , dicha colección cubre a X. ■

Veremos ahora que en espacios métricos separables, la convergencia en la métrica de Prokhorov y la convergencia débil son equivalentes.

Teorema 2.3.6. Sea (X, d) un espacio métrico separable y $\mu, \mu_1, \mu_2, ... \in \mathbb{P}(X)$. Entonces $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ si y sólo si $d_P(\mu_n, \mu) \to 0$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Esta implicación ya fue probada en la Proposición 2.3.4.

($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon/3$. Por el lema anterior, existen bolas abiertas $B_1, B_2, ...$ de radio menor a $\delta/2$ que cubren a X y $\mu(\partial B_n) = 0$ para toda n. Fijemos k tal que $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} B_n) \geq 1 - \delta$ y consideremos ahora la colección

$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{j\in J} B_j : J \subset \{1, ..., k\}\}.$$

Para cada $A \in \mathcal{A}$, $\partial A \subset \partial B_1 \cup ... \cup \partial B_k$, lo cual implica que $\mu(\partial A) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(\partial B_n) = 0$, esto es, $\mu(\partial A) = 0$. Como por hipótesis $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, entonces $\mu_n(A) \to \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Fijemos ahora $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_n(A) - \mu(A)| < \delta$ para toda $n \geq N$ y $A \in \mathcal{A}$ (esto es posible pues $\mathcal{A}$ es finito). Entonces, $\mu_n(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) - \delta \geq 1 - 2\delta$ para toda $n \geq N$. Sea ahora $B \in \mathcal{B}(X)$. Tomemos el conjunto

$$A = \bigcup \{B_j : j \in \{1, ..., k\} \text{ tal que } B_j \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$$

Primero, se tiene que $A \subset B^{\delta}$ pues el radio de cada bola B_j es menor a $\delta/2$. Por otro lado

$$B = (B \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_j) \cup (B \cap (\bigcup_{j=1}^{k} B_j)^c) \subset A \cup (\bigcup_{j=1}^{k} B_j)^c$$

ya que $B \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{j=1}^{k} (B \cap B_j) \subset A$. Además, $\mu((\bigcup_{j=1}^{k} B_j)^c) \leq \delta$, $\mu_n((\bigcup_{j=1}^{k} B_j)^c) \leq 2\delta$ para todo $n \geq N$.

Con todo lo anterior, se tiene que para cada $n \geq N$

$$\mu(B) \leq \mu(A) + \mu((\bigcup_{j=1}^{k} B_j)^c) \leq \mu(A) + \delta \leq \mu_n(A) + 2\delta \leq \mu_n(B^{\delta}) + 2\delta \leq \mu_n(B^{\varepsilon}) + \varepsilon$$

$$\implies \mu(B) \leq \mu_n(B^{\varepsilon}) + \varepsilon \implies d_P(\mu, \mu_n) \leq \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $d_P(\mu, \mu_n) \to 0$. ∎

El hecho de que un espacio métrico sea separable proporciona propiedades interesantes sobre la convergencia débil y su relación con la convergencia de sucesiones con respecto a la métrica d_P. A continuación, probaremos un resultado que nos muestra que la condición de separabilidad en un espacio métrico X implica además la existencia de un subconjunto denso numerable en $\mathbb{P}(X)$.

Proposición 2.3.7. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Entonces $\mathbb{P}(X)$ con la métrica d_P también es un espacio métrico separable.

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable en X y sea

$$\mathcal{M} = \{a_1 \delta_{x_1} + ... + a_k \delta_{x_k} : a_1, ..., a_k \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \sum_{j=1}^{k} a_j = 1, k = 1, 2, ...\}$$

Probaremos que $\mathcal{M}$ es denso en $\mathbb{P}(X)$. Sea $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Como D es denso en X, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 1/n) = X$. Tomamos k_n tal que

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j, 1/n)) \geq 1 - 1/n.$$

Definimos ahora la sucesión de conjuntos disjuntos

$$A_1^n = B(x_1, \frac{1}{n}) \text{ y } A_m^n = B(x_m, \frac{1}{m}) \setminus (\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i^n)$$

para $m = 2, ..., k_n$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{j} A_i^n = \bigcup_{i=1}^{j} B(x_i, \frac{1}{n})$ para toda $j \in \{1, ..., k_n\}$ y

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i, \frac{1}{n})) = \mu(\bigcup_{i=1}^{k_n} A_i^n) = \sum_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n) \geq 1 - 1/n$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n) \in [1 - 1/n, 1].$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una sucesión finita de racionales $a_1^n, ..., a_{k_n}^n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tales que $\sum_{j=1}^{k_n} a_j^n = 1$ y

$$\sum_{j=1}^{k_n} |\mu(A_j^n) - a_j^n| < 2/n$$

Con cada sucesión finita formamos $\mu_n = a_1^n \delta_{x_1} + ... + a_{k_n}^n \delta x_{k_n}$, aproximándonos de esta forma a la medida $\mu(A_1^n)\delta_{x_1} + ... + \mu(A_{k_n}^n)\delta_{x_{k_n}}$.

Como $\sum_{j=1}^{k_n} a_j^n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{M}$. Sea $f \in U_d(X)$. Para $n \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$|\int_X f d\mu_n - \int_X f d\mu| = |\sum_{j=1}^{k_n} a_j^n f(x_j) - \int_X f d\mu|$$

$$= |\sum_{j=1}^{k_n} a_j^n f(x_j) - \sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n) f(x_j) + \sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n) f(x_j) - \int_X f d\mu|$$

$$\leq |\sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n) f(x_j) - \int_X f d\mu| + |\sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n) f(x_j) - \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n f(x_j)|$$

$$\leq |\sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n) f(x_j) - \int_X f d\mu| + |\sum_{j=1}^{k_n} (\mu(A_j^n) - a_j^n) f(x_j)|$$

$$\leq |\sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n) f(x_j) - \int_X f d\mu| + (2/n) \sup_{j \in \{1,\dots,k_n\}} |f(x_j)|$$

$$\leq |\int_X \sum_{j=1}^{k_n} f(x_j) I_{A_j^n} d\mu - \int_X f d\mu| + (2/n)||f||_\infty$$

$$\leq |\sum_{j=1}^{k_n} \int_X (f(x_j) I_{A_j^n} - f I_{A_j^n}) d\mu - \int_X f I_{(\bigcup_{j=1}^{k_n} A_j^n)^c} d\mu| + (2/n)||f||_\infty$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n} \sup_{x \in A_j^n} |f(x_j) - f(x)| \mu(A_j^n) + ||f||_\infty \mu((\bigcup_{j=1}^{k_n} A_j^n)^c) + (2/n)||f||_\infty.$$

Tenemos que cada A_j^n está contenida en una bola de radio $1/n$ centrada en x_j. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in U_d(X)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Así, para $n > 1/\delta$ se tiene que

$$|\int_X f \mu_n - \int_X f d\mu| \leq \varepsilon + ||f||_\infty (1/n) + (2/n)||f||_\infty$$

Así, se tiene que $\int_X f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$ y como $f \in U_d(X)$ es arbitraria, se concluye que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. ∎

El Teorema 2.3.6 nos muestra que en un espacio métrico separable la convergencia débil de medidas de probabilidad y la convergencia con respecto a la métrica d_P son equivalentes. Ante esto, nos podríamos preguntar si dicha métrica induce la topología débil. Para probar esto nos apoyaremos del siguiente resultado, el cual da condiciones para que la topología débil sea metrizable. Su demostración puede ser consultada en [1].

Teorema 2.3.8. Sea X un espacio métrico. Entonces, X es separable si y sólo si $\mathbb{P}(X)$ es un espacio separable y metrizable.

Teorema 2.3.9. Sea X un espacio métrico separable. Entonces, la topología débil en $\mathbb{P}(X)$ es la topología inducida por la métrica d_P.

Demostración. Por el Teorema 2.3.8, se tiene que $\mathbb{P}(X)$ con la topología débil es metrizable, esto es, existe una métrica d en $\mathbb{P}(X)$ tal que la topología inducida por la métrica τ_d es la topología débil. Así, por lo ya probado, se tiene que $d_P(\mu_n, \mu) \to 0$ si y sólo si $d(\mu_n, \mu) \to 0$. Probaremos (por contradicción) que para todo $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y $r > 0$, existen

$\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$B_d(\mu, \delta_1) \subset B_{d_P}(\mu, r) \text{ y } B_{d_P}(\mu, \delta_2) \subset B_d(\mu, r) \tag{2.5}$$

Supongamos que (2.5) es falso. Entonces existe $\mu_0 \in X$ y $r_0 > 0$ tales que para cualquier par $\delta_1, \delta_2 > 0$ se tiene que $B_d(\mu_0, \delta_1) \not\subset B_{d_P}(\mu_0, r_0)$ o $B_{d_P}(\mu_0, \delta_2) \not\subset B_d(\mu_0, r_0)$. Consideremos así la sucesión $\delta_n = \frac{r_0}{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe una subsucesión $(\delta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $B_d(\mu_0, \delta_{n_k}) \not\subset B_{d_P}(\mu_0, r_0)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ o $B_{d_P}(\mu_0, \delta_{n_k}) \not\subset B_d(\mu_0, r_0)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $B_d(\mu_0, \delta_{n_k}) \not\subset B_{d_P}(\mu_0, r_0)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\mu_k \in \mathbb{P}(X)$ tal que $d(\mu_0, \mu_k) < \delta_k$ y $d_P(\mu_0, \mu_k) \geq r_0$. Así, se obtiene una sucesión $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $d(\mu_0, \mu_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y $d_P(\mu_0, \mu_k) \geq r_0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

Habiendo demostrado que para cualesquier $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y $r > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $B_d(\mu, \delta_1) \subset B_{d_P}(\mu, r)$ y $B_{d_P}(\mu_0, \delta_2) \subset B_d(\mu, r)$, es claro que toda bola abierta con respecto a la métrica d es unión de bolas abiertas de d_P y viceversa, lo cual implica que las topologías inducidas por ambas métricas son iguales. ■

Se probará ahora un resultado sobre el conjunto de medidas de Dirac $\delta(X)$. Para esto, es necesario antes una aclaración cuando se consideran espacios topológicos. De la misma forma que no es suficiente utilizar la convergencia de sucesiones para probar la continuidad de una función entre espacios topológicos en general, la cerradura de un subconjunto $A \subset X$ en un espacio topológico no necesariamente está totalmente determinada por aquellos elementos de X que son límite de alguna sucesión en A (véase [4]).

