



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Generalizaciones de Grupos Kleinianos: Un
Estudio Comparativo a través de Espacios
Cocientes

T E S I S

Para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Sebastian Garate Monteverde

Director de tesis: Dr. Gerardo Mauricio Toledo Acosta

Hermosillo, Sonora, México, 29 de abril de 2026

SINODALES

Dr. Jesus Francisco Espinoza Fierro

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Genaro Hernandez Mada

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Ángel Cano Cordero

Instituto de Matemáticas, Cuernavaca, México

Para Puffy...

Agradecimientos

Con la finalización de este proyecto, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, con su apoyo, hicieron posible la conclusión de este trabajo.

En primer lugar, quiero agradecer a mi director de tesis, Mauricio Toledo, por haber aceptado trabajar conmigo. Fue un verdadero gusto colaborar con él; su dedicación y paciencia al guiarme en la elaboración de esta tesis fueron fundamentales para llegar a buen puerto.

A mis compañeros de clase, principalmente a Saúl, Óscar, Hugo Cota, Ángel y Kevin, quienes me apoyaron en tareas y proyectos a lo largo de todo mi recorrido en la carrera de Matemáticas. Su ayuda y compañerismo hicieron que este camino fuera más llevadero y enriquecedor.

También quiero agradecer a mis profesores, especialmente a aquellos que me enseñaron álgebra moderna: Carlos Robles, Genaro y Ramos. Sus formas de enseñar fueron clave para enamorarme de las matemáticas puras y despertar en mí una pasión que hoy perdura.

No puedo dejar de lado a mi familia: mis padres y hermanos, quienes siempre estuvieron ahí cuando los necesité. Su gran apoyo hizo que esta travesía por la universidad fuera más ligera, permitiéndome enfocarme únicamente en mis estudios sin mayores preocupaciones.

A mi gato Simba, que, aunque siempre encontraba la manera de estorbar mientras hacía mis tareas, estuvo a mi lado en todo momento y me brindó ese apoyo moral que a veces necesitaba para seguir adelante. Y a mi perrita Puffy, que aunque estuvo lejos de mí durante gran parte de este proceso, cada vez que volvía a casa en vacaciones disfrutaba de su presencia y de esos caprichos que siempre pedía con su adorable mirada.

Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	III
Introducción	1
1. Teoría clásica	3
1.1. Superficies de Riemann	3
1.1.1. Esfera de Riemann	6
1.1.2. Teorema de uniformización	9
1.2. Transformaciones de Möbius	10
1.2.1. Clasificación de elementos de Möbius	16
1.3. Grupos Kleinianos	21
1.3.1. Ejemplos de grupos discretos y Kleinianos	25
1.3.2. Conjunto Límite	26
1.3.3. Elementos de torsión	28
1.4. Cociente	30
1.4.1. Ejemplos de cocientes	31
1.4.2. Superficie de Riemann marcada	35
2. Teoría de grupos Kleinianos n-dimensionales	38
2.1. Espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$	38
2.2. Grupo de reflexiones	40
2.2.1. Clasificación de las transformaciones de Möbius n-dim	43
2.3. Extensión de Poincaré	44
2.3.1. Espacio Hiperbólico	45
2.4. Región de discontinuidad y conjunto límite	48
2.5. Grupos discretos y Kleinianos	50
2.5.1. Ejemplos de grupos Kleinianos	51
2.5.2. Propiedades de grupos discretos y Kleinianos	52
2.6. Cociente	55
2.6.1. Región fundamental	57
2.7. Variedades	60
2.7.1. (X,G)-variedad	60

2.7.2. Forma espacial	64
2.7.3. Ejemplos de formas espaciales Clifford-Klein	67
2.8. Teorema de geometrización de Thurston	72
3. Teoría de grupos Kleinianos complejos	74
3.1. Espacio proyectivo complejo	74
3.2. Grupo de biholomorfismos	77
3.2.1. Clasificación de los elementos biholomorfos	78
3.3. Conjunto límite	81
3.3.1. Subclasificación de $\mathbb{CP}^2$	84
3.4. Grupos Kleinianos complejos	90
3.4.1. Ejemplos de grupos Kleinianos complejos	91
3.4.2. propiedades de grupos Kleinianos complejos	92
3.5. Variedades Complejas	94
3.5.1. Ejemplos de variedades complejas	97
3.6. Clasificación de Kodaira	103
Conclusiones	105
Appendices	108
A. Cubrientes	108
Bibliografía	115

Introducción

La teoría de grupos Kleinianos tiene sus orígenes en 1880 por Henri Poincaré. Dicha teoría estudia el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ como grupo de automorfismos biholomorfos y conformales de la esfera de Riemann; más en específico, se estudian subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{C})$ que tengan una región de discontinuidad no vacía en la esfera de Riemann. A los grupos que cumplen con lo anterior se les conoce como grupos Kleinianos y tienen una importancia en distintas áreas de las matemáticas, particularmente en la construcción de superficies de Riemann y clasificando estas mismas por el teorema de uniformización. A dicha teoría de grupos Kleinianos se le conoce como teoría clásica; de esta teoría surgen dos generalizaciones.

Una de las generalizaciones proviene de quedarse con la propiedad de que la esfera de Riemann es homeomorfa a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$; entonces se generaliza para las esferas unitarias de $\mathbb{R}^n$, pero con esto se pierde la propiedad de que el grupo de automorfismos sea biholomorfo y se queda solo con la propiedad de ser conformal. Dicha propiedad conformal se generaliza también para estudiar los automorfismos anticonformales. Con esto se introduce la teoría conformal de grupos Kleinianos la cual se puede utilizar para estudiar variedades diferenciables y orbifolios, aunque se puede especializar para estudiar variedades hiperbólicas, sobre todo 3-variedades hiperbólicas.

La segunda generalización es la más nueva y empieza su estudio aproximadamente en 1990. Esta generalización trata de rescatar las propiedades de la estructura compleja que se tenía en el caso clásico. Con esto se enfoca en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ y en estudiar subgrupos discretos de $PSL(n+1, \mathbb{C})$. Esta teoría está aún en etapa temprana y no se tiene mucha información para el caso general; donde está más estudiado es para el caso del plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$. Esta teoría se le conoce como teoría compleja de grupos Kleinianos y, a pesar de no tenerse mucha información de esta teoría, sí se tiene lo suficiente como para compararla con la teoría conformal y observar sus similitudes y diferencias.

En este monográfico se pretende analizar y contrastar las dos generalizaciones de los grupos Kleinianos, partiendo de los fundamentos establecidos por la teoría clásica y comparándolas de manera sistemática en distintos apartados a lo largo del texto. El desarrollo del escrito abordará cada generalización, presentándola como una construcción natural y orgánica, cuya estructura y motivación surgen directamente de la teoría clásica como punto de partida. En el proceso de cada construcción, se detallarán de forma precisa los elementos esenciales que la definen: en primer lugar, el espacio base sobre el cual se trabaja, que generaliza la esfera de Riemann; a continuación, el grupo de automorfismos que actúa sobre dicho espacio, extendiendo la noción de transformaciones de Möbius; y, finalmente, la definición correspondiente de grupos Kleinianos, junto con sus regiones de discontinuidad y sus conjuntos límite, objetos centrales que determinan la dinámica de la acción del grupo. El análisis culminará mostrando cómo es posible construir variedades topológicas que admiten estructuras adicionales (estructuras geométricas o estructuras complejas).

Capítulo 1

Teoría clásica

A diferencia de las generalizaciones que se van a construir en los capítulos 2 y 3, la teoría clásica se empezará explicando lo que es una superficie de Riemann y, utilizando el teorema de uniformización (que clasifica las superficies de Riemann), explicar las bases de la teoría clásica y saber hacia dónde se quiere llegar con dicha teoría.

1.1. Superficies de Riemann

Definición 1.1.0.1. Una **superficie** real es un espacio topológico Hausdorff X tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1.0.2. Sea X una superficie. Una **carta compleja** en X es un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de un abierto $U \subset X$ a un abierto $V \subset \mathbb{C}$.

Definición 1.1.0.3. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ con $i = 1, 2$ son **compatibles holomorfas** si:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \quad (1.1)$$

es holomorfa.

Definición 1.1.0.4. Un **atlas complejo** en X es un sistema de cartas complejas

$$\{(U_i | \varphi_i : U_i \rightarrow V_i)\}_{i \in I} \quad (1.2)$$

compatibles holomorfas entre ellas y tales que:

$$\cup_{i \in I} U_i = X \quad (1.3)$$

Proposición 1.1.0.1. La compatibilidad holomorfa entre atlas complejos es una relación de equivalencia.

Demostración. Sean $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, $B = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ y $C = \{(W_k, \phi_k)\}_{k \in K}$ atlas complejos de una superficie X .

1) Es claro que sí $A \sim A$, pues para cualquiera dos cartas U, U' en A . U y U' son compatibles holomorfas, esto por pertenecer al mismo atlas.

2) Si A es compatible holomorfa con B , es decir, $A \sim B$. Entonces cada carta de A es compatible holomorfa con cada carta de B , entonces cada carta de B es compatible con cada carta de A . Por tanto, $B \sim A$.

3) Supóngase que $A \sim B$ y $B \sim C$. Sea $(U, \varphi) \in A$, $(V_j, \psi_j) \in B$ y $(W, \phi) \in C$ con $j \in J$. Supóngase sin pérdida de generalidad que $U \cap V_j \cap W \neq \emptyset$. Como $A \sim B$ y $U \cap V_j \cap W \subset U \cap V_j$, entonces $\psi_j \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V_j \cap W) \rightarrow \psi_j(U \cap V_j \cap W)$ es holomorfa $\forall j \in J$ y como $B \sim C$, $\phi \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U \cap V_j \cap W) \rightarrow \phi(U \cap V_j \cap W)$ es holomorfa $\forall j \in J$. Se componen $\psi_j \circ \varphi^{-1}$ y $\phi \circ \psi_j^{-1}$ queda que $\phi \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ \varphi^{-1} = \phi \circ \varphi^{-1}$ y esto deja que $\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V_j \cap W) \rightarrow \phi(U \cap V_j \cap W)$ es holomorfa $\forall j \in J$ pues la composición de funciones holomorfas es holomorfa. Entonces $\phi \circ \varphi^{-1} : \cup_{j \in J} \varphi(U \cap V_j \cap W) \rightarrow \phi(U \cap V_j \cap W)$ es holomorfa y esto solo es $\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \rightarrow \phi(U \cap W)$ es holomorfa y como las cartas (U, φ) y (W, ϕ) se tomaron de manera arbitraria, se concluye que $A \sim C$. ■

Definición 1.1.0.5. Una **estructura compleja** es una superficie con una clase de equivalencia de atlas bajo la relación de equivalencia anterior.

Definición 1.1.0.6. Una **superficie de Riemann** es un par (X, Σ) donde X es una superficie conexa y Σ es una estructura compleja.

Teniendo la definición de superficie de Riemann se dará la definición de holomorfismo de una función que va de una superficie de Riemann a otra.

Definición 1.1.0.7. Sean X, Y superficies de Riemann. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es **holomorfa** si, para cada par de cartas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en X y Y respectivamente tal que $f(U_1) \subset U_2$ la función

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

es holomorfa en el sentido usual.

La función f es un **biholomorfismo** si f es biyectiva y con inversa holomorfa. Si existe un biholomorfismo entre dos superficies de Riemann S y R , se dice que S y R son biholomorfas o **holomorficamente equivalentes**.

Definición 1.1.0.8. Sea X una superficie de Riemann y $U \subset X$ abierto. Una función **meromorfa** en U es una función holomorfa $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$ donde $U' \subset U$ en un abierto tal que:

i) $U \setminus U'$ es un conjunto de puntos aislados.

ii) Para cada $x \in U \setminus U'$

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$$

Al conjunto $U \setminus U'$ se le llama polos.

Teorema 1.1.0.2. Sea X una superficie de Riemann

a) Si f es meromorfa en X y si definimos $f(p) = \infty$ para cada p polo de f , entonces

$f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es holomorfa.

b) Si $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es holomorfo entonces, una de las siguientes condiciones es cierta:

$$i) f \equiv \infty$$

ii) $f^{-1}(\infty)$ consiste en puntos aislados y $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa.

Teorema 1.1.0.3. *Toda función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa es racional.*

Las funciones meromorfas no serán muy relevantes para la teoría clásica, y su única utilidad (para su estudio en grupos Kleinianos) vendrá más adelante a la hora de hablar de transformaciones de Möbius.

1.1.1. Esfera de Riemann

Como ejemplo de una superficie de Riemann se tiene el plano complejo extendido, que viene siendo el plano complejo $\mathbb{C}$ junto un punto exterior $\infty \notin \mathbb{C}$ el cual se denota por:

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$$

Este espacio se puede visualizar con el modelo de la **esfera de Riemann**, el cual le termina dando el nombre a dicho espacio. Este modelo lo que busca es identificar a $\hat{\mathbb{C}}$ con la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

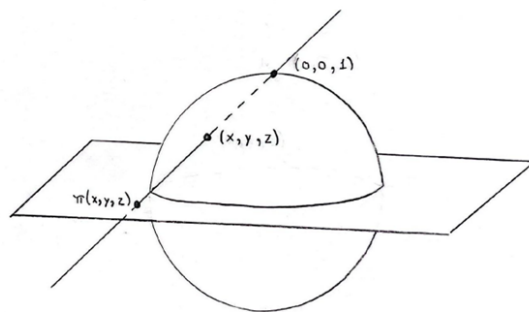


FIGURA 1.1: Proyección estereográfica

Sea π una proyección tal que $\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ y se define en el punto $(0, 0, 1)$ como $\pi(0, 0, 1) = \infty$. De esta manera, π es una función que manda a S^2 a $\hat{\mathbb{C}}$. Esta función está definida como:

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z}i$$

$$(0, 0, 1) \mapsto \infty$$

La inversión de la función π está dada como:

$$x + yi \mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

$$\infty \mapsto (0, 0, 1)$$

Proposición 1.1.1.1. *La proyección $\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo.*

Proposición 1.1.1.2. *La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann.*

Demostración. Sea $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, U será un abierto de $\hat{\mathbb{C}}$ si

- $\infty \notin U$ y $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto de $\mathbb{C}$ con la topología usual.
- $\infty \in U$ y $\hat{\mathbb{C}} \setminus U \subset \mathbb{C}$ es un compacto de $\mathbb{C}$.

El atlas complejo en $\mathbb{C}$ serán

$U_1 = \mathbb{C}$, con $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\varphi_1 = id$.

$U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, con $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\varphi_2(z) = 1/z$ si $z \in \mathbb{C}^*$ y como $\varphi_2(\infty) = 0$.

U_1, U_2 son abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$ y es claro que ambas cartas son holomorfas, falta ver que sean compatibles holomorfas.

$U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, notar que $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z$ y $z \mapsto 1/z$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$.

El caso de $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es análogo. Por lo tanto, las cartas son compatibles holomorfas y $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ es un atlas complejo en $\hat{\mathbb{C}}$. Concluyendo así que $\hat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann. ■

Para dar "otro" ejemplo de superficie de Riemann será necesario definir la siguiente relación de equivalencias.

Se define la relación de equivalencias $\sim$ en $\mathbb{C}^2$ de la siguiente manera: si $z, w \in \mathbb{C}^2$ entonces $z \sim w \Leftrightarrow$ existe un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $z = \lambda w$.

Definición 1.1.1.1. Sea $\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ el espacio cociente con la relación anterior. $\mathbb{CP}^1$ se le llama **línea proyectiva compleja**.

A $\mathbb{CP}^1$ también puede concebirse como el espacio de líneas complejas de $\mathbb{C}^2$ que pasan por el origen sin el origen. A los elementos de $\mathbb{CP}^1$ se denota por $[z : w]$ y se llaman coordenadas homogéneas. $[z : w]$ es la clase de equivalencias de $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Proposición 1.1.1.3. $\mathbb{CP}^1$ es una superficie de Riemann.

Demostración. Se definen las cartas holomorfas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) con

$$U_1 = \{[x : y] : y \neq 0\}, \varphi_1([x : y]) = x/y$$

$$U_2 = \{[x : y] : x \neq 0\}, \varphi_2([x : y]) = y/x$$

entonces $U_1 \cap U_2 = \{[x : y] : x \neq 0, y \neq 0\}$, entonces $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \{x/y : x, y \neq 0\} = \mathbb{C}^*$ y $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = \{y/x : x, y \neq 0\} = \mathbb{C}^*$

El mapeo de transición $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ es $z \mapsto 1/z$, pues para $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_1^{-1}(z) = [z : 1] \in U_1$ y $\varphi_2([z : 1]) = 1/z \in \mathbb{C}^*$, entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa, por lo tanto $\mathbb{CP}^1$ es una superficie de Riemann ■

Proposición 1.1.1.4. $\hat{\mathbb{C}}$ es biholomorfo a $\mathbb{CP}^1$

Demostración. Sea $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida como

$$f([x : y]) = \begin{cases} x/y, & y \neq 0 \\ \infty, & y = 0 \end{cases}$$

(Sobreyectivo) Sea $z \in \hat{\mathbb{C}}$, si $z \in \mathbb{C}$ se puede tomar a $z = z/1$, entonces $f([z : 1]) = z$ y si $z = \infty$, se toma $[1/0]$, entonces $f([1 : 0]) = \infty$

(Inyectiva) Sean $[z_1 : z_2], [w_1 : w_2] \in \mathbb{CP}^1$ tales que $[z_1 : z_2] \neq [w_1 : w_2]$. Entonces no existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha[z_1, z_2] = [w_1 : w_2]$ y se tiene que $f([z_1 : z_2]) = \frac{z_1}{z_2}$ y $f([w_1 : w_2]) = \frac{w_1}{w_2}$. Entonces $\frac{z_1}{z_2} \neq \frac{w_1}{w_2}$, pues si fueran iguales, existiría un $a \in \mathbb{C}$ tal que $w_1 = az_1$ y $w_2 = az_2$, y esto daría que $[z_1 : z_2] = [w_1 : w_2]$.

