



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Conexiones globales en sistemas Filippov en el plano

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Samai Palma Gutiérrez

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, Enero de 2026

SINODALES

Dra. Jocelyn Anaid Castro Echeverría
Tecnológico de Monterrey, Monterrey, México

Dr. Martín Aarón Carrillo Carranza
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Juan Andrés Castillo Valenzuela
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

A mi madre, Lambertina Gutiérrez Ramírez, por sus oraciones e intercesión ante Dios para pedir por mi bienestar, por su amor incondicional y por ser un pilar fundamental en mi vida. A mi padre, Eligio Palma Grande, quien sigue cuidando de mí y acompañando mi camino. A mis hermanos, Seth y Eligio, por asumir con amor y responsabilidad el compromiso de apoyarme durante esta etapa.

A mi amiga Génesis Montijo, por impulsarme a dar el primer paso para iniciar la carrera y por brindarme su apoyo durante el primer año de este camino.

A mis amigos y compañeros de universidad, Abraham, Keren, Rafael y Eliú por su apoyo en los momentos de dificultad emocional y académica que enfrentamos durante nuestra formación, así como por aquellos momentos de alegría que nos brindaron motivación para continuar y seguir adelante.

A mi director de tesis, el Dr. Fernando Verduzco González, por su orientación, acompañamiento y, sobre todo, por su paciencia durante el desarrollo de este trabajo, así como por despertar mi interés por esta fascinante área de las matemáticas.

A mis profesores Carolina Espinoza Villalba y Manuel Adrián Acuña Zegarra, por su empatía, consejos y apoyo a lo largo de mi formación académica. Asimismo, a todos los profesores que, quizá sin saberlo, sembraron en mí la admiración y el amor por esta hermosa disciplina llamada matemáticas.

Finalmente doy gracias Dios por sostenerme durante este camino, por no soltar mi mano en los momentos de dificultad y permitirme culminar esta importante etapa de mi vida. Le agradezco por brindarme fortaleza y perseverancia para superar cada desafío, así como por poner en mi camino a personas maravillosas que, con su cariño, apoyo y enseñanzas hicieron de este recorrido una experiencia de crecimiento personal y profesional.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Sistema suave por pedazos	1
1.2. Clasificación de puntos de equilibrios y singularidades	4
1.3. Forma normal de un sistema Filippov en $\mathbb{R}^2$	6
1.3.1. Forma normal bajo la hipótesis genérica	6
2. Dinámica de los campos f^- y f^+	17
2.1. Campo f^-	17
2.2. Campo f^+	19
3. Órbitas homoclínicas	21
3.1. Órbita homoclínica de cruce	22
3.1.1. Caso con un segmento deslizante	24
3.2. Órbita pseudo-homoclínica	26
3.2.1. Órbita pseudo-homoclínica sin cruce	26
3.2.2. Órbita pseudo-homoclínica con cruce	29
4. Órbitas heteroclínicas	33
4.1. Órbita heteroclínica simple	33
4.1.1. Conexión equilibrio - equilibrio	34
4.1.2. Conexión equilibrio - pseudo-equilibrio	38
4.1.3. Escenarios no factibles	43
4.1.4. Conexiones directas equilibrio - pseudo-equilibrios	48
4.2. Órbita heteroclínica no-simple	50
4.2.1. Conexión equilibrio - equilibrio	50
4.2.2. Conexión equilibrio - pseudo-equilibrio	52

4.3. Conexiones múltiples	54
4.3.1. Conexiones directas	54
5. Conclusiones	59

Introducción

Los sistemas dinámicos suaves por pedazos discontinuos, también llamados Filippov, surgen de manera natural en la modelación de fenómenos cuyo comportamiento cambia abruptamente al cruzar ciertos espacios de discontinuidad. En este trabajo dicho espacio será conocido como recta de conmutación y la dinámica sobre dicha recta se define mediante el método convexo de Filippov.

A diferencia de los sistemas suaves, los sistemas Filippov presentan dinámicas adicionales, como regiones de deslizamiento, pseudo-equilibrios y trayectorias que combinan dinámicas definidas en regiones distintas del plano. Estas características enriquecen el retrato fase del sistema pero también implica una tarea más detallada para realizar un análisis de la existencia y clasificación de conexiones globales entre puntos de singularidad.

En esta tesis se estudia la existencia de posibles configuraciones para órbitas homoclínicas y heteroclínicas en una forma normal específica de un sistema Filippov en $\mathbb{R}^2$, centrándose en como la dinámica de los campos, la recta de conmutación, especialmente la dinámica deslizante, dan lugar a diferentes conexiones globales que no aparecen en los sistemas suaves.

Para ello, en el Capítulo 1 se introducen los conceptos fundamentales de los sistemas suaves por pedazos discontinuos, incluyendo la clasificación de equilibrios, pseudo-equilibrios y singularidades de tangencia, así como la forma normal de los sistemas Filippov planares bajo hipótesis genéricas. En el Capítulo 2, se analiza la dinámica local de los campos definidos a cada lado de la recta de conmutación, estableciendo las condiciones necesarias para obtener un equilibrio tipo silla en un campo y un foco en el otro, configuración central para el estudio de las conexiones globales.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de las órbitas homoclínicas, distinguiendo entre órbitas de cruce y pseudo-homoclínicas, con y sin segmentos deslizantes. Se describen las condiciones bajo las cuales estas órbitas existen y se ilustran mediante ejemplos y simulaciones. Finalmente, en el Capítulo 4 se analizan las órbitas heteroclínicas, clasificándolas en simples, no simples y conexiones múltiples, y se identifican tanto configuraciones posibles, como escenarios no factibles.

Con este análisis se busca contribuir a una mejor comprensión de la estructura global de los sistemas Filippov en el plano, resaltando la relevancia de las discontinuidades y la dinámica deslizante en la aparición de conexiones globales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sistema suave por pedazos

Un sistema suave por pedazos, a grandes rasgos, se trata de un sistema dinámico definido por diferentes ecuaciones en cada región del espacio en el que se está trabajando.

En este trabajo se analizará el caso definido en dos regiones de $\mathbb{R}^2$, delimitadas por una recta, que llamaremos recta de conmutación.

Definición 1. *Llamaremos sistema suave por pedazos a un sistema de la forma*

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases}$$

con la recta de conmutación $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$, donde $c \in \mathbb{R}^2$ es el vector normal a Σ y $c_0 \in \mathbb{R}$.

Diremos que el sistema suave por pedazos es continuo si $f^+(x) = f^-(x)$ para toda $x \in \Sigma$. En caso contrario diremos que es discontinuo.

En esta tesis trabajaremos sistemas suaves por pedazos discontinuos con los campos f^- y f^+ lineales.

Ejemplo 1. *Se presenta a continuación el ejemplo de un sistema lineal suave por pedazos discontinuo*

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (x - q_1) & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (x - q_2) & \text{si } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Con los equilibrios $q_1 = (1, -3)$, $q_2 = (2, 2)$ y la recta de conmutación $\sigma(x) := x_1 + x_2 - 1 = 0$.

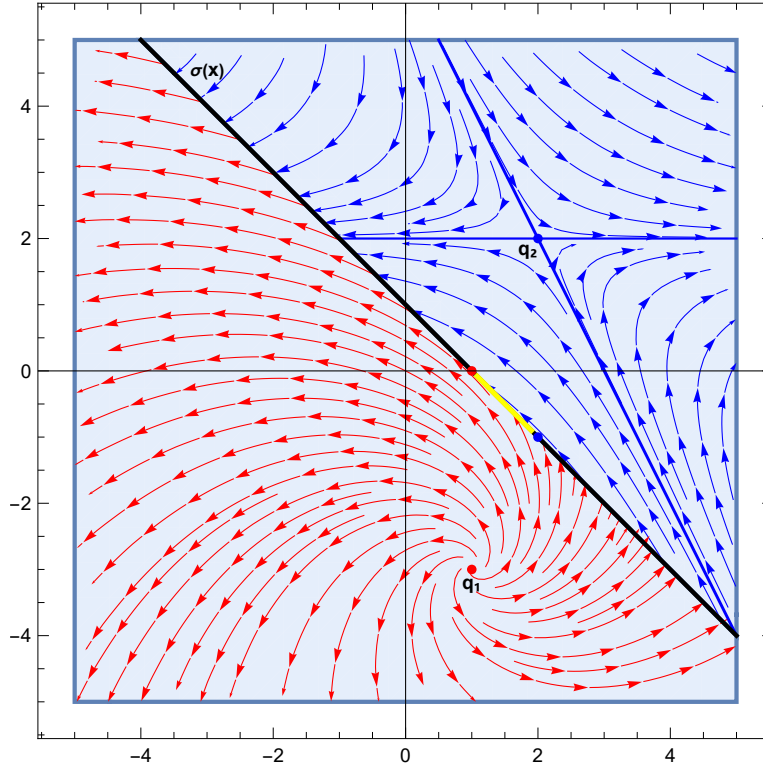


Figura 1.1: Simulación del retrato fase del sistema (1.1)

En la figura 1.1 el punto rojo y el punto azul representan los puntos de tangencia de f^- y f^+ , respectivamente, con la recta de conmutación $\sigma(x)$. Los puntos de tangencia son puntos de singularidad que se definirán más adelante.

En [1] se presenta una descripción detallada de los sistemas suaves por pedazos discontinuos, la clasificación de sus singularidades y la forma normal de estos en $\mathbb{R}^2$, por lo que se considera pertinente incorporar estas secciones como material preliminar para este trabajo.

Consideremos el sistema suave lineal por pedazos discontinuo en $\mathbb{R}^2$, con dos zonas separadas por la recta de conmutación $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n | \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$.

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1 & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2 & \text{si } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Donde $A_{1,2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_{1,2} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^2$ es el vector normal de la recta Σ y $c_0 \in \mathbb{R}$.

Distinguiremos tres comportamientos sobre Σ :

- el segmento deslizante o atractor, $\Sigma_s = \{x \in \Sigma | C^T f^-(x) > 0, C^T f^+(x) < 0\}$,
- el segmento de cruce, $\Sigma_c = \{x \in \Sigma | (C^T f^-(x))(C^T f^+(x)) > 0\}$,
- y el segmento repulsivo, $\Sigma_r = \{x \in \Sigma | C^T f^-(x) < 0, C^T f^+(x) > 0\}$.

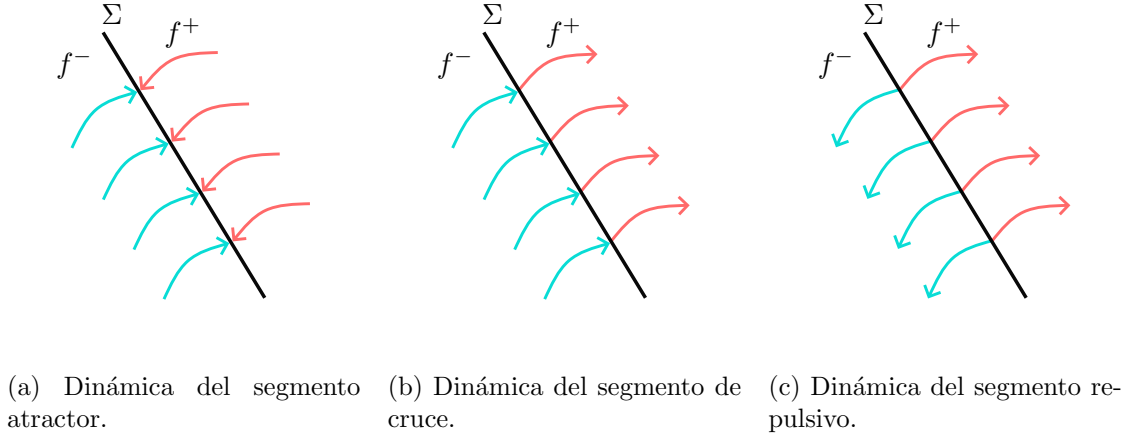


Figura 1.2: Posibles comportamientos sobre la recta de conmutación.

Se pueden construir soluciones sobre $\Sigma_s \cup \Sigma_r$ con el método convexo de Filippov. El método de Filippov toma la combinación convexa $f_s(x)$ de los dos campos $f^\pm(x)$ para cada punto deslizante $x \in \Sigma_s \cup \Sigma_r$, es decir,

$$f_s(x) = (1 - \gamma(x))f^-(x) + \gamma(x)f^+(x), \quad (1.3)$$

donde la función $\gamma(x)$ se define como

$$\gamma(x) = \frac{c^T f^-(x)}{c^T (f^-(x) - f^+(x))} \in (0, 1), \forall x \in \Sigma_s \cup \Sigma_r, \quad (1.4)$$

y es tal que $c^T f_s(x) = 0$. Por tanto, tenemos una expresión explícita para el campo deslizante $f_s(x)$ generado por (1.1)

$$f_s(x) = \frac{f_{reg}(x)}{\Delta(x)}, \quad (1.5)$$

donde $f_{reg}(x) = (c^T f^-(x))f^+(x) - (c^T f^+(x))f^-(x)$ es llamado el campo deslizante regularizado y $\Delta(x) = c^T (f^-(x) - f^+(x)) \neq 0$.

1.2. Clasificación de puntos de equilibrios y singularidades

Se describen a continuación los puntos singulares de un sistema Filippov y su dinámica local asociada; estos comprenden los puntos de equilibrio y puntos de tangencia, los cuales se describen en esta sección. Podemos identificar los siguientes tipos de equilibrios en el sistema (1.2).

Definición 2.

i) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0,$$

o si

$$f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0,$$

entonces p será un equilibrio admisible para (1.2).

ii) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0,$$

o si

$$f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0,$$

entonces p será un equilibrio virtual para (1.2).

iii) Diremos que un punto $\tilde{x} \in \Sigma$ es un pseudo-equilibrio de (1.2) si $f_s(\tilde{x}) = 0$. El pseudo-equilibrio es admisible si $\tilde{x} \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$, o virtual si $\tilde{x} \in \Sigma_c$.

Observación 1. Note que un pseudo-equilibrio admisible se comporta de alguna manera como un equilibrio admisible, esto es, en un pseudo-equilibrio admisible se tiene que $f_s(\tilde{x}) = 0$, con $(c^T f^-(\tilde{x}))(c^T f^+(\tilde{x})) < 0$; un simple cálculo muestra que $f^+(\tilde{x}) = \left(\frac{c^T f^+(\tilde{x})}{c^T f^-(\tilde{x})} \right) f^-(\tilde{x})$, por tanto $f^-(\tilde{x})$ y $f^+(\tilde{x})$ son antiparalelos.

Ya que los tres tipos de conjuntos en Σ son abiertos, sus fronteras que denotamos como $\partial\Sigma_s, \partial\Sigma_e, \partial\Sigma_c$ son llamadas conjuntos de tangencia: $q \in \Sigma$ tales que $c^T f^-(q) = 0$ o $c^T f^+(q) = 0$. Esto es, puntos donde uno de los dos campos es tangente a Σ .

La tangencia más simple es la tangencia cuadrática con Σ , llamada *fold singularity* en inglés, la cual se define como sigue.

Definición 3.

i) Un punto $q \in \Sigma$ es una singularidad de tangencia (o punto con tangencia cuadrática) de (1.2) si

$$c^T f^-(q) = 0 \quad y \quad r_1 = c^T A_1 f^-(q) \neq 0,$$

o si

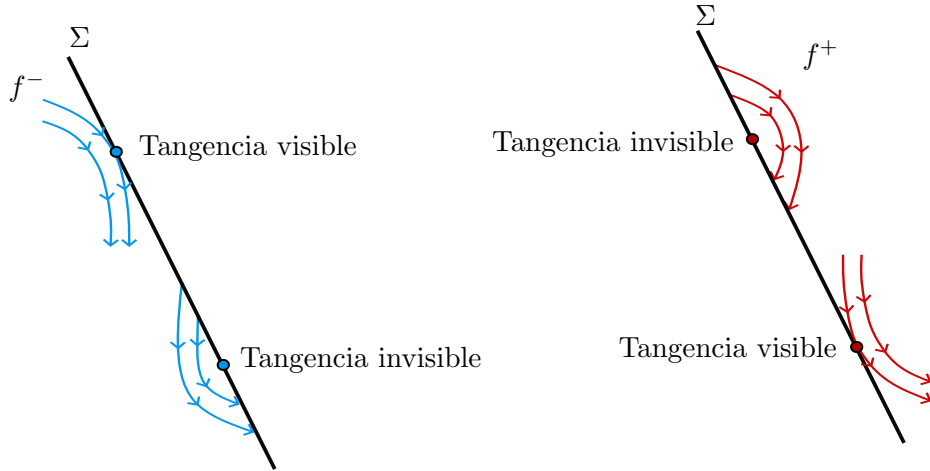
$$c^T f^+(q) = 0 \quad y \quad r_2 = c^T A_2 f^+(q) \neq 0.$$

ii) $q \in \Sigma$ es una singularidad de tangencia invisible (visible) para f^- si

$$c^T f^-(q) = 0 \quad y \quad r_1 > 0 \quad (< 0).$$

iii) $q \in \Sigma$ es una singularidad de tangencia invisible (visible) para f^+ si

$$c^T f^+(q) = 0 \quad y \quad r_2 < 0 \quad (> 0).$$



(a) Tangencia para el campo f^- .

(b) Tangencia para el campo f^+ .

Figura 1.3: Puntos de tangencia cuadrática.

1.3. Forma normal de un sistema Filippov en $\mathbb{R}^2$

La forma normal de un sistema, en general, nos ayuda a simplificar el estudio de las dinámicas del sistema, pues se trata de un cambio de coordenadas que conserva las propiedades cualitativas del sistema original.

Considere el siguiente sistema con dos zonas separadas por la recta de conmutación.

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\},$$

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $b_1, b_2, c \in \mathbb{R}^2$ y $c_0 \in \mathbb{R}$.

La idea es desdoblar un punto de doble tangencia en dos puntos de tangencia, q_1 y q_2 , para f^- y f^+ respectivamente, de manera que delimiten un segmento deslizante. Al variar los parámetros del sistema, dichos puntos cambiarán su posición sobre Σ , cuando colapsan en el punto de doble tangencia, se produce un cambio en la estabilidad del segmento deslizante. Con esta idea, asumimos que $f(x)$ satisface la siguiente hipótesis genérica:

(H_0) : Los pares de vectores $\{c, A_1^T c\}$ y $\{c, A_2^T c\}$ son linealmente independientes.

1.3.1. Forma normal bajo la hipótesis genérica

Bajo la hipótesis (H_0) , el sistema (1.6) posee dos puntos de tangencia, uno asociado a cada campo, que denotaremos por q_1, q_2 . Para $i = 1, 2$, el conjunto de tangencia de $f^\mp$ está dado por la recta

$$l_i : c^T (A_i x + b_i) = 0,$$

Como la hipótesis H_0 garantiza que los vectores c y $A_i^T c$ sean linealmente independientes, las rectas l_i y Σ no son paralelas. Dado que el sistema es planar, su intersección consiste en un único punto,

$$l_i \cap \Sigma = q_i, \quad i = 1, 2$$

Puesto que $\{c, A_1^T c\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^2$, existen escalares $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, con $\gamma_2 > 0$, tales que

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$$

El siguiente teorema proporciona una forma normal para los sistemas Filippov en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la hipótesis genérica (H_0) .

Teorema 1. [2] *Bajo la hipótesis (H_0) , el cambio de coordenadas*

$$y = h(x) = \begin{cases} \gamma_2 Q_1(x - q_1), & \text{si } \sigma(x) \leq 0, \\ Q_2(x - q_1), & \text{si } \sigma(x) \geq 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde

$$Q_1 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \end{pmatrix},$$

transforma (1.6) en

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

donde

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} c_1 &= -\det(A_1), \\ c_2 &= \text{tr}(A_1), \\ d_1 &= -\det(A_2), \\ d_2 &= \text{tr}(A_2), \\ r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1), \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2), \\ b &= c^T (A_2 q_1 + b_2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Observación 2.