La caracterización de la cerradura de un conjunto mediante sucesiones se cumple, por ejemplo, si el espacio es primero numerable, esto es, si (X, τ) es un espacio topológico primero numerable. En este caso, para $A \subset X$ se tiene que $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$. Así, como todo espacio métrico es primero numerable, entonces la cerradura de un conjunto se puede determinar utilizando solamente la convergencia de sucesiones. Introducimos ahora el siguiente concepto.

Definición 2.3.10. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. La *cerradura secuencial* de A es el conjunto de todos los elementos de $x \in X$ que son límite de alguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A. Adicionalmente, decimos que un conjunto es *secuencialmente cerrado* si es igual a su cerradura secuencial.

Es claro que todo subconjunto cerrado en un espacio topológico es secuencialmente cerrado, pero por lo que se observó anteriormente, el que un conjunto sea secuencialmente cerrado no implica que sea cerrado. Para una discusión más amplia se pueden revisar los conceptos de espacio de Fréchet-Urysohn y el de espacio secuencial (esto puede consultarse en [4]).

Proposición 2.3.11. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces

(a) $d_P(\delta_x, \delta_y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$ para todo $x, y \in X$

(b) una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d) si y sólo si $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbb{P}(X), d_P)$

(c) el conjunto $\delta(X) = \{\delta_x : x \in X\}$ es secuencialmente cerrado en $\mathbb{P}(X)$.

Demostración. Sean $x, y \in X$ y consideremos $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{P}(X)$. De la definición de d_P se tiene que $d_P(\mu, \nu) \leq 1$ para cualquier par $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$. Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) < \alpha$. Para cada $A \in \mathcal{B}(X)$, el hecho de que $x \in A$ implica que $y \in A^\alpha$ y viceversa, por lo tanto

$$\delta_x(A) \leq \delta_y(A^\alpha) + \alpha, \quad \delta_y(A) \leq \delta_x(A^\alpha) + \alpha$$

por lo tanto $d_P(\delta_x, \delta_y) \leq \alpha$. Como $\alpha \in \mathbb{R}$ es arbitrario, se concluye que $d_P(\delta_x, \delta_y) \leq d(x, y)$.

Supongamos que $d_P(\delta_x, \delta_y) < 1$, y $d_P(\delta_x, \delta_y) < \alpha < 1$. Por lo probado anteriormente, con $A = \{x\}$ se cumple que

$$\delta_x(A) \leq \delta_y(A^\alpha) + \alpha \implies 1 \leq \delta_y(B(x, \alpha)) + \alpha \implies 1 - \alpha \leq \delta_y(B(x, \alpha))$$

Como $\alpha < 1$ entonces $\delta_y(B(x, \alpha)) > 0$, lo cual implica que $\delta_y(B(x, \alpha)) = 1$, esto es, $y \in B(x, \alpha)$ lo cual implica que $d(x, y) < \alpha$. Con esto, $d(x, y) \leq d_P(\delta_x, \delta_y)$.

La afirmación (b) es una consecuencia directa de (a). Probaremos ahora que $\delta(X)$ es secuencialmente cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X tales que $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \mu$, donde $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no posee alguna subsucesión convergente. Entonces, se tiene que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y cerrado, y por lo tanto, cualquier subconjunto $C \subset A$ también es cerrado. Debido a que $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \mu$, por el teorema de portmanteau se tiene que $\mu(C) \geq \text{lím sup}_{n\to\infty} \delta_{x_n}(C)$ para todo cerrado C. Si $C_1 \subset A$ es un conjunto infinito, se tiene que $\mu(C_1) \geq \text{lím sup}_{n\to\infty} \delta_{x_n}(C_1) = 1$, es decir, $\mu(C_1) = 1$. Ante esto, tomando dos subconjuntos infinitos ajenos $A_1, A_2 \subset A$, se tiene que $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 1$, lo cual implica que $\mu(X) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$, lo cual contradice el hecho de que $\mu \in \mathbb{P}(X)$.

Ante esta contradicción, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento $x \in X$. Como la función $\delta(x) = \delta_x$ es un homeomorfismo, se tiene que $\mu = \delta_x$, concluyendo así que $\delta(X)$ es secuencialmente cerrado. ■

Notese que si X es separable, la topología débil en $\mathbb{P}(X)$ es metrizable y por ende, de la afirmación (c) de la proposición se tiene que $\delta(X)$ es un conjunto cerrado.

Finalizamos esta sección con un resultado que brinda algunas propiedades a $\mathbb{P}(X)$ si el espacio métrico X es polaco.

Teorema 2.3.12. Un espacio métrico X es polaco si y sólo si $\mathbb{P}(X)$ es polaco.

Demostración. ($\Rightarrow$) Se prueba en el Teorema 3.2.2.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbb{P}(X)$ es un espacio polaco. Entonces, como $\mathbb{P}(X)$ es un espacio metrizable y separable, entonces X también es separable, lo cual implica que la topología débil es igual a la inducida por d_P. Adicionalmente debido a que $\delta(X)$ es secuencialmente cerrado y $\mathbb{P}(X)$ es metrizable, entonces $\delta(X)$ es un conjunto cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces, la sucesión $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy en $\mathbb{P}(X)$. Como $\mathbb{P}(X)$ es un espacio completo, entonces $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$ para algún $\delta_x \in \delta(X)$, lo cual implica que $x_n \to x$. ■

Capítulo 3

Compacidad en espacios de medidas de probabilidad

Retomemos el caso del conjunto de medidas de probabilidad con la topología débil. Consideremos un espacio métrico X, la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ y una sucesión de medidas de probabilidad $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nos podemos preguntar: ¿Qué condiciones son suficientes para que la sucesión converja débilmente, o tenga al menos un punto límite? Un ejemplo sencillo de sucesión de medidas que no posee un punto límite es la sucesión de medidas de Dirac $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$.

En este capítulo presentaremos una concepto que nos ayudará a responder la pregunta anterior. Además, se presentará uno de los teoremas más importantes de este trabajo, el cual establece una condición suficiente (e incluso necesaria en espacios métricos polacos) para que en una familia de medidas de probabilidad, toda sucesión posea una subsucesión que converja a un elemento de $\mathbb{P}(X)$.

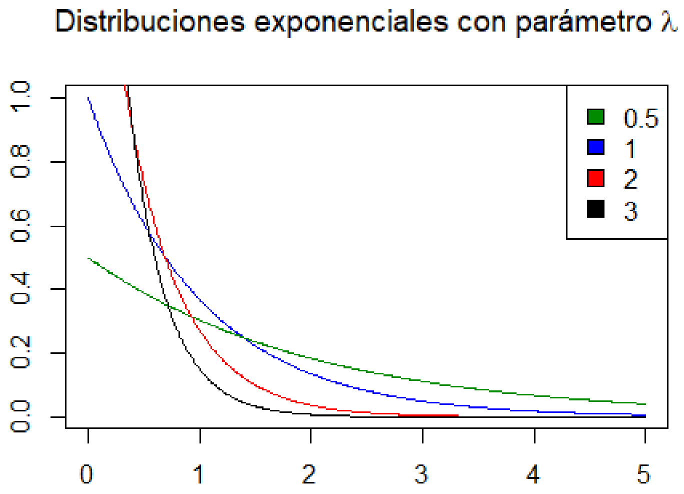
3.1. Teorema de Prokhorov

Definición 3.1.1. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(X)$ es llamada *tensa o uniformemente tensa* si para toda $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que $\sup\{\mu(X \setminus K) : \mu \in \mathcal{F}\} < \varepsilon$

Ejemplo 3.1.2. Si X es un espacio polaco, entonces toda familia finita de medidas finitas es tensa.

Ejemplo 3.1.3. La familia $\mathcal{F} = \{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ no es tensa. En efecto, tomemos $\varepsilon = 1$ y sea K un conjunto compacto. Entonces, por el teorema de Heine-Borel K es cerrado y acotado, lo cual implica que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \notin K$. Así, para toda $n \geq n_0$, $\delta_n(X \setminus K) = 1$, es decir $\sup\{\mu(X \setminus K) : \mu \in \mathcal{F}\} = 1$.