(Holomorfa) Se toma el atlas complejo $\{(\mathbb{C}, id), (\hat{\mathbb{C}}^*, g)\}$ de $\hat{\mathbb{C}}$, donde $g(z) = 1/z$ si $z \in \mathbb{C}^*$ y $g(\infty) = 0$, y el atlas complejo $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ de $\mathbb{CP}^1$. Es claro que $f(U_1) = \mathbb{C}$ y $f(U_2) = \mathbb{C}$.

$$(id \circ f \circ \varphi_1^{-1})(z) = id(f([z : 1])) = id(z/1) = z$$

$$(id \circ f \circ \varphi_2^{-1})(z) = id(f([1 : z])) = id(1/z) = 1/z$$

Ambas funciones son holomorfas en el sentido usual; por lo tanto, f es holomorfa.

(In. holomorfa) Se toman los mismos atlas complejos anteriores y la inversa de f es:

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} [z : 1] & \text{si } z \neq \infty \\ [1 : 0] & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

$$f^{-1}(\mathbb{C}) = U_1 \text{ y } f^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*) = U_2$$

$$(\varphi_1 \circ f^{-1} \circ id^{-1})(z) = \varphi_1(f^{-1}(z)) = \varphi_1([z : 1]) = z/1 = z$$

$$(\varphi_2 \circ f^{-1} \circ g^{-1})(z) = \varphi_2(f^{-1}(g^{-1}(z))) = z$$

Ambas son la identidad y es claro que son holomorfas en el sentido usual; entonces f^{-1} es holomorfa. ■

1.1.2. Teorema de uniformización

Para ir terminando esta parte de superficies de Riemann y empezar con la teoría de grupos Kleinianos se enunciará el siguiente teorema, que será un resultado que se tendrá presente al finalizar cada una de las generalizaciones de los capítulos 2 y 3.

Teorema 1.1.2.1. *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es holomorficamente equivalente a exactamente una de las siguientes:*

$$1) \hat{\mathbb{C}}$$

$$2) \mathbb{C}$$

$$3) \mathbb{D} \text{ o } \mathbb{H}$$

donde: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$

A las superficies de Riemann que son holomorficamente equivalentes a $\hat{\mathbb{C}}$ se les denomina elípticas, a las de $\mathbb{C}$ parabólicas y con $\mathbb{D}$ o $\mathbb{H}$ hiperbólicas. Además, cualquier superficie de Riemann X se puede obtener como el cociente

$$X = \hat{X}/\Gamma$$

donde $\hat{X}$ es simplemente conexo (cubierta universal) y $\Gamma \subset \text{Aut}(\hat{X})$, donde Γ es algún grupo de automorfismos de $\hat{X}$.

El teorema de uniformización es uno de los teoremas más importantes en superficies (o 2-variedades), el cual clasifica en 3 clases todas las superficies compactas y orientables (superficies de Riemann). Se puede notar que en el teorema no se explica mucho del grupo de automorfismos Γ ; este grupo debe cumplir ciertas condiciones, no puede ser un grupo de automorfismos cualquiera. El grupo Γ es de hecho un grupo Kleiniano, que más adelante se definirá qué es. Con esto en cuenta, se dará la teoría clásica para entender estos grupos Kleinianos y cómo su cociente resulta ser una superficie de Riemann.

1.2. Transformaciones de Möbius

Para empezar con la teoría clásica de grupos Kleinianos, se tomará la siguiente familia de transformaciones de $\mathbb{C}$ y se mirarán propiedades de dicha familia.

Definición 1.2.0.1. Una **transformación de Möbius** (TM) es una función $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $ad - bc \neq 0$

Es claro que dichas transformaciones no están definidas en $-d/c \in \mathbb{C}$. Esto provoca que las transformaciones de Möbius no necesariamente sean funciones holomorfas. Pero si se extiende la transformación de Möbius a $\hat{\mathbb{C}}$ como $f(-d/c) = \infty$ y a $f(\infty) = \frac{a}{c}$ entonces se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.0.1. *Las transformaciones de Möbius son funciones holomorfas en $\hat{\mathbb{C}}$.*

Dicho resultado se obtiene de utilizar las propiedades de funciones meromorfas mencionadas anteriormente.

Teorema 1.2.0.2. *Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función biholomorfa. Entonces f es una transformación de Möbius.*

Demostración. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función biholomorfa; entonces se puede ver a f como una función meromorfa $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$, donde $U' \subset \hat{\mathbb{C}}$, $U' = \hat{\mathbb{C}} \setminus P$, con P polos de f . Entonces f es racional, ie, existen polinomios complejos g, h tales que $g/h = f$. Supóngase sin pérdida de generalidad, que g, h están en su forma reducida; se define $f(p) = \infty$ para $p \in P$.

Se define el polinomio complejo $r_t(z) = g(z) - t \cdot h(z)$ con $\deg(r_t) = \max\{\deg(g), \deg(h)\}$, salvo posiblemente un valor de t . El polinomio r_t tiene distintas raíces, salvo en un número finito de valores de t . Las raíces del discriminante de r_t dicen para qué valores de t el polinomio r_t tiene raíces distintas. Esos valores de t son las raíces del discriminante de r_t .

Se denota por $T \subset \mathbb{C}$ al conjunto finito de valores de t definidos anteriormente. Sea $t_0 \notin T$; entonces r_{t_0} es un polinomio de grado $\deg(r_{t_0}) = \max\{\deg(g), \deg(h)\}$ y con raíces distintas. Cada raíz es una solución de $f(z) = g(z)/h(z) = t - 0$, f es biyectiva, entonces f tiene una única raíz de r_{t_0} , entonces $\deg(r_{t_0}) = 1$, entonces $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Supóngase que $ad - bc = 0$. Si $c = 0$, entonces $a = 0$ o $d = 0$. Si $a = 0$, entonces $f(z) \equiv b/a$ lo cual es una contradicción; si $d = 0$, entonces $f(z) \equiv \infty$ lo cual es una contradicción. Si $c \neq 0$, sea $z \neq -b/a$, $f(z) = a/c$, lo cual es una contradicción; entonces $ad - bc \neq 0$ ■

Proposición 1.2.0.3. *Las transformaciones de Möbius generan un grupo con la composición de funciones.*

Al grupo generado por las transformaciones de Möbius se le denotará por $Möb(\mathbb{C})$. Como las transformaciones de Möbius generan un grupo, esto implica que cada TM tiene una transformación inversa que será una TM y como las transformaciones de Möbius son biyectivas y holomorfas, deja que todas las transformaciones de Möbius sean biholomorfas y, con el teorema anterior, se concluye que todos los biholomorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$ sean el grupo $Möb(\mathbb{C})$.

El grupo de TM es el grupo de biholomorfismos de la esfera de Riemann. Recordar que $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{CP}^1$, entonces el grupo de biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ debe ser isomorfo al grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^1$. Para ver el grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^1$ es necesario definir los siguientes grupos de matrices.

Definición 1.2.0.2. Sea $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ el conjunto de matrices de 2 por 2 con entradas complejas.

Se definen

$$GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}$$

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$$

Los conjuntos $GL(2, \mathbb{C})$ y $SL(2, \mathbb{C})$ son grupos con el producto usual de matrices.

Con esto se tienen los siguientes grupos:

$$PGL(2, \mathbb{C}) := GL(2, \mathbb{C})/N_1$$

$$PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C})/N_2$$

con $N_1 = \{\lambda \cdot id : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \subset GL(2, \mathbb{C})$ y $N_2 = \{id, -id\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ son subgrupos normales de $GL(2, \mathbb{C})$ y $SL(2, \mathbb{C})$ respectivamente.

El grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ (que es isomorfo a $PGL(2, \mathbb{C})$, esto es porque el determinante de los elementos de $PGL(2, \mathbb{C})$ sí se le puede sacar raíz cuadrada por estar en los complejos) es el grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^1$. Una demostración intuitiva de este resultado se puede ver en el capítulo 3 cuando se hable del grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^n$. Y con esto se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.0.4. $Möb(\mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$

Demostración. Sea $\varphi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}(\mathbb{C})$ dado por:

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(A_1 \cdot A_2) = \varphi \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(A_1) \cdot \varphi(A_2) = f_1(f_2(z))$$

$$\text{donde } f_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, f_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

$$f_1(f_2) = \frac{a_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) + d_1} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} = \varphi(A_1 \cdot A_2)$$

y como $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z/1 = z = id$, se tiene que φ es un homomorfismo de grupo.

$\ker(\varphi) = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) : \varphi(A) = id\} = \{id, -id\}$ y es claro que $\text{Im}(\varphi) = \text{Möb}(\mathbb{C})$.

Entonces $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{id, -id\} \cong \text{Möb}(\mathbb{C})$ ■

Otra manera de ver el grupo de TM es utilizando la siguiente familia de transformaciones de Möbius:

Definición 1.2.0.3. Definimos las siguientes familias de transformaciones de Möbius:

- **Traslación:** $z \mapsto z + a, a \in \mathbb{C}$
- **Dilatación:** $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$
- **Rotación:** $z \mapsto \lambda z, \lambda = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$
- **Inversión** $z \mapsto \frac{1}{z}$

Proposición 1.2.0.5. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$, $f \neq id$, entonces f es composición de una traslación, dilatación, rotación y una inversión.

Demostración. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C}) \setminus \{id\}$ dada por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc = 1$. Se tienen dos casos.

i) Si $c = 0$, $a, d \neq 0$, entonces $f = t_3 \circ t_2 \circ t_1$ donde $t_1(z) = \frac{ad^{-1}}{|ad^{-1}|z}$ una rotación, $t_2(z) = \frac{a}{d}|z$ es una rotación o dilatación y $t_3(z) = z + \frac{b}{a}$ es una traslación.

ii) Si $c \neq 0$, entonces $f = t_5 \circ t_4 \circ t_3 \circ t_2 \circ t_1$ con $t_1(z) = z + \frac{d}{c}$ traslación, $t_2(z) = 1/z$ inversión, $t_3(z) = -(\frac{|c|}{c})^2 z$ rotación, $t_4(z) = \frac{1}{|c|^2} z$ dilatación y $t_5(z) = z + \frac{a}{c}$ traslación. ■

Utilizando esta forma de ver el grupo $\text{Möb}(\mathbb{C})$ se tienen las siguientes propiedades de las transformaciones de Möbius.

Teorema 1.2.0.6. *Toda transformación de Möbius es **conformal**, ie, preserva ángulos y orientación.*

Demostración. Las traslaciones, dilataciones y rotaciones son conformes. La inversión es conforme, ya que es una rotación de ángulo π alrededor del eje $\overleftrightarrow{g^{-1}(1)g^{-1}(-1)}$ en la esfera de Riemann S^2 , donde g es la proyección estereográfica. Recordar que g es biyectiva y conforme g^{-1} está dada por

$$z \mapsto \left(\frac{2\text{re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\text{im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Sea $z \in \mathbb{C}^*$

$$g^{-1}(1/z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & \sin \pi \\ 0 & -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} g^{-1}(z)$$

■

Corolario 1.2.0.7. *Una función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es biholomorfa si y solo si es conformal.*

Definición 1.2.0.4. *Un **círculo generalizado** en $\hat{\mathbb{C}}$ es un círculo en $\mathbb{C}$ o la unión de una recta en $\mathbb{C}$ y $\{\infty\}$.*

Teorema 1.2.0.8. *Una T.M. manda círculos generalizados en círculos generalizados.*

Demostración. Se observa que ∞ es un punto fijo de cualquier traslación, dilatación y rotación. Claramente, las traslaciones, dilataciones y rotaciones mandan círculos usuales de $\mathbb{C}$ en círculos usuales de $\mathbb{C}$ e igual con las rectas. Sea C un círculo con centro $c \in \mathbb{C}$ y radio r tal que $|c| \neq r$, ie, C es un círculo que no pasa por el origen. $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\}$. Sea $\tilde{C} = \{w \in \mathbb{C} : |w - \frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2}| = \frac{r}{|c|^2 - r^2}\}$. Sea $z \in C$, observar que $r^2 = |z - c|^2 = |z|^2 + |c|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{c})$.

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2} \right| = \left(\frac{r}{|c|^2 - r^2} \right)^2$$

Entonces la inversión manda a C en $\tilde{C}$, donde $\tilde{C}$ es un círculo que pasa por el origen o una recta que pasa o no por el origen. ■

Definición 1.2.0.5. Sea $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ cuatro puntos tal que $z_1 \neq z_2$ y $z_3 \neq z_4$. La **razón cruzada** se define como:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$$

si $z_i = \infty$ para algún $i = 1, 2, 3, 4$ se toma el límite

supongamos que $z_1 = \infty$, entonces

$$[\infty, z_2; z_3, z_4] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n - z_3}{w_n - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n - z_3}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$$

con $\{w_n\}$ es una sucesión en $\hat{\mathbb{C}}$ que converge a ∞ .

Proposición 1.2.0.9. Sea $f \in \operatorname{Möb}(\mathbb{C})$ dada por $f(z) = [z, z_2; z_3, z_4]$ para $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos entre ellos. Entonces $f(z_2) = \infty$, $f(z_3) = 0$, $f(z_4) = 1$, entonces f es única y está dada como:

$$f(z) = \frac{\left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}\right)z - z_3\left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}\right)}{z - z_2}$$

Corolario 1.2.0.10. Sean z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 dos tripletas en $\hat{\mathbb{C}}$. Entonces existe una única $f \in \operatorname{Möb}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3$$

Definición 1.2.0.6. Sea G un grupo actuando en un conjunto X . Decimos que la acción es **sharply n -transitiva** si $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X, w_1, \dots, w_n \in X$ n -tupla de elementos distintos dos a dos, existe único $g \in G$ tal que

$$gx_i = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Corolario 1.2.0.11. $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ actúa sharply 3-transitivamente en $\hat{\mathbb{C}}$.

Proposición 1.2.0.12. Cuatro puntos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos entre si están contenidos en un mismo círculo generalizado si y solo si $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$ es un círculo generalizado. Notar que $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es un círculo generalizado. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ y $f \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ tal que $f(z_i) = x_i$ con $i = 1, 2, 3$. Como f manda círculos generalizados en círculos generalizados y un círculo generalizado está caracterizado por tres puntos, entonces $f(C) = \hat{\mathbb{R}}$, entonces $f(z_4) = x_4 \in \hat{\mathbb{R}}$, por lo tanto $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [x_1, x_2; x_3, x_4] \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ y $f \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ tal que $f(z_i) = x_i$ y sea $x_4 = f(z_4)$, entonces $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] = [x_1, x_2; x_3, x_4] \in \mathbb{R}$. Despejando, se tiene que $x_4 \in \mathbb{R}$, entonces $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces $f^{-1}(\hat{\mathbb{R}})$ es un círculo generalizado y $z_1, z_2, z_3, z_4 \in f^{-1}(\hat{\mathbb{R}})$. ■

Proposición 1.2.0.13. Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}, w_1, w_2, w_3, w_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ cada 4-tupla es distinta por pareja. Entonces hay un $f \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ tal que $f(z_i) = w_i$ si y solo si ambos están en círculos generalizados.

1.2.1. Clasificación de elementos de Möbius

Teniendo el grupo de transferencias de Möbius, es claro que la acción de estos elementos no siempre es igual. Un ejemplo de esto es con las transferencias $f(z) = z + 1$ y $g(z) = 2z$; es evidente que sus dinámicas deben ser distintas pues f solo tiene un punto fijo que es ∞ , mientras que g tiene dos puntos fijos, que son el 0 y ∞ . Con esto, el objetivo de esta sección es dar una clasificación de las transformaciones de Möbius.

Las transformaciones más fáciles de clasificar son las siguientes:

Definición 1.2.1.1. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$, decimos que f es **parabólica** si tiene un solo punto fijo.

Para poder clasificar los demás elementos, se utilizara la traza de la matriz. Notar que la traza está definida como:

$$\text{tr}(f) = a + d \quad \text{con} \quad f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Notar que dicha traza en $PSL(2, \mathbb{C})$ no está bien definida; esto se puede ver con $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ porque $-f = f$ y $\text{tr}(f) = a + d$ y la de $\text{tr}(-f) = -(a + d)$. Por lo tanto, no es un buen acercamiento para hacer una clasificación, pero si se toma la traza al cuadrado, esta ya no tendrá el problema con $-f$ y estará bien definida.

Proposición 1.2.1.1. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$, $f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc = 1$. La función $\text{tr}^2 : PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\text{tr}^2 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + d)^2$$

está bien definida. Además es invariante bajo conjugación, ie, si f, g son conjugados, entonces $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(g)$.

Demostración. Si f, g son conjugados, entonces existe $h \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Sean $A_f, A_g, A_h \in SL(2, \mathbb{C})$ tales que $f = [A_f]$ y así con las otras.

$$\text{tr}^2(f) = (\text{tr}(h \circ g \circ h^{-1}))^2 = (\text{tr}(A_h \cdot A_g \cdot A_{h^{-1}}))^2 = (\text{tr}(id \cdot A_g))^2 = \text{tr}^2(g)$$

■

Otra característica de las TM son sus puntos fijos. Con esto se define el siguiente conjunto:

Definición 1.2.1.2. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$, entonces $\text{Fix}(f) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid f(z) = z\}$

Sabemos que, si $f \in \text{Möb}(\mathbb{C}) \setminus \{id\} \Rightarrow |Fix(f)| = 1$ o $|Fix(f)| = 2$. Esto se puede probar viendo cuántos vectores propios tiene la TM si se ve como una matriz.

Utilizando los puntos fijos de las TM y a la función tr^2 , se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.1.2. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ dada por $f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc = 1$

$$\text{Si } tr^2(f) \neq 4 \Rightarrow |Fix(f)| = 2$$

$$\text{Si } tr^2(f) = 4 \Rightarrow |Fix(f)| = 1$$

Demostración. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$ si y solo si $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, se define $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$. Si $c \neq 0$ y como $ad - bc = 1$ f tiene un punto fijo si y solo si $(d-a)^2 + 4bc = 0 \Rightarrow (d+a)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (d+a)^2 = 4 \Rightarrow tr^2(f) = 4$ y si f tiene dos puntos fijos $tr^2(f) \neq 4$

Si $c = 0$, $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ con $ad = 1$, entonces $a = \frac{1}{d}$. $f(z) = a^2z + ab = z$ si y solo si $z = \infty$ o $z = \frac{ab}{1-a^2}$, f tiene un punto fijo si y solo si $a^2 = 1 \Rightarrow$ si $a = 1$, $(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a^2 + 1 = 2a \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a + d = 2 \Rightarrow tr^2(f) = 4$ y para $a = -1$ se hace lo mismo ■

Con esto se tendrán las siguientes propiedades de la conjugación de transformaciones de Möbius.