- a) Si $q_2 \rightarrow q_1$ entonces $b \rightarrow 0$, esto es, en $b = 0$, los puntos de tangencia colisionan en $q_0 = q_1 = q_2$.
- b) Si $r_1 > 0$ (< 0) entonces q_1 es un punto de tangencia invisible (visible).
- c) Si $r_2 < 0$ (> 0) entonces q_2 es un punto de tangencia invisible (visible).

Teorema 2. Considere el sistema Filippov en su forma normal

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

1. Su dinámica deslizante está dada por

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{-\mu} [(\beta_2 - \alpha_2)y_2^2 + (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)y_2 - \gamma_2 r_1 \mu].$$

2. Si $r_1 r_2 < 0$ entonces existe un único pseudo-equilibrio admisible.

- Es un nodo estable si $r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\mu < 0$.
- Es un nodo inestable si $r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\mu > 0$.
- Es un punto silla si $r_1 < 0, r_2 > 0$ y $\mu \neq 0$.

3. Si $r_1 r_2 > 0$ entonces pueden existir 0,1 o 2 pseudo-equilibrios admisibles.

Demostración.

1. La ecuación (1.4) define el comportamiento sobre el campo deslizante, obteniendo la función $\gamma(x)$

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{c^T f^-(x)}{c^T (f^-(x) - f^+(x))} \quad \in (0, 1) \quad \forall x \in \Sigma_s \cup \Sigma_r, \\ \gamma(y) &= \frac{(1, 0) \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}}{(1, 0) \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2 \\ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix}} \\ &= \frac{y_2}{(1, 0) \begin{pmatrix} \mu \\ k^* \end{pmatrix}} \\ &= \frac{y_2}{-\mu}, \end{aligned}$$

donde $k^* = (\alpha_1 - \beta_1)y_1 + (\alpha_2 - \beta_2)y_2 + \beta_2 r_1 + \beta_2 \mu$
sustituyendo $\gamma(x)$ en (1.3):

$$\begin{aligned} f_s(y) &= \left(1 - \left(\frac{y_2}{\mu}\right)\right) \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{y_2}{\mu}\right) \begin{pmatrix} y_2 + \mu \\ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(y_2 + \mu)y_2}{\mu} \\ \frac{\mu}{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \gamma_2 r_1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{y_2(y_2 + \mu)}{\mu} \\ \frac{\mu}{y_2(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + r_2 + \beta_2 \mu)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu + y_2)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \gamma_2 r_1) - y_2(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + r_2 + \beta_2 \mu) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

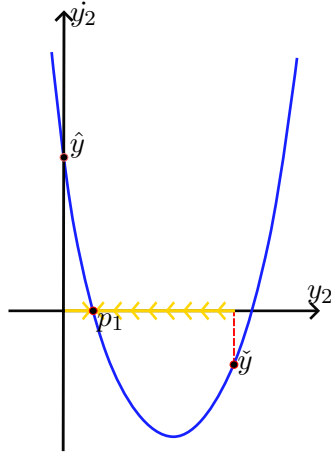
omitiendo la componente trivial, definimos el campo deslizante regularizado como sigue

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = f_{reg}(y_2) &= \frac{1}{\mu} ((\mu + y_2)(\alpha_2 y_2 + \gamma_2 r_1) - y_2(\beta_2 y_2 + r_2 + \beta_2 \mu)) \\ &= \frac{1}{\mu} (\alpha_2 y_2 \mu + \alpha_2 y_2^2 + \gamma_2 r_1 \mu + \gamma_2 r_1 y_2 - \beta_2 y_2^2 - r_2 y_2 - \beta_2 \mu y_2) \\ &= \frac{1}{\mu} ((\alpha_2 - \beta_2) y_2^2 + (\alpha_2 - \beta_2) \mu y_2 + \gamma_2 r_1 y_2 - r_2 y_2 + \gamma_2 r_1 \mu) \\ &= \frac{1}{\mu} ((\alpha_2 - \beta_2) y_2^2 + ((\alpha_2 - \beta_2) \mu + \gamma_2 r_1 - r_2) y_2 + \gamma_2 r_1 \mu) \\ &= -\frac{1}{\mu} ((\beta_2 - \alpha_2) y_2^2 + (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2) \mu) y_2 - \gamma_2 r_1 \mu). \end{aligned} \quad (1.11)$$

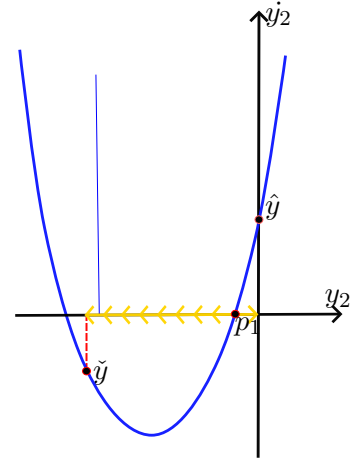
2. En general, el número de pseudo-equilibrios sobre Σ_s estará dado por el número de soluciones de $\dot{y}_2 = 0$, convendrá entonces, evaluar $\dot{y}_2$ en los extremos de Σ_s para conocer el comportamiento de la función sobre el segmento deslizante.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_2(0) &= -\frac{1}{\mu}((\beta_2 - \alpha_2)(0)^2 + (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)(0)) - \gamma_2 r_1 \mu \\
 &= -\frac{1}{\mu}(-\gamma_2 r_1 \mu) \\
 &= \gamma_2 r_1, \text{ con } \gamma_2 > 0, \\
 \dot{y}_2(-\mu) &= -\frac{1}{\mu}((\beta_2 - \alpha_2)(-\mu)^2 + (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)(-\mu)) - \gamma_2 r_1 \mu \\
 &= -\frac{1}{\mu}((\beta_2 - \alpha_2)(-\mu)^2 - r_2 \mu + \gamma_2 r_1 \mu - (\beta_2 - \alpha_2)\mu^2 - \gamma_2 r_1 \mu) \\
 &= -\frac{1}{\mu}(-r_2) = r_2,
 \end{aligned}$$

de esto obtenemos los puntos $\hat{y} = (0, \gamma_2 r_1)$, $\check{y} = (-\mu, r_1)$ con los que se puede graficar el comportamiento de $\dot{y}_2$,

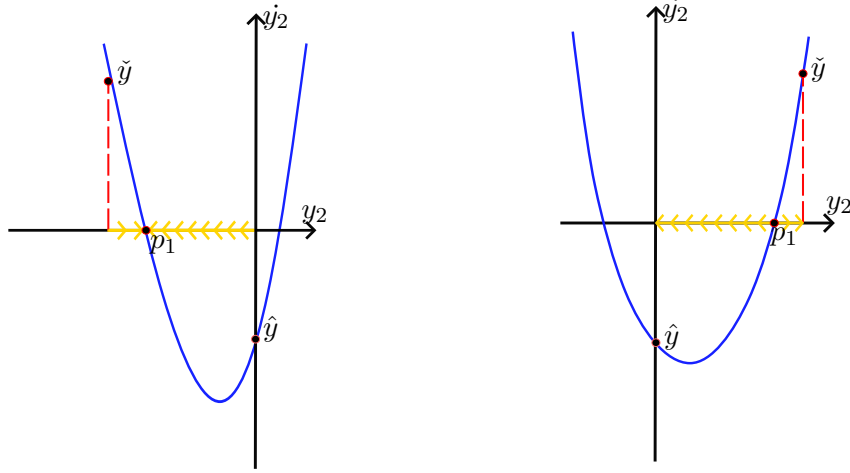


(a) En este escenario se consideran $r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\mu < 0$.



(b) En este escenario se consideran $r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\mu > 0$.

Figura 1.4: Grafica de $\dot{y}_2$ con $\beta_2 - \alpha_2 > 0$. El punto de intersección de la parábola con Σ_s (segmento amarillo) será el pseudo-equilibrio admisible del sistema.



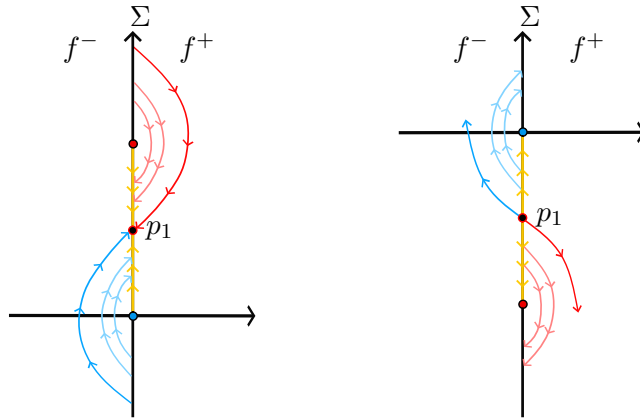
(a) En este escenario se consideran
 $r_1 < 0, r_2 > 0$ y $\mu < 0$.

(b) En este escenario se consideran
 $r_1 < 0, r_2 > 0$ y $\mu > 0$.

Figura 1.5: Grafica de $\dot{y}_2$ con $\beta_2 - \alpha_2 > 0$. El punto de intersección de la parábola con Σ_s (segmento amarillo) será el pseudo-equilibrio admisible del sistema.

El comportamiento presentado en 1.4 y 1.5 es análogo para $\beta_2 - \alpha_2 < 0$.

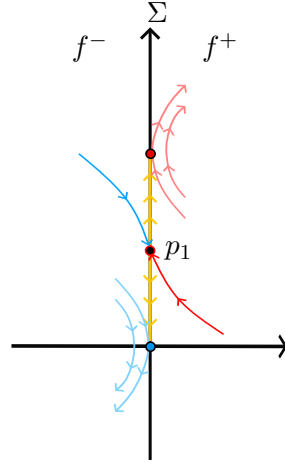
Los comportamientos para el pseudo-equilibrio que se mencionan en 2 se debe a la dinámica sobre Σ_s y la visibilidad de los puntos de tangencia de los campos f^- y f^+ .



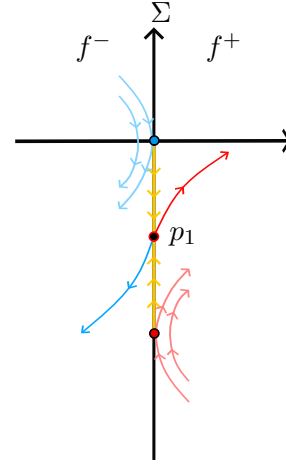
(a) Nodo estable. Esta dinámica corresponde al escenario del inciso a) de la figura 1.4.

(b) Nodo inestable. Esta dinámica corresponde al escenario del inciso b) de la figura 1.4.

Figura 1.6: En estos escenarios los parámetros $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$ determinan tangencias invisibles en los campos f^- y f^+ .



(a) Pseudo-equilibrio tipo silla. Esta dinámica corresponde al escenario del inciso a) de la figura 1.5.

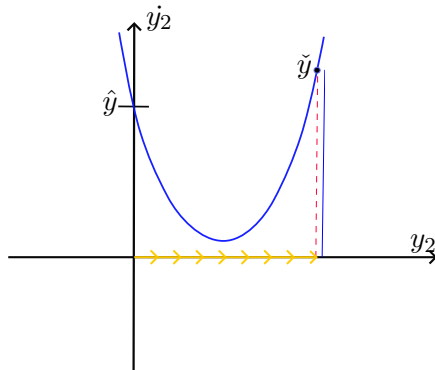


(b) Pseudo-equilibrio tipo silla. Esta dinámica corresponde al escenario del inciso b) de la figura 1.5.

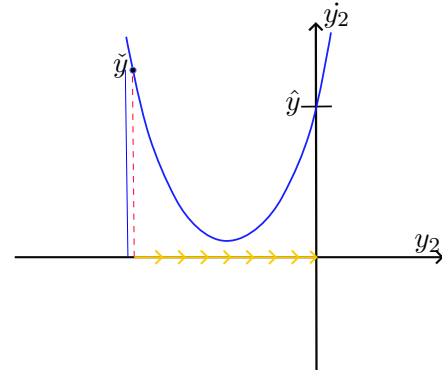
Figura 1.7: Pseudo-equilibrios tipo silla con $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$.

En los escenarios mostrados en la figura (1.7 la positividad de los parámetros r_1 y r_2 generan tangencias visibles en los campos f^- y f^+ . Cuando el pseudo-equilibrio presenta un comportamiento tipo silla, existe una solución en cada uno de los campos que, en conjunto, conforman una variedad invariante asociada a dicho pseudo-equilibrio. La otra variedad invariante está dada por la dinámica deslizante sobre Σ_s .

- Consideremos los puntos $\hat{y}$ y $\tilde{y}$ bajo las condiciones de los parámetros $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, se grafican entonces los posibles comportamientos de $\dot{y}_2$.



(a) $\mu < 0$



(b) $\mu > 0$

Figura 1.8: Gráfica de $\dot{y}_2$ con $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ y $disc < 0$.

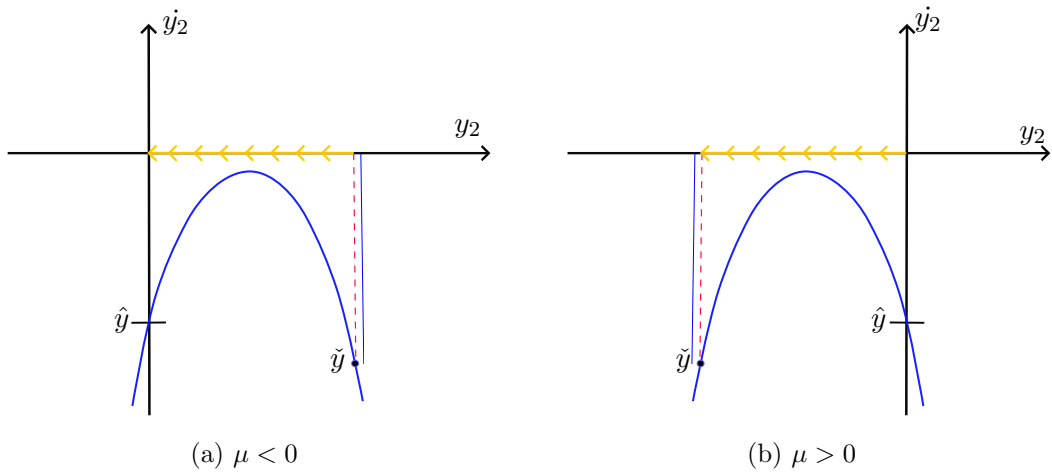


Figura 1.9: Gráfica de $\dot{y}_2$ con $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ y $disc < 0$.

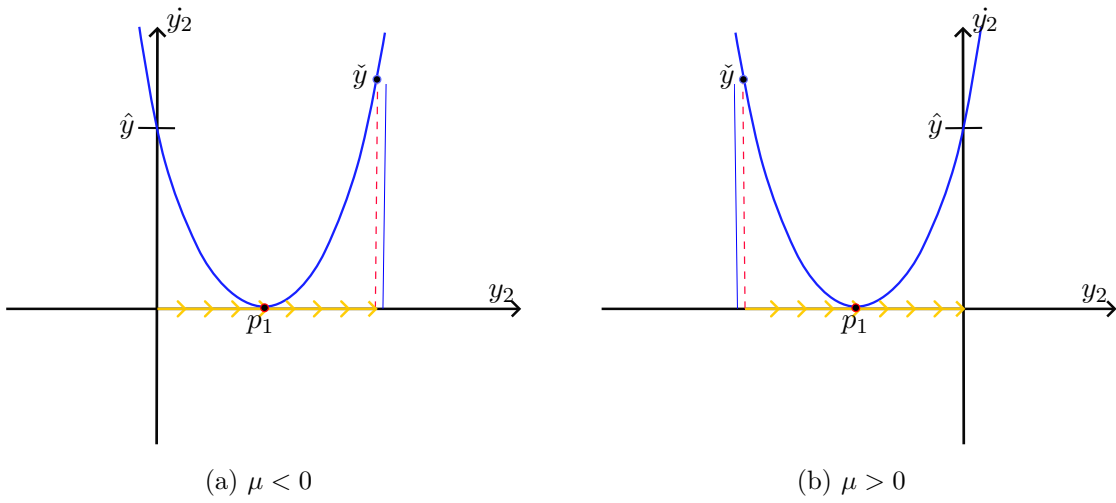


Figura 1.10: Gráfica de $\dot{y}_2$ con $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ y $disc = 0$.

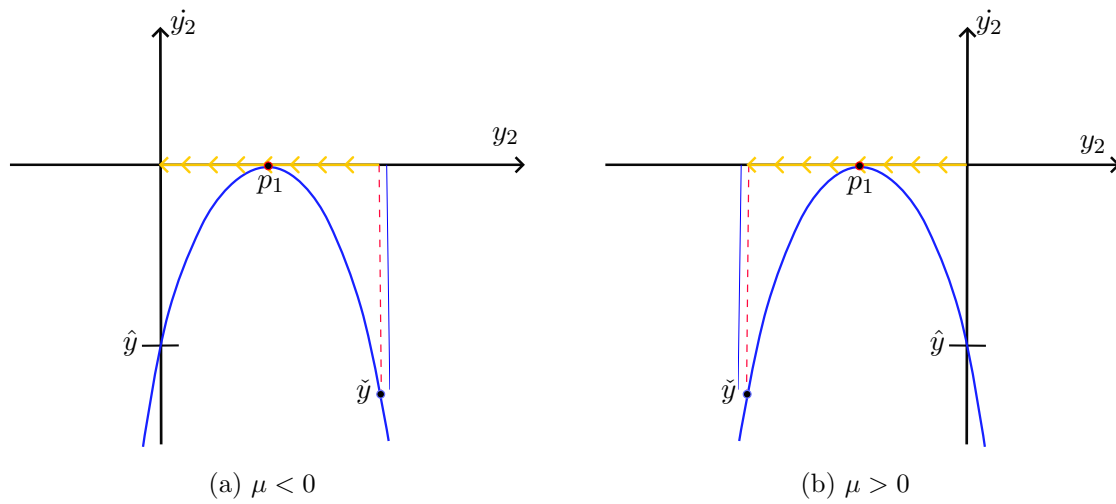


Figura 1.11: Gráfica de $\dot{y}_2$ con $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ y $disc = 0$.

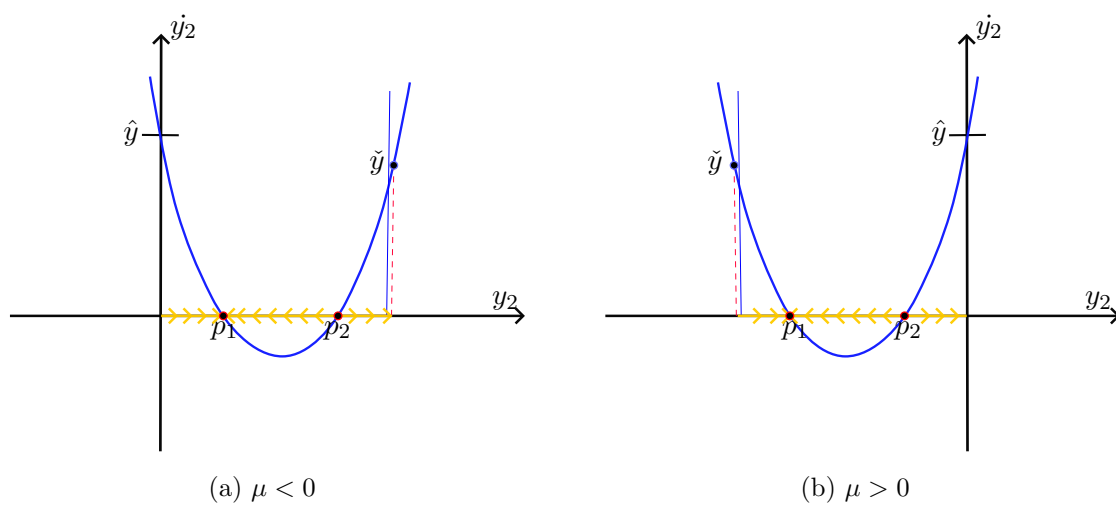


Figura 1.12: Gráfica de $\dot{y}_2$ con $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ y $disc > 0$.