Ejemplo 3.1.4. Sea $\mathcal{F} \subset \{\mu_\lambda : \lambda > 0\}$, donde μ_λ es la medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ determinada por la función de densidad exponencial de parámetro λ. Entonces $\mathcal{F}$ es tensa si y sólo si $\inf\{\lambda > 0 : \mu_\lambda \in \mathcal{F}\} > 0$.



En efecto, supongamos que $\mathcal{F}$ es tensa. Entonces existe un compacto de la forma $[0, r]$ donde $r > 0$ tal que $\mu_\lambda(\mathbb{R} \setminus [0, r]) = \mu_\lambda((r, \infty)) < \frac{1}{2}$ para toda $\mu_\lambda \in \mathcal{F}$, es decir,

$$\mu_\lambda((r, \infty)) = \int_r^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_r^\infty = e^{-\lambda r} < \frac{1}{2},$$

de donde se sigue que

$$\lambda > \frac{-\ln(\frac{1}{2})}{r} > 0$$

para toda $\mu_\lambda \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\inf\{\lambda > 0 : \mu_\lambda \in \mathcal{F}\} > 0$.

Supongamos ahora que $\inf\{\lambda > 0 : \mu_\lambda \in \mathcal{F}\} = L > 0$ y sea $\varepsilon \in (0,1) \cap (0, L)$ arbitrario. Entonces, $-\ln(\varepsilon) > 0$ y por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 L > -\ln(\varepsilon)$ lo cual implica que $e^{-Ln_0} < \varepsilon$. Considerando el conjunto compacto $[0, n_0]$, se tiene para $\mu_\lambda \in \mathcal{F}$

$$\mu_\lambda(\mathbb{R} \setminus [0, n_0]) = \int_{n_0}^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n_0} \leq e^{-Ln_0} < \varepsilon.$$

Como lo anterior se cumple para toda $\mu_\lambda \in \mathcal{F}$, se concluye que $\mathcal{F}$ es tensa.

En espacios métricos la compacidad de X y el hecho de que toda sucesión posee una subsucesión convergente son afirmaciones equivalentes (ver Teorema 1.2.7). Esta última caracterización es llamada compacidad secuencial. De forma similar a lo que sucede con la cerradura secuencial, en el caso de los espacios topológicos la compacidad no necesariamente es equivalente a la compacidad secuencial. Ante esto, presentamos la siguiente definición.

Definición. 3.1.5. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es secuencialmente compacto si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente.

Adicionalmente, decimos que $A \subset X$ es un conjunto secuencialmente compacto si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A posee una subsucesión que converge a un elemento $x \in A$. Además, decimos que A es relativamente secuencialmente compacto si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente a un elemento $x \in X$, y en este caso x pertenece a la cerradura secuencial de A.

Teorema 3.1.6. (Prokhorov, 1956). Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(X)$. Entonces:

(i) Si $\mathcal{F}$ es tensa, entonces $\mathcal{F}$ es relativamente secuencialmente compacta.

(ii) Si X es polaco y $\mathcal{F}$ es relativamente secuencialmente compacta entonces $\mathcal{F}$ es tensa.

Demostración de (ii). Sea $D = \{x_1, x_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable de X. Para $n, N \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_{n,N} = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 1/n). \tag{3.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $A_{n,N} \uparrow X$ cuando $N \to \infty$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de medidas de probabilidad, el conjunto de números reales $A = \{\mu(A^c_{n,N}) : \mu \in \mathcal{F}, n, N \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Definimos así

$$\delta := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in\mathcal{F}} \mu(A^c_{n,N}) \geq 0.$$

Supóngase que $\delta > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{2} < \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in\mathcal{F}} \mu(A^c_{n_0,N})$. Esto implica que para todo $N \in \mathbb{N}$, $\frac{\delta}{2} < \sup_{\mu\in\mathcal{F}} \mu(A^c_{n_0,N})$ y por lo tanto existe una medida $\mu_N \in \mathcal{F}$ tal que $\mu_N(A^c_{n_0,N}) \geq \frac{\delta}{3}$. Como $\mathcal{F}$ es una familia relativamente secuencialmente compacta, la sucesión $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $(\mu_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con límite μ.

Por el teorema de portmanteau, para toda $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mu(A^c_{n_0,N}) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_{N_k}(A^c_{n_0,N}) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_{N_k}(A^c_{n_0,N_k}) \geq \delta/3 > 0 \tag{3.2}$$

Como $A^c_{n_0,N} \downarrow \emptyset$ cuando $N \to \infty$, entonces $\mu(A^c_{n_0,N}) \to 0$, lo cual contradice (3.2) y por lo tanto $\delta = 0$. Se sigue entonces que para toda $n \in \mathbb{N}$ $\inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in\mathcal{F}} \mu(A^c_{n,N}) = 0$, lo cual implica que para $\varepsilon > 0$ podemos escoger $N'_n \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{\mu\in\mathcal{F}} \mu(A^c_{n,N'_n}) < \varepsilon/2^n$ y por lo tanto, $\mu(A^c_{n,N'_n}) < \varepsilon/2^n$ para toda $\mu \in \mathcal{F}$. Sea $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,N'_n}$. De (3.1) se tiene que A es totalmente acotado y como X es un espacio métrico completo, entonces A es relativamente compacto. Así, para toda $\mu \in \mathcal{F}$

$$\mu((\bar{A})^c) \leq \mu(A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c_{n,N'_n}) \leq \varepsilon$$

concluyendo así que que la familia $\mathcal{F}$ es tensa.

Demostración de (i). Primero supongamos que X es un espacio σ-compacto, esto es, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_n$, donde cada K_n es un conjunto compacto de X. Entonces, por la Proposición 1.2.6 X es separable y por lo tanto existe una base numerable $\mathcal{B}$ para la topología τ_X (véase Proposición B.0.9). Definimos las familias de conjuntos

$$\mathcal{C}' := \{\bar{U} \cap K_n : U \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{C} := \{\bigcup_{n=1}^{N} C_n : N \in \mathbb{N} \text{ y } C_1, ..., C_N \in \mathcal{C}'\}$$

Nótese que $\mathcal{C}'$ es una familia numerable de conjuntos compactos y $\mathcal{C}$ es una familia numerable de conjuntos compactos cerrada bajo uniones finitas. Además, cada K_n tiene una cubierta finita de elementos de $\mathcal{B}$, lo cual implica que $K_n \in \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Paso 1. Definición de $\alpha : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ...\}$. Puesto que la sucesión de números reales $(\mu_n(C_1))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión convergente $(\mu_{n^1_k}(C_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Utilizando el mismo argumento, de la sucesión $(\mu_{n^1_k}(C_2))_{k\in\mathbb{N}}$ podemos encontrar una subsucesión convergente $(\mu_{n^2_k}(C_2))_{k\in\mathbb{N}}$. De forma inductiva, podemos encontrar subsucesiones $(n^1_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(n^2_k)_{k\in\mathbb{N}}$,... tales que $(n^i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(n^j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si $i \geq j$ y $(\mu_{n^m_k}(C_m))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para todo $m \in \mathbb{N}$. Definiendo $n_k = n^k_k$, se tiene que la subsucesión $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ cumple que para toda $C \in \mathcal{C}$ $\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(C)$ existe.

Definimos así la función $\alpha : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ como $\alpha(C) = \text{lím}_{k\to\infty} \mu_{n_k}(C)$. Utilizando propiedades básicas de medidas, se tiene que la función α es monótona, aditiva y subaditiva, esto es $\alpha(C_1) \leq \alpha(C_2)$ si $C_1 \subset C_2$, $\alpha(C_1 \cup C_2) = \alpha(C_1) + \alpha(C_2)$ si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y, en general, para $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $\alpha(C_1 \cup C_2) \leq \alpha(C_1) + \alpha(C_2)$.

Paso 2. Definición de β, subaditividad y σ-subaditividad de β. Para $A \subset X$ abierto definimos

$$\beta(A) := \sup\{\alpha(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset A\}.$$

Sean A_1 y A_2 subconjuntos abiertos de X y sea $C \in \mathcal{C}$, con $C \subset A_1 \cup A_2$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ con $C \subset K_{n_0}$. Definimos los conjuntos

$$B_1 := \{x \in C : d(x, A_1^c) \geq d(x, A_2^c)\}$$

$$B_2 := \{x \in C : d(x, A_1^c) \leq d(x, A_2^c)\}.$$

Sea $x \in B_1$ y supongamos que $x \notin A_1$. Como $C \subset A_1 \cup A_2$ y $x \in C$, entonces $x \in A_2$. Entonces $d(x, A_2^c) > 0$ y $d(x, A_1^c) = 0$, es decir, $d(x, A_1^c) < d(x, A_2^c)$ lo cual no es posible pues $x \in B_1$. Así, se tiene que $x \in A_1$ y por lo tanto $B_1 \subset A_1$. Con un razonamiento similar se obtiene que $B_2 \subset A_2$.

Puesto que la función $x \mapsto d(x, A_i^c)$ es continua con $i = 1, 2$, entonces las funciones

$$f_1(x) = d(x, A_1^c) - d(x, A_2^c) \text{ y}$$

$$f_2(x) = d(x, A_2^c) - d(x, A_1^c)$$

también son continuas. Puesto que $B_1 = f_1^{-1}([0, \infty))$ y $B_2 = f_2^{-1}([0, \infty))$ y $[0, \infty)$ es un conjunto cerrado, B_1 y B_2 son subconjuntos cerrados. Además, como B_1 y B_2 son subconjuntos de C entonces B_1 y B_2 son compactos.