Proposición 1.2.1.3. Si $f, g \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ son conjugados, entonces $|Fix(f)| = |Fix(g)|$

Demostración. Si $f, g \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ son conjugados, entonces existe $h \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Sea $\varphi : Fix(f) \rightarrow Fix(g)$ dada por $\varphi(z) = h(z)$. Sea $z \in Fix(f)$, entonces $g(\varphi(z)) = (g \circ h)(z) = (h \circ f)(z) = h(z) = \varphi(z)$, entonces $\varphi(z) \in Fix(g)$. Como φ es h restringido en $Fix(f)$, se vuelve claro que φ es inyectiva. Si $w \in Fix(g)$, $\varphi(h^{-1}(w)) = (h \circ h^{-1})(w) = w$ y $h^{-1}(w) \in Fix(f)$, entonces φ es sobre y se concluye que es biyectiva. Por lo tanto, $|Fix(f)| = |Fix(g)|$. ■

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos la siguiente función:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} z \mapsto \alpha z, & \text{si } \alpha \neq 1 \\ z \mapsto z + 1, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

las transformaciones $f_\alpha \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ se les llama **formas prototípicas** o normales.

Proposición 1.2.1.4. f_α, f_β son conjugados si y solo si $\text{tr}^2(f_\alpha) = \text{tr}^2(f_\beta)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Esta ya está por la proposición 1.2.1.2

($\Leftarrow$) Si $\alpha = 1$ entonces $f_\alpha(z) = z + 1$ y $\text{Fix}(f_\alpha) = \{\infty\}$, para cualquier $g \in \hat{\mathbb{M}}^n$ $\text{Fix}(g \circ f_\alpha \circ g^{-1}) = \{g(\infty)\}$. Si f_β es conjugado a f_α , entonces $|\text{Fix}(f_\beta)| = 1$, pero como $\beta \neq 1$, $f_\beta(z) = \beta z$ y $\text{Fix}(f_\beta) = \{0, \infty\}$ lo cual es una contradicción. Si $\alpha, \beta \neq 1$ y $\text{tr}^2(f_\alpha) = \text{tr}^2(f_\beta)$, entonces $\alpha + \frac{1}{\alpha} + 2 = \beta + \frac{1}{\beta} + 2$ entonces $\frac{\alpha^2+1}{\alpha} = \frac{\beta^2+1}{\beta}$, entonces $\alpha\beta(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow (\alpha\beta - 1)(\alpha - \beta) = 0$; entonces, $\beta = \frac{1}{\alpha}$ o $\alpha = \beta$. Si $\alpha = \beta$ es trivial, si $\beta = \frac{1}{\alpha}$ se toma $g(z) = \frac{1}{z}$, $(g \circ f_\alpha \circ g^{-1})(z) = g(\frac{\alpha}{z}) = \frac{z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}z = f_\beta(z)$. ■

Proposición 1.2.1.5. Cada elemento parabólico de $\text{Möb}(\mathbb{C})$ es conjugado de f_1

Demostración. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ parabólico con $\text{Fix}(f) = \{z_1\}$. Sea $z_2 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1\}$ y $z_3 = f(z_2)$, sea $h \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$ y $h(z_3) = 1$. Sea $g = h \circ f \circ h^{-1}$ $g(\infty) = \infty$, $g(0) = 1$, $g(1) = h(f(z_3))$, $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces $g(0) = b/d = 1$ y como $g(\infty) = \infty$ se tiene que $c = 0$, entonces $g(z) = \frac{a}{d}z + 1$, entonces $\text{Fix}(g) = \{\infty, \frac{d}{d-a}\}$ y como $|\text{Fix}(g)| = 1$, $d - a = 0$, entonces $d = a$, entonces $g(z) = z + 1 = f_1(z)$. Por lo tanto, f es conjugado de f_1 . ■

Proposición 1.2.1.6. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $|\text{Fix}(f)| = 2$, entonces f es conjugado a $z \mapsto \lambda e^{i\theta} z$ que es f_α con $\alpha = \lambda e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Demostración. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $\text{Fix}(f) = \{z_1, z_2\}$. Se define la transformación de Möbius $h(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$, notar que $h(z_1) = 0$ y $h(z_2) = \infty$, se toma a $g = h \circ f \circ h$ y se puede observar que el ∞ y 0 son puntos fijos de g , entonces si $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $b = 0$ y $c = 0$, entonces $g(z) = \frac{a}{d}z$, con $\frac{a}{d} = \alpha \neq 0, 1$, si es igual a 0 no es una TM y si es igual a 1 es la identidad. Entonces, f es conjugado de f_α y como $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = \lambda e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. ■

Utilizando esta ultima proposición se darán las otras dos clases de la clasificación.

Definición 1.2.1.3. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $|\text{Fix}(f)| = 2$, f es conjugado de f_α , con $\alpha = \lambda e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{id\}$. Decimos que:

- f es **elíptica** si $\lambda = 1$
- f es **loxodrómica** si $\lambda \neq 1$, además f es **hiperbólica** si $\theta = 0$.

De los elípticos, si θ resulta ser un número racional, entonces se le llamará elíptico racional o rotación racional, y si θ es irracional, se le llamará elíptico irracional o rotación irracional.

Proposición 1.2.1.7. Sean $f, g \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ tal que $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(g)$, entonces f, g son conjugados.

Para concluir con la clasificación, esta se puede resumir con el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1.8. Sea $f \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ dada por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ab - dc = 1$, entonces:

- i) f es elíptica $\Leftrightarrow a + d \in (-2, 2)$
- ii) f es parabólica $\Leftrightarrow a + d \in \{-2, 2\}$
- iii) f es hiperbólica $\Leftrightarrow a + d \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$
- iv) f es loxodrómica $\Leftrightarrow a + d \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$

Demostración. i) f es elíptico si y solo si es conjugado de f_α con $|\alpha| = 1$, $f_\alpha(z) = \alpha z = e^{i\theta} z$, si y solo si $\text{tr}^2(f) = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2 = (2 \cos \frac{\theta}{2})^2$ si y solo si $(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = 2 \cos \frac{\theta}{2} \in (-2, 2)$.

ii) ya se tiene por 1.2.1.2.

iii) f que sea conjugado de f_α con $\arg(\alpha) = 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\text{tr}^2(f_\alpha) = (\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2 \geq 4$ si y solo si $\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \geq 2$ o $\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \leq -2$.

iv) f conjugado a f_α con $|\alpha| \neq 1$, si $\alpha = \lambda e^{i\theta}$ con $\theta \neq 0$ si y solo si $\text{tr}^2(f) = (\sqrt{\lambda} e^{i\theta/2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\theta/2})^2$ si y solo si $\text{tr}(f) = \sqrt{\lambda} e^{i\theta/2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\theta/2} = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \cos \frac{\theta}{2} + (\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) i \sin \frac{\theta}{2}$.

■

1.3. Grupos Kleinianos

Para dar la definición de grupo Kleiniano es necesario primero definir lo que es una región de discontinuidad y para ello se dan las siguientes definiciones.

Definición 1.3.0.1. Sea $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ y $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$. Decimos que Ω es Γ – invariante si $\gamma(\Omega) = \Omega \ \forall \gamma \in \Gamma$.

Definición 1.3.0.2. $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$. Decimos que Γ **actúa propia y discontinuamente** en un abierto $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, $\Omega \neq \emptyset$, si $\forall K \subset \Omega$ compacto $\{\gamma \in \Gamma | \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

Definición 1.3.0.3. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, decimos que Γ **actúa discontinuamente** en $x \in \hat{\mathbb{C}}$ si existe $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ abierto tal que $x \in U$ y $|\{\gamma \in \Gamma | \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}| < \infty$. Γ actúa discontinuamente en $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ si actúa discontinuamente para todo $x \in \Omega$.

Definición 1.3.0.4. Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$. La Γ – orbita (o solo **órbita**) de z es $\Gamma z = \{\gamma(z) | \gamma \in \Gamma\}$

Con esto se puede definir la siguiente relación en $\hat{\mathbb{C}}$

$z \sim w$ si y solo si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(z) = w$, ie, $w \in \Gamma z$

Proposición 1.3.0.1. $\sim$ es una relación de equivalencia.

Utilizando la relación de equivalencias, se pueden construir los siguientes espacios topológicos. Si $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ tal que Ω es Γ – invariante. Definimos $\Omega/\Gamma = \Omega/\sim$ se llama espacio de órbitas.

En general, $\hat{\mathbb{C}}/\Gamma$ no es un buen espacio, pues no se puede asegurar que sea un espacio Hausdorff, pero Ω/Γ sí es un espacio Hausdorff si Γ actúa propia y discontinuamente en Ω .

Teorema 1.3.0.2. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ y $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, $\Omega \neq \emptyset$ donde Γ actúa propia y discontinuamente, entonces Ω/Γ es Hausdorff.

Demostración. Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega/\Gamma$ con $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ tales que $\tilde{x} = \pi(x)$, $\tilde{y} = \pi(y)$ donde $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$. Como $\mathbb{C}$ es Hausdorff, existen vecindades abiertas U_x, U_y tales que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Como $\mathbb{C}$ es localmente compacto, entonces existen K_x, K_y compactos tales que $x \in U_x \subset K_x$, $y \in U_y \subset K_y$. Hay a lo más un número finito de $\gamma \in \Gamma$ tales que $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$ donde $K = K_x \cap K_y$. Cuando $K \cap \gamma(K) \neq \emptyset$ si y solo si existe $w \in K$ y $w \in \gamma(K)$ si y solo si $(w \in K_x \text{ o } w \in K_y)$ y $w \in \gamma(K_x \cup K_y) \subset \gamma(K_x) \cup \gamma(K_y)$ si y solo si $(w \in K_x \text{ o } w \in K_y)$ y $(w \in \gamma(K_x) \text{ o } \gamma(K_y))$, entonces hay un número finito a lo más de $\gamma \in \Gamma$ tal que $K_x \cap \gamma(K_y) \neq \emptyset$ denotados por $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, se tiene que para cada $j = 1, \dots, n$ existe un abierto V_j, W_j tales que $x \in V_j \subset U_x$, $y \in W_j \subset U_y$ con $V_j \cap \gamma_j(W_j) = \emptyset$. Se define $V = \bigcap_{j=1}^n V_j$, $W = \bigcap_{j=1}^n W_j$. Si existe $z \in V$ que también cumpla que $z \in \gamma_j(W)$, entonces $z \in V_j$, $z \in \gamma_j(W_j)$ para todo $j = 1, \dots, n$ lo cual contradice lo anterior, entonces $V \cap \gamma_j(W) = \emptyset$, entonces $\pi(V) \cap \pi(W) = \emptyset$. Por lo tanto, Ω/Γ es Hausdorff. ■

Como Ω/Γ resulta ser un espacio Hausdorff con Γ actuando propia y discontinuamente en Ω , se utilizará esta propiedad para definir un grupo Kleiniano.

Definición 1.3.0.5. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$. Γ es **Kleiniano** si existe $\Omega \in \hat{\mathbb{C}}$, $\Omega \neq \emptyset$ donde Γ actúa propia y discontinuamente.

Con esto se podrá obtener un espacio topológico Hausdorff para cualquier grupo Kleiniano que se dé.

Definición 1.3.0.6. Sea $\Gamma = PSL(2, \mathbb{C})$, sea $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Definimos el **estabilizador**, o grupo de isotropía, de Γ respecto a z como:

$$\Gamma_z = Isot_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) = z\}$$

algunas propiedades de Γ_z son:

- $Isot_z$ es un subgrupo de Γ

- si Γ actúa propia y discontinuamente en $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, $\Omega \neq \emptyset$ entonces $Isot_z$ es finito $\forall z \in \Omega$
- si $Isot_z = \Gamma$ para algún $z \in \hat{\mathbb{C}}$, entonces toda $\gamma \in \Gamma$ $\gamma(z) = z$ y decimos que z es punto fijo de Γ

Definición 1.3.0.7. Un **grupo topológico** G es un grupo G que tiene una topología y tal que la operación del grupo y la inversión son funciones continuas.

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G & inv : G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

De manera equivalente:

$$\begin{aligned} f : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Definición 1.3.0.8. Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ es **discreto** si cada punto $a \in A$ es aislado, ie, $\forall a \in A \exists U \subset X$ tal que $a \in U$ y $U \cap A = \{a\}$.

Definición 1.3.0.9. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, la **región de discontinuidad** es:

$$\Omega(\Gamma) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \Gamma \text{ actúa discontinuamente en } z\}$$

$\Omega(\Gamma)$ es la región donde la acción de Γ es "ordenada".

Definición 1.3.0.10. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, el **conjunto límite** de Γ es $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega(\Gamma)$.

El conjunto $\Lambda(\Gamma)$ es donde se acumula la dinámica. Esto se puede ver por cómo actúa Γ en $\Lambda(\Gamma)$. Si $z \in \Lambda(\Gamma)$ entonces Γ no actúa discontinuamente en z lo que hace que para cualquier vecindad abierta U de z existan una infinidad de Γ -traslados de U que se intersectan con U .

Teorema 1.3.0.3. Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $|\Lambda(\Gamma)|$ es igual a 0, 1, 2 o es infinito.

Definición 1.3.0.11. Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo Kleiniano con $|\Lambda(\Gamma)| < \infty$, se dice que Γ es **elemental**.

Definición 1.3.0.12. Sea G un grupo, $g \in G$ es elemento de **torsión** si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = id$. Si G no tiene elementos de torsión se dice que es libre de torsión.

Un elemento de torsión en $PSL(2, \mathbb{C})$ es un conjugado a una rotación racional. Esto se puede ver viendo el orden de cada clase; los parabólicos y los loxodrómicos no pueden ser de torsión, pues son de orden infinito, dejando que los elementos de torsión solo puedan ser elípticos, y este debe ser racional, pues si no lo es, el orden de dicho elemento sería también infinito, dejando así que todo elemento de torsión debe ser un elíptico racional.

Algunas propiedades de los elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$, de grupos discretos y grupos Kleinianos son las siguientes:

Proposición 1.3.0.4. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ no discreto, entonces existe una sucesión de elementos distintos $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ tal que $\gamma_n \rightarrow id$

Proposición 1.3.0.5. Sean $\gamma, \mu \in PSL(2, \mathbb{C}) \setminus \{id\}$ y γ loxodrómico, $|Fix(\gamma) \cap Fix(\mu)| = 1$, entonces $\langle \gamma, \mu \rangle$ es no discreto.

Proposición 1.3.0.6. Sea $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ un grupo que actúa propia y discontinuamente en $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, entonces Γ actúa discontinuamente en Ω .

Proposición 1.3.0.7. Sea $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ un grupo que actúa propia y discontinuamente en $X \subset \hat{\mathbb{C}}$, entonces Γ es discreto.

Demostración. Supóngase que Γ no es discreto, entonces existe $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ sucesión de elementos distintos tal que $\gamma_n \rightarrow id$. Sea $x \in X$, $\gamma_n(z) = z$, entonces para todo compacto $K \subset X$, $z \in K$, $\exists N > 0$ tal que $\gamma_n(K) \cap K \neq \emptyset$ para todo $N > 0$ lo cual es una contradicción que Γ actúa propia y discontinuamente en X . Por lo tanto Γ es discreto ■

Proposición 1.3.0.8. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $\Omega(\Gamma)$ es abierto.

Demostración. Sea Γ un grupo con $\Omega(\Gamma)$ su región de discontinuidad, entonces para cada $x \in \Omega(\Gamma)$ existe $U_x \subset \hat{\mathbb{C}}$ abierto con $x \in U_x$ tal que $|\{\gamma : \gamma(U_x) \cap U_x \neq \emptyset\}| < \infty$. Se puede observar que esta propiedad se cumple para todo $z \in U_x$, entonces $U_x \subset \Omega(\Gamma)$ y como $\Omega(\Gamma) = \cup_{x \in \Omega(\Gamma)} \{x\} \subseteq \cup_{x \in \Omega(\Gamma)} U_x$ pero se tiene que todo $U_x \subset \Omega(\Gamma)$ con $x \in \Omega(\Gamma)$, entonces $\cup_{x \in \Omega(\Gamma)} U_x \subseteq \Omega(\Gamma)$, entonces $\Omega(\Gamma) = \cup_{x \in \Omega(\Gamma)} U_x$ con U_x abierto. Por lo tanto, $\Omega(\Gamma)$ es abierto ■

Proposición 1.3.0.9. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $\Omega(\Gamma)$ es Γ -invariante.

Demostración. Sea $z \in \Omega(\Gamma)$ entonces existe U abierto con $z \in U \subset \Omega(\Gamma)$. Sea $\gamma \in \Gamma$ y sea V un abierto con $\gamma(z) \in V$ tal que $\gamma^{-1}(V) \subset U$. Supóngase que $\gamma(z) \notin \Omega(\Gamma)$, entonces existe $\{\mu_k\} \subset \Gamma$ de elementos distintos tales que $\mu_k(V) \cap V \neq \emptyset$. Se considera $g_k = \gamma^{-1} \circ \mu_k \circ \gamma$, entonces $g_k(U) \cap U \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $\Omega(\Gamma)$ debe de ser invariante. ■

Corolario 1.3.0.10. $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado y es Γ -invariante.

Si se quiere profundizar más en el tema de grupos Kleinianos se pueden leer los siguientes libros [17] y [18].

1.3.1. Ejemplos de grupos discretos y Kleinianos

Algunos ejemplos de grupos Kleinianos o discretos son los siguientes:

Grupos de Schottky

Sea $p \in \hat{\mathbb{C}}$, cada curva de Jordan (curva cerrada sin autointersecciones) divide a $\hat{\mathbb{C}}$ en dos regiones; llamaremos a la región que contiene a p el exterior de la curva y a la otra región el interior.