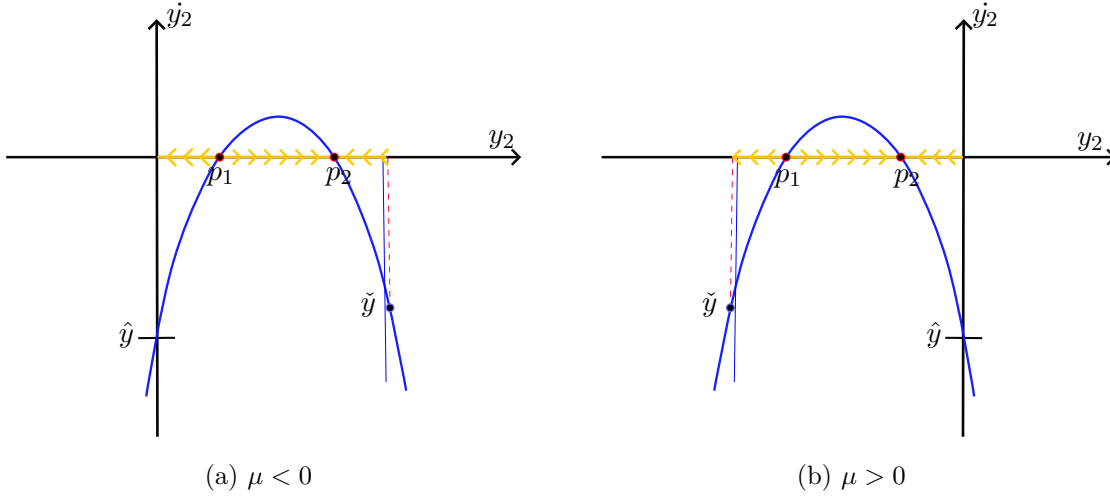


Figura 1.13: Gráfica de $\dot{y}_2$ con $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ y $disc > 0$.

Las figuras anteriores muestran como el comportamiento de la dinámica deslizando depende de la positividad de los parámetros r_1 y r_2 . Por otra parte, el signo del discriminante de la ecuación de la dinámica deslizando determina el número de soluciones de $\dot{y}_2 = 0$ y, en consecuencia, el número de pseudo-equilibrios admisibles del sistema.

Sea el discriminante de la dinámica deslizando

$$disc = (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)^2 - 4(\beta_2 - \alpha_2)(-\gamma_2 r_1 \mu) \quad (1.12)$$

- Si $disc > 0$ existirán 2 pseudo-equilibrios,
- si $disc = 0$ existirá un único pseudo-equilibrio,
- si $disc < 0$ no existen pseudo-equilibrios.

Desarrollando (1.12) se tiene

$$\begin{aligned}
 disc &= r_2^2 + \gamma_2^2 r_1^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 \mu^2 - 2r_2 \gamma_2 r_1 + 2(\beta_2 - \alpha_2)\mu r_2 - 2(\beta_2 - \alpha_2)\mu \gamma_2 r_1 + 4(\beta_2 - \alpha_2)\mu \gamma_2 r_1 \\
 &= r_2^2 + \gamma_2^2 r_1^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 \mu^2 - 2\gamma_2 r_1 r_2 + 2(\beta_2 - \alpha_2)\mu r_2 + 2(\beta_2 - \alpha_2)\mu \gamma_2 r_1 + 2\gamma_2 r_1 r_2 - 2\gamma_2 r_1 r_2 \\
 &= r_2^2 + \gamma_2^2 r_1^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 \mu^2 + 2(\beta_2 - \alpha_2)\mu r_2 + 2(\beta_2 - \alpha_2)\mu \gamma_2 r_1 + 2\gamma_2 r_1 r_2 - 2\gamma_2 r_1 r_2 - 2\gamma_2 r_1 r_2 \\
 &= (r_2 + \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)^2 - 4\gamma_2 r_1 r_2.
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Definamos ahora la función

$$disc(\mu) = (k_1 + k_2 \mu)^2 - k_3,$$

donde

$$k_1 = r_2 + \gamma_2 r_1, \quad k_2 = \beta_2 - \alpha_2 \quad \text{y} \quad k_3 = 4\gamma_2 r_1 r_2.$$

recordemos que el número de raíces reales de $\dot{y}_2$ nos dirá el número de pseudo-equilibrios en la dinámica deslizante.

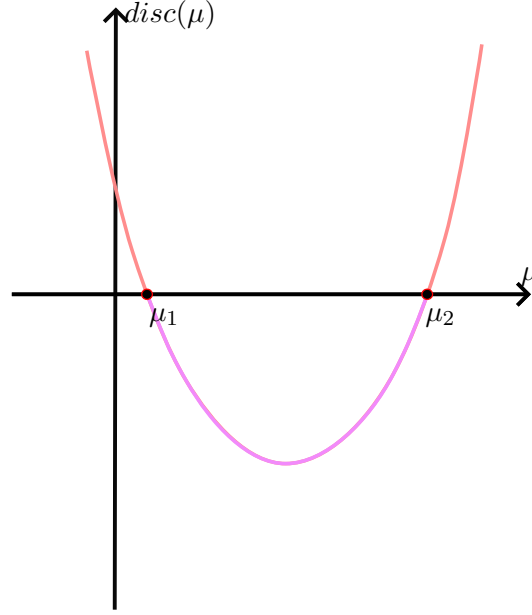


Figura 1.14: Gráfica de $disc(\mu)$.

En la figura 1.14 el valor de μ dará el número de pseudo-equilibrios. Cuando el parámetro μ del sistema coincida con los valores $e_2^T \mu_1$ o $e_2^T \mu_2$, existirá un único pseudo-equilibrio en Σ_s .

Lema 1. *La positividad de $disc(\mu)$ dará el número de pseudo-equilibrios admisibles sobre Σ_s .*

- Si $disc(\mu) < 0$ entonces $\dot{y}_2$ no tendrá raíces reales, por lo que no habrá pseudo-equilibrios en Σ_s .
- Si $disc(\mu) = 0$ entonces $\dot{y}_2$ tendrá una raíz real, por lo que habrá un pseudo-equilibrio en Σ_s .
- Si $disc(\mu) > 0$ entonces $\dot{y}_2$ tendrá dos raíces reales, por lo que habrá dos pseudo-equilibrios en Σ_s .

Observación 3. *En este trabajo nos enfocaremos en el caso $r_1 r_2 > 0$ correspondiente a la parte 3 del Teorema 2, con $r_1, r_2 > 0$.*

Capítulo 2

Dinámica de los campos f^- y f^+

En este capítulo, se describen las condiciones para que se dé el comportamiento silla-foco en el sistema. Tomemos el sistema (1.10), cuyos parámetros se definirán continuación. Consideremos

2.1. Campo f^-

El equilibrio del campo f^- será de la forma

$$q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Trabajaremos sobre sistemas Filippov donde el comportamiento del punto q_1 del campo f^- sea un equilibrio tipo silla. Sea

$$f^-(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_2 \end{pmatrix},$$

para que se de este comportamiento debe cumplirse que

$$|A_1| = -\alpha_1 < 0,$$

es decir,

$$\alpha_1 > 0,$$

donde los valores propios de la matriz A_1 estarán dados por las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 - \alpha_2 \lambda - \alpha_1 = 0$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1}}{2}$$

entonces,

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1}}{2} > 0 \text{ y } \lambda_2 = \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1}}{2} < 0.$$

A partir de λ_1 y λ_2 podemos obtener los vectores propios asociados

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

con los correspondientes espacios invariantes

$$E^u = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle, E^s = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Intersección con la conmutación

Definiremos los puntos de intersección de E^s y E^u con Σ por lo que tomaremos sus parametrizaciones para encontrar dicho punto.

Sean

$$q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$X_u(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ t\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$X_s(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ t\lambda_2 \end{pmatrix},$$

los puntos de intersección deben cumplir con

$$Q_1 = \begin{pmatrix} t - \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ t\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{10} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} t - \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \\ t\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

esto sucede cuando $t = \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1}$, entonces los puntos de intersección de E^s y E^u con Σ serán

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \lambda_1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma_2 r_1}{\alpha_1} \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Campo f^+

El equilibrio del campo f^+ será de la forma

$$q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{\beta_1} \\ -\mu \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

En este campo, el equilibrio q_2 tendrá un comportamiento tipo foco, por lo que los parámetros de A_2 deben cumplir las siguientes condiciones:

Sea el campo

$$f^+(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix}$$

- $|A_2| > 0$ lo cual implica que $\beta_1 < 0$,
- $\text{Disc}A_2 < 0$ entonces se cumple que $\beta_2^2 + 4\beta_1 < 0$,
- $\text{tr}A < 0$ que implica que $\beta_2 < 0$ para un foco estable ,
- $\text{tr}A > 0$ que implica que $\beta_2 > 0$ para un foco inestable.

Durante este capítulo se determinaron las condiciones de los parámetros del sistema para que el equilibrio q_1 de f^- presente un comportamiento tipo silla y el equilibrio q_2 de f^+ corresponda a un foco, se identificaron también los campos invariantes asociadas a la silla y los puntos donde estos intersectan a la recta de conmutación Σ .

Esta caracterización proporciona los elementos necesarios para estudiar la dinámica global del sistema, este estudio se realizara en los siguientes capítulos comenzando con el análisis de las orbitas homoclínicas.

Capítulo 3

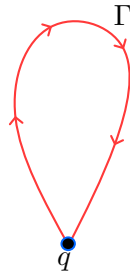
Órbitas homoclínicas

En los sistemas lineales por pedazos discontinuos, las órbitas homoclínicas son trayectorias que se originan y regresan a un mismo punto singular, normalmente a un equilibrio tipo silla, cuya dinámica puede involucrar tramos en regiones discontinuas y zonas de deslizamiento. Su retorno al punto singular puede involucrar trayectorias tangentes o sobre la recta de discontinuidad.

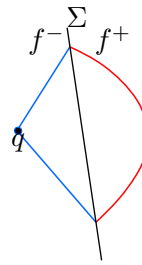
Definición 4. Una órbita Γ es una órbita homoclínica tal que, para un punto q de singularidad de (1.2), cumple que:

$$\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \mathbf{q} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \mathbf{q}.$$

Γ es una curva cerrada formada por la unión de la trayectoria homoclínica y el punto de singularidad q .



(a) Órbita homoclínica
en un sistema suave



(b) Órbita homoclínica
en un sistema Filippov.

Figura 3.1: Conexiones homoclínicas con un punto de singularidad q .

En este capítulo se estudiarán dos tipos de conexiones que pueden aparecer en sistemas Filippov definidos en $\mathbb{R}^2$, las órbitas homoclínicas de cruce y las órbitas pseudo-homoclínicas.

3.1. Órbita homoclínica de cruce

Comenzaremos estudiando las condiciones bajo las cuales el sistema admite una órbita homoclínica de cruce.

Definición 5. Una órbita Γ_c es una órbita homoclínica de cruce tal que, para el punto q_1 de singularidad de 1.10, cumple que:

$$\Gamma_c = \{\gamma_c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_c(t) = q_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_c(t) = q_1.$$

Γ_c incluirá segmentos en los campos f^- y f^+ y puede incluir segmentos de Σ_s .

De existir estas conexiones, estas coinciden con los espacios invariantes de q_1 . El comportamiento tipo foco de las soluciones del campo f^+ asegura la existencia de trayectorias que salgan y regresen a Σ . Para la existencia de una órbita homoclínica, una trayectoria de f^+ debe cumplir que su punto de partida sea Q_1 y regrese a Σ en Q_2 ; esto permite que la órbita salga y regrese a q_1 .

En el capítulo 2 se describe la dinámica de los campos f^- y f^+ ; se define que $\beta_1 < 0$ y que la positividad de β_2 dará la estabilidad de q_2 . Además, estos parámetros deben cumplir con $\beta_2^2 + 4\beta_1 < 0$, estos parámetros no influyen en el comportamiento de los espacios invariantes de q_1 ni en la altura de Q_1 y Q_2 . Cuanto más se acerque la desigualdad $\beta_2^2 + 4\beta_1 < 0$ a 0, se deformarán las soluciones de f^+ asemejándose a un nodo; por el contrario, cuanto más se aleje de 0, más tiempo les tomará a las soluciones alejarse (comportamiento inestable) o acercarse (comportamiento estable) al equilibrio q_2 . De la desigualdad anterior se obtiene la condición $\beta_1 < -\frac{\beta_2^2}{4}$. Debido a que el parámetro β_2 está involucrado directamente en la dinámica y las condiciones de existencia de pseudo-equilibrios admisibles en Σ_s , será conveniente fijar su valor en cada caso y manipular sólo el parámetro β_1 .

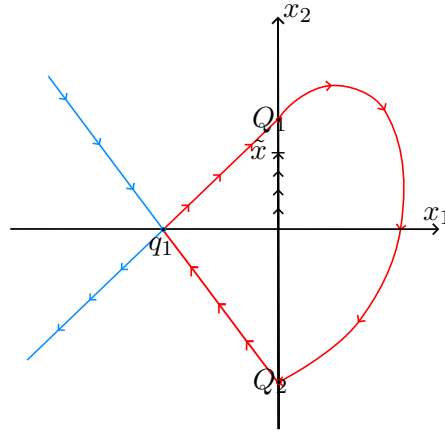


Figura 3.2: Órbita homoclínica de cruce sin segmentos de Σ_s .

Para que la órbita homoclínica de cruce no incluya segmentos de Σ_s debe cumplirse una de las siguientes condiciones:

- $e_2^T Q_1 > e_2^T \tilde{x}$ si $\mu < 0$.
- $e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_2$ si $\mu > 0$.

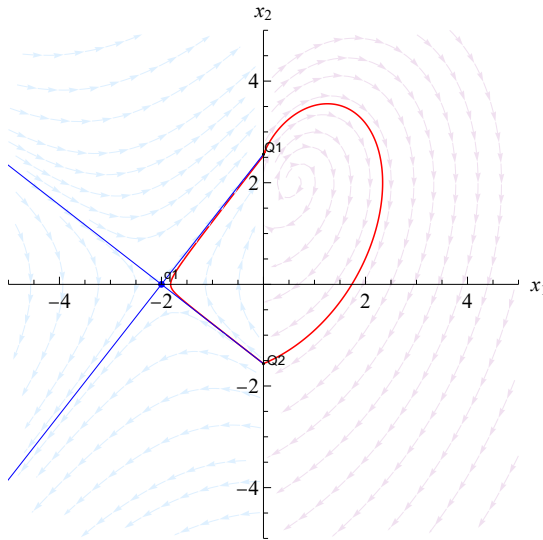
El dibujo presentado en la figura 3.2 cumple con la primera condición. Se presenta a continuación una simulación de dicho escenario.

Ejemplo 2. Considere el siguiente sistema Filippov, donde se fijará el valor numérico de todos los parámetros a excepción de β_1 .

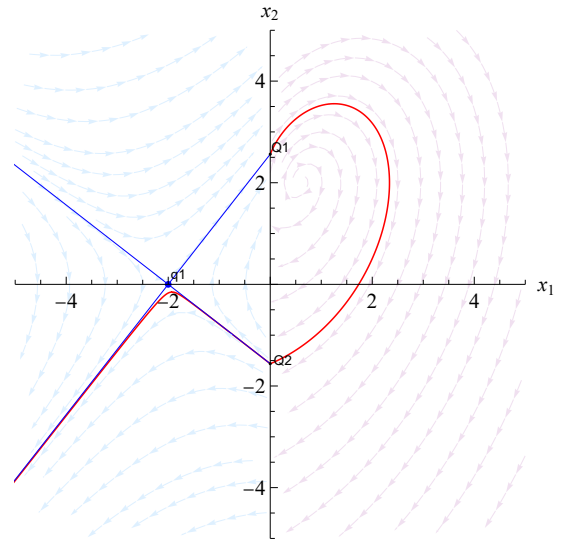
$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & 0.7 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ -0.4 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

con $\beta_1 < -0.1225$.

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} -1/\beta_1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco inestable, con $e_2^T Q_1 > e_2^T \tilde{x}$, es decir, fuera de Σ_s . Como se menciona anteriormente, el parámetro β_1 controlará el punto de destino de la solución que parte de Q_1 .



(a) Simulación del sistema 3.1 con $\beta_1 = -1.665$.



(b) Simulación del sistema 3.1 con $\beta_1 = -1.664$.

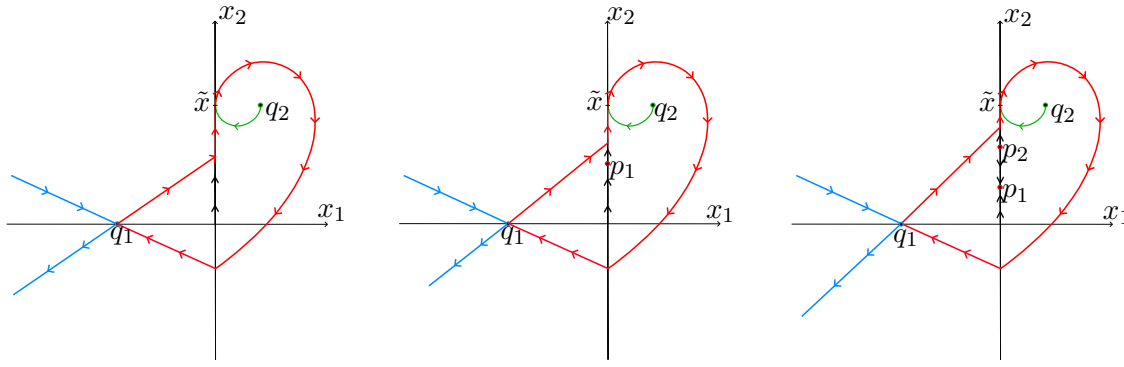
Figura 3.3: Simulaciones del sistema 3.1 tomando como valor inicial el punto Q_1 .

En la figura 3.3a la trayectoria que parte de Q_1 va dar a un punto por arriba de Q_2 mientras que en figura 3.3b la trayectoria que parte de Q_1 va dar a un punto por debajo de Q_2 .

Moviendo el parámetro β_1 se observa que la trayectoria que parte de Q_1 va a dar una cercanía $e_2^T Q_2 - h$ y $e_2^T Q_2 + h$, respectivamente, con $h > 0$ pequeño. Dado que las soluciones $y(t)$ son continuas en el tiempo, existirá un valor $\beta_1 \in (-1.665, -1.664)$ con el que exista una trayectoria $f^+(t)$ que vaya de Q_1 a Q_2 .

3.1.1. Caso con un segmento deslizante

En esta configuración la órbita homoclínica tomará parte del segmento deslizante a partir del punto Q_1 hasta el punto $\tilde{x}$, desde el cual seguirá a la trayectoria crítica de f^+ , llamemosla $T_c(t)$, para conectar con Q_2 .



(a) Caso sin pseudo-equilibrios sobre Σ_s .

(b) Caso con un pseudo-equilibrio sobre Σ_s .

(c) Caso con dos pseudo-equilibrios sobre Σ_s .

Figura 3.4: Configuraciones para una órbita homoclínica de cruce con un segmento deslizante.

Ocurrirán cuando se cumpla:

- $e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_1$ para el caso sin pseudo-equilibrios,
- $e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_1 > e_2^T p_1$ para el caso con un pseudo-equilibrios,
- $e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_1 > e_2^T p_2$ para el caso con dos pseudo-equilibrios.

Ejemplo 3. El siguiente ejemplo presenta el escenario de la figura 3.4a

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & 0.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & 0.7 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ -0.4 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

con $\beta_1 < -0.1225$.

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta_1} \\ 2 \end{pmatrix}$, de (2.2) y (2.3), los puntos $Q_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1.48 \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = (0, 2)$ y $Q_2 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -1.35 \end{pmatrix}$, es decir, $Q_1 \in \Sigma_s$.