De lo anterior, se tiene que $d(B_1, A_1^c) > 0$ lo cual implica que existe un subconjunto abierto D_1 tal que $B_1 \subset D_1 \subset \bar{D}_1 \subset A_1$. En efecto, como B_1 es compacto, con $a = d(B_1, A_1^c)/2 > 0$ podemos escoger una cubierta finita de bolas $B(x_1, a), ..., B(x_n, a)$, donde $x_i \in B_1$ para cada $i = 1, ..., n$. Se cumple que para cada $i = 1, ..., n$, $\overline{B(x_i, a)} \in A_1$, ya que si existe $y \in \overline{B(x_i, a)}$ tal que $y \in A_1^c$, entonces podemos escoger un elemento $z \in B(x_i, a)$ tal que $d(z, y) < a/2$, lo cual implica que

$$d(x_i, y) \leq d(x_i, z) + d(z, y) < a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a = \frac{3}{4}d(B_1, A_1^c)$$

llegando así a una contradicción. Tomando $D_1 = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, a)$, se tiene que, en efecto, $B_1 \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset A_1$.

Sea $\mathcal{B}_{D_1} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset D_1\}$. Entonces $B_1 \subset D_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{D_1}} B$. Ahora, escogemos una subcubierta finita $\{U_1, ..., U_N\} \subset \mathcal{B}_{D_1}$ de B_1 y definimos $C_1 = \bigcup_{i=1}^{N} \bar{U}_i \cap K_{n_0}$. Entonces $B_1 \subset C_1 \subset A_1$ y $C_1 \in \mathcal{C}$. Similarmente se escoge $C_2 \in \mathcal{C}$ con $B_2 \subset C_2 \subset A_2$. Como $C \subset B_1 \cup B_2 \subset C_1 \cup C_2$, utilizando las propiedades de monotonía y subaditividad de α y la definición de β, se tiene que

$$\alpha(C) \leq \alpha(C_1 \cup C_2) \leq \alpha(C_1) + \alpha(C_2) \leq \beta(A_1) + \beta(A_2).$$

Esto implica que

$$\beta(A_1 \cup A_2) = \sup\{\alpha(C) : C \in C \text{ tal que } C \subset A_1 \cup A_2\} \leq \beta(A_1) + \beta(A_2).$$

Procedemos ahora a mostrar la σ-subaditividad de β. Sea $A_1, A_2, ...$ una sucesión de subconjuntos abiertos y sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Debido a que C es compacto, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i$. Ya se probó que β posee la propiedad de subaditividad finita, entonces

$$\alpha(C) \leq \beta(\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \beta(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \beta(A_i)$$

Tomando el supremo sobre $C \in \mathcal{C}$, se obtiene que

$$\beta(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup\{\alpha(C) : C \in C \text{ tal que } C \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \beta(A_i)$$

Paso 3. Definición de la medida exterior μ^*. Para $G \in 2^X$ definimos

$$\mu^*(G) := \text{ínf}\{\beta(A) : G \subset A,\ A \text{ es un abierto }\}.$$

Primeramente observamos que $\beta(A) = \mu^*(A)$ para cualquier subconjunto abierto A. Se probará ahora que μ^* es una medida exterior. Es claro que $\mu^*(\emptyset) = 0$ y que μ^* es monótona. Para probar la σ-subaditividad de μ^*, sea $(G_1, G_2, ...)$ una sucesión de subconjuntos de X y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por la definición de μ^* y la propiedad del ínfimo se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger un subconjunto abierto A_n tal que $G_n \subset A_n$ y

$\beta(A_n) < \mu^*(G_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Por la σ subaditividad de β, se tiene que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(A_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n)$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n)$. Así, μ^* es en efecto una medida exterior.

Paso 4. Todo boreliano es μ^*-medible. Se probará que los subconjuntos cerrados son μ^*-medibles. Sea $G \in 2^X$, $\varepsilon > 0$, F un subconjunto cerrado y $A \subset X$ un abierto. Escogemos $C_1 \in \mathcal{C}$ con $C_1 \subset A \cap F^c$, y $\alpha(C_1) > \beta(A \cap F^c) - \varepsilon$. Además, sea $C_2 \in \mathcal{C}$ tal que $C_2 \subset A \cap C_1^c$ y $\alpha(C_2) > \beta(A \cap C_1)^c - \varepsilon$. Como $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y $C_1 \cup C_2 \subset A$, entonces

$$\beta(A) \geq \alpha(C_1 \cup C_2) = \alpha(C_1) + \alpha(C_2) \geq \beta(A \cap F^c) + \beta(A \cap C_1^c) - 2\varepsilon$$

$$\geq \mu^*(A \cap F^c) + \mu^*(A \cap F) - 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces se obtiene la desigualdad $\mu^*(F \cap A) + \mu^*(F^c \cap A) \leq \beta(A)$. Tomando el ínfimo sobre los subconjuntos abiertos A tales que $G \subset A$, se obtiene que

$$\mu^*(F \cap G) + \mu^*(F^c \cap G) \leq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F^c \cap A) \leq \mu^*(G).$$

Así, todo subconjunto cerrado es μ^* medible lo cual implica que todo boreliano es μ^* medible.

Definiendo $\mu = \mu^*|_{(\mathcal{B}(X))}$, se tiene que para todo abierto A, $\mu(A) = \mu^*(A) = \beta(A)$, por lo tanto

$$\mu(A) = \sup\{\alpha(C) : C \in \mathcal{C},\ C \subset A\} \text{ para todo } A \subset X \text{ abierto}$$

Sea A un abierto y $C \in \mathcal{C}$ con $C \subset A$. Se tiene que

$$\alpha(C) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(C) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}(A)$$

Tomando el supremo sobre las $C \subset A$, se tiene que $\mu(A) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}(A)$. Por el teorema de portmanteau, se tiene que $\mu_{n_k} \xrightarrow{w} \mu$. Como $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria en la familia de medidas de probabilidad $\mathcal{F}$ se concluye que $\mathcal{F}$ es relativamente secuencialmente compacta.

Ahora, sea (X, d) un espacio métrico arbitrario y $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(X)$ una familia tensa. Entonces existe una sucesión creciente de conjuntos compactos $K_1 \subset K_2 \subset ...$ tal que $\mu(K_n^c) < \frac{1}{n}$

para toda $\mu \in \mathcal{F}$. Si definimos $X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, entonces $(X', d|_{X'})$ es un espacio métrico σ-compacto (separable) y $\mu(X \setminus X') = 0$ para toda $\mu \in \mathcal{F}$. Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Definimos $\mu'_n = \mu_n|_{\mathcal{B}(X')}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obteniendo así la sucesión de medidas de probabilidad $(\mu'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(X', \mathcal{B}(X'))$.

Si A es un abierto, entonces $A \cap X'$ es un abierto en X'. Así, por el procedimiento previo, existe una medida μ' en X' y una subsucesión $(\mu'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo abierto A, $\mu'(A \cap X') \leq \liminf_{k\to\infty} \mu'_{n_k}(A \cap X')$. Definiendo la medida $\mu(B) = \mu'(B \cap X')$ en X se tiene que para cada abierto A

$$\mu(A) = \mu'(A \cap X') \leq \liminf_{k\to\infty} \mu'_{n_k}(A \cap X') = \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}(A)$$

Como $\mu(A) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}(A)$, por el teorema de portmanteau se tiene que $\mu_{n_k} \xrightarrow{w} \mu$. Así, como $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria, se concluye que $\mathcal{F}$ es una familia relativamente secuencialmente compacta. ■

3.2. Algunas consecuencias del teorema de Prokhorov

Lema 3.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\Gamma \subset \mathbb{P}(X)$. Si para toda $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existen $a_1, ..., a_n \in X$ tales que

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta)) \geq 1 - \varepsilon$$

para toda $\mu \in \Gamma$, entonces Γ es tensa.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ existen puntos $a_1^m, ..., a_{n_m}^m \in X$ tales que

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n_m} B(a_i^m, 1/m)) \geq 1 - 2^{-m}\varepsilon \text{ para toda } \mu \in \Gamma$$

Definimos así el conjunto

$$K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_m} \overline{B(a_i^m, 1/m)}$$

Por construcción, es claro que K es totalmente acotado y como X es un espacio métrico completo entonces K es relativamente compacto. Además, como K es cerrado, lo anterior implica que K es compacto. Así, para $\mu \in \Gamma$

$$\mu(K) = \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_m} \overline{B(a_i^m, 1/m)}) = 1 - \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n_m} \overline{B(a_i^m, 1/m)}^c)$$

$$\geq 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\bigcap_{i=1}^{n_m} \overline{B(a_i^m, 1/m)}^c) \geq 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\varepsilon = 1 - \varepsilon$$

$$\implies \mu(K^c) \leq \varepsilon$$

Se obtiene así que la familia Γ es tensa. ■

Proporcionaremos ahora una prueba interesante para una de las consecuencias del Teorema 2.3.12, que utiliza menos herramientas de topología que las pruebas mostradas en [1] o [3] y también aprovecha las virtudes del teorema de Prokhorov.