Sean $C_1, C'_1, \dots, C_k, C'_k$ $2k$ curvas de Jordan disjuntas entre sí. Si existen $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in PSL(2, \mathbb{C})$ tales que $\gamma_i(C_i) = C'_i$ para $i = 1, \dots, k$ y que $\gamma_i(\hat{\mathbb{C}} \setminus D_i) = D_i$ para $i = 1, \dots, k$ con D_i el interior de C_i , entonces $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ es un grupo Kleiniano y se le llama grupo de Schottky de k -generadores. Si C_i y C'_i son círculos generalizados, se le llamará grupo de Schottky clásico; en caso contrario, se le llamará grupo de Schottky no clásico.

Grupo modular de Picard

Sea $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}[i])$, con $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Se denomina grupo modular de Picard. Γ es discreto y $\Omega(\langle \gamma \rangle) = \emptyset$.

Este ejemplo da como resultado que el ser un grupo discreto no te garantiza ser un grupo Kleiniano, pues no se puede asegurar que un grupo discreto tenga una región no vacía donde actúe discontinuamente.

Grupo Fuchsiano

Un grupo Fuchsiano es un grupo Kleiniano Γ que deja invariante un disco generalizado en $\hat{\mathbb{C}}$. El conjunto límite de un grupo Fuchsiano está contenido en el círculo generalizado que deja invariante.

Un ejemplo de este tipo de grupos es $PSL(2, \mathbb{Z})$ y se le llama grupo modular. Este grupo es discreto, con $\Omega(\Gamma) = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$ y está generado por S y T , donde:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.2. Conjunto Límite

Anteriormente, se dio la definición de conjunto límite como el complemento de $\Omega(\Gamma)$. El conjunto límite puede definirse de otras maneras; una de estas definiciones es la siguiente:

Definición 1.3.2.1. Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, decimos que

$$\Lambda_0(\Gamma) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists w \in \Omega(\Gamma) \text{ y } \exists \{\gamma_n\} \subset \Gamma \text{ de elementos distintos tal que } \gamma_n(w) \rightarrow z\}$$

A pesar de ser otra forma de definir el conjunto límite, estas dos definiciones son equivalentes.

Proposición 1.3.2.1. $\Lambda_0(\Gamma) = \Lambda(\Gamma)$.

Definición 1.3.2.2. Los elementos de $\Lambda_0(\Gamma)$ se llaman puntos límites de Γ .

Proposición 1.3.2.2. $\Lambda_0(\Gamma)$ es denso en ninguna parte

Demostración. Sea $w \in \Lambda(\Gamma)$ y U abierto con $w \in U$, $U \cap \Omega(\Gamma)$ es abierto no vacío. Sea $V \subset U \cap \Omega(\Gamma)$ abierto, como $\Omega(\Gamma) \cap \Lambda(\Gamma) = \emptyset \Rightarrow V \cap \Lambda(\Gamma) = \emptyset \Rightarrow \Lambda(\Gamma)$ entonces $\Lambda(\Gamma)$ es denso en ninguna parte ■

Definición 1.3.2.3. $A \subset X$ subespacio de un espacio topológico. Decimos que A es un **conjunto perfecto** si A es cerrado y no contiene puntos aislados. Todo punto a es punto límite de A .

Teorema 1.3.2.3. Todo conjunto perfecto es no numerable.

Lema 1.3.2.4. Sea $z \in \Lambda(\Gamma)$ de Γ , entonces existe $y \in \Lambda(\Gamma)$ y una sucesión de elementos distintos $\{g_n\} \subset \Gamma$ tal que $g_n(\cdot) \rightarrow z$ uniformemente en compactos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$.

Proposición 1.3.2.5. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ Kleiniano, entonces $\Lambda(\Gamma)$ consta de 0, 1, 2 puntos o es un conjunto perfecto.

1.3.3. Elementos de torsión

Uno de los problemas a la hora de sacar un espacio cociente con un grupo Kleiniano son los puntos fijos de los elementos de torsión; el objetivo de esta sección será ver cómo eliminar los puntos fijos de los elementos de torsión y ver más a detalle con la isotropía en los puntos de $\Omega(\Gamma)$.

Definición 1.3.3.1. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ decimos que

$$\Omega_0(\Gamma) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists U_z \text{ abierto tal que } g(U_z) \cap U_z \neq \emptyset \text{ solo para } g = id\}$$

Definición 1.3.3.2. Decimos que $A \in \hat{\mathbb{C}}$ es **precisamente invariante** bajo $H < \Gamma$, donde $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ si

- $Isot(A, \Gamma) = H$
- $\forall \gamma \in \Gamma \setminus H, \gamma(A) \cap A = \emptyset$

Es claro que $\Omega_0(\Gamma) \subset \Omega(\Gamma)$ para cualquier $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$

Sea $z \in \Omega(\Gamma)$, consideramos $Isot(z, \Gamma)$

- $|Isot(z, \Gamma)| = \infty \Rightarrow |\Gamma| = \infty$, este caso no ocurre pues $z \in \Omega(\Gamma)$
- $Isot(z, \Gamma) = \{id\} \Rightarrow z \in \Omega_0(\Gamma)$
- $|Isot(z, \Gamma)| < \infty \Rightarrow z$ es punto fijo de un elemento elíptico (de torsión)

Proposición 1.3.3.1. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ Kleiniano entonces $\Omega_0(\Gamma) \subset \Omega(\Gamma)$, además $\Omega(\Gamma) \setminus \Omega_0(\Gamma)$ son puntos fijos de elementos de torsión.

Teorema 1.3.3.2 (lema de Selberg). Sea $G < GL(n, \mathbb{C})$ finitamente generado entonces existe $H \triangleleft G$ de índice finito y libre de torsión.

Proposición 1.3.3.3. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $x \in \Omega(\Gamma)$ si y solo si

- $Isot(z, \Gamma)$ es finito y
- Existe una vecindad $U \ni x$ tal que U es precisamente invariante bajo $Isot(z, \Gamma)$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $x \in \Omega(\Gamma)$, $\exists U$ abierto que contiene a x tal que $A = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Observar que $H := Isot(x, \Gamma) \subset A$ es finito. Se puede escoger $U_0 \subset U$ de tal forma que $\gamma(U_0) \cap U_0 = \emptyset$ para todo $\gamma \in A \setminus H$. $\gamma(U_0) \cap U_0 \neq \emptyset$ para todo $\gamma \in H$. Definimos $U_1 = \cap_{g \in H} g(U_0)$, sea $\gamma \in H$, $\gamma(U_1) = \cap_{g \in H} \gamma(g(U_0)) = \cap_{g \in H} g(U_0) = U_1$, entonces U_1 es precisamente invariante bajo H

($\Leftarrow$) Sea $z \in \hat{\mathbb{C}}$, supóngase que $H = Isot(x, \Gamma)$ es finito y que existe un abierto U que contiene a x donde U es precisamente invariante bajo H . Para $\gamma \in H$, $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$ y para $\gamma \in \Gamma \setminus H$, $\gamma(U) \cap U = \emptyset$, entonces $z \in \Omega(\Gamma)$ ■

Corolario 1.3.3.4. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $x \in \Lambda(\Gamma)$ si y solo si

- $Isot(z, \Gamma)$ es finito o
- Para todo $U \ni x$, U no es precisamente invariante bajo H

Teorema 1.3.3.5. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ Kleiniano, entonces $\Lambda(\Gamma)$ es la cerradura del conjunto de puntos fijos con isotropía infinita.

Teorema 1.3.3.6. Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ Kleiniano y $H < G$ subgrupo de índice finito, entonces $\Lambda(H) = \Lambda(G)$.

Demostración. Sea $H < G$ de índice finito. Claramente $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$. Se denota a $[G : H] = m$, $G = \cup_{i=1}^m H_{\gamma_i}$ y sea $z \in \Lambda(\Gamma) = \overline{A_G}$, se tiene dos casos, $z \in A_G$ o z es punto de acumulación de A_G . Si $z \in A_G$ entonces $\exists \{g_k\} \subset G$ elementos distintos tal que $g_k(z) = z$, se puede suponer que existe $K_0 \in \mathbb{N}$ $1 \leq k_0 \leq m$ tal que $g_n = h_n \circ \gamma_{k_0}$. Sea $\tilde{h}_n = h_n h_1^{-1}$ es una sucesión de elementos distintos tal que $\tilde{h}_n(z) = h_n h_1^{-1}(z)$, $g_1 = h_1 \gamma_{k_0}$, entonces $h_1 = g_1 \gamma_{k_0}^{-1}$ entonces $h^{-1}(z) = \gamma_{k_0} g_1^{-1}(z) = \gamma_{k_0}(z)$, $\tilde{h}_n(z) = h_n \gamma_{k_0}(z) = g - n(z) = z$, entonces $\{\tilde{h}_n\} \subset Isot(z, H)$, entonces $z \in \Delta(H)$. Si z es punto de acumulación de A_G , entonces existe $\{z_n\} \subset A_G$ tal que $z_n \rightarrow z$. Para cada z_n se puede construir una sucesión de elementos distintos $\{h_{n,k}\} \subset H$ tal que $h_{n,k}(z_n) = z$, entonces z es punto de acumulación de A_H , entonces $z \in \Delta(H)$, entonces $\Delta(G) \subset \Delta(H)$ y por lo tanto $\Delta(H) = \Delta(G)$ ■

1.4. Cociente

Recordando el teorema de uniformización, toda superficie de Riemann R se puede escribir como $R = \hat{R}/\Gamma$, con $\Gamma < \text{Aut}(\hat{R})$. $\hat{R}$ es la cubierta universal de R . Si $\hat{R} = \hat{\mathbb{C}}$ es elíptico, $\hat{R} = \mathbb{C}$ es parabólico y si $\hat{R} = \mathbb{H}$ es hiperbólico. Entonces las superficies de Riemann se pueden ver como espacios cocientes.

Se puede utilizar la región fundamental para entender de mejor manera lo que es el espacio cociente.

Definición 1.4.0.1. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ Kleiniano. Una **región fundamental** para la acción de Γ es un abierto $D \subset \Omega(\Gamma)$ que satisface:

- D es precisamente invariante bajo $\{id\}$
- $\forall z \in \Omega(\Gamma), \exists \gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(z) \in \overline{D}$
- ∂D consiste de posiblemente puntos límite de Γ y una colección finita o numerable de curvas, cada curva está contenida en $\Omega(\Gamma)$ excepto posiblemente uno o dos de sus extremos. La intersección de la curva con $\Omega(\Gamma)$ se llama lado de D .
- Los lados son emparejados por γ . ie, para cada lado S de D , existe un lado S' de D y $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(S) = S'$ (puede pasar que $S = S'$)
- A lo más un número finito de G -traslados de D intersectan a cualquier compacto de $\Omega(\Gamma)$

Teorema 1.4.0.1. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ Kleiniano con región fundamental D , entonces $\Omega(\Gamma)/\Gamma \cong \overline{D}/\Gamma$.

Entonces, a la hora de tener un grupo Kleiniano y querer obtener un espacio cociente de este, no será necesario agarrar toda la región Ω y bastará con tomarse una región D que sea la región fundamental para ver cómo será el espacio cociente. Para ver la utilidad de esta región, se darán los siguientes ejemplos.

1.4.1. Ejemplos de cocientes

Elemento elíptico

Sea γ un elemento elíptico; entonces γ es una rotación. Supóngase que γ es racional y que $\gamma(z) = e^{\frac{2\pi}{3}i}z$. Entonces el grupo $\langle\gamma\rangle$ es un grupo finito y la región de discontinuidad $\Omega(\langle\gamma\rangle)$ es todo el espacio $\hat{\mathbb{C}}$. Entonces el cociente $\hat{\mathbb{C}}/\langle\gamma\rangle$ es Hausdorff.

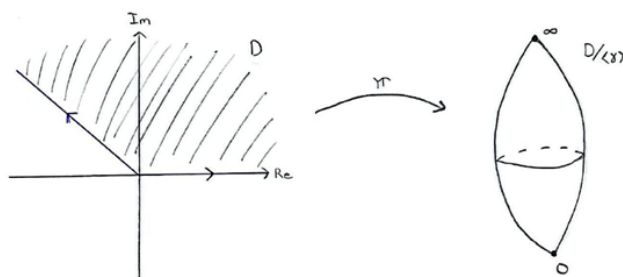


FIGURA 1.2: Cociente de un elíptico y su región fundamental

Notar que el espacio cociente tiene dos picos; esto hace que el cociente no sea una superficie de Riemann, pues no es holomorfo en los picos 0 y ∞ . Si se aplica el lema de Selberg, se tiene que un subgrupo de índice finito de $\langle\gamma\rangle$ es $\{id\}$ y el cociente $\hat{\mathbb{C}}/\{id\} = \hat{\mathbb{C}}$. Si se toma la región $\Omega_0(\Gamma)$ el cociente será una esfera menos dos puntos.

Elemento parabólico

Sea γ un elemento parabólico; entonces γ se puede ver como una traslación. La región de discontinuidad de $\Omega(\langle\gamma\rangle)$ es homeomorfo a $\mathbb{C}$. Supóngase que γ es la traslación $\gamma(z) = z+1$, entonces una región fundamental de $\langle\gamma\rangle$ es el conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : 0 < z < 1\}$. Entonces, el cociente $C/\langle\gamma\rangle$ es tomarse a C , pegar los lados y esto da como resultado un cilindro.

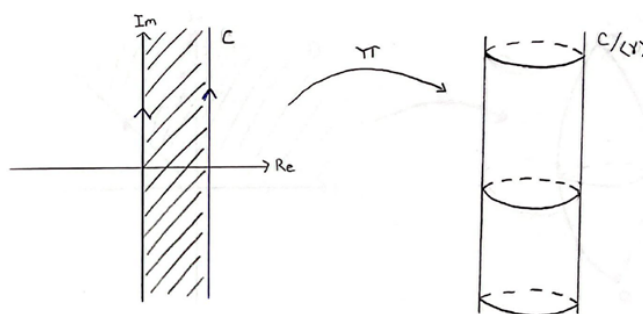


FIGURA 1.3: Cociente de un parabólico y su región fundamental

Toro complejo

Sean f, g dos transformaciones parabólicas, tales que $f(z) = z + 1$ y $g(z) = z + i$. Se toma al grupo $\Gamma = \langle f, g \rangle$; la región de discontinuidad $\Omega(\Gamma)$ es $\mathbb{C}$ y una región fundamental de γ es el conjunto $D = \{x + yi \in \mathbb{C} : 0 < x, y < 1\}$. Los lados que son paralelos al eje real están emparejados por g y los del imaginario por f ; la configuración del pegado que se genera es igual al del toro. Entonces, el cociente de $D/\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1$ es el toro complejo.

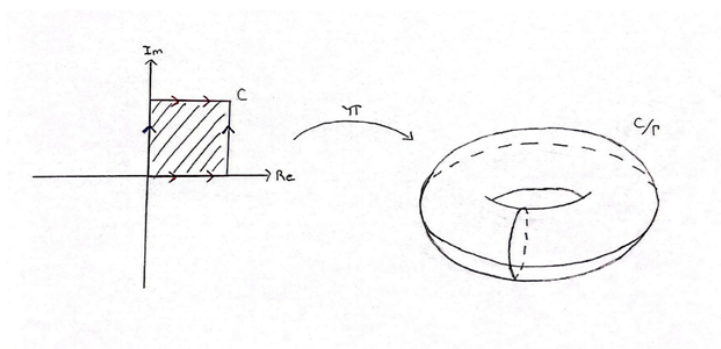


FIGURA 1.4: El toro complejo y su región fundamental

Otra forma de definirse el toro complejo es a través de un loxodrómico. Sea γ un elemento loxodrómico. Supóngase que $\gamma(z) = 2z$, entonces es claro que su región de discontinuidad es $\mathbb{C}^*$ y una región fundamental de $G = \langle \gamma \rangle$ es $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y al hacer el pegado de los lados da como resultado un toro complejo.

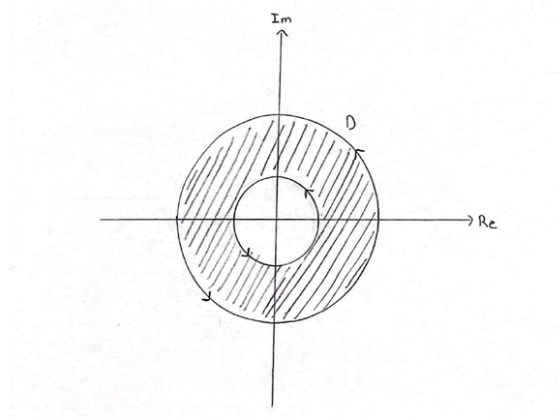


FIGURA 1.5: Región fundamental de un loxodrómico

Se sabe que $p : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/G$ es un cubriente regular y

$$\pi_1(\mathbb{C}^*/G)/p_*(\pi_1(\mathbb{C}^*)) = \mathbb{Z} \cong G$$

Pero no es el cubriente universal, pues $\mathbb{C}^*$ no es simplemente conexo. Se toma $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ con $r = \exp$ el cual es un cubriente (universal).

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{C} & \\
 r \swarrow & \downarrow q = p \circ r & \\
 \mathbb{C}^* & & \mathbb{C}^*/G \\
 p \searrow & & \\
 & &
 \end{array}$$

Veamos la relación de equivalencias en $\mathbb{C}$. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ y sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$. $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $z_1 = 2^n z_2 \Leftrightarrow e^{w_1} = 2^n e^{w_2} \Leftrightarrow e^{w_1} = e^{n \ln 2 + w_2} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} w_1 = w_2 + n \ln 2 + m 2\pi i$

Entonces la identificación, en $\mathbb{C}$, se ve tal que

$$\mathbb{C}^*/G \cong \mathbb{C}/(\ln 2\mathbb{Z} \times 2\pi i\mathbb{Z})$$

entonces $\mathbb{C}^*/G$ es un toro complejo.