Para la inexistencia de pseudo-equilibrios en Σ_s comprobaremos que los parámetros cumplen con la desigualdad

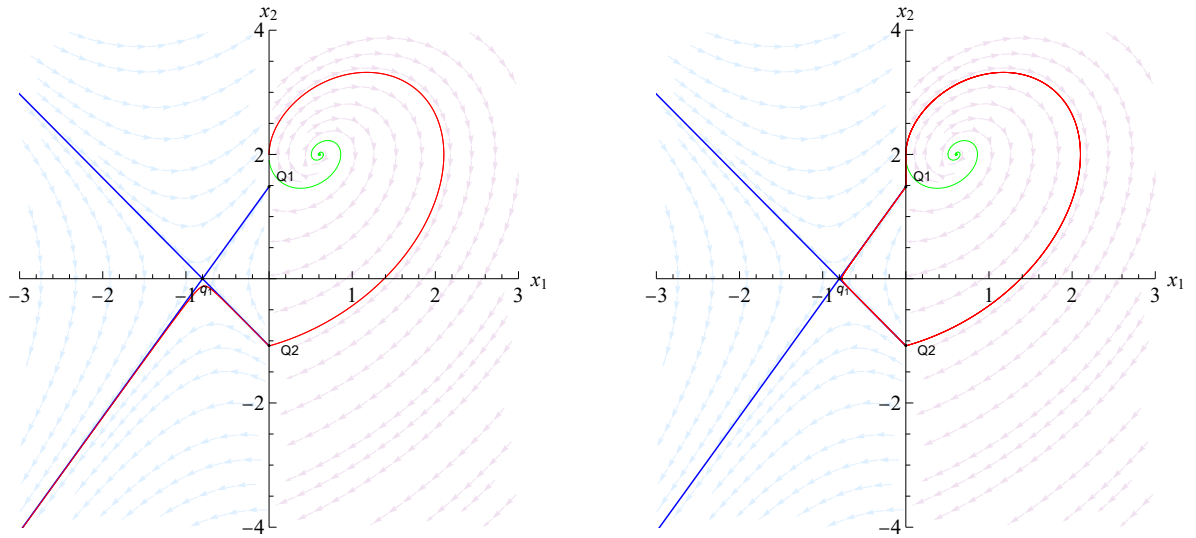
$$(r_2 + \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)^2 < 4\gamma_2 r_1 r_2.$$

sustituyendo los valores de (3.2) y desarrollando

$$(1 + 2 + (0.7 - 0.5)(-2))^2 < 4(2)(1),$$

$$6.76 < 8,$$

esta desigualdad nos dice que el discriminante de y es negativo por lo que no hay pseudo-equilibrios en Σ_s



(a) Simulación del sistema 3.2 con $\beta_1 = -1.638$.

(b) Simulación del sistema 3.2 con $\beta_1 = -1.639$.

Figura 3.5: Simulaciones del sistema 3.2 tomando como valor inicial el punto Q_1 .

En la figura 3.5a la trayectoria que parte de Q_1 va dar a un punto por arriba de Q_2 mientras que en figura 3.5b la trayectoria que parte de Q_1 va dar a un punto por debajo de Q_2 .

En la figura 3.5 puede observarse la existencia de valores de β_1 para los que la solución crítica va a dar a un punto $e_2^T Q_2 + h$ y $e_2^T Q_2 - h$ con $h > 0$ pequeño. Debido a la continuidad de soluciones, existirá un valor $\beta_1 \in (-1.639, -1.638)$ con el que la trayectoria crítica $T_c(t)$ vaya de $\tilde{x}$ a Q_2 .

3.2. Órbita pseudo-homoclínica

En esta configuración, la singularidad involucrada en la conexión homoclínica corresponde a un pseudo-equilibrio ubicado sobre el segmento deslizante Σ_s . Se diferenciarán dos comportamientos principales: la órbita pseudo-homoclínica sin cruce y la órbita pseudo-homoclínica con cruce, las cuales se describen a continuación.

3.2.1. Órbita pseudo-homoclínica sin cruce

La etiqueta -sin cruce- hace referencia a que la órbita no cruza entre los campos f^- y f^+ sino que solo se mantiene sobre el segmento deslizante y el campo f^+ . Se consideran las siguientes configuraciones para este tipo de órbitas.

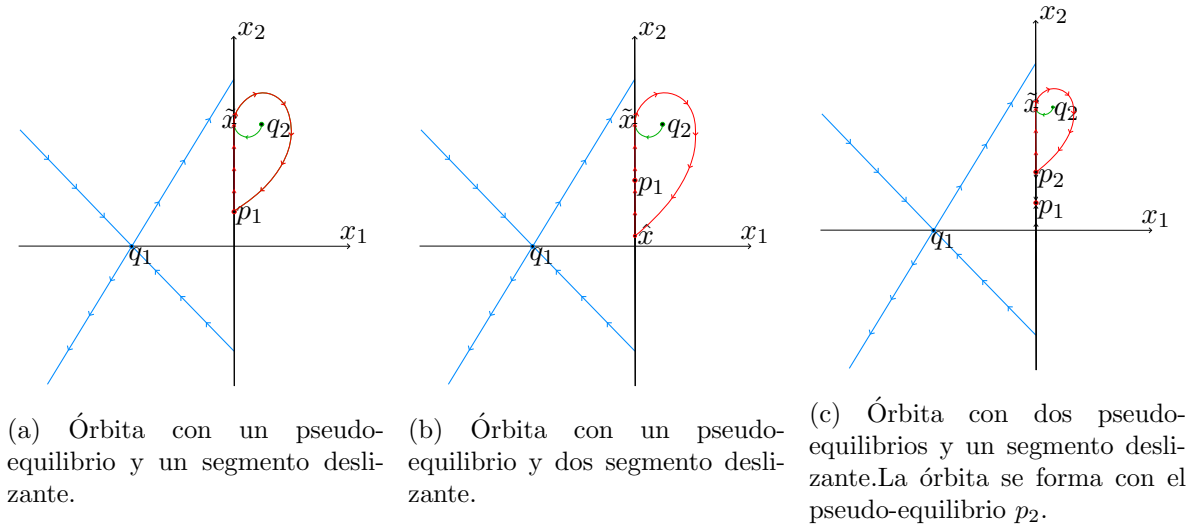


Figura 3.6: Configuraciones para una órbita pseudo-homoclínica sin cruce.

La diferenciación entre una órbita pseudo-homoclínica sin cruce con un segmento deslizante y una con dos segmentos deslizantes se hace considerando los subsegmentos de Σ_s que toma la órbita como segmentos separados por el pseudo-equilibrio p_i que se tome para la órbita, es decir, dentro de la órbita se les considera segmentos separados a la vez que son subsegmentos de Σ_s .

Definición 6. Una órbita Γ_{ph} es una órbita pseudo-homoclínica tal que, para un pseudo-equilibrio p_i sobre Σ_s , cumple que:

$$\Gamma_{ph} = \{\gamma_{ph}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{ph}(t) = \mathbf{p}_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{ph}(t) = \mathbf{p}_1.$$

Γ_{ph} incluirá segmentos de Σ_s y del campo f^+ .

Debido a que $r_1, r_2 > 0$, Σ_s tendrá una dinámica de deslizamiento vertical ascendente como se ilustra en las figuras 3.6a y 3.6b. La solución que dará la órbita pseudo-homoclínica será la trayectoria crítica de f^+ , saliendo de $\tilde{x}$ y regresando a Σ_s .

En los siguientes casos diferenciaremos los siguientes segmentos de Σ_s .

- Para el caso donde existe un único pseudo-equilibrio:

$$\begin{aligned}\Sigma_{s_1} &= \{x \in \Sigma_s | 0 \leq e_2^T x < e_2^T p_1\}, \\ \Sigma_{s_2} &= \{x \in \Sigma_s | e_2^T p_1 < e_2^T x \leq e_2^T \tilde{x}\}.\end{aligned}$$

- Para el caso donde existen dos pseudo-equilibrios:

$$\begin{aligned}\Sigma_{s_1} &= \{x \in \Sigma_s | 0 \leq e_2^T x < e_2^T p_1\}, \\ \Sigma_{s_2} &= \{x \in \Sigma_s | e_2^T p_1 < e_2^T x < e_2^T p_2\}, \\ \Sigma_{s_3} &= \{x \in \Sigma_s | e_2^T p_2 < e_2^T x \leq e_2^T \tilde{x}\}.\end{aligned}$$

Caso con un segmento deslizando

La órbita pseudo-homoclínica saldrá de p_i siguiendo el deslizamiento de $\Sigma_{s_{i+1}}$ y de la trayectoria crítica de f^+ , $T_c(t)$, regresando a p_i .

Caso con dos segmentos deslizando

Esta configuración es exclusiva de la existencia de un sólo pseudo-equilibrio. A diferencia del escenario con un segmento deslizando, en este caso existe un punto $\hat{x}$ donde la trayectoria $T_c(t)$ de f^+ entrará a Σ_{s_1} y morirá en p_1 .

A continuación se presenta un sistema que ilustra el caso de la figura 3.6a.

Ejemplo 4. Considere el siguiente sistema Filippov, donde se fijará el valor numérico de todos los parámetros a excepción de β_1 .

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.15 & 0.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & 1.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ -2.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

con $\beta_1 < -0.5625$

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{0.5}{\beta_1} \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco inestable. Comprobemos que los parámetros cumplen con la ecuación (1.13):

$$(r_2 + \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)^2 = 4\gamma_2 r_1 r_2.$$

Sustituyendo los valores del sistema,

$$(0.5 + (1)0.5 + (1.5 - 0.5)(-2))^2 = 4(1)(0.5)(0.5)$$

$$1 = 1$$

esto nos indica la existencia de un pseudo-equilibrio sobre Σ , comprobaremos que sea un pseudo-equilibrio admisible,

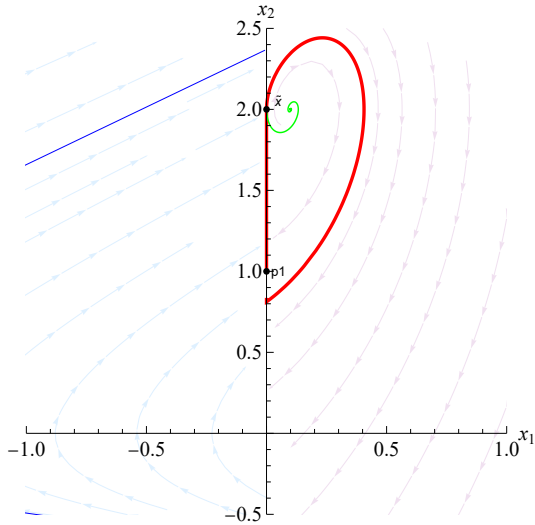
$$-\mu > \frac{-(r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)}{2(\beta_2 - \alpha_2)} > 0.$$

Sustituyendo los valores descritos en (3.3),

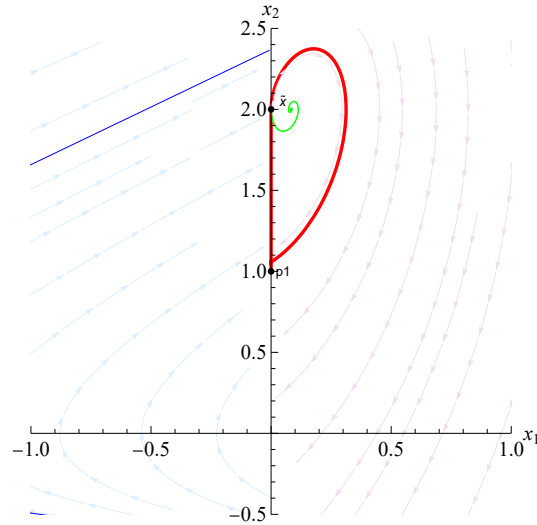
$$-(-2) > \frac{-(0.5 - (1)(0.5) + (1.5 - 0.5)(-2))}{2(1.5 - 0.5)} > 0,$$

$$2 > 1 > 0.$$

por lo que el pseudo-equilibrio tendrá coordenadas $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_s$.



(a) Simulación del sistema 3.3 con $\beta_1 = -5$. La trayectoria que parte de p_1 va dar a un punto por abajo de p_1 .



(b) Simulación del sistema 3.3 con $\beta_1 = -6$. La trayectoria que parte de p_1 va dar a un punto por abajo de p_1 .

Figura 3.7: Simulación de la configuración presentada en la Figura 3.6a.

Moviendo el parámetro β_1 de las simulaciones de la figura 3.7 se observa que la trayectoria que parte de $\tilde{x}$ va a dar a un punto $e_2^T p_1 - h$ y $e_2^T p_1 + h$, respectivamente, con $h > 0$ pequeño. Dado que las soluciones $y(t)$ son continuas en el tiempo, existirá un valor $\beta_1 < 0$ con el que se sepa que la trayectoria crítica conecte $\tilde{x}$ con p_1 .

3.2.2. Órbita pseudo-homoclínica con cruce

La etiqueta -con cruce- hace referencia a que la órbita cruza del campo f^+ al campo f^- además toma subsegmentos de Σ_s . Se consideran las siguientes configuraciones para este tipo de órbitas.

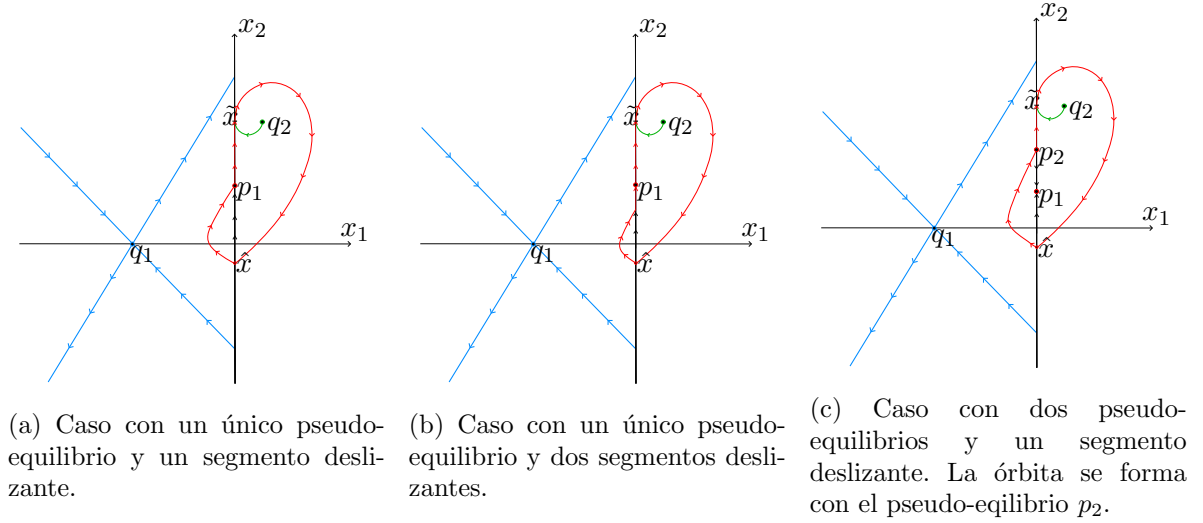


Figura 3.8: Configuraciones para una órbita pseudo-homoclínica con cruce.

Caso con un segmento deslizante

La órbita pseudo-homoclínica saldrá de p_i siguiendo la trayectoria de $\Sigma_{s_{i+1}}$ y de la solución $T_c(t)$ de f^+ a partir de $\tilde{x}$, regresando a p_i . El punto $\hat{x}$ estará fuera de Σ_s , cumpliendo con $0 > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$, lo que provoca el cruce sobre Σ siguiendo la trayectoria de f^- que va a p_i a partir de del punto $\hat{x}$.

Caso con dos segmentos deslizante

Este caso es exclusivo de la existencia de un único pseudo-equilibrio sobre Σ_s , la órbita toma la trayectoria de f^- a la que cruza $T_c(t)$ por el punto $\hat{x}$ irá a un punto $\hat{x}_1 \in \Sigma_{s_1}$.

Se presenta a continuación una simulación del caso de la figura 3.8c.

Ejemplo 5. Considere el siguiente sistema, donde se fijará el valor numérico de todos los parámetros, a excepción de β_1 .

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

con $\beta_1 < -1$.

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} -1/\beta_1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco inestable. Comprobemos que los parámetros cumplen con la ecuación (1.13).

$$(r_2 + \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)^2 - 4\gamma_2 r_1 r_2 > 0.$$

Sustituyendo los valores del sistema 3.4

$$(1 + (1)0.5 + (2 - 0.5)(-2))^2 - 4(1)(0.5)(1) > 0, \\ 2.25 - 2 = 0.25 > 0.$$

Esto nos indica la existencia de dos pseudo-equilibrios sobre Σ , comprobaremos que sean pseudo-equilibrios admisibles,

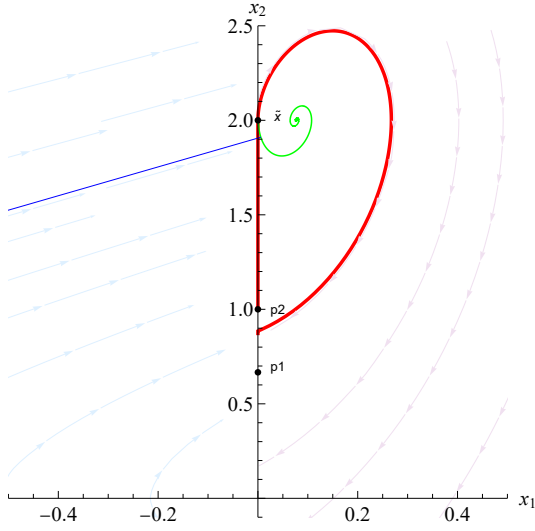
$$-\mu > \frac{-(r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu) \pm \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu)^2 - 4(\beta_2 - \alpha_2)(-\gamma_2 r_1 \mu)}}{2(\beta_2 - \alpha_2)} > 0$$

Sustituyendo los valores descritos en (3.4),

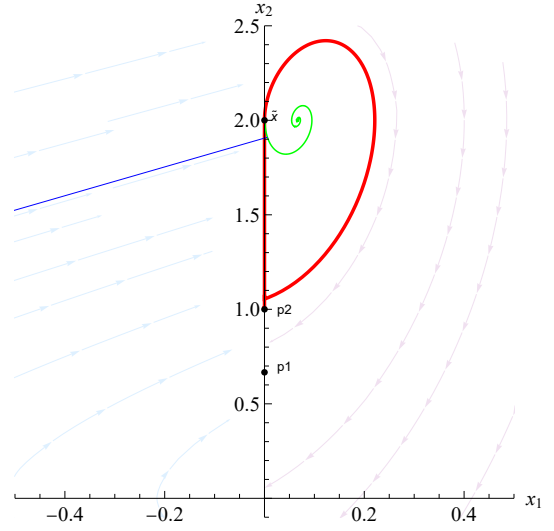
$$\beta_2 - \alpha_2 = 1.5, (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mu) = -2.5 \text{ y } -\gamma_2 r_1 \mu = 1,$$

$$y_{21,22} = \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{(-2.5)^2 - 4(1.5)(1)}}{2(2 - 0.5)}, \\ y_{21} = \frac{2.5 - 0.5}{3} = \frac{2}{3}, \\ y_{22} = \frac{2.5 + 0.5}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Por lo que los pseudo-equilibrios tendrán coordenadas $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_s$.



(a) Simulación del sistema 3.4 con $\beta_1 = -13$. La trayectoria que parte de p_2 recorre $T_c(t)$ apartir de $\tilde{x}$ y va a dar a un punto por debajo de p_2 .



(b) Simulación del sistema 3.4 con $\beta_1 = -15$. La trayectoria que parte de p_2 recorre $T_c(t)$ apartir de $\tilde{x}$ y va a dar a un punto por arriba de p_2 .

Figura 3.9: Simulación del sistema 3.4 (configuración presentada en la Figura 3.8c).