Teorema 3.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Si (X, d) es un espacio polaco, entonces $(\mathbb{P}(X), d_P)$ (esto es, $\mathbb{P}(X)$ con la topología débil) es polaco.

Demostración. Como X es separable, entonces $\mathbb{P}(X)$ también es separable. Sea ahora $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{P}(X)$. Sea $D = \{a_1, a_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable en X. Para $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ definimos

$$\gamma := \text{mín}\{\varepsilon, \delta\}/2$$

y tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_P(\mu_m, \mu_k) < \gamma$$

para toda $m, k \geq N$. Esto a su vez, implica que para toda $m, k \in \mathbb{N}$

$$\mu_m(A) \leq \mu_k(A^\gamma) + \gamma \text{ y } \mu_k(A) \leq \mu_m(A^\gamma) + \gamma \text{ para toda } A \in \mathcal{B}(X).$$

Tomamos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que para $k = 1, 2, ..., N$ se cumple

$$\mu_k(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta/2)) \geq 1 - \gamma.$$

Obsérvese que para $k \geq N$

$$(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta/2))^\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta/2 + \gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta)$$

$$\Longrightarrow \mu_k(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta/2)) \leq \mu_k((\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta/2))^{\gamma}) + \gamma \leq \mu_k(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta)) + \gamma$$

Esto implica que para $k \geq N$

$$\mu_k(\bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta}(a_i, \delta)) \geq 1 - 2\gamma \geq 1 - \varepsilon$$

y además de que para $k = 1, ..., N$

$$\mu_k(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta)) \geq \mu_k(\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta/2)) \geq 1 - \gamma \geq 1 - \varepsilon.$$

Por el lema previamente demostrado, se tiene que la familia de medidas $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ es tensa y por ende relativamente compacta por el teorema de Prokhorov. Así, existe una subsucesión $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Por hipótesis, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto, $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$. Se concluye así que $\mathbb{P}(X)$ es completo. ■

Capítulo 4

Ejemplos de conjuntos compactos y σ-compactos en $\mathbb{P}(X)$

4.1. Las métricas de Lévy y Kolmogorov

Definición 4.1.1. Dadas dos funciones de distribución de probabilidad F y G en $\mathbb{R}$ se define la distancia de Lévy por

$$d_L(F,G) = \text{ínf}\{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon) + \varepsilon \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

Lema 4.1.2. La función d_L es una métrica en el conjunto de funciones de distribución de probabilidad.

Demostración. Consideremos los conjuntos $A = \{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{\varepsilon \in \mathbb{R} : F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$ y tomemos $\varepsilon \in A$ y $x \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Consideremos $x_1 = x-\varepsilon$. Como $\varepsilon \in A$, entonces

$$F(x_1) \leq G(x_1+\varepsilon)+\varepsilon \implies F(x-\varepsilon) \leq G(x-\varepsilon+\varepsilon)+\varepsilon \implies F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq G(x)$$

De forma similar, considerando $x_2 = x+\varepsilon$, se tiene que

$$G(x_2-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x_2) \implies G(x+\varepsilon-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x+\varepsilon) \implies G(x) \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon$$

Así, se obtiene que $F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon$ lo cual implica que $\varepsilon \in B$. Como $\varepsilon \in A$ es arbitrario se tiene que $A \subset B$. De forma análoga se prueba que $B \subset A$ y por lo tanto $A = B$. Se tiene entonces que $d_L(F,G) = \text{ínf}\, A = \text{ínf}\, B = d_L(G,F)$.

Sean F y G funciones de distribución tales que $d_L(F,G) = 0$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \in \{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$. Como G es una función de distribución entonces G es continua por la derecha y por lo tanto $G(x+\frac{1}{n}) \to G(x)$ cuando $n \to \infty$. Se tiene entonces que

$$F(x) \leq G(x+\frac{1}{n})+\frac{1}{n} \implies F(x) \leq \lim_{n\to\infty}(G(x+\frac{1}{n})+\frac{1}{n}) = G(x)$$

$$\implies F(x) \leq G(x).$$

Como $d_L(F,G) = d_L(G,F) = 0$, utilizando una argumentación análoga obtenemos que $G(x) \leq F(x)$ y por lo tanto $F(x) = G(x)$. Como $x \in \mathbb{R}$ es un elemento arbitrario, se tiene que $F = G$. Por otro lado, si $F = G$, se sigue que $0 \in \{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$ por lo tanto, $d_L(F,G) = 0$.

Finalmente, sean F, G y H funciones de distribución de probabilidad. Sean $a \in \{\varepsilon \in \mathbb{R} : H(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x) \leq H(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$, $b \in \{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq H(x) \leq G(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$ y $x \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Considerando $x_1 = x-a$, se tiene que

$$G(x_1-b)-b \leq H(x_1) \implies G(x-a-b)-b \leq H(x-a)$$

$$\implies G(x-a-b)-a-b \leq H(x-a)-a \leq F(x) \implies G(x-a-b)-a-b \leq F(x)$$

Con argumentos similares, se obtiene que $F(x) \leq G(x+a+b)+a+b$. Así, $G(x-a-b)-a-b \leq F(x) \leq G(x+a+b)+a+b$, y como $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario se sigue que $a, b \in \{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$. Ante esto, $d_L(F,G) \leq a+b$, por lo tanto, de la propiedad del ínfimo, se tiene que $d_L(F,G) \leq d_L(F,H)+d_L(H,G)$. ■

Teorema 4.1.3. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión funciones de distribución de probabilidad. Entonces, $F_n(x) \to F(x)$ para todo punto de continuidad de F si y sólo si $d_L(F,F_n) \to 0$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $d_L(F,F_n) \to 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad en F y $\varepsilon \to 0$, entonces $F(x+\varepsilon)+\varepsilon \to F(x)$ y $F(x-\varepsilon)-\varepsilon \to F(x)$, y como $d_L(F,F_n) = \text{ínf}\{\varepsilon \in \mathbb{R} : F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F_n(x) \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon\} \to 0$, se tiene $F_n(x) \to F(x)$.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $F_n(x) \to F(x)$ para todo punto de continuidad. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 < x_1 < ... < x_N$ puntos de continuidad de F tales que $F(x_0) < \varepsilon/2$, $F(x_N) > 1-\varepsilon/2$, y que $x_{i+1}-x_i < \varepsilon$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \{0,1,...,N\}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$

se cumpla que $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon/2$. Entonces, para $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ con $i \in \{1, ..., N\}$ y $n \geq n_0$, se tiene que

$$F_n(x) \leq F_n(x_i) < F(x_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon$$

Para $x < x_0$, se sigue que

$$F_n(x) \leq F_n(x_0) - F(x_0) + F(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon$$

Finalmente, para $x > x_N$ se tiene que

$$F_n(x) \leq 1 \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Con esto queda probado que para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \geq n_0$ se cumple que $F_n(x) \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon$. Utilizando argumentos similares, se obtiene que $F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \geq n_0$. Debido a que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se concluye que $d_L(F_n, F) \to 0$. ∎

Definición 4.1.4. Dadas dos funciones de distribución de probabilidad F y G en $\mathbb{R}$ se define la distancia de Kolmogorov por

$$d_K(F, G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$$

Puesto que las funciones de distribución de probabilidad son acotadas, la distancia de Kolmogorov está bien definida. Además, utilizando propiedades básicas del supremo, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.5 La distancia de Kolmogorov d_K es una métrica en el conjunto de funciones de distribución de probabilidad.

Proposición 4.1.6 Para cualesquiera funciones de distribución de probabilidad F y G, se cumple que $d_L(F, G) \leq d_K(F, G)$.

Demostración. Sean F y G funciones de distribución de probabilidad y $a = d_K(F, G)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $|F(x) - G(x)| \leq a$. Esto implica que

$$-a \leq F(x) - G(x) \leq a \implies G(x) - a \leq F(x) \leq G(x) + a.$$

Se sigue que

$$G(x - a) - a \leq G(x) - a \leq F(x) \leq G(x) + a \leq G(x + a) + a$$

$$\Longrightarrow G(x-a)-a \leq F(x) \leq G(x+a)+a.$$

Esto implica que $a \in \{\varepsilon \in \mathbb{R} : G(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon)+\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto, de la definición de la métrica de Lévy se sigue que $d_L(F,G) \leq a = d_K(F,G)$. ■

4.2. Ejemplos de conjuntos compactos y σ-compactos en $\mathbb{P}(X)$

Sea (X,d) un espacio métrico y $x_0 \in X$ fijo. Definimos los siguientes conjuntos en $\mathbb{P}(X)$

$$\mathbb{P}_0(X) := \{\mu \in \mathbb{P}(X) : \int_X d(x,x_0)\mu(dx) < \infty\},$$

$$\mathbb{P}_b(X) = \{\mu \in \mathbb{P}(X) : \int_X d(x,x_0)\mu(dx) \leq b\},$$

$$\mathbb{P}_{a,b}(X) = \{\mu \in \mathbb{P}(X) : a \leq \int_X d(x,x_0)\mu(dx) \leq b\}$$

con constantes $0 \leq a < b$. Finalmente, con $c > 0$ y $r > 0$ definimos:

$$\mathbb{P}^r_{a,b} = \{\mu \in \mathbb{P}_{a,b}(X) : \int_X d^{1+r}(x,x_0)\mu(dx) < \infty\}$$

y

$$\mathbb{P}^{r,c}_{a,b} = \{\mu \in \mathbb{P}_{a,b}(X) : a \leq \int_X d^{1+r}(x,x_0)\mu(dx) \leq c\}.$$

En el siguiente resultado consideraremos una clase particular de espacios métricos.