Orbifolio modular

Se toma al grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$; como se vio en los ejemplos de grupos Kleinianos, $PSL(2, \mathbb{Z})$ está generado por S y T y se tiene que $\Omega(\Gamma) = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$. En vez de tomar toda la región de discontinuidad, se toma solo a $\mathbb{H}^+$. Una región fundamental de $\mathbb{H}^+$ por $PSL(2, \mathbb{Z})$ es la siguiente:

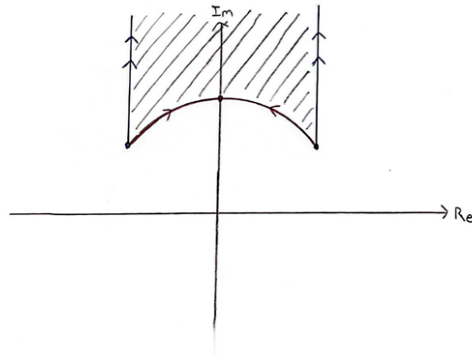


FIGURA 1.6: Región fundamental del grupo modular

$PSL(2, \mathbb{Z})$ tiene elementos de torsión y son S y ST donde $S^2 = id$ y $(ST)^3 = id$. Esto lo que genera es que el cociente no sea una superficie de Riemann, pues se tendrán dos picos.

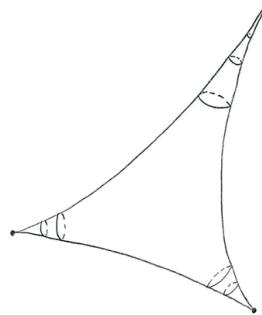
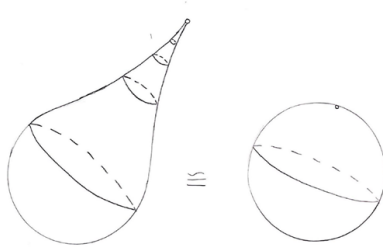


FIGURA 1.7: Cociente del grupo modular

Si se aplica el lema de Selberg, el subgrupo de índice finito de $PSL(2, \mathbb{Z})$ será

$$\Gamma_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid a, b \equiv 1 \pmod{2} \quad c, d \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

Γ_2 es un subgrupo libre de torsión y de índice finito con $PSL(2, \mathbb{Z})$, entonces $\Omega(\Gamma_2) = \Omega(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$. Entonces el cociente de $\mathbb{H}^+/\Gamma_2$ será una esfera menos un punto.

FIGURA 1.8: Cociente del grupo Γ_2

1.4.2. Superficie de Riemann marcada

Para ir concluyendo con la teoría clásica, notar que no se tiene ningún resultado que garantice que, si se tiene un grupo Kleiniano Γ entonces $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ sea una superficie de Riemann. Esto es porque no siempre sucede y el ejemplo se puede ver con el grupo generado con un elemento elíptico.

Como el problema está en los puntos fijos de los elementos elípticos, se definirá lo que es un punto ramificado. Esto con el fin de generalizar la definición de superficie de Riemann y poder agregar a los espacios cocientes que tengan picos.

Teorema 1.4.2.1. Sean Y, X superficies de Riemann y $f : Y \rightarrow X$ holomorfa no constante. Sea $a \in X$ y $b := f(a) \in Y$. Entonces existe un entero $k \geq 1$ y cartas $\varphi : U \rightarrow V$ de X $\psi : U' \rightarrow V'$ de Y tal que

- $a \in U$, $\varphi(a) = 0$ y $b \in U'$, $\psi(b) = 0$
- $f(U) \subset U'$
- $F : \psi \circ f \circ \psi^{-1} : V \rightarrow V'$ tiene la forma $F(z) = z^k \forall z \in V$

Observación 1.4.2.1. Para cada vecindad U_0 de $a \in X$ existe vecindades $U \subset U_0$ de a y W de b tal que $|F^{-1}(y) \cap U| = K \forall y \in W \setminus \{b\}$. A K lo llamamos multiplicidad de f en a .

Definición 1.4.2.1. Sean X, Y superficies de Riemann y $\rho : Y \rightarrow X$ holomorfa no constante. Un punto $y \in Y$ se llama **punto de ramificación** de ρ si no hay vecindad V de y tal que $\rho|_V$ es inyectiva. La función ρ es no ramificada si no tiene puntos de ramificación.

Teorema 1.4.2.2. Sea X, Y superficies de Riemann, $\rho : Y \rightarrow X$ holomorfa no constante es no ramificada si y solo si ρ es homeomorfismo local.

Teorema 1.4.2.3. Sean X, Y, Z superficies de Riemann, $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente no ramificada, $f : Z \rightarrow X$ holomorfa entonces cada levantamiento es holomorfo.

Definición 1.4.2.2. Sea Y espacio topológico y $G < \text{Aut}(Y)$. Sea $X = Y/G$ y $p : Y \rightarrow X$ dado por $y \mapsto Gy$. X con la topología cociente. Supongamos que G actúa libre y discontinuamente en Y , excepto en un conjunto discreto $\{y_m\} \subset Y$. Sea $X^\circ = X \setminus \{p(y_m)\}$ y $Y^\circ = Y \setminus \{y_m\}$, decimos que $p : Y \rightarrow X$ es un **cubriente ramificado** con puntos de ramificación $\{y_m\}$ (o $\{p(y_m)\}$) si

- $p : Y^\circ \rightarrow X^\circ$ es un cubriente no ramificado con $G = \text{Deck}(Y^\circ \rightarrow^p X^\circ)$
- Para cada punto ramificado y_m , el grupo $\text{Isot}_G(y_m)$ es finito y hay un disco topológico $U \ni y_m$ tal que U es precisamente invariante bajo $\text{Isot}_G(y_m)$

Para cada punto de ramificación y , el número de ramificación es el orden de $\text{Isot}_G(y)$

Definición 1.4.2.3. Una **superficie de Riemann disconexa** es la unión disjunta de, a lo más, un número finito de superficies de Riemann

Definición 1.4.2.4. Una **superficie de Riemann (disconexa) marcada** es una superficie de Riemann S con un conjunto discreto especial $T \subset S$, cada $y_m \in T$ se marca con un orden $\alpha_m \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ o número de ramificación. Denotamos $^\circ S = S \setminus T$

Cada superficie de Riemann marcada. Tiene un cubriente ramificado simplemente conexo con puntos de ramificación $\{y_m\}$ y números de ramificación $\{\alpha_m\}$ si $\alpha_m \neq \infty$. Si $\alpha_m = \infty$ entonces y_m se borra de la superficie.

Definición 1.4.2.5. *Una superficie de Riemann homeomorfa a una superficie sin frontera, compacta se denomina **cerrada**.*

Definición 1.4.2.6. *Una superficie de Riemann se dice **de tipo finito** si es cerrada y tiene un número finito de puntos removidos.*

Teorema 1.4.2.4 (de finitud de Ahlfors). *Si $G < \text{Aut}(Y)$ es un grupo Kleiniano finitamente generado, entonces $\Omega(G)/G$ es una superficie de Riemann disconexa marcada, donde cada componente es una superficie de Riemann de tipo finito*

Con esto se tiene que el cociente de un grupo Kleiniano con su región de discontinuidad será una superficie de Riemann disconexa marcada. Si el grupo Kleiniano resulta ser libre, dará como resultado que el cociente sea una superficie de Riemann disconexa.

Un ejemplo de una superficie de Riemann marcada es el generado por un elíptico y el espacio cociente con el grupo modular. Ejemplo de una superficie de Riemann disconexa marcada es con el grupo modular; en el ejemplo solo se utilizó una parte de la región de discontinuidad que era $\mathbb{H}^+$ y la región era $\mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$, el resultado del cociente es el espacio $\mathbb{H}^+ / PSL(2, \mathbb{Z})$ repetido dos veces "pegado" en el punto ∞ . Un ejemplo de superficie de Riemann disconexa sería el mismo espacio del grupo modular aplicándole el lema de Selberg.

Capítulo 2

Teoría de grupos Kleinianos n-dimensionales

Al trabajar en la teoría clásica, que consiste en trabajar en $\hat{\mathbb{C}}$, es natural ver si esta teoría se puede extender a dimensiones superiores. Como se tiene que la esfera de Riemann es homeomorfa a la esfera S^2 y también es homeomorfa a la línea proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$. Para estudiar sus generalizaciones, se pensaría en subir la dimensión de estos espacios; el problema es que $\mathbb{CP}^n \cong S^{n+1}$ solo para $n = 1$. Por lo tanto, a la hora de generalizar la teoría clásica, se debe escoger el espacio en el que se quiera trabajar. Las opciones son trabajar la teoría en las esferas S^n o en los espacios proyectivos complejos $\mathbb{CP}^n$, que generan teorías similares, pero con algunas diferencias bastante marcadas.

Como objetivo de este capítulo, se trabajará en las esferas S^n vistas también como $\hat{\mathbb{R}}^n$ y con ello generar una teoría siguiendo los pasos que se hicieron en el capítulo anterior.

2.1. Espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$

Para empezar, se debe entender de dónde viene el espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$, el cual se obtiene de compactificar el espacio $\mathbb{R}^n$ con una compactificación en específico. Primero se define qué es una compactificación.

Definición 2.1.0.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $((X', \tau'), f)$ es una **compactificación** de X si cumple que:

- (X', τ') es un espacio topológico compacto
- Existe un embebimiento $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$
- $f(X)$ es denso en X'

Teorema 2.1.0.1. Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto y sea $y \notin X$. Se define el conjunto $\hat{X} = X \cup \{y\}$ y

$$\hat{\tau} = \tau \cup \{A \subset \hat{X} : y \in A, \hat{X} \setminus A \text{ es compacto en } X\}$$

Entonces $((\hat{X}, \hat{\tau}), i)$ es una compactificación de X , donde i es la aplicación inclusión. Esta compactificación se le llama **compactificación de Alexandroff** o compactación por un punto.

Por lo general, el punto que se agrega para generar la compactificación de Alexandroff se le denota por ∞ . Con esto se puede ver que $\hat{\mathbb{C}}$ es el espacio que se obtiene al compactificar a $\mathbb{C}$ con la compactificación de Alexandroff.

Con la compactificación de Alexandroff a $\mathbb{R}^n$ se obtiene el espacio $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, que será el espacio que se utilizará principalmente en este capítulo.

2.1.0.1. Características de $\hat{\mathbb{R}}^n$

Al ser este el espacio con el cual se trabajará, se describirán algunas características del espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$.

Se considera la función $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ definida como:

$$\phi(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \quad (2.1)$$

$$\phi(\infty) = (0, \dots, 0, 1)$$

donde S^n es la esfera unitaria centrada en el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 2.1.0.2. El homeomorfismo $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ se le llama **proyección estereográfica n-dimensional**.

Definición 2.1.0.3. Un espacio métrico X es llamado **finitamente compacto** si todas las bolas cerradas $\overline{B_r(x)} = \{y \in X | d(x, y) < r\}$ son compactas

Definición 2.1.0.4. Un espacio topológico X es **separable** si incluye un subconjunto denso numerable

El espacio $\hat{\mathbb{R}}^n$ es un espacio finitamente compacto y separable. Es claro que es finitamente compacto, pues las bolas cerradas $\overline{B_r(x)}$ son cerradas y acotadas y, por el teorema de Heine-Borel estas son compactas. Y para ver que es separable, basta con observar que $\mathbb{R}^n$ es separable, siendo $\mathbb{Q}^n$ un espacio denso y numerable de $\mathbb{R}^n$ y para $\hat{\mathbb{R}}^n$ se toma a $\mathbb{Q}^n \cup \{\infty\}$ que será un conjunto denso y numerable en $\hat{\mathbb{R}}^n$ y, por ende, $\hat{\mathbb{R}}^n$ será separable.

2.2. Grupo de reflexiones

Al ser esta una generalización del caso clásico, se debe tener un grupo de automorfismos de $\hat{\mathbb{R}}^n$. Este grupo debe tener características similares a las que tiene el grupo de transformaciones de Möbius del caso clásico, que si recordamos, este grupo era conformal y sus elementos son biholomorfismos. Como el grupo debe actuar en $\hat{\mathbb{R}}^n$, la propiedad de que las transformaciones sean biholomorfismos no tiene mucho sentido, pues no se anda trabajando con $\mathbb{C}$ o algún espacio relacionado con $\mathbb{C}$. Con esto se buscarán automorfismos que sean conformales en $\hat{\mathbb{R}}^n$ para ello se enunciará la siguiente definición.

Definición 2.2.0.1. Una **esfera generalizada** de dimensión k en $\hat{\mathbb{R}}^n$ es una esfera euclidiana de $\mathbb{R}^n$ o será un plano de dimensión k -dimensional cuando contenga a ∞ . A la esfera generalizada de dimensión $n - 1$ se le llamará simplemente esfera generalizada.

Con las esferas generalizadas podemos definir lo que son las reflexiones en $\hat{\mathbb{R}}^n$, que serán los automorfismos con los que se trabajarán. Con esto se tendrán dos tipos de reflexiones, en base a una esfera euclidiana y un hiperplano.

Si Σ es una esfera generalizada en $\hat{\mathbb{R}}^n$ y además es una esfera euclidiana, entonces tiene un radio r y un centro $p \in \mathbb{R}^n$. El automorfismo lo denotaremos por

$$\sigma_{\Sigma} : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$$

y está definida como:

$$\sigma_{\Sigma}(x) = \frac{r^2(x - p)}{\|x - p\|^2} + p \quad (2.2)$$

Y si Σ contiene al punto ∞ entonces debe ser un plano en $\mathbb{R}^n$ y este debe pasar por un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y tener un vector ortogonal $v \in S^{n-1}$. Entonces la reflexión es de la siguiente forma:

$$\sigma_{\Sigma}(x) = x - 2[(x - p) \cdot v]v \quad (2.3)$$

Definición 2.2.0.2. *Se define el grupo de reflexiones de $\hat{\mathbb{R}}^n$ generados por las reflexiones en las esferas generalizadas y se le denota por $\hat{\mathbb{M}}^n$. El subgrupo de índice dos de los difeomorfismos que preservan la orientación es $\mathbb{M}^n$ y a sus elementos se les llama **transformaciones de Möbius** y a los de $\hat{\mathbb{M}}^n \setminus \mathbb{M}^n$ se les llama **transformaciones extendidas de Möbius**.*

Se puede observar que en el caso clásico el grupo con el que se trabajó eran exclusivamente las transformaciones de Möbius (el grupo $\mathbb{M}^2$) y no se consideraban las extendidas ($\hat{\mathbb{M}}^2 \setminus \mathbb{M}^2$). Esto se debe a que en ese caso se trabajó en $\mathbb{C}$ en vez de $\mathbb{R}^2$, pidiendo que el grupo con el que se trabaja sean transformaciones biholomorfas, descartando así las transformaciones antibiholomorfas (el equivalente de las transformaciones extendidas de Möbius) que se consiguen al componer todo el grupo $Möb(\mathbb{C})$ con la conjugación compleja. Esto tiene como consecuencia que el grupo $Möb(\mathbb{C})$ preserve la orientación, la cual es necesaria para construir superficies de Riemann.

Al igual que en $\hat{\mathbb{C}}$, el grupo $\hat{\mathbb{M}}^n$ se puede clasificar de una manera similar a como se hace con $Möb(\mathbb{C})$.

Proposición 2.2.0.1. *El grupo $\hat{\mathbb{M}}^n$ está generado por:*

- **Traslaciones:** $t(x) = x + a$, donde $a \in \mathbb{R}^n$
- **Dilataciones:** $t(x) = \lambda x$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$
- **Rotaciones:** $t(x) = O(x)$, donde $O \in SO(n, \mathbb{R})$
- **Inversión:** $t(x) = x/||x||^2$

Demostración. Primero se debe ver que las cuatro transformaciones están en $\hat{\mathbb{M}}^n$. Es claro que la inversión está, pues es la reflexión en la esfera de radio 1 y centro en el origen. La traslación se obtiene al componer dos reflexiones generadas por hiperplanos que sean paralelos. La dilatación se obtiene al componer dos reflexiones que estén generadas por una esfera centrada en el origen y radios distintos. Y la rotación se obtiene al componer dos reflexiones generadas por hiperplanos y que sus vectores normales cumplan un cierto ángulo entre ellos.

Sea σ una reflexión. Supóngase que Σ está generado por una esfera Euclidiana; entonces σ es de la forma

$$\sigma(x) = \frac{r^2(x - p)}{||x - p||^2} + p$$

Sean $f(x) = x + p$, $g(x) = r^2x$ y $h(x) = x/||x||^2$. Entonces la composición $f \circ g \circ h \circ f^{-1} = \sigma$

Para la reflexión σ' generada por un hiperplano Σ se tiene que $\sigma' = O \circ f \circ g \circ h \circ f^{-1}$ donde O es una rotación que manda algún punto de Σ a ∞ . ■

Viendo el grupo $Möb(\mathbb{C})$, la inversión $1/z$ no es la inversión $x/||x||^2$, pues de hecho $f(z) = 1/z$ es la composición de $g \circ h$, donde $g(z) = z/||z||^2$ y $h(z) = \bar{z}$, que son dos reflexiones.

Proposición 2.2.0.2. *Toda transformación (extendida) de Möbius es un difeomorfismo*

Proposición 2.2.0.3. *Toda transformación (extendida) de Möbius manda esferas generalizadas k-dimensionales en esferas generalizadas k-dimensionales.*

Proposición 2.2.0.4. *Las transformaciones (extendidas) de Möbius son conformales (anti-conformales) en $\hat{\mathbb{R}}^n$.*

Teorema 2.2.0.5 (Teorema de Louville). *Para $n \geq 3$. Sean $U, V \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ abiertos conexos y no vacíos. Entonces toda función inyectiva conformal (anti-conformal) $f : U \rightarrow V$ es la restricción de una transformación (extendida) de Möbius.*

Gracias al teorema de Louville se tiene que para cualquier abierto U de $\hat{\mathbb{R}}^n$, el grupo de automorfismos conformales y anti-conformales $Aut(U)$ de U es un subgrupo de $\hat{\mathbb{M}}^n$. En particular, se tendrá que $Aut(\hat{\mathbb{R}}^n) = \hat{\mathbb{M}}^n$.

Proposición 2.2.0.6. *Sea $t \in \hat{\mathbb{M}}^n \setminus \{id\}$ con al menos un punto fijo, entonces existe un elemento de $\hat{\mathbb{M}}^n$, un $\lambda > 0$, un $a \in \mathbb{R}^n$ y una matriz ortogonal tal que:*

$$s \circ t \circ s^{-1}(x) = \lambda O(x) + a \quad (2.4)$$

Con esta proposición se puede generar una clasificación de los elementos de $\hat{\mathbb{M}}^n$ que tengan un punto fijo en $\hat{\mathbb{R}}^n$.