Moviendo el parámetro β_1 de las simulaciones de la figura 3.9 se observa que la trayectoria que parte de $\tilde{x}$ va a dar a un punto $e_2^T p_2 - h$ y $e_2^T p_2 + h$, respectivamente, con $h > 0$ pequeño. Dado que las soluciones $y(t)$ son continuas en el tiempo, existirá un valor $\beta_1 \in (-15, -13)$ con el que se sepa que la trayectoria $T_c(t)$ vaya a p_2 formando $\gamma_{ph}(t)$.

Hasta ahora, hemos explorado órbitas homoclínicas, aquellas trayectorias que parten de un punto de singularidad y regresan al mismo punto. En el siguiente capítulo se explorará el comportamiento de órbitas heteroclínicas.

Capítulo 4

Órbitas heteroclínicas

Dada la existencia de dos o más puntos de singularidad admisibles en un sistema Filippov, las órbitas heteroclínicas serán trayectorias que conecten sólo dos puntos de singularidad entre sí; su dinámica puede involucrar tramos en regiones discontinuas y de deslizamiento. En este capítulo consideraremos la positividad de μ para dar un catálogo más amplio de los posibles casos que pueden aparecer en nuestro sistema.

Definición 7. *Si en el retrato fase de un sistema dinámico existe una solución que conecte dos puntos críticos distintos entre sí, entonces esta solución será una órbita heteroclínica.*

Se diferenciarán tres comportamientos principales entre las órbitas heteroclínicas, la conexión simple, la conexión directa y la conexión no-simple, entre los cuales se encuentran las órbitas que conectan equilibrio con equilibrio y un equilibrio con un pseudo-equilibrio, los cuales se analizan a continuación.

4.1. Órbita heteroclínica simple

Definición 8. *En un sistema Filippov de ecuaciones diremos que una órbita heteroclínica es simple si conecta los equilibrios de ambos campos con un solo cruce en la recta Σ de conmutación.*

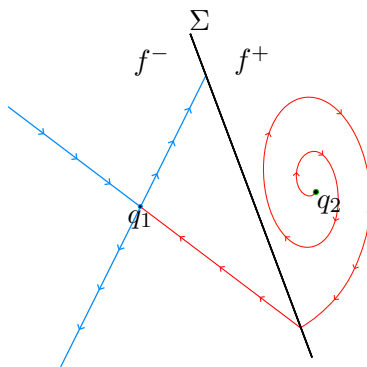


Figura 4.1: Conexión heteroclínica entre q_1 y q_2 .

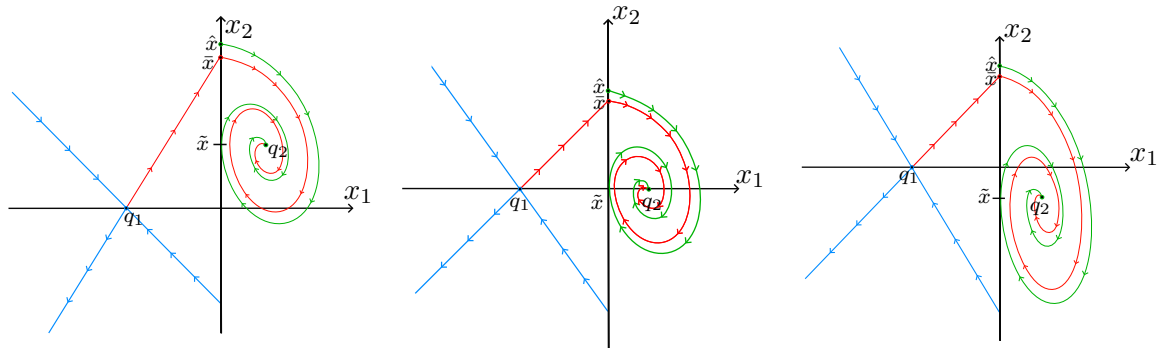
4.1.1. Conexión equilibrio - equilibrio

Considerando que el sistema 1.10 puede tener varios puntos de singularidad, esta conexión no toma en cuenta la existencia de pseudo-equilibrios sobre Σ_s , de hecho, la órbita procura evitar el segmento deslizante por completo. Dado que q_2 es un equilibrio tipo foco todas las soluciones mueren (comportamiento estable) o nacen (comportamiento inestable) de él, por continuidad de soluciones existe una trayectoria de f^+ que genera una conexión con un solo cruce sobre Σ entre q_1 y q_2 .

A continuación se describen las condiciones para que estas configuraciones sucedan.

Órbitas heteroclínicas simples con q_2 estable

Para estas configuraciones nombraremos como $\hat{x}$ al punto donde la trayectoria crítica de f^+ , nombrada $T_c(t)$ en el capítulo anterior, intersecta a Σ , también renombraremos a Q_1 como $\bar{x}$.



(a) Órbita heteroclínica simple con $\mu < 0$. (b) Órbita heteroclínica simple con $\mu = 0$. (c) Órbita heteroclínica simple con $\mu > 0$.

Figura 4.2: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple con q_2 estable.

En la figura 4.2 se puede observar que para que exista una conexión entre q_1 y q_2 se debe cumplir que para que exista una la solución del foco que vaya de $\bar{x}$ a q_2 esta debe ubicarse por "dentro" de la trayectoria crítica del foco, $T_c(t)$.

Órbitas heteroclínicas simples con q_2 inestable

De igual forma se contempla para estas configuraciones el punto $\hat{x}$ donde la trayectoria crítica de f^+ , $T_c(t)$, intersecta a Σ , en este caso renombraremos a Q_2 como $\bar{x}$.

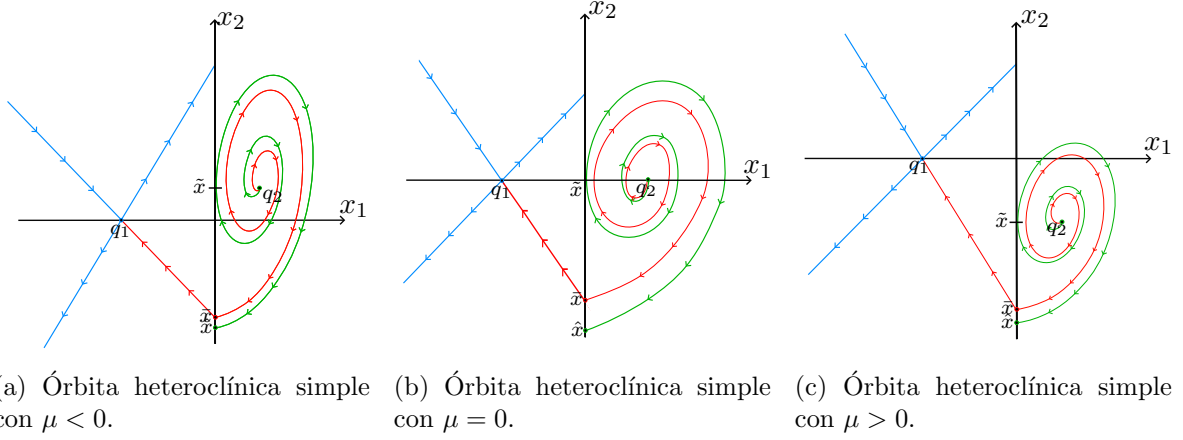


Figura 4.3: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple con q_2 inestable.

En la figura 4.3 se puede observar que para que exista una conexión entre q_1 y q_2 se debe cumplir que para que exista una la solución del foco que vaya de q_2 a $\tilde{x}$ esta debe ubicarse por "dentro" de la trayectoria crítica del foco, $T_c(t)$. A partir de estas descripciones podemos enunciar los siguientes lemas:

Lema 2. *Existe una solución de f^+ que conecta a q_1 y q_2 .*

Lema 3.

1. *Sea $\hat{x}$ la intersección de la solución crítica del foco con Σ . Si f^+ es un foco inestable y $\hat{x} < Q_2 < \tilde{x}$ entonces q_1 y q_2 están conectados.*
2. *Sea $\hat{x}$ la intersección de la solución crítica del foco con Σ . Si f^+ es un foco estable y $\tilde{x} < Q_1 < \hat{x}$ entonces q_1 y q_2 están conectados.*

Se presenta a continuación una simulación para el escenario representado en la figura 4.2a

Ejemplo 6. Considere el siguiente sistema Filippov, donde se fijará el valor numérico de todos los parámetros a excepción de β_1 .

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.5 & 0.8 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 3.2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.999 & -0.4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 1.8 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{32}{15} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco estable, con los puntos $\tilde{x} > \bar{x}$.

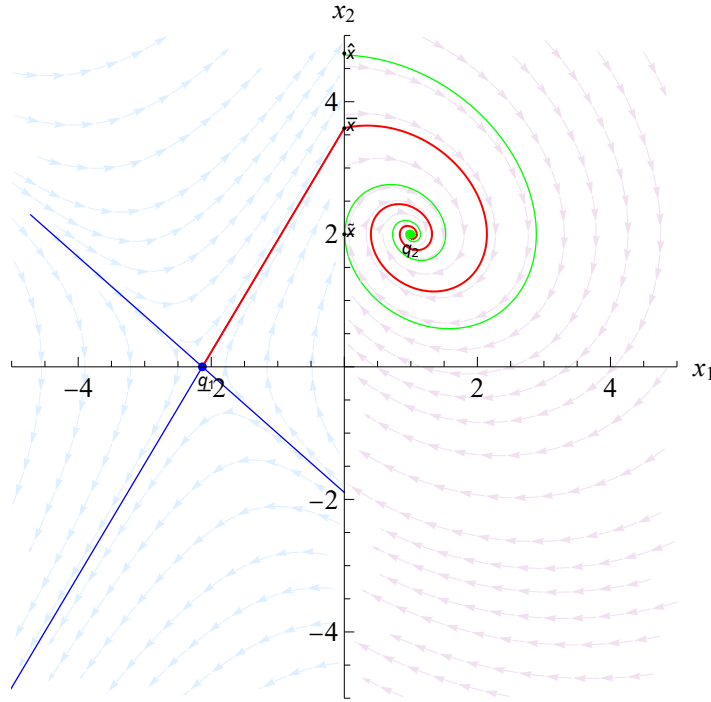


Figura 4.4: Simulación del sistema 4.1 con $\beta_1 = -0.999$.

Dado a la continuidad de soluciones y la naturaleza de la configuración el parámetro β_1 tiene un poco más de libertad a comparación de simulaciones anteriores, para estas configuraciones se pone mayor cuidado en la ubicación de Q_1 y Q_2 (es decir, en los valores para los parámetros α_1 y α_2), que en la relación de los parámetros β_1 y β_2 .

Casos críticos

Nombraremos casos críticos a las órbitas heteroclínicas que toman la trayectoria $T_c(t)$ de f^+ para conectar a q_2 con $\hat{x}$.

Órbitas con q_2 estable

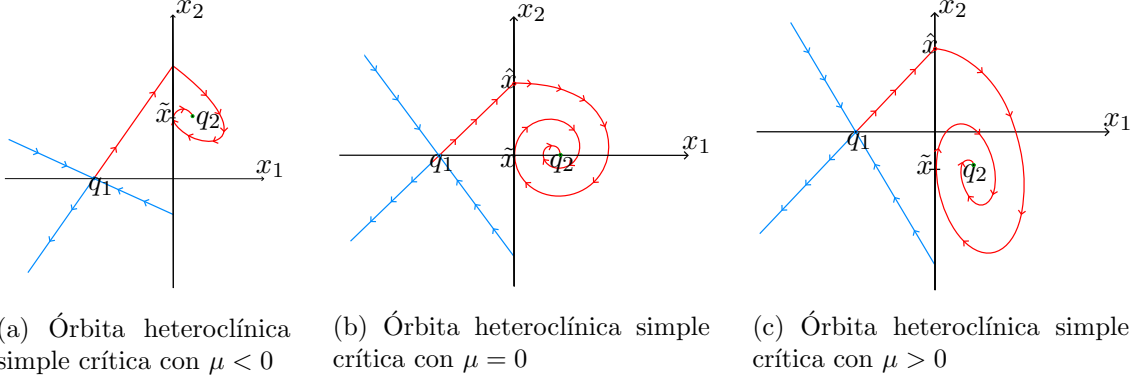


Figura 4.5: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple crítica con q_2 estable.

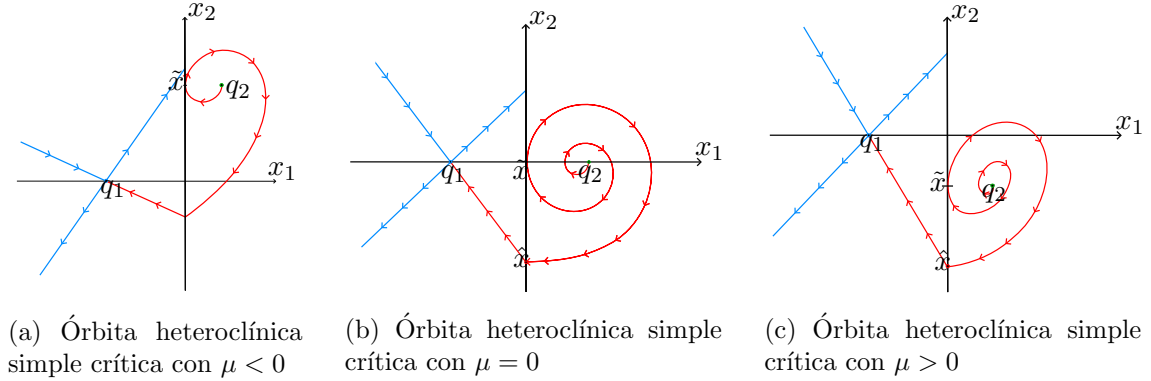


Figura 4.6: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple crítica con q_2 inestable.

Los casos críticos se darán con $e_2^T \hat{x} = e_2^T Q_1$ cuando f^+ sea un foco estable, y $e_2^T \hat{x} = e_2^T Q_2$ cuando f^+ sea un foco inestable.

A continuación se presenta ejemplos que simula el caso de la figura 4.5a.

Ejemplo 7. Considere el siguiente sistema Filippov, en este caso manipularemos el parámetro α_1 del sistema 4.1 con lo que obtendremos el siguiente sistema.

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.8 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 3.2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.999 & -0.4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 1.8 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -3.2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco estable, con los puntos $e_2^T \tilde{x} = e_2^T Q_1$.

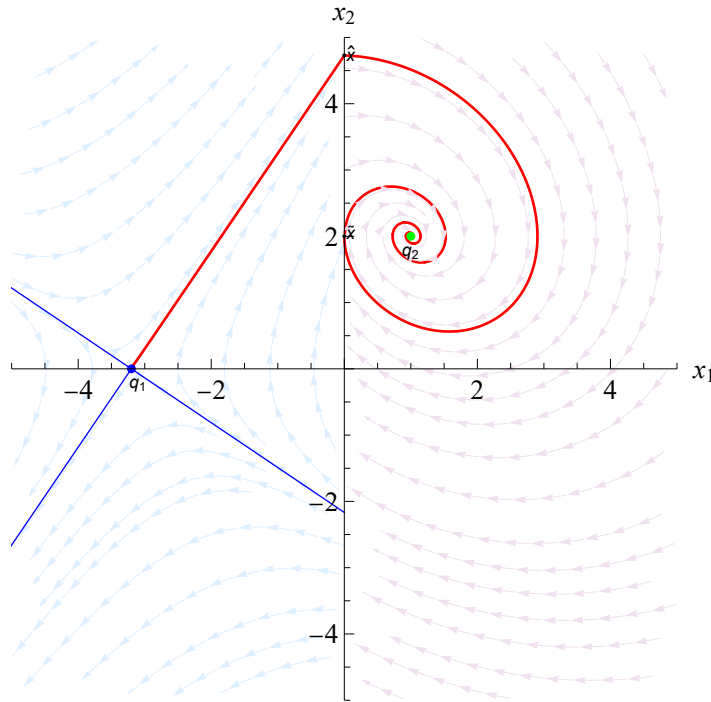


Figura 4.7: Simulación del sistema 4.2.

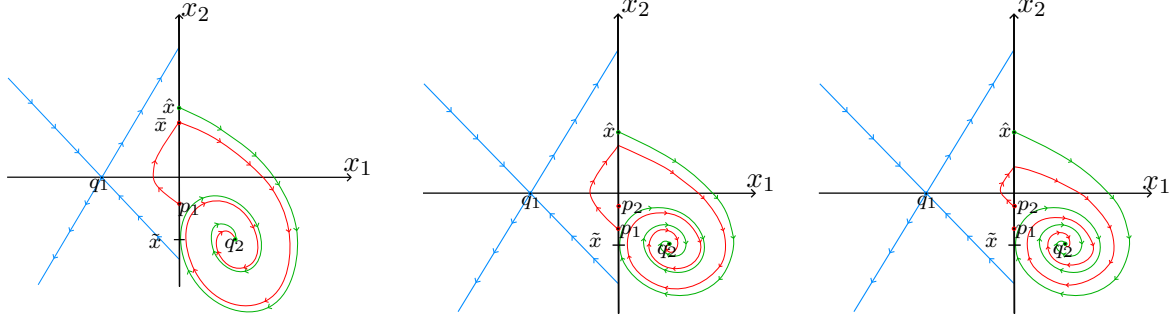
Como se menciona en el ejemplo 6 los parámetros α_1 y α_2 tienen mayor relevancia debido a que están directamente involucrados en la ubicación de Q_1 .

4.1.2. Conexión equilibrio - pseudo-equilibrio

En este caso la órbita homoclínica simple conecta un pseudo-equilibrio p_i sobre Σ_s con un equilibrio q_i .

Conexiones con q_2 estable

En esta configuración la órbita homoclínica simple conecta un pseudo-equilibrio p_i sobre Σ_s con el equilibrio q_2 .



(a) Conexión con un único pseudo-equilibrio en Σ_s . La órbita a p_1 con q_2 .

(b) Conexión con dos pseudo-equilibrios en Σ_s . La órbita conecta a p_1 con q_2 .

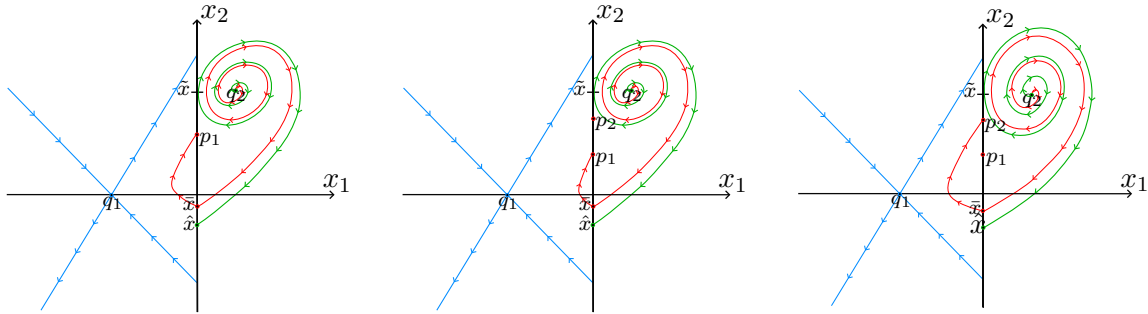
(c) Conexión con dos pseudo-equilibrios en Σ_s . La órbita conecta a p_2 con q_2 .

Figura 4.8: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple pseudo-equilibrio-equilibrio con q_2 estable y $\mu > 0$.

La órbita heteroclínica estará formada por la trayectoria de f^- que nace de un pseudo-equilibrio, esta solución cruzará en $\bar{x}$ a una solución de f^+ .

Conexiones con q_2 inestable

En esta configuración la órbita homoclínica simple conecta el equilibrio q_2 con un pseudo-equilibrio p_i sobre Σ_s .



(a) Conexión con un único pseudo-equilibrio en Σ_s . La órbita conecta a q_2 con p_1 .

(b) Conexión con dos pseudo-equilibrios en Σ_s . La órbita conecta a q_2 con p_1 .

(c) Conexión con dos pseudo-equilibrios en Σ_s . La órbita conecta a q_2 con p_1 .