Definición 4.2.1. Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que X es de Heine-Borel o propio si todo subconjunto cerrado y acotado es compacto. En este caso decimos que d es una métrica de Heine-Borel.

Un ejemplo de un espacio métrico de Heine-Borel es $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana usual.

Observación 4.2.2. Todo espacio métrico (X,d) de Heine-Borel es σ-compacto. En efecto, si tomamos $x \in X$ arbitrario, para todo $n \in \mathbb{N}$ la bola cerrada $B[x,n]$ es compacta, y como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B[x,n]$, se tiene que X es σ-compacto. Adicionalmente, todo subconjunto acotado es totalmente acotado.

Teorema 4.2.3 Si (X,d) es un espacio métrico de Heine-Borel, entonces $\mathbb{P}_b(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{P}(X)$ para cada $b > 0$ y $\mathbb{P}_0(X)$ es un subconjunto σ-compacto.

Demostración. Sean $b > 0, \varepsilon > 0$ arbitrarios y consideremos el conjunto $K = B[x_0, 2b/\varepsilon]$. Como K es cerrado y acotado entonces K es compacto. Consideremos además la función $Z(x) = d(x, x_0)$, la cual es continua y por lo tanto es medible en $(X, \mathcal{B}(X))$. De la desigualdad de Markov tenemos que para toda $\mu \in \mathbb{P}_b(X)$,

$$\mu(K^c) = \mu(\{x \in X : Z(x) > \frac{2b}{\varepsilon}\}) \leq \frac{\varepsilon}{2b} \int_X Z(x)\mu(dx) = \frac{\varepsilon}{2b} \int_X d(x, x_0)\mu(dx) < \varepsilon.$$

Así, como $\varepsilon > 0$ y $\mu \in \mathbb{P}_b(X)$ son arbitrarios, $\mathbb{P}_b(X)$ es una familia tensa. Entonces, por el teorema de Prokhorov se tiene que $\mathbb{P}_b(X)$ es un conjunto relativamente secuencialmente compacto. Probaremos ahora que $\mathbb{P}_b(X)$ es un conjunto secuencialmente cerrado. Supongamos que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{P}_b(X)$ que converge a $\mu \in \mathbb{P}(X)$ y consideremos la sucesión de funciones $Z_k = ZI_{B(x_0,2k/\varepsilon)}$, con $k \in \mathbb{N}$, las cuales son semi-continuas inferiormente en X (ver Observación 1.4.2.2). Se tiene entonces que

$$\int_X Z_k(x)\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X Z_k(x)\mu_n(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X Z(x)\mu_n(dx) \leq b$$

Debido a que $Z_k \uparrow Z$ de forma puntual, por el teorema de la convergencia monótona se cumple que

$$\int_X d(x, x_0)\mu(dx) = \int_X Z(x)\mu(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_X Z_k\mu(dx) \leq b$$

esto es, $\mu \in \mathbb{P}_b(X)$. Como $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente arbitraria en $\mathbb{P}_b(X)$, entonces $\mathbb{P}_b(X)$ es un conjunto secuencialmente cerrado. Así, se concluye que $\mathbb{P}(X)$ es secuencialmente compacto.

En cuanto a la σ-compacidad de $\mathbb{P}_0(X)$, basta notar que $\mathbb{P}_0(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_n(X)$, pues $\mathbb{P}_n(X)$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$ por lo probado anteriormente. ■

Corolario 4.2.4. Un espacio métrico (X, d) es compacto si y sólo si $\mathbb{P}(X)$ es un espacio compacto y metrizable.

Demostración. Supongamos primero que (X, d) es un espacio compacto. Entonces, X es un espacio métrico separable. Además, como todo subconjunto cerrado de X es compacto, entonces es claro que (X, d) es un espacio de Heine-Borel. Ahora, como X es un espacio compacto y la función $f(x) = d(x, x_0)$ es continua para x_0 arbitrario, entonces $b^* = \sup_{x\in X} d(x, x_0)$ es una constante finita. Así, se tiene que $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}_{b^*}(X)$, por lo tanto, por el Teorema 4.2.3 se tiene que $\mathbb{P}(X)$ es un espacio compacto.

Supongamos ahora que $\mathbb{P}(X)$ es compacto y metrizable. Con la función $x \mapsto \delta(x)$ identificamos a cada elemento de $x \in X$ con una medida de probabilidad. Consideremos así el subconjunto $\delta(X) = \{\delta(x) : x \in X\}$. Se tiene que $\delta(X)$ es un conjunto secuencialmente cerrado, y como por hipótesis $\mathbb{P}(X)$ es compacto y metrizable, entonces $\delta(X)$ es compacto. Por el Lema 2.2.3, la función $x \mapsto \delta(x)$ es un homeomorfismo entre X y $\delta(X)$ por lo tanto X es un espacio compacto. ■

Proposición 4.2.5. El espacio de medidas de probabilidad $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ no es σ-compacto.

Demostración. Sea $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ una medida de probabilidad fija y denotemos por F su función de distribución de probabilidad. Demostraremos que la bolas cerradas $B_{d_L}[\mu, r]$ no son conjuntos compactos para cualquier $r > 0$. Sin perdida de generalidad, tomaremos $r \in (0, 1/2)$. Definimos

$$a_r = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < r\}$$

$$b_r = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1 - r\}.$$

Consideremos la siguiente sucesión de funciones de distribucion de probabilidad: para $n \leq \text{máx}\{|a_r|, |b_r|\}$, sea $F_n(x) = F(x)$, y con $n > \text{máx}\{|a_r|, |b_r|\}$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -n \\ r & \text{si } -n \leq x < a_r \\ F(x) & \text{si } a_r \leq x < b_r \\ 1 - r & \text{si } b_r \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \tag{4.1}$$

Denotemos con μ_n la medida de probabilidad que corresponde a la función de distribución F_n. Considerando la métrica de Kolmogorov en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, se tiene que $d_K(\mu_n, \mu) \leq r$, lo cual implica que la sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a la bola cerrada $B_{d_L}[\mu, r]$. Notemos que la sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es tensa y como $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ es un espacio polaco, por el teorema de Prokhorov se tiene que $B_{d_L}[\mu, r]$ no es un conjunto compacto en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

Ante este hecho, se obtiene que los conjuntos compactos son nunca densos. En efecto, supongamos que existe un compacto $K \subset \mathbb{P}(\mathbb{R})$ tal que $\bar{K}^\circ \neq \emptyset$. Entonces, existe $\mu \in \bar{K}^\circ = K^\circ$ y $r > 0$ tal que $B_{d_L}(\mu, r) \subset K$. Como K es compacto y $B_{d_L}[\mu, r] \subset K$, se tiene que $B_{d_L}[\mu, r]$ es compacto, lo cual es una contradicción.

Para finalizar la prueba, obsérvese que $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ no se puede expresar como la unión numerable de conjuntos nunca densos (véase Teorema A.0.2). Así, como los conjuntos compactos en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ son nunca densos, se concluye que $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ no es σ-compacto. ∎

Proposición 4.2.6. El subconjunto $\mathbb{P}_{a,b}(\mathbb{R})$, con $a > 0$, no es un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

Demostración. Tomemos $x_0 = 0$. Se tiene que

$$\mathbb{P}_{a,b}(\mathbb{R}) = \{\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) : a \leq \int_{\mathbb{R}} |x|\mu(dx) \leq b\}.$$

Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ definida por

$$\mu_n(\{\frac{na}{2n-1}\}) = 1 - \frac{1}{2n} \qquad \mu_n(\{na\}) = \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\mu_n(dx) = (\frac{na}{2n-1})(1 - \frac{1}{2n}) + (na)(\frac{1}{2n}) = a$$

por lo tanto $\mu_n \in \mathbb{P}_{a,b}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos ahora la sucesión de distribuciones de probabilidad $\{F_n\}$ correspondientes a la sucesión de medidas $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Claramente, $F_n(x) \to F(x)$ para $x \neq a/2$, donde

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a/2 \\ 1 & \text{si } x \geq a/2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Así, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ donde μ es la medida de probabilidad que corresponde a la función de distribución F. Notemos que $\mu \notin \mathbb{P}_{a,b}(\mathbb{R})$. Así, $\mathbb{P}_{a,b}(\mathbb{R})$ no es un subconjunto cerrado. ∎

Teorema 4.2.7. Si (X, d) es un espacio métrico de Heine-Borel, entonces $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ es un subconjunto compacto para $0 < a < b$, $r > 0$ y $c > 0$. Además, $\mathbb{P}^{r}_{a,b}(X)$ es un conjunto σ-compacto.

Demostración. Como $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X) \subset \mathbb{P}_b$ y $\mathbb{P}_b(X)$ es una familia tensa de medidas de probabilidad, se tiene que $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ también es tensa. Por lo tanto, por el teorema de Prokhorov se sigue que $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ es una familia relativamente secuencialmente compacta. Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ que converge débilmente a una medida de probabilidad $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Como $\mu_n \in \mathbb{P}_b(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por los argumentos presentados en el Teorema 4.2.3 se tiene que $\mu \in \mathbb{P}_b(X)$.