2.2.1. Clasificación de las transformaciones de Möbius n-dim

Definición 2.2.1.1. *Una **transformación parabólica** es una transformación de Möbius t que tiene solo un punto fijo. Si t es una transformación extendida de Möbius con un solo punto fijo se le llamara transformación pseudo-parabólica.*

Una transformación de Möbius parabólica es conjugada a la transformación:

$$t(x) = O(x) + a$$

donde O es una matriz ortogonal y $a \in \mathbb{R}^n$.

Si la transformación Möbius tiene al menos dos puntos fijos, entonces es conjugada de la transformación:

$$t(x) = \lambda O(x)$$

donde $\lambda > 0$ y O una matriz ortogonal.

Definición 2.2.1.2. *Si la transformación anterior se tiene que $\lambda \neq 1$ entonces diremos que es una **transformación loxodrómica**. Es una transformación pseudo-loxodrómica si la transformación es una extendida de Möbius.*

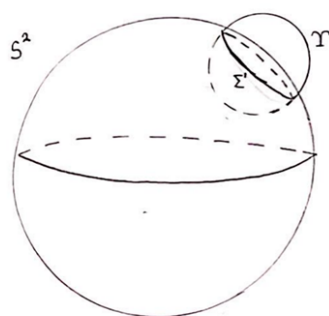
*En caso de que $\lambda = 1$ es una **transformación elíptica** y es una transformación pseudo-elíptica si la transformación es extendida de Möbius.*

Notar que la clasificación anterior es similar a la clasificación en el caso clásico, con la diferencia de que los elementos que no tengan puntos fijos ya que la proposición pide que se tenga al menos uno. Para dar una clasificación que contenga todos los elementos de $\hat{\mathbb{M}}^n$ se definirá primero un concepto muy importante para esta teoría que es la extensión de Poincaré.

2.3. Extensión de Poincaré

La idea de la extensión de Poincaré es que $\hat{\mathbb{M}}^n$ actúe apropiadamente en todo $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$. Al tener que $\hat{\mathbb{R}}^n$ es homeomorfo a $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $\hat{\mathbb{M}}^n$ actúa en $\hat{\mathbb{R}}^n$ tenemos que $\phi\hat{\mathbb{M}}^n$ actúa en S^n siendo un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Tomando la proyección estereográfica $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definida anteriormente y tomando $\sigma \in \hat{\mathbb{M}}^n$ como la reflexión que deja fija a la esfera generalizada $\Sigma \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ entonces $\psi = \phi \circ \sigma$ actúa en S^n y deja fija una esfera generalizada $\Sigma' \subset S^n$. Ahora con Σ' se puede tomar una esfera generalizada $\Upsilon \subset \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ tal que $S^n \cap \Upsilon = \Sigma'$ y además Υ es ortogonal a S^n .

FIGURA 2.1: Extensión de $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Definición 2.3.0.1. Sea $\sigma \in \hat{\mathbb{M}}^n$ una reflexión. la **extensión de Poincaré** de σ es la reflexión definida por la esfera generalizada Υ .

Con esta construcción se puede extender una transformación de Möbius n-dimensional a una (n+1)-dimensional, puesto que todas las transformaciones (extendidas) de Möbius son la composición de reflexiones; se extiende cada uno de los elementos de la composición y luego se compone en el mismo orden. De esta manera se puede hacer que una transformación que actúa en $\mathbb{R}^n$ pase y actúe en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Con la extensión de Poincaré se puede clasificar los elementos de $\hat{\mathbb{M}}^n$ de una manera más simple, que es la siguiente y que abarca a todos los elementos de $\hat{\mathbb{M}}^n$:

Definición 2.3.0.2. Sea $t \in \hat{\mathbb{M}}^n \setminus \{id\}$, entonces:

- t es parabólico si tiene exactamente un punto fijo en S^n .
- t es loxodrómico si tiene exactamente dos puntos fijos en S^n .
- t es elíptico si tiene un punto fijo en B^{n+1}

2.3.1. Espacio Hiperbólico

Antes de continuar, es necesario explicar el espacio hiperbólico; esto es por la propia construcción de la extensión de Poincaré. Se puede observar que la bola unitaria $(n+1)$ -dimensional B^{n+1} es invariante bajo las extensiones de una reflexión de $\hat{\mathbb{M}}^n$ y, al ser las reflexiones en una esfera ortogonal a S^n , se nota que estas reflexiones son reflexiones sobre las geodésicas del espacio hiperbólico.

Para entender mejor lo anterior, se debe definir el espacio hiperbólico. Para ello se toma una esfera generalizada $S \subset \hat{\mathbb{R}}^n$. S divide a $\hat{\mathbb{R}}^n$ en dos conjuntos abiertos y conexos. Definimos la bola generalizada $\mathcal{H}^n$ como uno de estos abiertos.

Un **plano hiperbólico** k-dimensional de $\mathcal{H}^n$ es la intersección de $\mathcal{H}^n$ con una k-esfera generalizada que es ortogonal a S . Un plano hiperbólico 1-dimensional es también llamado una **línea hiperbólica**.

Sea $L = \mathcal{H}^n \cap \Sigma$ una línea hiperbólica, donde Σ es un círculo generalizado ortogonal a S . Los puntos de la intersección $S \cap \Sigma$ son llamados los **puntos finales** de la línea hiperbólica L .

Dado dos puntos $x, y \in \mathcal{H}^n$, definimos su distancia hiperbólica $d_{\mathcal{H}}(x, y)$ de la siguiente manera:

- (1) Si $x = y$, entonces $d_{\mathcal{H}}(x, y) = 0$
- (2) Si $x \neq y$, entonces existe un único círculo generalizado Σ ortogonal a S tal que $x, y \in \Sigma$. Denotemos por a y b los puntos finales de la línea hiperbólica $L_{x,y} = \mathcal{H}^n \cap \Sigma$. Definimos:

$$d_{\mathcal{H}}(x, y) = \ln[a, x; y, b] = \ln \left(\frac{d(x, b)d(a, y)}{d(x, a)d(b, y)} \right) \quad (2.5)$$

A $[a; x : y; b]$ se le llama razón cruzada.

Definición 2.3.1.1. Si $\mathcal{H}^n$ es una bola generalizada en $\hat{\mathbb{R}}^n$, entonces el par $(\mathcal{H}^n, d_{\mathcal{H}})$ es llamado un **modelo del espacio hiperbólico n-dimensional**.

Con esta construcción del espacio hiperbólico, generaliza las construcciones del plano hiperbólico por el modelo de la bola unitaria y el del modelo del semiespacio superior. El de la bola unitaria es claro, pues es una esfera generalizada de $\hat{\mathbb{R}}^n$, y el del semiespacio superior es con una esfera generalizada que es el eje x (una recta) unido con infinito.

Por simplicidad, los modelos que se utilizarán son los de la bola unitaria B^n y la del semiespacio superior $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$.

Teorema 2.3.1.1. *Sea $f : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ una función biyectiva. $f \in \hat{\mathbb{M}}^n \Leftrightarrow f$ preserva la razón cruzada.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Al ser las traslaciones y rotaciones isometrías Euclidianas, estas preservan la razón cruzada. Si es una dilatación, entonces es una similitud, la cual también dejará invariante a la razón cruzada (cada distancia aumenta por un factor λ , el cual se cancela al tener la razón cruzada). La inversión $I(x) = x/||x||^2$ satisface que $||I(x) - I(y)|| \cdot ||x|| \cdot ||y|| = ||x - y||$ con lo cual terminará preservando la razón cruzada.

($\Leftarrow$) Supóngase que f es una función biyectiva en $\hat{\mathbb{R}}^n$ y que además preserve la razón cruzada. Al componerla por una transformación de Möbius, se puede asumir que $f(\infty) = \infty$. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$, se tiene que

$$\frac{||f(x) - f(y)||}{||x - y||}$$

es constante, dígase $k > 0$. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ distintos. Como f preserva la razón cruzada, se tiene que

$$[f(x), \infty; f(u), f(v)] = [x, \infty, u, v]$$

$$[f(x), f(y); f(u), \infty] = [x, y, v, \infty]$$

con lo cual se obtiene que

$$\frac{||f(x) - f(y)||}{||x - y||} = \frac{||f(u) - f(v)||}{||u - v||}$$

Se toma la función $g(x) = \frac{1}{k}f(x)$ la cual cumple que $||g(x) - g(y)|| = ||x - y||$ para $x \neq y$. Con esto se tiene que g es una isometría Euclidiana, entonces $g(x) = O(x) + a$, con O una matriz ortogonal y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces $f(x) = k(x) + ka$, la cual es una transformación (extendida) de Möbius. ■

Utilizando el teorema anterior y utilizando otras propiedades de las transformaciones (extendidas) de Möbius se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1.2. $Isom(\mathcal{H}^{n+1}) = \hat{\mathbb{M}}^n$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $f \in \hat{\mathbb{M}}^n$, se le aplica la extensión de Poincaré haciendo que $f \in \hat{\mathbb{M}}^{n+1}$ la cual manda esferas generalizadas k-dim en esferas generalizadas k-dim y como f deja invariante a una esfera generalizada de $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ y es conformal, f deja invariante al interior y al exterior de la esfera que deja invariante dejando que $f \in \text{Aut}(\mathcal{H}^{n+1})$ siendo este el grupo de automorfismos conformales de $\mathcal{H}^{n+1}$. f también preserva la razón cruzada y como las isometrías hiperbólicas están definidas por la razón cruzada se concluye que $f \in \text{Isom}(\mathcal{H}^{n+1})$

($\Rightarrow$) Sea f una isometrías hiperbólica, entonces f debe de preservar la razón cruzada y por ende $f \in \hat{\mathbb{M}}^{n+1}$, entonces f es conformal y al ser una isometrías hiperbólica, f deja invariante a $\mathcal{H}^{n+1}$, entonces $f \in \text{Aut}(\mathcal{H}^{n+1})$, entonces $f(\hat{\mathbb{R}}^n) = \hat{\mathbb{R}}^n$ y la restricción de f en $\hat{\mathbb{R}}^n$ es un automorfismo conformal (anticonformal) de $\hat{\mathbb{R}}^n$, entonces $f \in \hat{\mathbb{M}}^n$. Con lo que se concluye que $\text{Isom}(\mathcal{H}^{n+1}) = \hat{\mathbb{M}}^n$ ■

Con este teorema obtenemos que, al hablar de grupos Kleinianos (los cuales más adelante se van a definir), pueden ser vistos como un grupo que actúa de manera conformal en la esfera unitaria S^n o como un grupo de isometrías hiperbólicas en $\mathcal{H}^{n+1}$. Este resultado obtendrá más fuerza cuando se hable de variedades hiperbólicas.

2.4. Región de discontinuidad y conjunto límite

Para definir el concepto de grupo Kleiniano, es necesario recordar unos conceptos vistos en el capítulo anterior.

Definición 2.4.0.1. Sea G un grupo que actúa en X . La acción de G se le llama **acción propia y discontinuamente** en X si para cada subconjunto compacto $K \subset X$ se tiene que la cantidad de elementos $g \in G$ tales que $g(K) \cap K \neq \emptyset$ es finita.

Definición 2.4.0.2. Sea G un grupo que actúa en X . La acción de G se le llama **acción discontinuamente** en X si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U , con $x \in U$, tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ solo para un número finito de $g \in G$. La **región de discontinuidad** de G es el conjunto $\Omega \subset X$ formado por los puntos donde G actúa discontinuamente.

Las definiciones anteriores están dadas para espacios topológicos en general y tienen características importantes que ahora enunciamos.

Proposición 2.4.0.1. *Sea G un grupo de automorfismos de X y sea $\Omega \subset X$ su región de discontinuidad. entonces Ω es un abierto invariante bajo la acción de G .*

Proposición 2.4.0.2. *Si X es localmente compacto, entonces toda acción propia y discontinuamente es una acción discontinua.*

Demostración. Como X es localmente compacto, existe un abierto U tal que su cerradura K sea compacta. Sea G un grupo que actúa propia y discontinuamente en X . Entonces, para $x \in X$, para todo compacto K que contenga a x , $g(K) \cap K \neq \emptyset$ para una cantidad finita de $g \in G$. En particular, se tendrá que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ para una cantidad finita de $g \in G$. ■

Definición 2.4.0.3. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es llamado **discreto** si cada punto de A tiene una vecindad que solo corta a A en tal punto.*

Proposición 2.4.0.3. *Sea X un espacio métrico localmente compacto y $G < \text{Isom}(X)$ un subgrupo de isometrías de X . Entonces G actúa propia y discontinuamente en X si y solo si:*

- G_x es finito para toda $x \in X$.
- $G(x)$ es un conjunto cerrado y discreto en X para cada $x \in X$.

De hecho, esta proposición también es válida para la acción discontinua ([11]), lo que termina generando que, para X un espacio localmente compacto y se tiene un grupo de isometrías G , G actúa discontinuamente en X si y solo si G actúa propia y discontinuamente en X .

Vistas ya algunas propiedades de la región de discontinuidad, definimos la región de discontinuidad para el caso particular en esferas para definir el conjunto límite.

Definición 2.4.0.4. Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un subgrupo dado. Se denotará por $\Omega(G) \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ al conjunto de puntos donde G actúa discontinuamente, se le llamara **región de discontinuidad** de G . El complemento de la región de discontinuidad en $\hat{\mathbb{R}}^n$ se le llamara **conjunto límite** y se le denotara por $\Lambda(G)$.

Proposición 2.4.0.4. Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$. entonces $\Omega(G)$ es un abierto de $\hat{\mathbb{R}}^n$ y $\Lambda(G)$ es un compacto.

Demostración. Es claro que la región de discontinuidad $\Omega(G)$ es abierto, por el lema 2.5.0.1 y el conjunto límite $\Lambda(G)$ al ser el complemento de un conjunto abierto, este será cerrado y como este conjunto se puede ver como un abierto en S^n que está contenido en $\mathbb{R}^{n+1}$, este es acotado y por ende es compacto. ■

Proposición 2.4.0.5. $\Omega(G)$ y $\Lambda(G)$ son conjuntos invariantes.

Demostración. Por la proposición 2.4.0.1, el conjunto $\Omega(G)$ es invariante. Para ver que $\Lambda(G)$ es invariante, suponemos que no es invariante. Entonces existe un punto $x \in \Lambda(G)$ y un $g \in G$ tal que $g(x) \in \Omega(G)$. Como G es un grupo, g tiene un inverso $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = id$ y con esto se tiene que $g^{-1}(g(x)) = x \in \Lambda(G)$. Entonces $\Omega(G)$ no es invariante y, por lo tanto, es una contradicción; entonces $\Lambda(G)$ debe ser invariante. ■

2.5. Grupos discretos y Kleinianos

Teniendo ya la definición de región de discontinuidad y conjunto límite. Se definirá lo que es un grupo discreto para después definir lo que es el grupo Kleiniano.

Definición 2.5.0.1. Sea G un subgrupo de un grupo topológico K . G se le llamara un **grupo discreto** si no se puede encontrar una sucesión de elementos distintos en G que converja a algún elemento de K .

Teorema 2.5.0.1. Si X es un espacio métrico finitamente compacto y separable, entonces un subgrupo $G < Isom(X)$ es discreto si y solo si actúa propiamente discontinuamente.

Definición 2.5.0.2. Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un subgrupo que actúa discontinuamente en algún punto de $\hat{\mathbb{R}}^n$. Entonces G se le llamara **grupo Kleiniano n-dimensional**. Por simplificación a estos grupos se les seguirá llamando solo grupos Kleinianos

2.5.1. Ejemplos de grupos Kleinianos

2.5.1.1. Grupos de Schottky

Sean $C_1, C'_1, \dots, C_m, C'_m$ una colección de esferas topológicas en $\hat{\mathbb{R}}^n$ de dimensión $n - 1$ y que sean disjuntas, con $m \geq 1$. La intersección de los exteriores de todas las esferas topológicas genera un dominio que se le llamará D . Para cada k , con $1 \leq k \leq g$, suponemos que se tiene una transformación de Möbius g_k tal que cumplen lo siguiente:

- $g_k(C_k) = C'_k$
- $g_k(D) \cap D = \emptyset \quad \forall k \in 1, \dots, m$

El grupo $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ de transformaciones de Möbius se le llama **grupo de Schottky** de género m .

Cuando las esferas topológicas son esferas generalizadas, a los generadores se les llama **generadores clásicos** y a G se le llamará grupo de Schottky clásico.

2.5.1.2. Grupos Fuchsianos

Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ que deja invariante a una bola generalizada $B \in \hat{\mathbb{R}}^n$; se le llamará **grupo Fuchsiano**. Se puede observar que a todo grupo discreto de $\hat{\mathbb{R}}^n$, al momento de aplicarle la extensión de Poincaré, este grupo se vuelve un grupo Fuchsiano en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Ejemplos de estos grupos vienen siendo cualquier grupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$, al cual se le aplica la extensión de Poincaré.

2.5.1.3. Grupos cuasi-Fuchsianos

Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo Kleiniano tal que $\Omega(G) = B_1 \cap B_2$, donde B_1 y B_2 son bolas topológicas y además $\partial B_1 = \partial B_2 = S$ es una esfera topológica (un espacio topológico que es homeomorfo a S^n). A este tipo de grupos se les llama **grupo cuasi-Fuchsiano**.

2.5.2. Propiedades de grupos discretos y Kleinianos

Se verán ahora algunas propiedades interesantes de los grupos Kleinianos y también de grupos discretos.