Figura 4.9: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple equilibrio-pseudo-equilibrio con q_2 inestable y $\mu < 0$.

La órbita heteroclínica estará formada por la trayectoria de f^+ que cruza por $\bar{x}$ a la solución de f^- que muere en el pseudo-equilibrio.

En estos escenarios es necesario que el punto $\hat{x}$ donde muere la trayectoria crítica de f^+ , $T_c(t)$ no debe pertenecer a Σ_s bajo las siguientes condiciones

- $0 < e_2^T \hat{x} < e_2^T Q_1$ para el caso de un foco estable,
- $0 > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$ para el caso de un foco inestable.

Ejemplo 8. Considere el siguiente sistema Filippov, donde se fijará el valor numérico de todos los parámetros a excepción de β_1 .

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.15 & 0.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.85 & 1.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ -2.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{57} \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco inestable, con los puntos $0 > e_2^T \bar{x} > e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_2$.

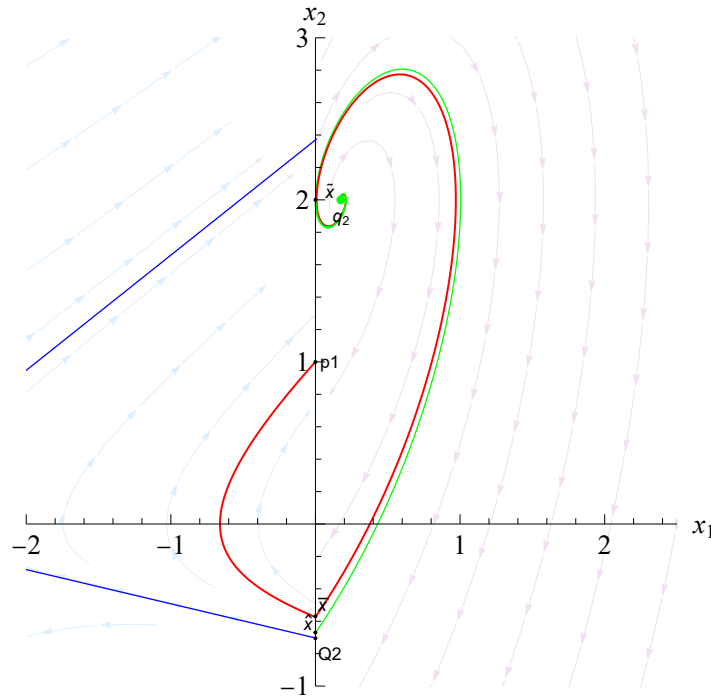


Figura 4.10: Simulación del sistema 4.3 (escenario de la figura 4.9a).

Conexiones de q_1 con un pseudo-equilibrio

En este caso la órbita heteroclínica simple conecta al equilibrio q_1 con un pseudo-equilibrio p_i .

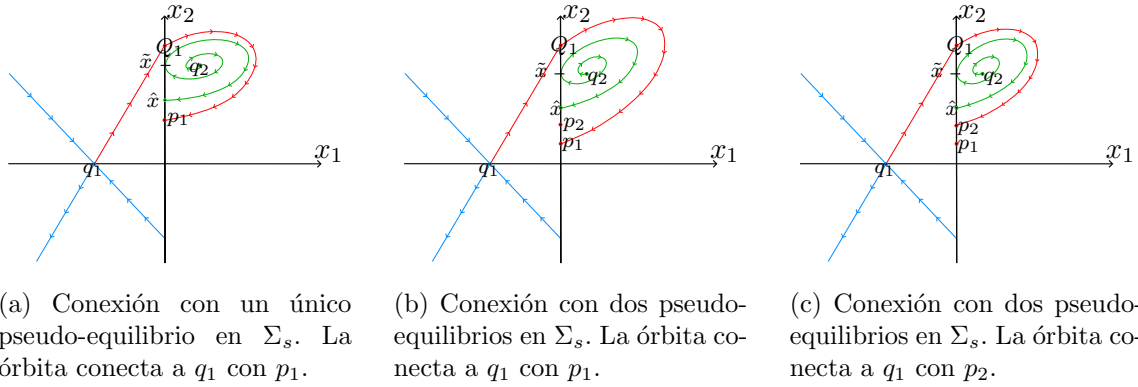


Figura 4.11: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple de q_1 a p_i con q_2 inestable y $\mu < 0$.

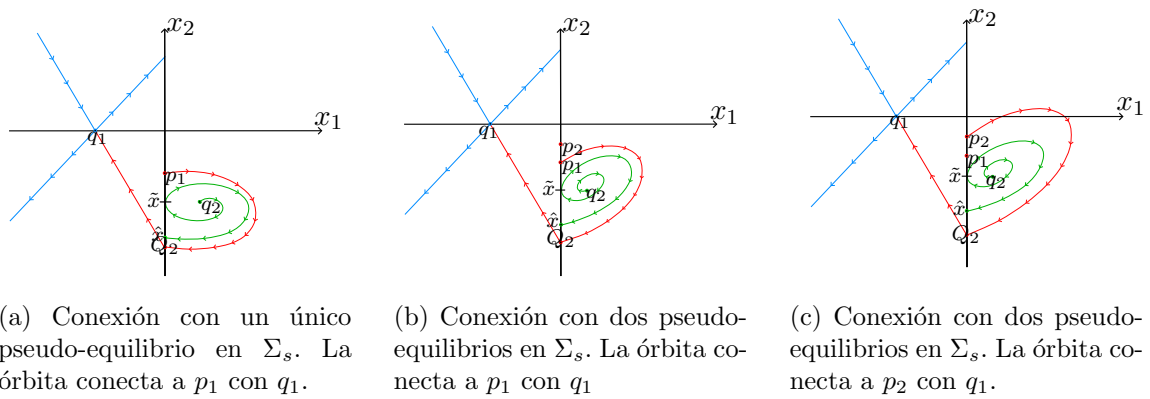
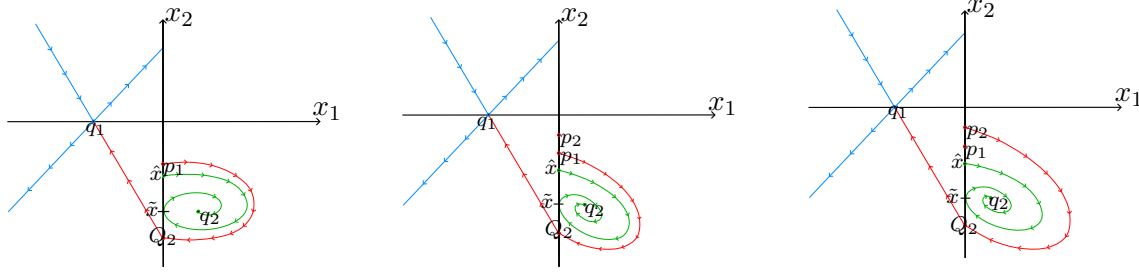


Figura 4.12: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple de q_1 a p_i con q_2 inestable y $\mu > 0$.



(a) Conexión con un único pseudo-equilibrio en Σ_s . La órbita conecta a p_1 con q_1 .

(b) Conexión con dos pseudo-equilibrios en Σ_s . La órbita conecta a p_1 con q_1 .

(c) Conexión con dos pseudo-equilibrios en Σ_s . La órbita conecta a p_2 con q_1 .

Figura 4.13: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple de q_1 a p_i con q_2 estable y $\mu > 0$.

Nótese que en este caso la estabilidad del foco no cambia la dirección del flujo que sigue la solución de f^+ que forma la conexión heteroclínica. Las siguientes condiciones son necesarias para que se den los escenarios anteriores

- Para el caso $\mu < 0$ y q_2 un foco inestable se debe cumplir que $e_2^T Q_1 > e_2^T \tilde{x} > e_2^T \hat{x} > e_2^T p_i$ siendo p_i el pseudo-equilibrio que forma parte de la órbita heteroclínica.
- Para el caso $\mu > 0$ y q_2 un foco inestable se debe cumplir que $e_2^T p_i > e_2^T \tilde{x} > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$ siendo p_i el pseudo-equilibrio que forma parte de la órbita heteroclínica.
- Para el caso $\mu > 0$ y q_2 un foco estable se debe cumplir que $e_2^T p_i > e_2^T \hat{x} > e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_2$ siendo p_i el pseudo-equilibrio que forma parte de la órbita heteroclínica.

Ejemplo 9. Considere el siguiente sistema Filippov, donde se fijará el valor numérico de todos los parámetros, a excepción de β_1 .

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.16 & 0.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & 1.5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ -2.5 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -3.125 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{0.5}{\beta_1} \\ 2 \end{pmatrix}$, donde q_1 es una silla y q_2 es un foco inestable, con $0 > e_2^T \tilde{x} > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$.

Por continuidad de soluciones existe una trayectoria de f^+ que sale de Q_1 y va a dar a p_1 siguiendo el comportamiento mostrado en la figura 4.11a.

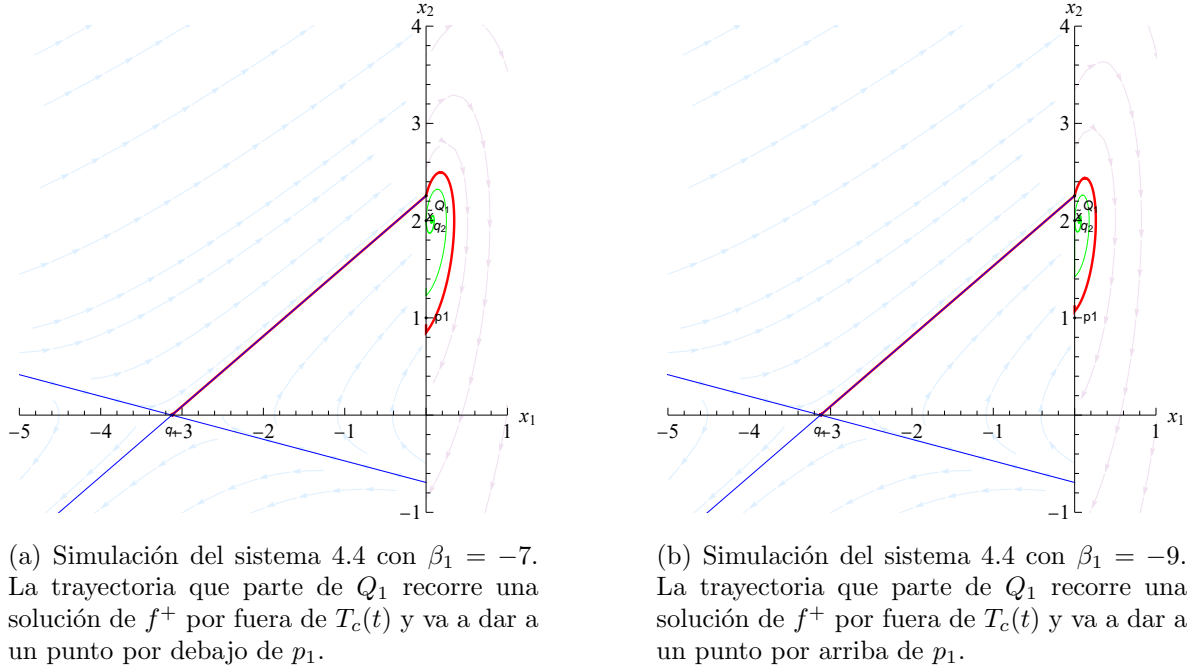
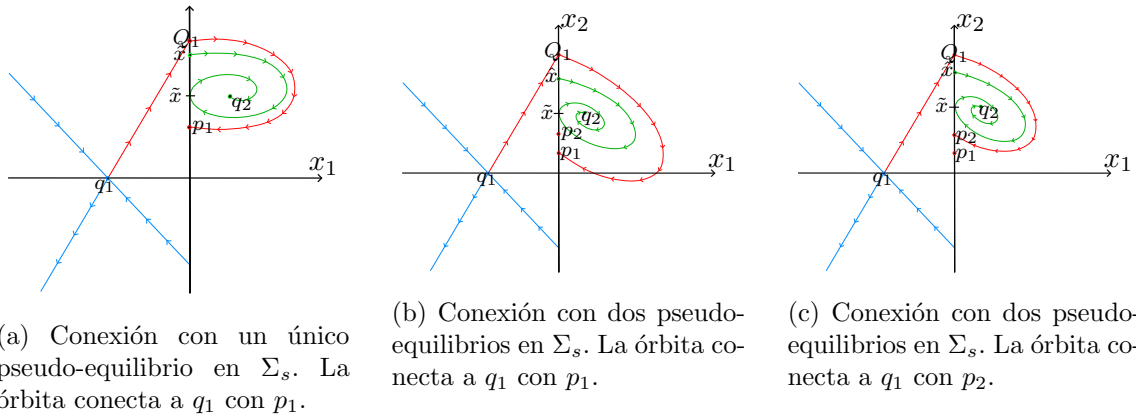


Figura 4.14: Simulación del sistema 4.4.

4.1.3. Escenarios no factibles

En esta sección se muestran escenarios cuyas configuraciones no son factibles debido a las condiciones de positividad a las que están ligadas los parámetros del sistema 1.10 para la existencia de pseudo-equilibrios en Σ_s , la estabilidad de q_2 y la ordenada de Q_1 .

Figura 4.15: Configuraciones para una órbita heteroclínica simple de q_1 a p_i con q_2 estable y $\mu < 0$.

Considere la órbita que parte de q_1 siguiendo el flujo de E^u , que interseca a Σ en el punto Q_1 y que conecta con $p_1 \in \Sigma_s$ siguiendo el flujo del campo f^+ . Debido a que dicha órbita sigue a la trayectoria crítica de f^+ la estabilidad de q_2 no afecta el flujo que sigue la órbita en f^+ . Se probará que dicha configuración, conexión $q_1 - p_1$, se da únicamente con q_2 inestable.

Lema 4. Sea $Q_1 = E^u \cap \Sigma$ para el sistema Filippov en su forma normal

$$\dot{y} = \begin{cases} f^-(y) = A_1 y + b_1, & y_1 < 0, \\ f^+(y) = A_2 y + b_2, & y_1 > 0, \end{cases}$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix}.$$

y cuya dinámica deslizante esta dada por

$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{\mu} \left[(\beta_2 - \alpha_2) y_2^2 + (r_2 - \gamma_2 r_1 + (\beta_2 - \alpha_2) \mu) y_2 - \gamma_2 r_1 \mu \right],$$

las raíces de la ecuación dan las ordenadas de los pseudo-equilibrios.
Supongamos que

$$\gamma_2 > 0, \quad r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad (\beta_2 - \alpha_2) > 0, \quad \mu < 0.$$

Con el equilibrio del campo f^- siendo una silla y el del campo f^+ un foco. Las órbitas que logran la conexión de q_1 con algún pseudo-equilibrio en Σ_s sólo se dan cuando $\beta_2 > 0$, es decir, cuando q_2 es inestable.

Demostración. Sea $k_2 = \beta_2 - \alpha_2$, se reescribe a $\dot{y}_2$

$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{\mu} \left[k_2 y_2^2 + (r_2 - \gamma_2 r_1 + k_2 \mu) y_2 - \gamma_2 r_1 \mu \right],$$

las ordenadas de los pseudo-equilibrios estan dadas por

$$y_{21,22} = \frac{-(r_2 - \gamma_2 r_1 + k_2 \mu) \pm \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 + k_2 \mu)^2 + 4k_2 \gamma_2 r_1 \mu}}{2k_2}, \quad (4.5)$$

1. Caso con un único pseudo-equilibrio

Supongamos que existe un único pseudo-equilibrio en Σ_s , es decir

$$disc := (r_2 - \gamma_2 r_1 + k_2 \mu)^2 + 4k_2 \gamma_2 r_1 \mu = 0, \quad (4.6)$$

recordando las altura de p_1 y Q_1

$$e_2^T p_1 = \frac{-r_2 + \gamma_2 r_1 - k_2 \mu}{2k_2}, \quad (4.7)$$

$$e_2^T Q_1 = \frac{\gamma_2 r_1 (\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1})}{2\alpha_1}.$$

Las configuraciones de la figura 4.15, exige que $e_2^T Q_1 > -\mu > e_2^T p_1 > 0$, de esta inecuación se obtienen las sumas

$$e_2^T p_1 + \mu = \frac{-r_2 + \gamma_2 r_1 + k_2 \mu}{2k_2} < 0, \quad (4.8)$$

$$e_2^T Q_1 + \mu = \frac{\gamma_2 r_1 (\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1}) + 2\alpha_1 \mu}{2\alpha_1} > 0.$$

Por las condiciones dadas para los parámetros considera el termino $k_2 \mu < 0$ por lo que lo renombraremos como $k_2 \mu = -c_0$ con $c_0 > 0$. Que se sustituye en (4.7) y (4.8)

$$e_2^T p_1 = \frac{c_0 - r_2 + \gamma_2 r_1}{2k_2} > 0, \quad (4.9)$$

$$e_2^T p_1 + \mu = -\frac{c_0 + r_2 - \gamma_2 r_1}{2k_2} < 0, \quad (4.10)$$

por la positividad de $e_2^T p_1$ y $e_2^T p_1 + \mu$ se deduce que

$$\gamma_2 r_1 + c_0 > r_2 > \gamma_2 r_1 - c_0. \quad (4.11)$$

Luego se reescribe (4.6) como

$$disc = (r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 - c_0, \quad (4.12)$$

de donde se obtiene la ecuación para r_2

$$r_2 = \gamma_2 r_1 + c_0 \pm 2\sqrt{\gamma_2 r_1 c_0}.$$

Que se sustituye en (4.11)

$$\gamma_2 r_1 + c_0 > \gamma_2 r_1 + c_0 \pm 2\sqrt{\gamma_2 r_1 c_0} > \gamma_2 r_1 - c_0,$$

reduciendo la inecuación se llega a $0 > \pm 2\sqrt{\gamma_2 r_1 c_0} > -2c_0$, descartando así la raíz cuadrada positiva. En consecuencia, al considerar la raíz negativa se deduce que $c_0(c_0 - \gamma_2 r_1) > 0$, lo que permite definir $r_0 = c_0 - \gamma_2 r_1$. Reescribiendo (4.12)

$$disc = (r_2 - r_0 - 2c_0)^2 - 4c_0(c_0 - r_0),$$

de donde se despeja r_2

$$r_2 = 2c_0 - r_0 - 2\sqrt{c_0(c_0 - r_0)}.$$

Reescribiendo (4.9) y (4.10)

$$e_2^T p_1 = \frac{\sqrt{c_0(c_0 - r_0)}}{k_2},$$

$$e_2^T p_1 + \mu = \frac{\sqrt{c_0(c_0 - r_0)} - c_0}{k_2}.$$

Renombramos $e_2^T Q_1 + \mu = q_0$ y reescribimos en términos de c_0 y r_0 , sea entonces

$$q_0 = -\frac{2c_0\alpha_1 + k_2(r_0 - c_0)\alpha_2 + k_2(r_0 - c_0)\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1}}{2k_2\alpha_1} > 0,$$

de donde se deduce la forma de α_1

$$\alpha_1 = \frac{k_2(c_0 - r_0)((k_2q_0 + c_0)\alpha_2 + k_2(c_0 - r_0))}{(k_2q_0 + c_0)^2} > 0,$$

Debido a que el denominador de α_1 es positivo, lo que significa que su numerador también es positivo. Definimos entonces el parámetro $\alpha_0 = (k_2q_0 + c_0)\alpha_2 + k_2(c_0 - r_0) > 0$ de donde se despeja α_2

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0 - k_2(c_0 - r_0)}{(k_2q_0 + c_0)},$$

nótese que α_2 es un parámetro libre, es decir, que puede ser positivo o negativo, sustituyendo esta expresión y despejando β_2 de $k_2 = \beta_2 - \alpha_2$

$$\beta_2 = k_2 + \alpha_2 = \frac{\alpha_0 + k_2(k_2q_0 + r_0)}{c_0 + q_0\beta_0} > 0.$$

por las condiciones establecidas para la configuración con un único pseudo-equilibrio se llega a que $\beta_2 > 0$, por lo que la órbita sólo se dará cuando q_2 sea inestable.