Definiendo $W_k(x) = d^{1+r}(x, x_0) I_{B(x_0, \frac{2k}{\varepsilon})}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión de funciones semi-continuas inferiormente. Utilizando la condición (c) del teorema de portmanteau, se obtiene que

$$\int_X W_k(x)\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X W_k(x)\mu_n(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X d^{1+r}(x, x_0)\mu_n(dx) \leq c$$

Como $W_k \uparrow d^{1+r}(x, x_0)$, entonces

$$\int_X d^{1+r}(x, x_0)\mu(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_X W_k(x)\mu(dx) \leq c.$$

Probaremos ahora que

$$\int_X d(x, x_0)\mu(dx) \geq a$$

Notemos que para $\lambda \in \mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$

$$\int_{\{x\in X: d(x,x_0)\geq k\}} d(x, x_0)\lambda(dx) = \int_{\{x\in X: (\frac{d(x,x_0)}{k})^r \geq 1\}} d(x, x_0)\lambda(dx)$$

$$\leq \int_{\{x\in X: (\frac{d(x,x_0)}{k})^r \geq 1\}} \frac{(d(x, x_0))^{1+r}}{k^r}\lambda(dx) \leq \frac{c}{k^r}$$

Así, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\{x\in X: d(x,x_0)\geq k_\varepsilon\}} d(x, x_0)\lambda(dx) < \varepsilon \quad \text{para toda } \lambda \in \mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X).$$

Por otro lado, notemos que la función $x \mapsto d(x, x_0) I_{B[x_0, k_\varepsilon]}(x)$ es semicontinua superiormente. Utilizando la condición (c') del teorema de portmanteau se sigue que

$$\int_X d(x, x_0)\mu(dx) \geq \int_X d(x, x_0) I_{B[x_0,k_\varepsilon]}(x)\mu(dx)$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty} \int_X d(x, x_0) I_{B[x_0,k_\varepsilon]}(x)\mu_n(dx)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_X d(x, x_0)\mu_n(dx) - \int_X d(x, x_0) I_{\{x\in X: d(x,x_0)>k_\varepsilon\}}\mu_n(dx)\right)$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty} \int_X d(x, x_0)\mu_n(dx) - \varepsilon \geq a - \varepsilon$$

Puesto que ε es arbitrario, se tiene

$$\int_X d(x, x_0)\mu(dx) \geq a$$

lo cual implica que $\mu \in \mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$. Como $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria, se concluye que $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ es un subconjunto cerrado. Además, como $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ también es relativamente compacto, entonces $\mathbb{P}^{r,c}_{a,b}(X)$ es un subconjunto compacto.

La σ-compacidad de $\mathbb{P}^{r}_{a,b}(X)$ se prueba observando que $\mathbb{P}^{r}_{a,b}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{r,n}_{a,b}(X)$. ■

Conclusiones

Se inició este trabajo analizando la σ-álgebra de Borel en un espacio métrico y describiendo algunas clases de medidas que se pueden definir en este espacio medible. Se dieron varios resultados interesantes, como la regularidad exterior de una medida finita y el hecho de que en un espacio métrico polaco toda medida finita es tensa.

Posteriormente, en el segundo capítulo se introdujo la noción de convergencia débil de sucesiones de medidas de probabilidad, así como la topología débil en $\mathbb{P}(X)$ mediante la descripción y estudio de sus elementos básicos y subbásicos. En este mismo capítulo se introdujo el teorema de portmanteau, un resultado que es de gran utilidad debido a que proporciona una buena cantidad de condiciones equivalentes a la convergencia débil y también se presentó la métrica de Prokhorov, la cual podemos asegurar que induce la topología débil cuando el espacio métrico en cuestión es separable. Adicionalmente, se obtuvo una correspondencia interesante entre un espacio métrico X y el subconjunto de medidas de probabilidad $\delta(X)$ con la Proposición 2.3.11.

El teorema de Prokhorov es un resultado fundamental en este trabajo, ya que nos brinda una condición relativamente sencilla (la tensión) que nos garantiza que una familia de medidas de probabilidad es relativamente secuencialmente compacta. Además, con este enunciado se puede probar que un espacio métrico es polaco si y sólo si $\mathbb{P}(X)$ es polaco sin la necesidad de utilizar muchos resultados de topología general.

En el último capítulo se introdujeron las métricas de Lévy y Kolmogorov para el conjunto de funciones de distribución en $\mathbb{R}$. La primera métrica resulta ser una buena herramienta para analizar la convergencia débil de medidas de probabilidad debido al teorema de Helly-Bray, dando además una forma más intuitiva de entender dicha convergencia en este espacio. Por último, se probaron propiedades relacionadas a la compacidad de varios conjuntos de medidas de probabilidad definidas en espacios métricos de Heine-Borel.

En general, se concluye que los aspectos topológicos que aparecen en el desarrollo de este trabajo son de suma importancia en las demostraciones, sobre todo aquellos relacionados a la metrizabilidad de $\mathbb{P}(X)$. Esto se debe a que las nociones de cerradura y compacidad no se pueden caracterizar exclusivamente con la convergencia de sucesiones, sino que se debe recurrir al análisis de convergencia de redes.

Apéndice A

Teorema de categoría de Baire

Definición A.0.1. Un suconjunto A de un espacio métrico X se dice ser

(a) nunca denso en X si la cerradura no contiene puntos interiores, esto es, $\bar{A}^{\circ} = \emptyset$.

(b) de primera categoría en X si A es la unión numerable de conjuntos nunca densos.

(c) de segunda categoría en X cuando no es de primera categoría.

Teorema A.0.2. (Teorema de categoría de Baire) Si X es un espacio métrico completo entonces es de segunda categoría en sí mismo. Esto es, si $X \neq \emptyset$ y

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

entonces existe un A_i tal que contiene un subconjunto abierto no vacío.

Demostración. Supongamos que (X, d) es un espacio métrico completo de primera categoría. Entonces,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

donde A_i es nunca denso para todo $i \in \mathbb{N}$. Primero, como A_1 es nunca denso, entonces $\bar{A}_1$ no contiene ningún subconjunto abierto, pero X si contiene. Esto implica que $\bar{A}_1 \neq X$, por lo tanto, ${\bar{A}_1}^c$ no es vacío y es abierto. Podemos escoger así $x_1 \in {\bar{A}_1}^c$ y un $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ y $B_1 = B(x_1, \varepsilon_1) \subset {\bar{A}_1}^c$. Ahora, por hipótesis A_2 es nunca denso, por lo tanto ${\bar{A}_2}^c$ no contiene subconjuntos abiertos no vacíos, por lo tanto, no contiene a la bola $B(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})$. Esto implica que ${\bar{A}_2}^c \subset B(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})$ no es vacío y es abierto, por lo tanto, podemos escoger $x_2 \in \bar{A_2}^c \subset B(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})$ y $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ y

$$B_2 = B(x_2, \varepsilon_2) \subset \bar{M_2} \cap B(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})$$

Realizando un proceso inductivo, obtenemos una sucesión de bolas $B_n = B(x_n, \varepsilon_n)$ con $\varepsilon_n < 2^{-n}$ tales que $B_n \cap M_n = \emptyset$ y

$$B_{n+1} \subset B(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2}) \subset B_n$$

para $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde x_n es el centro de la bola B_n. Como $\varepsilon_n < 2^{-n}$, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y como X es un espacio métrico completo entonces $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Además para $m \in \mathbb{N}$ y $n > m$ se tiene que $B_n \subset B(x_m, \frac{\varepsilon_m}{2})$, entonces

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon_m}{2} + d(x_n, x) \to \frac{\varepsilon_m}{2}$$

cuando $n \to \infty$, lo cual implica que $x \in B_m$. Como m es arbitrario, entonces $x \in B_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y como $B_m \subset \bar{A_m}^c$, entonces $x \notin A_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, como $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces $x \notin X$, lo cual contradice el hecho de que $x \in X$. ■

Apéndice B

Resultados auxiliares de topología

Definición B.0.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección $\mathcal{B}$ de τ es una base para τ si para cada $A \in \tau$ existe una colección de elementos $(B_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Adicionalmente, para un elemento $x \in X$, una colección $\mathcal{C} \subset \tau$ es una base local o una base de vecindades de x en (X, τ) si para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B \subset U$.

Se tiene de forma trivial que para cualquier espacio topológico (X, τ), τ es una base para (X, τ). Para un espacio métrico (X, d), la topología generada por la métrica d es la colección $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es la unión de bolas abiertas }\}$. Así, la colección de bolas abiertas $\mathcal{B}_d = \{B_r(x) : x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$ es una base de (X, τ_d).

Proposición B.0.2. Una subcolección $\mathcal{B}$ de una topología τ en X es una base de τ si y sólo si para cada $A \in \tau \setminus \emptyset$ y cada $x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de τ, y sea $A \in \tau$ y $x \in A$ arbitrarios. Entonces, existe una colección $(B_i)_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Como $x \in A$, entonces existe $i' \in I$ tal que $x \in B_{i'} \subset A$.

Recíprocamente, sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Entonces, para todo $x \in A$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$, lo cual implica que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. ■

Observación B.0.3. Si $\mathcal{B}$ es una base de una topología τ entonces $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, y para cualquier colección finita $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$.