Proposición 2.5.2.1. *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ y H un subgrupo de índice finito en G . Entonces G es discreto si y solo si H es discreto.*

Demostración. Es claro que si G es discreto, H también lo será. Sea H un subgrupo discreto de G y también H es de índice finito; entonces existe una cantidad finita de clases laterales de H sobre G . Dígase que las clases laterales son $g_1H, g_2H, \dots, g_mH$. Supóngase que G no es discreto; entonces existe una sucesión de elementos distintos $\{\gamma_m\}$ que converge a la identidad. Como H es de índice finito en G , en alguna clase lateral existe una infinidad de elementos de $\{\gamma_m\}$; supóngase sin pérdida de generalidad que es en H . Entonces esos elementos generan una subsucesión $\{\gamma_{m_k}\}$ de $\{\gamma_m\}$, entonces γ_{m_k} converge a la identidad, lo que implica que H no es discreto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, G es discreto ■

Proposición 2.5.2.2. *$G < \hat{\mathbb{M}}^n$ y denotamos por $\hat{G} < \hat{\mathbb{M}}^{n+1}$ una extensión de Poincaré de G . Entonces G es discreto si y solo si $\hat{G}$ es discreto.*

Proposición 2.5.2.3. *Sean $f, g \in \mathbb{M}^n \setminus \{id\}$. Si f es loxodrómica y ambas tienen exactamente un punto fijo en común, entonces el grupo generado por ellas no es discreto.*

Proposición 2.5.2.4. *sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo discreto y consideremos una sucesión $\{g_m\} \in G$ de elementos diferentes. entonces existen puntos límites $x, y \in \Lambda(G)$ y una subsucesión $\{g_{m_k}\}$ al que*

(i) $g_{m_k}(z)$ converge a x uniformemente en compactos de $\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{y\}$

(ii) $g_{m_k}^{-1}(z)$ converge a y uniformemente en compactos de $\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{x\}$

Proposición 2.5.2.5. *Sea G un grupo Kleiniano, entonces $\Lambda(G)$ es denso en ninguna parte.*

Teorema 2.5.2.6. *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo discreto. Entonces $\Lambda(G)$ tiene cuatro posibilidades: (i) es vacío, (ii) contiene un solo punto, (iii) tiene dos puntos o (iv) es infinito.*

Demostración. Si G es generado por un elíptico racional, parabólico y elíptico, dará que $\Lambda(G)$ es vacío, de orden 1 y orden 2 respectivamente. Supóngase que $|\Lambda(G)| \geq 3$, entonces G debe ser de orden infinito; entonces se puede extraer una sucesión $g_m \in G$ de elementos distintos, utilizando la proposición anterior, donde hay un punto $z \in \Lambda(G) \setminus \{x, y\}$ donde la órbita de z por la sucesión g_m está en $\Lambda(G)$ y dará que $|\Lambda(G)| = \infty$. ■

Definición 2.5.2.1. *Si G es discreto y $\Lambda(G)$ contiene al menos tres puntos, entonces decimos que G es un **grupo no-elemental**; en caso contrario, se dice que G es un **grupo elemental***

Proposición 2.5.2.7. *Si $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ es un grupo Kleiniano con $|\Lambda(G)| \geq 2$, entonces G contiene un elemento loxodrómico.*

Proposición 2.5.2.8. *Sea G un grupo Kleiniano n -dimensional; entonces G es discreto.*

Proposición 2.5.2.9. *Si $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ es un grupo Kleiniano, entonces tenemos que $x \in \Lambda(G)$ si y solo si existe un punto $p \in \hat{\mathbb{R}}^n$ y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos diferentes de G tales que $g_m(p)$ converge a x .*

Demostración. Es claro que el resultado se cumple si G es elemental.

($\Rightarrow$) Sea $x \in \Lambda(G)$; entonces, si G_x es infinito, entonces $p = x$ y la sucesión se construye con elementos de G_x . Si G_x es finito, como $x \in \Lambda(G)$, se tiene que para cualquier bola abierta centrada en x existe una infinidad de elementos que cumplen con $g(B) \cap B \neq \emptyset$.

Se toma a $g_m \in G$ tal que $g_m \notin G_x$ y $g_m(B_m) \cap B_m \neq \emptyset$, donde B_m es la bola centrada en x y radio $1/m$. Se toma al punto $g_1(x)$ y se toma a la sucesión $\{h_m\}$, donde $h_m = g_m \circ g_1^{-1}$. Como el radio de las bolas B_m converge a 0, la sucesión $h_m(g_1(x)) \rightarrow x$, y ya nomás se toma a $p = g_1(x)$.

($\Leftarrow$) Supóngase que se tiene un punto $p \in \hat{\mathbb{R}}^n$ y una sucesión $\{g_m\} \in G$ de elementos distintos tal que $g_m(p) \rightarrow x$. Entonces, para cualquier vecindad U de x , existe un entero $M > 0$ tal que para cada $m > M$ se tiene que $g_{m+1} \circ g_m^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$. Entonces existe una infinidad de elementos distintos tal que $h_m(U) \cap U \neq \emptyset$ con $h_m = g_{m+1} \circ g_m^{-1}$. Entonces $x \notin \Omega(G)$, entonces $x \in \Lambda(G)$. ■

Proposición 2.5.2.10. *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo Kleiniano. Entonces G contiene solo elementos elípticos si y solo si G es finito*

Proposición 2.5.2.11. *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo Kleiniano no-elemental. Entonces G contiene dos transformaciones loxodrómicas $f, g \in G$, de manera que $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$*

Teorema 2.5.2.12. *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo discreto y sea $\varphi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S$ una proyección estereográfica, donde $S \subset \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ es una esfera generalizada. Entonces la extensión de Poincaré de G en $\hat{\mathbb{M}}^{n+1}$ es un grupo Kleiniano $(n+1)$ -dimensional; más aún, $\Lambda(G) \subset S$.*

Demostración. Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo discreto que actúa sobre $\hat{\mathbb{R}}^n$. Por un teorema anterior se tiene que la extensión de Poincaré de G será un grupo discreto; para que $\hat{G}$ sea Kleiniano, bastará ver que tiene región de discontinuidad no vacía. Tomamos la proyección estereográfica $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S$ con $S \subset \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ una esfera generalizada. Como S divide a $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ en dos bolas generalizadas, tomamos a $B \subset \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ como una de ellas y también la métrica hiperbólica d_B sobre B . Se puede ver que la bola generalizada B es separable y es finitamente compacto. Como al extender el grupo G por medio de la extensión de Poincaré, el grupo $\hat{G}$ es un grupo de isometrías en B con la métrica hiperbólica d_B y además es discreto, al ser B separable y finitamente compacto, podemos concluir que $\hat{G}$ es propiamente discontinuo en B y, al ser B localmente compacto, actuar propiamente discontinuamente implica actuar discontinuamente; entonces la región de discontinuidad $\Lambda(\hat{G})$ es no vacía y, por lo tanto, $\hat{G}$ es un grupo Kleiniano $(n+1)$ -dimensional. Como esto sucede también en la otra bola generalizada B' que acota S , tenemos que $B \cup B' \subset \Omega(\hat{G})$; por lo tanto, $\Lambda(\hat{G}) \subset S$. ■

Lema de Selberg

Proposición 2.5.2.13. *Si $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ es un grupo discreto y H un subgrupo de índice finito de G , entonces $\Omega(G) = \Omega(H)$ y $\Lambda(G) = \Lambda(H)$.*

Corolario 2.5.2.14. *Si $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ es un grupo discreto y H un subgrupo de índice finito en G , G es Kleiniano si y solo si H lo es.*

Teorema 2.5.2.15 (lema de Selberg). *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo finitamente generado por transformaciones (extendidas) de Möbius. Entonces es posible encontrar un subgrupo sin torsión $H < G$ que es normal y tiene índice finito.*

2.6. Cociente

Sea G un grupo de homeomorfismos actuando discontinuamente en un espacio topológico X . Se puede definir una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$$x \equiv y \iff \exists g \in G \text{ tal que } g(x) = y$$

Se denota por X/G al conjunto de las clases de equivalencia de la relación anterior y por:

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

a la proyección natural que asocia a cada $x \in X$ su clase de equivalencia. Si dotamos a X/G de la topología cociente, entonces tenemos que π es continua. Por otra parte, si $V \subset X$ es un abierto, entonces tenemos que:

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \cup_{g \in G} g(V)$$

es un abierto, ya que cada $g \in G$ es un homeomorfismo, y también π es una función abierta.

Al igual que en la teoría clásica, el tratar de sacar el cociente de $\hat{\mathbb{R}}^n$ con un grupo Kleiniano G , el espacio resultante no siempre será un espacio Hausdorff, el cual es necesario para que el resultado al sacar el cociente sea una variedad. Por lo tanto, se necesita obtener otro espacio para lograr esto y, al igual que en el caso clásico, ese espacio es la región de discontinuidad.

Teorema 2.6.0.1. *Si $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ es un grupo Kleiniano con región de discontinuidad $\Omega \neq \emptyset$. Entonces Ω/G es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Si G es un grupo Kleiniano finito, es claro que el cociente $\Omega(G)/G$ será Hausdorff. Suponemos que G es infinito. Si $x \in \Omega(G)$, entonces existe una bola abierta centrada en x , dígase $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset \Omega(G)$, de tal manera que $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$, excepto para un número finito de elementos de G .

Si se tienen $x, y \in \Omega(G)$ tales que $\pi(x) \neq \pi(y)$, se tienen bolas abiertas disjuntas U_x, U_y con $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$, $g(U_y) \cap U_y = \emptyset$, excepto para un número finito de elementos de G . Como $U_y \subset \Omega(G)$ y los trasladados $g(U_x)$ no se pueden acumular en ninguna parte en $\Omega(G)$, se tiene que $g(U_x) \cap U_y = \emptyset$ excepto para un número finito de elementos de G y, de manera similar, se tiene que $g(U_y) \cap U_x = \emptyset$ excepto para un número finito de elementos de G . Como $\Omega(G)$ es Hausdorff, existe un abierto V que contiene a $g'(x)$, donde g' es uno de los trasladados que hace que $g'(U_x) \cap U_y \neq \emptyset$, y un V' que contiene a y tales que $V \cap V' = \emptyset$, y con ello tomemos a los abiertos $g'(U_x) \cap V$, que contiene a $g'(x)$, y $U_y \cap V'$, que contiene a y , y con ello se tiene un abierto de x , llámese W , que cumple que $g(W) \cap (U_y \cap V') = \emptyset$ excepto para una cantidad finita de elementos de G . Nótese que los trasladados que no cumplen con la igualdad deben estar contenidos en los elementos que no lo cumplían con U_x y, además, esta cantidad debe ser menor que con la de U_x , ya que por mera construcción ya no está g' . Este proceso se repite por cada elemento que no cumpla con la igualdad y esto se puede hacer, pues se tiene una cantidad finita de ellos y con eso se tiene que $G(W_0) \cap V_0 = \emptyset$, donde $x \in W_0$, $y \in V_0$, y lo mismo se puede hacer para $G(V_1) \cap W_1 = \emptyset$ con $x \in W_0$, $y \in V_0$. Con esto se toma a $A = \pi(W_0)$ y a $B = \pi(V_0)$ como abiertos de $\Omega(G)/G$ y estos abiertos cumplen que $A \cap B = \emptyset$ con $\pi(x) \in A$, $\pi(y) \in B$ y con esto se tiene que $\Omega(G)/G$ es Hausdorff. ■

2.6.1. Región fundamental

Para facilitar el estudio del espacio cociente del grupo Kleiniano G con la región de discontinuidad $\Omega(G)$, se puede estudiar un pedazo del espacio y con este se puede entender de mejor manera cómo es el espacio cociente.

Definición 2.6.1.1. Sea G un grupo Kleiniano de $\hat{\mathbb{M}}^3$. A una región abierta $D \in \Omega(G)$ se le llamará **región fundamental** para la acción de G si satisface lo siguiente:

- D es precisamente invariante bajo la identidad
- Para todo $x \in \Omega(G)$ existe un $g \in G$ tal que $g(x) \in \overline{D}$
- ∂D consiste de posiblemente puntos límites de G y una colección finita o numerable de curvas, cada curva está contenida en $\Omega(G)$, excepto en uno o dos de sus extremos, la intersección de la curva con $\Omega(G)$ se le llama lado de D
- Las caras están emparejados por G , i.e, para cada lado S de D , existe un lado S' de D y $g \in G$ tal que $g(S) = S'$, además $(S')' = S$
- A lo más, un número finito de G -trasladados de D intersectan a cualquier compacto de $\Omega(G)$.

Con esto ya no se necesita ver el cociente con toda la región de discontinuidad y basta con tomar una "pequeña" región para estudiar el cociente.

Teorema 2.6.1.1. Si D es una región fundamental tal que D es convexo y localmente finito para un grupo discreto G de isometrías de X , entonces $\overline{D}$ es un poliedro convexo.

Un poliedro será un subconjunto de $\hat{\mathbb{R}}^3$, S^3 o $\mathcal{H}^3$ que además es un politopo, es decir, el convexo más pequeño que contenga una cantidad finita de puntos deseada. El poliedro estará caracterizado por sus caras, bordes y vértices. Las caras son la intersección del poliedro con un plano que acota al poliedro en alguna parte; el borde será la intersección entre dos caras y el vértice, la intersección de dos bordes.

Definición 2.6.1.2. Sea G un grupo discreto que actúa en X . Un poliedro D es un **poliedro fundamental** de G si cumple lo siguiente:

- $\forall g \in G \setminus \{id\}$, se tiene que $g(D) \cap D = \emptyset$.
- $\forall x \in X$ existe un $g \in G$ tal que $g(x) \in \overline{D}$
- Las caras de D están emparejadas por elementos de G .
- Para cualquier compacto de X , este intersecta una cantidad finita de G -traslados de D .

El tercer punto de la definición anterior dice que para cada cara s del poliedro existe una cara s' del poliedro tal que existe $g_s \in G$ que manda a s en s' y también satisface que $g_{s'} = g_s^{-1}$ con $(g')' = g$. A g_s se le llama transformación emparejante de caras. Observe que s' puede ser igual a s .

Proposición 2.6.1.2. *Las transformaciones emparejantes de caras generan a G .*

Teniendo la definición de región fundamental, puede surgir una pregunta: ¿es posible que a partir de una región D se pueda construir un grupo Kleiniano donde su región fundamental sea la misma región D ? La respuesta a esta pregunta es un sí, pero con unas condiciones.

Se asume que se tiene un poliedro D en $\mathbb{X}$ y se toma al grupo $Isom(\mathbb{X})$ como el grupo de isometrías de $\mathbb{X}$, con $\mathbb{X}$ siendo $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}^3$ o S^3 . Suponemos que se tienen transformaciones que emparejan las caras del poliedro. A partir de este poliedro D y de las transformaciones que emparejan caras, se generarán condiciones para las cuales se pueda asegurar que el grupo generado por las transformaciones que emparejan caras sea un grupo Kleiniano con región fundamental D .

Las primeras condiciones deben cumplir lo básico de la región fundamental. (i) $g_s(s) = s'$, donde s, s' son caras del poliedro D . (ii) $g_{s'} = g_s^{-1}$. Estas condiciones deben cumplirse para todas las caras de D . Si llegase a suceder que $s = s'$, entonces $g_s^2 = id$ y se le llamará **transformación reflexión**.

La tercera condición es la siguiente: (iii) $g_s(D) \cap D = \emptyset$. Y para la cuarta se tiene que cumplir que: (iv) Para cada punto $x \in D^*$, $\pi^{-1}(x)$ debe ser un conjunto finito. D^* es

el espacio obtenido de la relación de equivalencia que generan las transformaciones que emparejan caras por $\overline{D}$.

Las condiciones anteriores son las condiciones de la región fundamental; las siguientes condiciones se harán con lo que se entiende como borde. El **borde** viene siendo la intersección entre caras de D . La condición (iv) asegura que estos bordes sean cíclicos, es decir, al aplicar G a un borde e , $G(e)$ es finito y la acción de G es cíclica en e (G viene siendo el grupo generado por las transformaciones que emparejan caras). Sea $e = e_1$ y sea $\{e_1, \dots, e_k\}$ el orden del ciclo del borde e_1 y sean $g_1, \dots, g_k$ las correspondientes transformaciones que emparejan caras. Se define a la **transformación cíclica** como $h = g_k \circ \dots \circ g_1$, la cual deja invariante al ciclo de e . (v) Para cada borde e , existe un entero positivo t tal que $h^t = id$.

Se define a $\alpha(e)$ como el ángulo medido por los lados que definen a e y es medido por el interior de D . La condición (vi) es la siguiente:

$$\sum_{m=1}^k \alpha(e_m) = 2\pi/t \quad (2.6)$$

La última condición es (vii) D^* debe ser completo.

Teorema 2.6.1.3 (Teorema del poliedro de Poincaré). *Sea D un poliedro de $\mathbb{X}$ que cumple con las condiciones de (i) hasta (vii). Entonces el grupo G generado por las transformaciones que emparejan caras forma un grupo discreto; D es un poliedro fundamental de G .*

Notar que el grupo G actúa discontinuamente en D , lo que genera que $\Omega(G) \neq \emptyset$ y, por ende, G es un grupo Kleiniano; a pesar de que G sea un subgrupo de isometrías en el espacio euclidiano, hiperbólico o esférico, estos grupos están contenidos en $\hat{\mathbb{M}}^3$ (para las isometrías hiperbólicas son $\hat{\mathbb{M}}^2$).

2.7. Variedades

Definición 2.7.0.1. Una **variedad (real) n-dimensional** o **n-variedad** es por definición un espacio topológico M que es Hausdorff y además es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.7.0.1. Estas variedades también se pueden ver como n -variedades sin frontera; por simplificación, se verán solo como n -variedades.

Definición 2.7.0.2. Una **variedad cerrada** es una variedad que además es compacta y una **variedad abierta** es una variedad donde todas sus componentes conexas son no compactas.

Definición 2.7.0.3. Una **n-variedad con frontera** es un espacio Hausdorff que es localmente homeomorfo a $\bar{U}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$

Con esto se puede observar que el cociente de $\Omega(G)/G$ es una variedad, con G un grupo Kleiniano. Como el cociente se puede ver con la región fundamental y esta es parte de $\hat{\mathbb{R}}^n$, que localmente se ve como $\mathbb{R}^n$, y por ende la región fundamental también se verá como $\mathbb{R}^n$ localmente, y el pegado de los lados no afectará que se deje de ver como $\mathbb{R}^n$, y con esto se tiene que $\Omega(G)/G$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y, como G es Kleiniano, se tiene que el cociente será una variedad.

2.7.1. (X,G)-variedad

Definición 2.7.1.1. Una **curva** en un espacio X es una función continua $\gamma : I \rightarrow X$, donde I es un intervalo abierto o cerrado en $\mathbb{R}$.