2. Caso con dos pseudo-equilibrios

Supongamos que existen dos pseudo-equilibrios sobre Σ_s , por lo que se debe cumplir que

$$disc := (r_2 - \gamma_2 r_1 + k_2 \mu)^2 + 4k_2 \gamma_2 r_1 \mu = a_0, \quad \text{con } a_0 > 0 \quad (4.13)$$

Consideremos $k_2 \mu = -c_0$ con $c_0 > 0$, entonces de (4.5) sabemos que las ordenadas de los pseudo-equilibrios estarán dadas por

$$e_2^T p_1 = \frac{-(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0) - \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 c_0}}{2k_2} > 0, \quad (4.14)$$

$$e_2^T p_2 = \frac{-(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0) + \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 c_0}}{2k_2} > 0. \quad (4.15)$$

Las configuraciones de las figuras 4.15, exigen que $e_2^T Q_1 > -\mu > e_2^T p_2 > e_2^T p_1 > 0$, de esta inecuación se obtienen las sumas

$$e_2^T p_1 + \mu = \frac{-r_2 + \gamma_2 r_1 - c_0 - \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 c_0}}{2k_2} < 0, \quad (4.16)$$

$$e_2^T p_2 + \mu = \frac{-r_2 + \gamma_2 r_1 - c_0 + \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 c_0}}{2k_2} < 0, \quad (4.17)$$

$$e_2^T Q_1 + \mu = \frac{\gamma_2 r_1(\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1}) + 2\alpha_1 \mu}{2\alpha_1} > 0.$$

De (4.14) y (4.16) se deduce que

$$-r_2 + \gamma_2 r_1 + c_0 > \sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 c_0} > -r_2 + \gamma_2 r_1 - c_0,$$

de esta inecuación se concluye que $-r_2 + \gamma_2 r_1 + c_0 > 0$, análogamente de (4.15) y (4.17) se deduce que

$$-r_2 + \gamma_2 r_1 + c_0 > -\sqrt{(r_2 - \gamma_2 r_1 - c_0)^2 - 4\gamma_2 r_1 c_0} > -r_2 + \gamma_2 r_1 - c_0,$$

de donde se deduce que $-r_2 + \gamma_2 r_1 - c_0 < 0$, entonces podemos decir que

$$\gamma_2 r_1 + c_0 > r_2 > \gamma_2 r_1 - c_0. \quad (4.18)$$

Se reescribe (4.13) en términos de c_0 y se obtiene una expresión para r_2

$$r_2 = \gamma_2 r_1 + c_0 \pm \sqrt{a_0 + 4\gamma_2 r_1 c_0},$$

que se sustituye en (4.18)

$$\gamma_2 r_1 + c_0 > \gamma_2 r_1 + c_0 \pm \sqrt{a_0 + 4\gamma_2 r_1 c_0} > \gamma_2 r_1 - c_0,$$

que se reduce a $0 > \pm \sqrt{a_0 + 4\gamma_2 r_1 c_0} > -2c_0$, de donde se puede descartar la raíz cuadrada positiva, en consecuencia, al considerar la raíz negativa deduce la expresión

$$4c_0(c_0 - \gamma_2 r_1) > a_0,$$

lo que permite definir $r_0 = c_0 - \gamma_2 r_1 > 0$. Definido $r_0 > 0$ se hace un análisis análogo a 1 y se llegan a las expresiones para α_2 y β_2

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0 - k_2(c_0 - r_0)}{(k_2 q_0 + c_0)},$$

nótese que α_2 es un parámetro libre, es decir, que puede ser positivo o negativo, sustituyendo esta expresión y despejando β_2 de $k_2 = \beta_2 - \alpha_2$

$$\beta_2 = k_2 + \alpha_2 = \frac{\alpha_0 + k_2(k_2 q_0 + r_0)}{c_0 + q_0 \beta_0} > 0.$$

Por lo que, si existen pseudo-equilibrios sobre Σ_s , el parámetro β_2 debe ser positivo para que se cumpla $e_2^T Q_1 > -\mu$, por lo que las configuraciones de la figura 4.15 no son factibles.

□

4.1.4. Conexiones directas equilibrio - pseudo-equilibrios

Las conexiones directas entre un punto de equilibrio y un pseudo-equilibrio son un tipo particular de conexión que no queda incluida en la definición presentada a inicios del capítulo para las órbitas heteroclínicas simples. A pesar de conectar dos puntos de singularidad del sistema, estas no involucran cruces sobre la recta de conmutación Σ , por lo que requieren su propia clasificación.

En este caso la clasificación dependerá del signo de μ así como del número de pseudo-equilibrios admisibles sobre Σ . Se presentan a continuación las configuraciones posibles para cada caso

Conexiones directas para $\mu < 0$

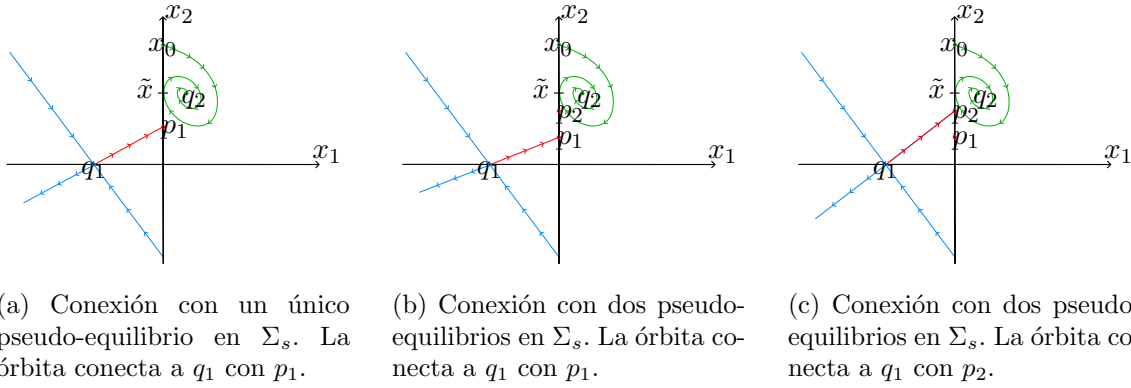


Figura 4.16: Configuraciones para una conexión heteroclínica directa de q_1 a p_i con q_2 estable y $\mu < 0$.

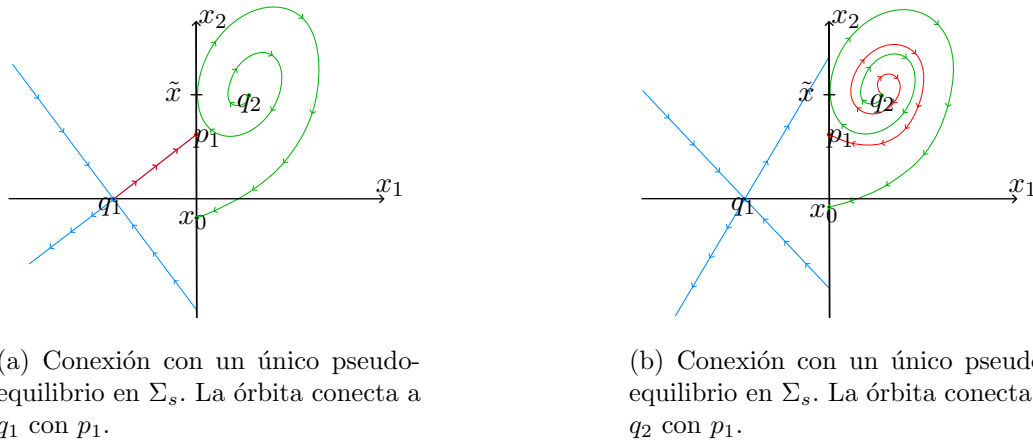


Figura 4.17: Configuraciones para una conexión heteroclínica directa de q_i a p_1 con q_2 estable y $\mu < 0$.

Conexiones directas para $\mu > 0$

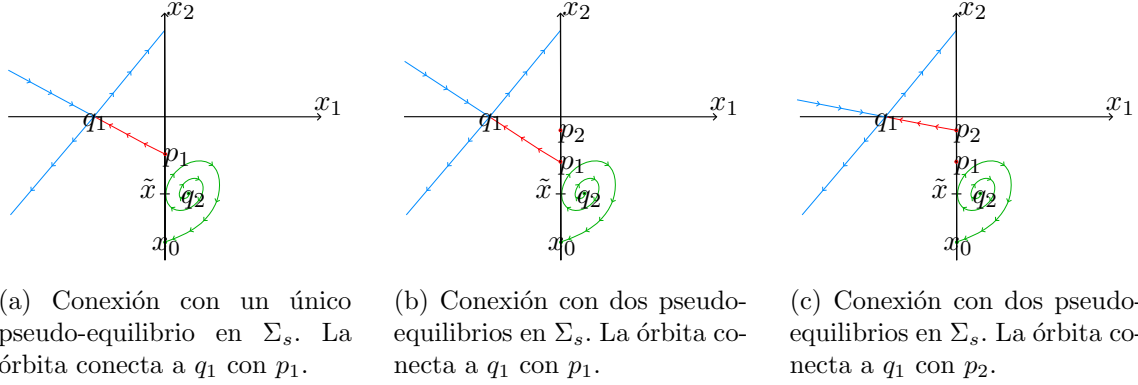


Figura 4.18: Configuraciones para una conexión heteroclínica directa de q_1 a p_i con q_2 estable y $\mu > 0$.

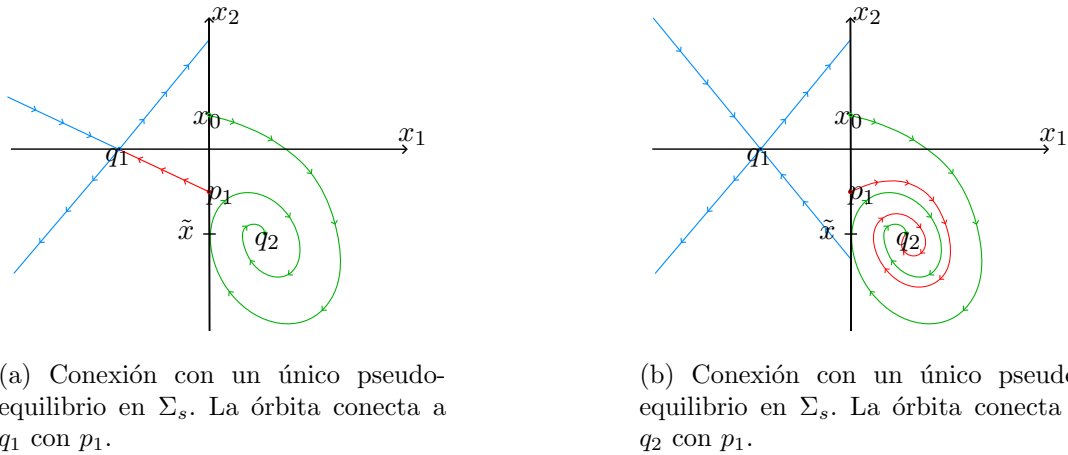


Figura 4.19: Configuraciones para una conexión heteroclínica directa de q_i a p_1 con q_2 estable y $\mu > 0$.

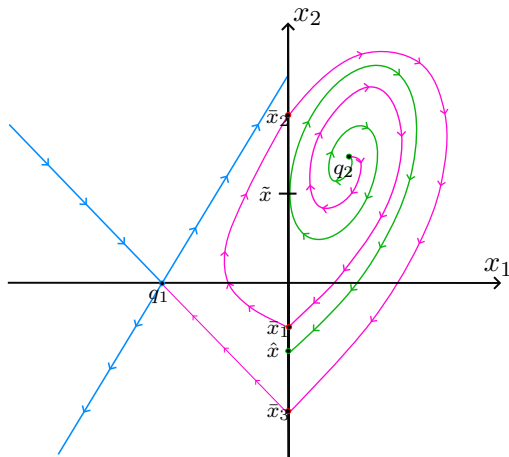
Como se menciona al inicio del capítulo, las órbitas heteroclínicas se distinguen en tres tipos para este trabajo, siendo los comportamientos simple y directo los presentados hasta el momento, esto nos lleva a explorar la última clasificación que nos ayudara a tener una mejor comprensión de los comportamientos de las órbitas heteroclínicas en los sistemas Filippov en $\mathbb{R}^2$.

4.2. Órbita heteroclínica no-simple

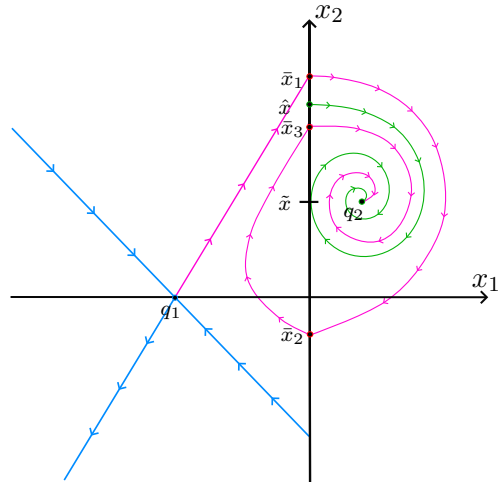
Definición 9. En un sistema no suave de ecuaciones diremos que una órbita heteroclínica es no-simple si conecta dos puntos de singularidad con más de dos cruces en la recta Σ de conmutación.

4.2.1. Conexión equilibrio - equilibrio

Análogo a la conexión equilibrio-equilibrio en la órbita heteroclínica no-simple, esta conexión también evita el segmento Σ_s , bajo las condiciones adecuadas existe una trayectoria de f^+ "dentro" de $T_c(t)$ que genera una conexión con múltiples cruces sobre Σ entre q_1 y q_2 . A continuación se describen las condiciones para que estas configuraciones sucedan.

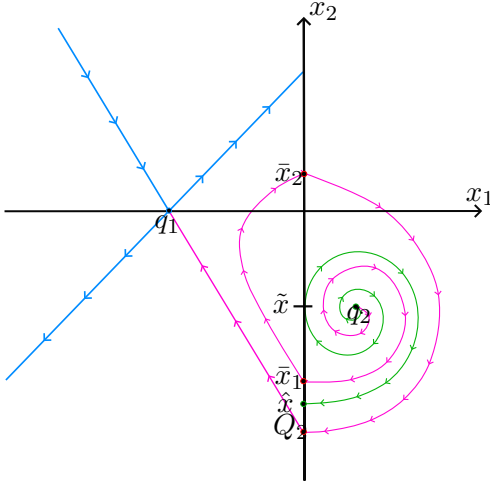


(a) Conexión heteroclínica no-simple con 3 cruces, con q_2 inestable.

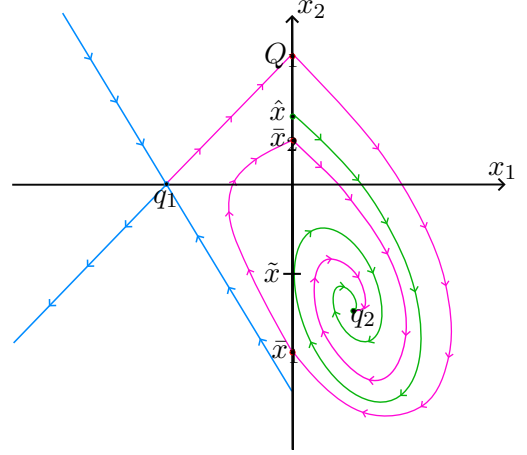


(b) Conexión heteroclínica no-simple con 3 cruces, con q_2 estable.

Figura 4.20: Configuraciones para una órbita heteroclínica no-simple con $\mu < 0$.



(a) Conexión heteroclínica no-simple con 3 cruces, con q_2 inestable.



(b) Conexión heteroclínica no-simple con 3 cruces, con q_2 inestable.

Figura 4.21: Configuraciones para una órbita heteroclínica no-simple con $\mu > 0$.

Para las conexiones de las figuras 4.20 y 4.21 es necesario que las alturas $\tilde{x}$ y $\hat{x}$ sean menores que la altura de Q_1 pero mayores que la altura de Q_2 , además $\hat{x}$ debe estar en un segmento de cruce de Σ , es decir, que se cumpla una de las siguientes condiciones

- $e_2^T Q_1 > e_2^T \tilde{x} > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$ para $\mu < 0, \beta_2 > 0$ y $\hat{x} \in \Sigma_c$ para x_2 negativo.
- $e_2^T Q_1 > e_2^T \tilde{x} > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$ para $\mu < 0, \beta_2 < 0$ y $\hat{x} \in \Sigma_c$ para x_2 positivo.
- $e_2^T Q_1 > e_2^T \hat{x} > e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_2$ para $\mu > 0, \beta_2 < 0$ y $\hat{x} \in \Sigma_c$ para x_2 negativo.
- $e_2^T Q_1 > e_2^T \hat{x} > e_2^T \tilde{x} > e_2^T Q_2$ para $\mu > 0, \beta_2 > 0$ y $\hat{x} \in \Sigma_c$ para x_2 positivo.

4.2.2. Conexión equilibrio - pseudo-equilibrio

En este caso la órbita heteroclínica conecta un pseudo-equilibrio p_i sobre Σ_s con el equilibrio q_1 con múltiples cruces sobre la recta de conmutación.

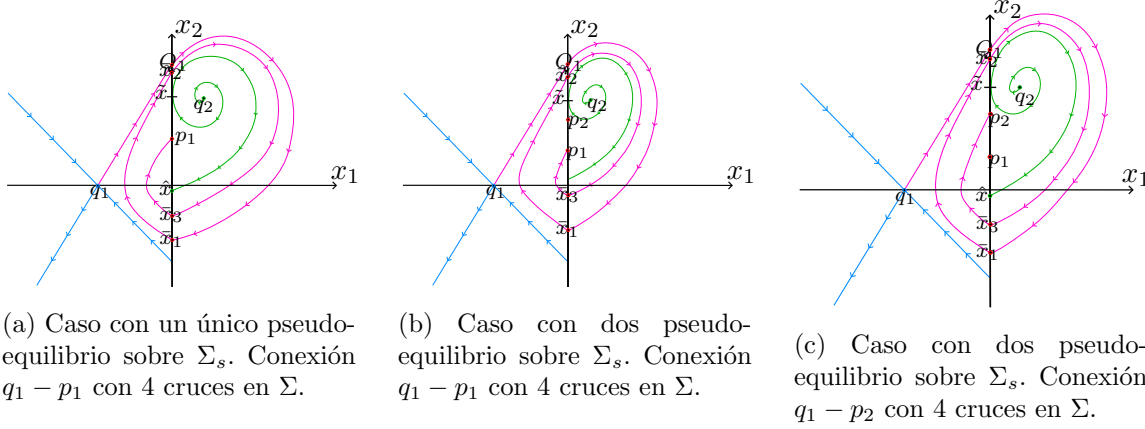


Figura 4.22: Configuraciones para órbitas heteroclínicas no simples con $\mu < 0$.

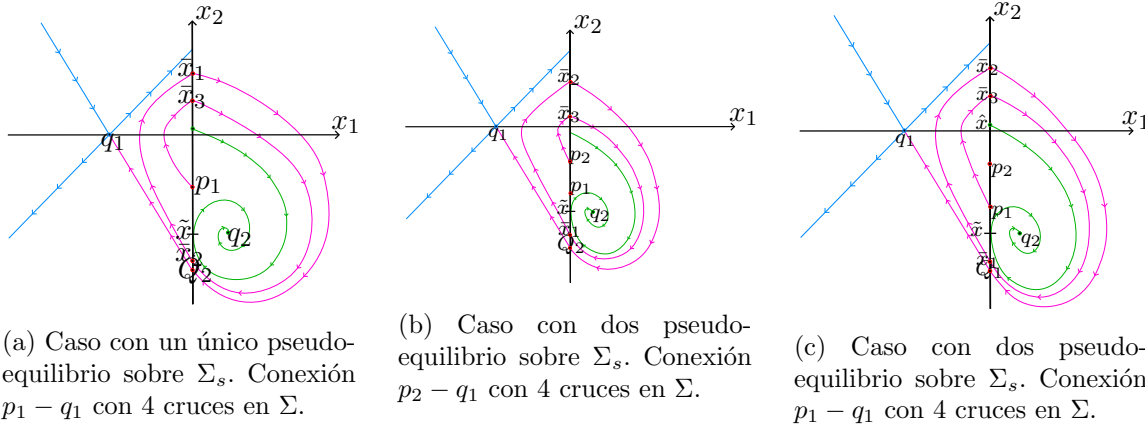


Figura 4.23: Configuraciones para órbitas heteroclínicas no simples con $\mu < 0$.