Proposición B.0.4. Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X que satisface

(a) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$,

(b) si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces, la colección $\tau_{\mathcal{B}} = \{A \subset X : A = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B \text{ para alguna } \mathcal{A} \subset \mathcal{B}\}$ es una topología en X que contiene a $\mathcal{B}$ como base.

Demostración. Por (a) se tiene que $X \in \tau_{\mathcal{B}}$, y es claro que $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$. Por definición de $\tau_{\mathcal{B}}$ es sencillo ver que la unión de una colección arbitraria de conjuntos en $\tau_{\mathcal{B}}$ también está en $\tau_{\mathcal{B}}$. Sean ahora $A_1, A_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$ y $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \subset A_1$ y $x \in B_2 \subset A_2$, lo cual implica que $x \in B_1 \cap B_2$. Por la condición (b), se tiene que existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$. Como $x \in A_1 \cap A_2$ fue arbitrario, entonces para todo $x \in A_1 \cap A_2$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A_1 \cap A_2$, lo cual implica que $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{x\in A_1\cap A_2} B_x$.

Realizando un argumento por inducción, se tiene que para cualquier colección $A_1, ..., A_n \in \tau_{\mathcal{B}}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$. Con todo lo anterior, se tiene que en efecto $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología. Además, por construcción, es claro que la colección de conjuntos $\mathcal{B}$ es una base para $\tau_{\mathcal{B}}$. ■

Definición B.0.5. Una subcolección $\mathcal{S}$ de una topología τ en X es una subbase para (X, τ) si $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}_0} S : \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \text{ y } \mathcal{S}_0 \text{ es finita }\}$ es una base para τ.

Corolario B.0.6. Sea $\mathcal{S}$ una colección no vacía de subconjuntos de X que cubre a X, y definimos $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{B \subset X : B = \bigcap_{S\in\mathcal{S}_0} S, \text{ donde } \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \text{ es una colección finita. }\}$. Entonces, $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ genera una topología tal que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base y tiene como una subbase a $\mathcal{S}$.

Definición B.0.7. Sea (X, τ) un espacio topológico.

(a) (X, τ) es primero numerable si cada elemento $x \in X$ posee una base local de vecindades numerable.

(b) (X, τ) es segundo numerable si existe una base numerable para τ.

Proposición B.0.8. Sea $f : X \to Y$ una función entre los espacios X y Y. Si f es continua entonces para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x, se cumple que $f(x_n) \to f(x)$. Además, si X es primero numerable, la afirmación recíproca es verdadera.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$. Sea V un abierto en Y tal que $f(x) \in V$. Como f es continua, entonces existe un abierto U en

X tal que $f(U) \subset V$. Como $x_n \to x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $x_n \in U$, esto es, si $n \geq n_0$ entonces $f(x_n) \in V$. Como $V \subset Y$ fue un abierto arbitrario, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.

Ahora, supongamos que X es primero numerable. Probaremos esta implicación por contrarrecíproca. Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local en x que satisfaga $B_n \subset B_m$ para $n > m$. Supongamos que f no es continua en x. Esto implica que existe un abierto V en Y tal que $f(x) \in V$ y para cualquier abierto U en X que contiene a x se cumple que $f[A] \not\subset B$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) \notin B$. Construimos así la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta cumple que $x_n \to x$, sin embargo, $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no cumple que $f(x_n) \to f(x)$, pues B es un abierto que contiene a x pero no contiene a ningún término de la sucesión $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Proposición B.0.9. Sea (X, d) un espacio métrico y sea τ_d la topología en X generada por la métrica d. Si (X, τ_d) es separable, entonces (X, τ_d) es segundo numerable.

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, ...\}$ un subconjunto denso numerable en X. Para cada $x_i \in D$, definimos $\mathcal{B}(x_i) = \{B(x_i, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(x_i)$. Como D y $\mathbb{N}$ son numerables, entonces $\mathcal{B}$ es numerable.

Probaremos que $\mathcal{B}$ es una base de τ_d. Supongamos que $A \in \tau_d$, y sea $x \in A$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset A$. Como D es denso, entonces existe un $x_m \in D \cap B(x, \frac{1}{2n})$. Es claro que $x \in B(x_m, \frac{1}{2n})$. Por otro lado, para $y \in B(x_m, \frac{1}{2n})$ se cumple que $d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y)$, y como $d(x, x_m) < \frac{1}{2n}$ y $d(x_m, y) < \frac{1}{2n}$, entonces $d(x, y) < \frac{1}{n}$, lo cual implica que $y \in B(x, \frac{1}{n})$. Como $y \in B(x_m, \frac{1}{2n})$ fue arbitrario, entonces $B(x_m, \frac{1}{2n}) \subset B(x, \frac{1}{n})$. Como $B(x, \frac{1}{n}) \subset A$, entonces $x \in B(x_m, \frac{1}{2n}) \subset A$. Así, como A fue un abierto arbitrario, se concluye que $\mathcal{B}$ es una base de para τ_d. ■

Definición B.0.10. Diremos que un espacio topológico (X, τ) es regular si para cualquier $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$.

Proposición B.0.11. Todo espacio métrico es un espacio regular.

Demostración. Sea $F \subset X$ un cerrado y $x \in X \setminus F$. Como $X \setminus F$ es un conjunto abierto, entonces existe $r > 0$ tal que $x \in B(x, r) \subset X \setminus F$. Ante esto, $x \in B(x, \frac{r}{2}) \subset \overline{B(x, \frac{r}{2})} \subset B(x, r)$. Con los abiertos $U = B(x, \frac{r}{2})$ y $V = X \setminus \overline{B(x, \frac{r}{2})}$ se tiene que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ y $F \subset V$, completando así la prueba. ■

Proposición B.0.12. Si X es un espacio regular, entonces para cualquier abierto U y $x \in U$ existe un abierto V tal que $x \in V \subset \bar{V} \subset U$.

Demostración. Sea X un espacio topológico regular, U un conjunto abierto y $x \in U$. Entonces, $X \setminus U$ es un conjunto cerrado que no contiene a x. Por hipótesis X es regular, por lo tanto existen abiertos ajenos V_1 y V_2 tales que $x \in V_1$ y $X \setminus U \subset V_2$. Esto implica que $X \setminus V_2$ es un cerrado tal que $X \setminus V_2 \subset U$. Definiendo $V = V_1$, se tiene que $x \in V \subset \bar{V} \subset X \setminus V_2 \subset U$. ■

Apéndice C

Resultados auxiliares de teoría de la medida

Teorema C.0.1. (Teorema de la convergencia monótona) Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas que convergen a f en X. Entonces:

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Definición C.0.2. Una función conjuntista $\rho : 2^X \to \bar{\mathbb{R}}$ es llamada una medida exterior si

i) $\rho(\emptyset) = 0$

ii) $\rho(A) \geq 0$ para todo $A \subset X$

iii) $\rho(A) \leq \rho(B)$ si $A \subset B \subset X$

iv) $\rho(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$.

Definición C.0.3. Sea $\rho : 2^X \to \bar{\mathbb{R}}$ una medida exterior. Diremos que $E \subset X$ es ρ-medible si

$$\rho(A) = \rho(A \cap E) + \rho(A - E) \text{ para todo } A \subset X$$

Denotamos por $\mathcal{A}^\rho$ a la familia de todos los conjuntos ρ-medibles

Debido a que ρ^* es subaditiva, para que un conjunto $E \subset X$ sea medible basta pedir que

$$\rho(A) \geq \rho(A \cap E) + \rho(A - E)$$

Teorema C.0.4. (De extensión de Caratheodory) Sea $\rho : 2^X \to \bar{\mathbb{R}}$ una medida exterior. Entonces:

a) $\mathcal{A}^\rho$ es una σ-álgebra.

b) $\bar{\rho} = \rho|_{\mathcal{A}^\rho}$ es una medida completa.

Bibliografía

[1] K. Alipranthis, C. & Border. *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*. Springer, 2006. 2, 29, 36, 48

[2] C. Ash, R. & Doléans-Dade. *Probability and Measure Theory*. Academic Press, 1999. 2

[3] D. Bertsekas. *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*. Academic Press, New York, 1978. 2, 48

[4] Á. Casarrubias, F. & Tamariz. *Elementos de topología general*. Instituto de Matemáticas UNAM., 2019. 2, 37, 38

[5] R.M. Dudley. Distances of probability measures and random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(5):1563–1572, 1968. 2

[6] R.M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. Cambridge University Press, 2004.

[7] G. Grabinsky. *Teoría de la Medida*. Instituto de Matemáticas UNAM., 2006. 2

[8] P. Huber. *Robust Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., 1981. 2

[9] A. Klenke. *Probability Theory, A Comprehensive Course*. Springer, 2020. 2

[10] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1978. 2

[11] S. Kumaresan. *Topology of Metric Spaces*. Alpha Science International, 2005. 2

[12] K.R. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, 1967. 2, 29

[13] O. Vega-Amaya , F. Luque-Vásquez. A note on compact and σ-compact subsets of probability measures on metric spaces with an application to the distribution free newsvendor problem. preprint, Sep 2022. 2

[14] O. van Gans. *Probability measures on metric spaces, notes of the seminar "Stochastic Evolution Equations"*. https://www.math.leidenuniv.nl/ vangaans/jancol1.pdf. Delft University, 2002. 2