Para las conexiones de las figuras 4.22 y 4.23 es necesario que las alturas $\tilde{x}$ y $\hat{x}$ sean menores que la altura de Q_1 pero mayores que la altura de Q_2 , además $\hat{x}$ debe estar en un segmento de cruce de Σ , es decir, que se cumpla una de las siguientes condiciones

- $e_2^T Q_1 > e_2^T \tilde{x}_i > e_2^T \hat{x} > e_2^T Q_2$ para $\mu < 0, \beta_2 > 0$ y $\hat{x} \in \Sigma_c$ para x_2 negativo.
- $e_2^T Q_1 > e_2^T \hat{x} > e_2^T \tilde{x}_i > e_2^T Q_2$ para $\mu > 0, \beta_2 > 0$ y $\hat{x} \in \Sigma_c$ para x_2 positivo.

Ejemplo 10. *Se simulará el escenario de la figura 4.20a*

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.5 & 0.8 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 3.2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.7 & -0.4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.4) tenemos que los equilibrios del sistema son $q_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} 0.588 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, de (2.2) y (2.3), los puntos $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.6 \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = (0, 0.5)$.

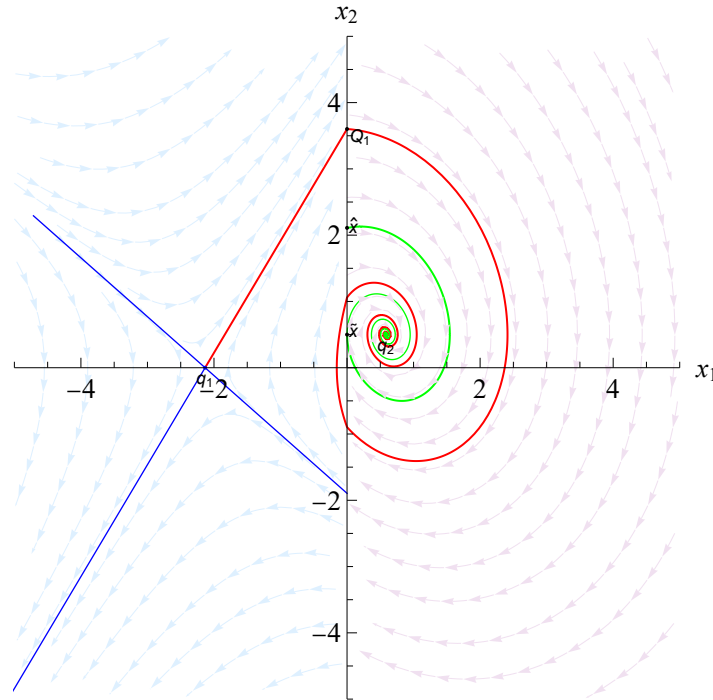


Figura 4.24: Simulación del sistema 4.19.

Por continuidad de soluciones existe una trayectoria de f^+ que sale de Q_1 y va a dar a q_2 siguiendo el comportamiento mostrado en la figura 4.20a.

4.3. Conexiones múltiples

En esta sección se presentan configuraciones en las que se definen órbitas heteroclínicas de distintos tipos.

Para esta sección es necesario definir la conexión heteroclínica directa.

Definición 10. *En un sistema Filippov de ecuaciones diremos que una órbita heteroclínica es directa si conecta dos puntos de singularidad sin cruzar la recta Σ de conmutación.*

Notemos que esta órbita es exclusiva de las conexiones equilibrio con pseudo-equilibrio.

4.3.1. Conexiones directas

Se trata de diferentes conexiones directas, presentadas en la sección 4.1.4, que aparecen simultáneamente en un mismo sistema.

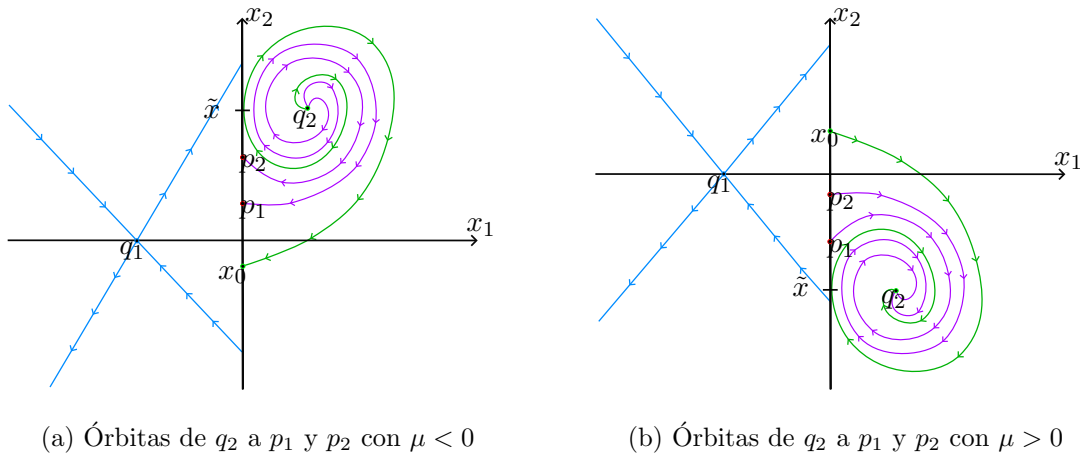
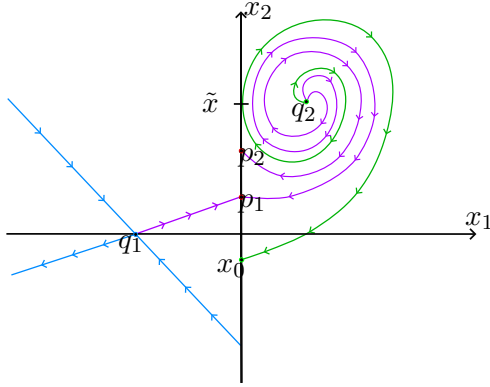
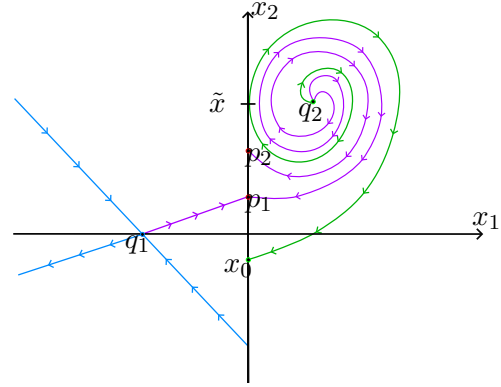
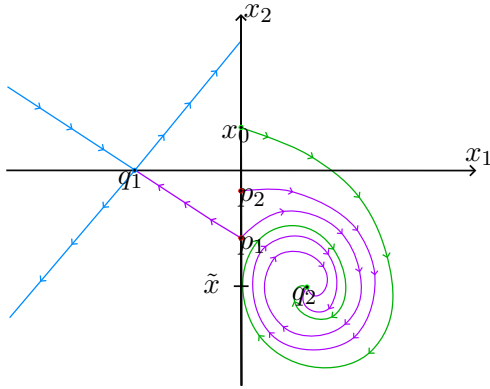
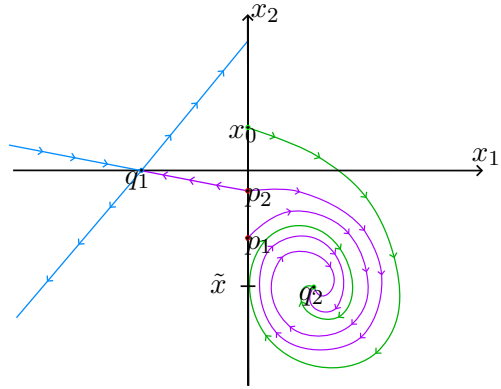


Figura 4.25: Configuraciones con dos pseudo-equilibrios en Σ_s .

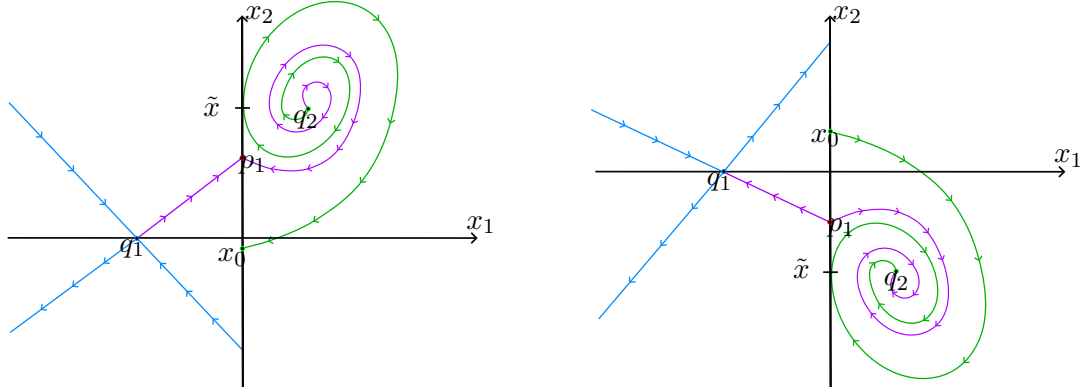
En los casos presentados en la figura 4.25 el segmento deslizante esta delimitado dentro de las intersecciones de la silla con Σ .

(a) Órbitas de q_1 a p_1 con $\mu < 0$ (b) Órbitas de q_1 a p_2 con $\mu < 0$ Figura 4.26: Configuraciones con dos pseudo-equilibrios en Σ_s .

En la figura 4.26 se presentan tres conexiones simultaneas, que conectan a q_2 con cada pseudo-equilibrio sobre Σ_s , siendo el diferenciador la conexión de q_1 con p_i .

(a) Órbitas de q_1 a p_1 con $\mu > 0$ (b) Órbitas de q_1 a p_2 con $\mu > 0$ Figura 4.27: Configuraciones con dos pseudo-equilibrios en Σ_s .

En la figura 4.27 se presentan tres conexiones simultaneas, que conectan a q_2 con cada pseudo-equilibrio sobre Σ_s , siendo el diferenciador la conexión de q_1 con p_i .

(a) Órbitas de q_1 y q_2 a p_1 con $\mu < 0$ (b) Órbitas de q_1 y q_2 a p_1 con $\mu > 0$

La figura 4.28 presenta las conexiones múltiples posibles entre los equilibrios de cada campo y un pseudo-equilibrio.

Las configuraciones mostradas en las figuras 4.26, 4.27 y 4.28 pueden presentarse cuando alguno de los espacios invariantes de q_1 interseca el segmento deslizante Σ_s , en particular en el punto p_i , de manera equivalente, cuando se cumpla la condición $e_1^T \tilde{x} > e_1^T Q_1$ cuando $\mu < 0$, con $Q_1 = p_i$ para $i = 1, 2$, o bien si $e_1^T Q_2 > e_1^T \tilde{x}$ cuando $\mu > 0$, con $Q_2 = p_i$ para $i = 1, 2$.

Figura 4.28: Configuraciones con dos pseudo-equilibrios en Σ_s .

Conexiones simples y directas

Estas configuraciones cumplen con las condiciones que se dieron para las órbitas heteroclínicas simples que se dieron en la sección 4.1.2.

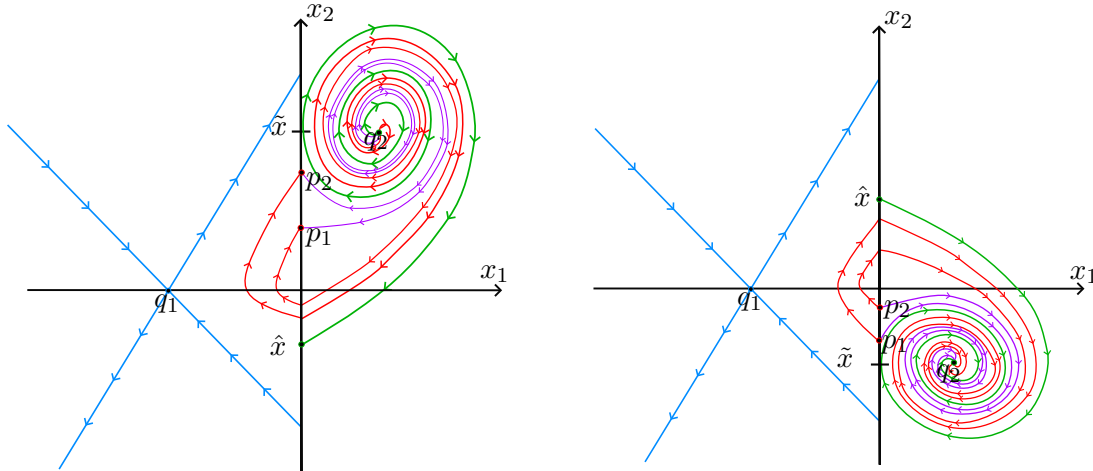
(a) Órbitas de q_2 a p_1 y p_2 con $\mu < 0$ (b) Órbitas de q_2 a p_1 y p_2 con $\mu > 0$

Figura 4.29: Configuraciones con dos pseudo-equilibrios en Σ_s .

Debido a la continuidad de soluciones, las configuraciones de la figura 4.9 pueden darse de manera simultanea junto con las órbitas que conectan de forma directa a q_2, p_1 y p_2 , de igual forma con la figura 4.8.

Conexiones no-simples y directas

Estas configuraciones cumplen con las condiciones que se dieron para las órbitas heteroclínicas no-simples que se dieron en la sección 4.3.2.

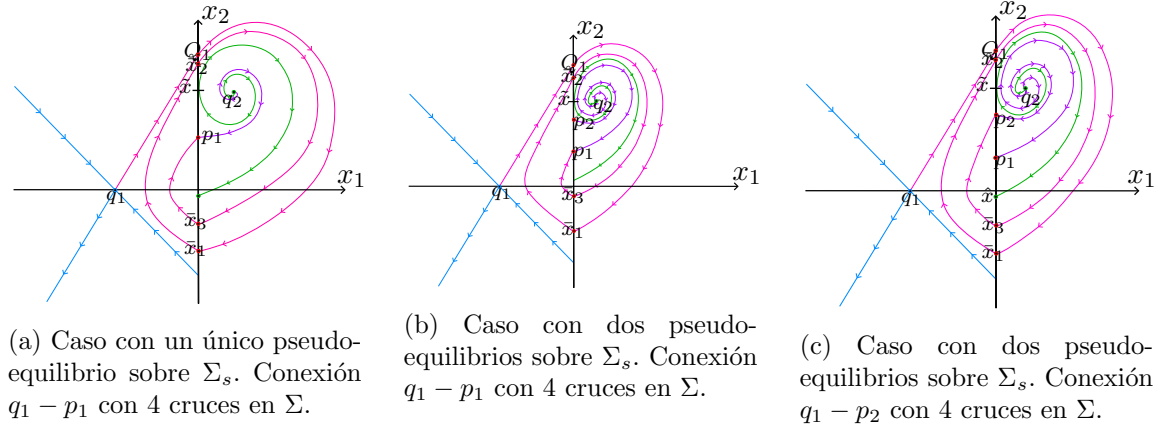


Figura 4.30: Configuraciones con $\mu < 0$ y $\beta_2 > 0$.

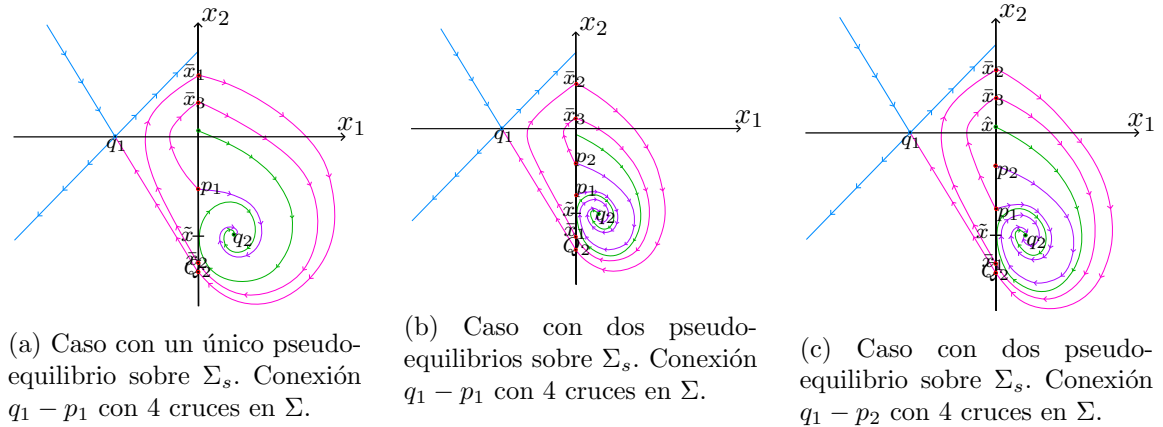


Figura 4.31: Configuraciones con $\mu > 0$ y $\beta_2 < 0$.

Debido a la continuidad de soluciones, las configuraciones de las figuras 4.22 y 4.23 pueden darse de manera simultanea junto con las órbitas que conectan de forma directa a q_2, p_1 y p_2 . Este análisis permitió identificar y clasificar distintos tipos de órbitas heteroclínicas en sistemas Filippov en el plano, también se identificaron órbitas que no son factibles dadas las condiciones del sistema a pesar de que pueden dibujarse.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se estudió la dinámica global de un sistema Filippov en $\mathbb{R}^2$, centrándose en la existencia y clasificación de órbitas homoclínicas y heteroclínicas. A partir de la forma normal fue posible identificar y analizar conexiones entre parejas de puntos de singularidad, para esto se consideraron trayectorias de cruce y segmentos de deslizamiento sobre la recta de conmutación.

Uno de los principales resultados de este trabajo es el registro de las condiciones bajo las cuales existirán órbitas de cierto tipo, mostrando cómo la presencia de pseudo-equilibrios y la dinámica sobre Σ_s modifican el retrato fase del sistema. También se observó que estas órbitas pueden involucrar combinaciones de trayectorias suaves (soluciones del campo f^- o f^+) y deslizantes (segmentos de Σ_s), dando lugar a configuraciones que no tienen equivalentes en sistemas suaves.

Otro resultado relevante se dió en el análisis de las órbitas heteroclínicas, durante su clasificación en distintos tipos de conexiones, como lo son conexiones simples, no simples y directas, se demostró que no todas las configuraciones geoméricamente plausibles son dinámicamente realizables, lo cual permitió descartar ciertos escenarios y delimitar con mayor precisión el conjunto de comportamientos posibles del sistema.

En conclusión, los resultados obtenidos demuestran la relevancia de la recta de conmutación y la dinámica deslizante en la organización global del sistema, facilitando o impidiendo la existencia de conexiones globales.

Bibliografía

- [1] Castillo J. Formas Normales y Bifurcaciones de Ciclos Límite en Sistemas Lineales por Pedazos Discontinuos. Tesis Doctoral, (2017)
- [2] Castillo J., Llibre J. and Verduzco F., *The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems*. Nonlinear Dynamics, 90 (2017), pp. 1829-1840.
- [3] di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R. and Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer, (2008).
- [4] Filippov A.F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).
- [5] Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S. and Gragnani A. *One parameter bifurcations in planar Filippov systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 13 (2003), pp. 2157-2188.