Si $\gamma; [a, b] \rightarrow X$ es una curva, entonces $\gamma(a)$ se le llama **punto inicial** y a $\gamma(b)$ **punto final**. Se dice que γ es una curva de X que va de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Definición 2.7.1.2. Una **geodésica** en un espacio métrico X es la función que preserva la distancia $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, con $a < b$ en $\mathbb{R}$.

Una geodésica $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ es continua e inyectiva, entonces α es una curva.

Definición 2.7.1.3. Un **espacio geométrico n -dimensional** es un espacio métrico X que satisface los siguientes axiomas:

- (1) X debe ser geodésicamente conexo.
- (2) X es geodésicamente completo.
- (3) Hay una función continua $\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ y un número real $\lambda > 0$ tal que ϵ mapea a $B(0, \lambda)$ homeomórficamente a $B(\epsilon(0), \lambda)$.
- (4) X es homogéneo.

Dicha definición trata de dar un análogo a los postulados de Euclides con el fin de definir espacios en los cuales se pueda hacer geometría. La primera condición es el análogo de que si tienes dos puntos, existe un segmento de línea que los conecte; el segundo, que todo segmento se puede extender a una línea; el tercero es el de los círculos y el último, que todos los ángulos rectos son iguales.

Definición 2.7.1.4. Sea X un espacio métrico. Si g es un automorfismo de X , este es una similitud si $d(x, y) = \lambda d(g(x), g(y))$ donde $x, y \in X$ y $\lambda > 0$.

Definición 2.7.1.5. Sea G un grupo de similitudes de X , un espacio geométrico, y sea M una n -variedad. Un **(X, G) -atlas** de M es una familia

$$\Phi = \{\varphi_i | U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$$

donde a cada elemento de Φ se le llama carta y satisfacen las siguientes condiciones:

- Al conjunto U_i se le llama vecindad coordinada y es un abierto conexo de M para cada $i \in I$
- La carta φ_i mapea homeomórficamente U_i a un abierto de X para cada $i \in I$
- $\cup_{i \in I} U_i = M$

- Si U_i y U_j son dos vecindades coordenadas con intersección no vacía, entonces

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es llamada cambio de coordenadas y concuerda en una vecindad de cada punto de su dominio con un elemento de G .

Teorema 2.7.1.1. Sea Φ un atlas de M . Entonces hay un único atlas maximal de M que contiene a Φ .

Definición 2.7.1.6. Una (X, G) -estructura de una variedad M es un atlas maximal de M .

Definición 2.7.1.7. Una (X, G) -variedad M es una variedad M junto con una estructura de M

Algunos ejemplos importantes de estas (X, G) -variedades son las siguientes:

- Las $(\text{Isom}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ -variedades, llamadas variedades Euclidianas, con una $(\text{Isom}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ -estructura, llamada estructura Euclidiana.
- Las $(\text{Isom}(S^n), S^n)$ -variedades, llamadas variedades esférica, con una $(\text{Isom}(S^n), S^n)$ -estructura, llamada estructura esférica.
- Las $(\text{Isom}(\mathcal{H}^n), \mathcal{H}^n)$ -variedades, llamadas variedades hiperbólica, con una $(\text{Isom}(\mathcal{H}^n), \mathcal{H}^n)$ -estructura, llamada estructura hiperbólica.

Recordar que las transformaciones de Möbius son difeomorfismos y, por ende, se puede pensar que las variedades construidas a partir del cociente $\Omega(G)/G$ pueden ser variedades diferenciables. El problema es que no siempre el cociente será una variedad diferenciable y el problema surge por los elementos de torsión, o más en específico, en los puntos fijos de los elementos de torsión.

Observación 2.7.1.1. *Una variedad diferenciable real de rango r será una (X, G) -variedad donde X será $\mathbb{R}^n$ y el grupo G , en vez de ser un grupo de similitudes, será un grupo de difeomorfismos. El rango se obtiene con los cambios de cartas y esto es cuando todos los cambios de cartas sean diferenciables de orden r . Cuando los cambios de cartas sean infinitamente derivables, es decir, están en C^∞ , a la variedad diferenciable se le llamará variedad suave.*

Definición 2.7.1.8. *Sea G un grupo. Un elemento $g \in G$ será un **elemento de torsión** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = id$.*

El problema de los elementos de torsión surge de no poder heredar una estructura diferenciable al espacio cociente X/G si los puntos fijos están en X . Para entender el problema, se dará un ejemplo. Sea $G = \langle e^i \rangle$ el grupo generado por la rotación de 180° en $\hat{\mathbb{C}}$. Es claro que la rotación es un elemento elíptico y que además es de torsión; tiene como puntos fijos al 0 y a ∞ . El cociente en alguna bola abierta centrada en algún punto fijo dará como resultado un cono. Este cono sí se ve de manera puramente topológica, pues resulta ser un disco y, por ende, homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, pero si nos quedamos con el cono, lo que se tiene es que el cociente no es suave en todas partes y, para que en un punto sea diferenciable, este debe por lo menos cumplir que sea suave, y en el cono el punto fijo no será suave, entonces no será diferenciable en ese punto.

Este problema de los puntos fijos de los elementos de torsión casi siempre surgirá al tener un elemento elíptico en el grupo G . Las formas de solucionar este problema: una es aplicar el lema de Selberg y con ello se preserva la dinámica y se remueven los elementos de torsión. Otra manera es trabajar con una región invariante en $\Omega(G)$ que no contenga a los puntos fijos del elemento de torsión; de esta manera, el grupo se mantiene igual y el cociente podrá heredar una estructura diferenciable.

Este problema es lo que hace que nazca el estudio de los orbifolios, que vienen siendo una generalización de las variedades diferenciables, con la diferencia que, en vez de ser localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, se pide que sea homeomorfo a $\mathbb{R}^n/G$, con G un grupo finito. Ejemplos de estos orbifolios son las superficies de Riemann marcadas.

Teorema 2.7.1.2. *Sea $G < \hat{\mathbb{M}}^n$ un grupo Kleiniano y sea Δ una colección G -invariante de componentes de la región de discontinuidad $\Omega(G)$. Supóngase que para cada $x \in \Delta$*

se tiene que $G_x = \{id\}$. Entonces Δ/G resulta ser una variedad diferenciable real n -dimensional. Si además $G < \mathbb{M}^n$, entonces el cociente será una variedad orientable; si G tiene alguna transformación extendida de Möbius el cociente será no orientable.

2.7.2. Forma espacial

Definición 2.7.2.1. Si G es un grupo de isometrías discreto de un espacio geométrico n -dimensional y G actúa libremente en X , el espacio X/G se le llamará **forma espacial** de $\mathbb{X}$.

Definición 2.7.2.2. Cuando X es S^3 , $\mathbb{R}^3$ o $\mathcal{H}^3$ a la forma espacial se le dice que es una **forma espacial Clifford-Klein**.

La definición se puede generalizar para dimensiones superiores. Dicha definición se puede ver en [19].

Cuando la forma espacial Clifford-Klein tiene que $X = S^3$, se le puede llamar forma espacial esférica; si $X = \mathbb{R}^3$ será euclidiana y si $X = \mathcal{H}^3$, será hiperbólica. Se denotará por $\mathbb{X}$ cuando se esté trabajando con una de estas formas espaciales.

Se toma una familia finita de poliedros convexos disjuntos $\mathcal{P}$ en $\mathbb{X}$; sea G un grupo de isometrías de $\mathbb{X}$.

Definición 2.7.2.3. Un **G -side-pairing** de $\mathcal{P}$ es un conjunto de funciones

$$\Phi = \{\phi_S | S \in \mathcal{S}\}$$

indexada por la colección $\mathcal{S}$ de todas las caras S de los poliedros $P \in \mathcal{P}$. Además, cumplen lo siguiente:

- Para cada $S \in \mathcal{S}$, existe un S' tal que $g_S(S) = S'$
- Para cada par de isometrías g_S y $g_{S'}$ satisfacen que $g_S^{-1} = g_{S'}$

- Si S es una cara de P y S' es una cara de P' entonces

$$P' \cap g_S(P) = S'$$

Se observa que el G -side-pairing Φ genera una relación de equivalencia en los poliedros de $\mathcal{P}$, cuyas clases de equivalencia se les llamará **ciclos** de Φ .

Definición 2.7.2.4. El **ángulo sólido normalizado** sustentado en un poliedro P en $\mathbb{X}$ en un punto $x \in P$ se define por el número real:

$$\hat{w}(P, x) = \frac{\text{Vol}(P \cap B_r(x))}{\text{Vol}(B_r(x))} \quad (2.7)$$

donde r es menor a la distancia a cualquier lado de P que no contiene a x .

Si $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ es un ciclo de Φ y sea P_i un poliedro en $\mathcal{P}$ que contiene a x_i para cada $i = 1, \dots, m$. La suma de los ángulos sólidos normalizados del ciclo $[x]$ está definida por:

$$\hat{w}[x] = \sum_{i=1}^m \hat{w}(P_i, x_i) \quad (2.8)$$

Definición 2.7.2.5. Un G -side-pairing Φ para Ξ se le llama **propio** si y solo si cada uno de los ciclos de Φ es finito y la suma de los ángulos sólidos normalizados de cada ciclo es 1.

Teorema 2.7.2.1. Sea G un grupo de isometrías de $\mathbb{X}$ y sea M el espacio obtenido de pegar un conjunto disjunto de poliedros convexos n -dimensionales $\mathcal{P}$ en $\mathbb{X}$ por un G -side-pairing Φ . Entonces M es una n -variedad con una $(\mathbb{X}, G)$ -estructura.

Otra manera de definir el ángulo sólido es de la siguiente manera:

$$\hat{w}(P, x) = 4\pi \frac{\text{Vol}(P \cap B_r(x))}{\text{Vol}(B_r(x))} \quad (2.9)$$

En este caso, el ángulo no está normalizado y de esta manera se define el ángulo dihedral en los bordes del poliedro como:

$$\theta(P, x) = \frac{1}{2} \hat{w}(P, x) \quad (2.10)$$

Y como los ángulos no están normalizados, para que Φ sea propio, será que la suma de los ángulos sólidos sea igual a 4π .

Definición 2.7.2.6. *El **volumen** de una forma espacial Clifford-Klein es el volumen de cualquier región fundamental propia R de G en $\mathbb{X}$.*

Observación 2.7.2.1. *notemos que la región fundamental escogida para el volumen no depende de su elección, ya que todas las regiones fundamentales tienen el mismo volumen en $\mathbb{X}$*

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de lados de un poliedro fundamental conexo P de un grupo discreto G que actúa libremente en $\mathbb{X}$. Entonces, para cada $S \in \mathcal{S}$, se tiene una relación de emparejamiento de lados

$$g_S g_{S'} = id$$

de G . Sea SS' una palabra en $\mathcal{S}$ correspondiente a la relación de emparejamiento de lados $g_S g_{S'} = id$ de G . Cada ciclo de un lado $\{S_i\}_{i=1}^m$ de P determina una relación de ciclo

$$(g_{S_1} \dots g_{S_m})^k = id$$

de G , donde k es el orden de $g_{S_1} \dots g_{S_m}$. La expresión $(S_1 \dots S_m)^k$ será una palabra en $\mathcal{S}$ que corresponde a la relación de ciclo anterior en G .

Teorema 2.7.2.2. *Sea Φ un $Isom(\mathbb{X})$ -side pairing propio para un poliedro convexo n -dimensional P en $\mathbb{X}$ tal que la $(Isom(\mathbb{X}), \mathbb{X})$ -variedad M obtenida de pegar los lados de P por Φ es completo. Entonces el grupo G generado por Φ es discreto y actúa libremente en $\mathbb{X}$, P es exactamente una región fundamental para G . Y si $\mathcal{S}$ es el conjunto de lados de P y $\mathcal{R}$ es el conjunto de palabras de $\mathcal{S}$ correspondientes a todos los emparejamientos de lados y las relaciones cíclicas de G , entonces $(\mathcal{S}; \mathcal{R})$ es una presentación de grupo de G sobre el mapeo $S \mapsto g_S$.*

2.7.3. Ejemplos de formas espaciales Clifford-Klein

Con lo visto anteriormente, es "fácil" construir 3-variedades Euclidianas, esféricas e hiperbólicas a partir de pegar poliedros convexos de $\mathbb{X}$, con $\mathbb{X}$ siendo $\mathbb{R}^3$, S^3 o $\mathcal{H}^3$. La forma de construir los ejemplos será por dar uno o dos poliedros en $\mathbb{X}$, luego se tomarán transformaciones que emparejen caras y luego ver si el pegado Φ construido con las transformaciones que emparejan caras es propio y con esto se tendrá que el espacio cociente será una variedad con estructura Euclidiana, esférica o hiperbólica, dependiendo del caso .

2.7.3.1. Euclidiano

Sea P un cubo en $\mathbb{R}^3$. Se define un $Isom(\mathbb{R}^3)$ -side-pairing Φ para P que empareja los lados opuestos de P por una traslación. Entonces cada borde consiste en un ciclo de 4 elementos. Al ser P un cubo en $\mathbb{R}^3$, el ángulo dihedral en cada borde es de $\pi/2$, entonces la suma de los ángulos dihedrales de un ciclo es de 2π y, por ende, Φ es propio. Con esto podemos concluir que M , que es P con el pegado definido en Φ , es una $Isom(\mathbb{R}^3)$ -variedad y esta variedad termina siendo una 3-variedad y se le llama 3-toro cúbico Euclidiano. Y es la misma variedad construida en la sección de región fundamental.

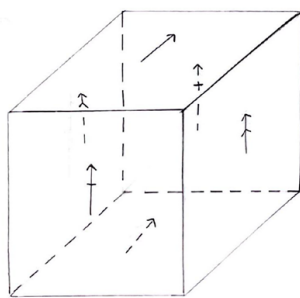


FIGURA 2.2: Región fundamental del 3-toro

2.7.3.2. Esférico

Sea $D(r)$ un dodecaedro regular esférico inscrito en una esfera $S(e_4), r$ en S^3 con $0 < r \leq \pi/2$. Sea $\theta(r)$ el ángulo dihedral de $D(r)$. Cuando r es muy pequeño, el ángulo dihedral es casi igual, pero mayor al ángulo dihedral de un dodecaedro Euclidiano, el cual

es aproximadamente 116° . Si r crece, entonces $\theta(r)$ crece continuamente hasta $\theta(\pi/2)$ y en este caso el ángulo dihedral es igual a 180° . Como $\theta(r)$ es una función continua en r , existe un r' tal que $\theta(r') = 120^\circ$. Sea $P = D(r')$, entonces P es un dodecaedro regular esférico cuyos ángulos dihedrales son iguales a $2\pi/3$.

Se define el $Isom(S^3)$ -side-pairing Φ para P pegando los lados opuestos de P con una torsión de $\pi/5$. Entonces el ciclo de cada borde de Φ consiste en 3 puntos. Por ende, la suma de los ángulos dihedrales de cada ciclo de borde es de 2π y, por ende, Φ es propio.

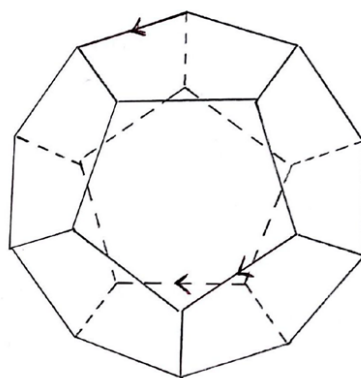


FIGURA 2.3: Dodecaedro de Poincaré

Por lo tanto, el espacio M obtenido por P pegando sus lados por Φ es una 3-variedad esférica orientable. A dicha variedad se le llama espacio del dodecaedro de Poincaré.

2.7.3.3. Hiperbólico

Se toma un tetraedro ideal B^3 , siendo B^3 la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$. Como el grupo de simetrías de T actúa transitivamente en los bordes de T , todos sus ángulos dihedrales deben ser iguales. Como el link en cada vértice ideal de T es un triángulo equilátero Euclidiano, los bordes de T deben ser iguales a $\pi/3$.

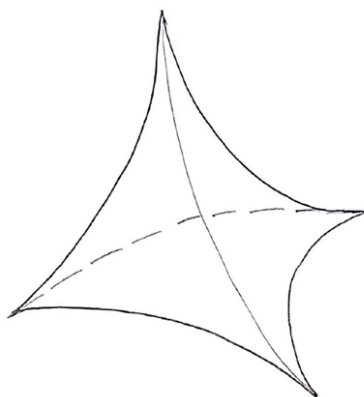


FIGURA 2.4: Tetraedro hiperbólico

Ahora se toman 2 tetraedros ideales disjuntos T y T' en B^3 . Se nombran las caras del tetraedro T por A, B, C, D y las de T' como A', B', C', D' . Como las transformaciones de Möbius en B^3 se caracterizan por su acción en 4 puntos, existe una transformación extendida de Möbius f que mapea T' a T y manda a S' a S , para $S = A, B, D, C$.

Se define la transformación de Möbius g_S definida por la composición de f con la reflexión de una de las caras de T . Con esto se tienen 4 transformaciones: g_A, g_B, g_C, g_D . Las transformaciones anteriores y sus inversos se pueden ver que son isometrías en B^3 , con B^3 siendo el espacio hiperbólico. Con g_A, g_B, g_C, g_D se genera una $Isom(B^3)$ -side-pairing Φ . Entonces la suma de los ángulos dihedrales de cada ciclo de borde es 2π y, por ende, Φ es propio.

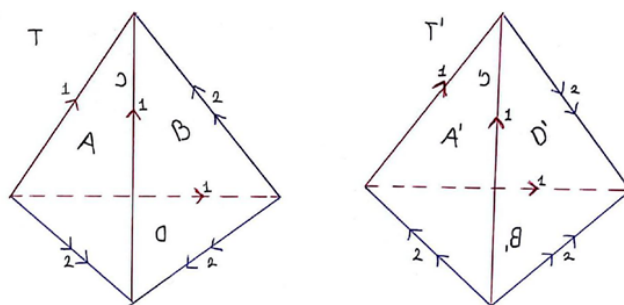


FIGURA 2.5: Pegado de los Tetraedros

Sea M el espacio obtenido de T y T' con el pegado definido por Φ . M resulta ser una 3-variedad hiperbólica orientable, pues M se puede ver como B^3/G con $G = \langle g_A, g_B, g_C, g_D \rangle$,

siendo los generadores isometrías hiperbólicas orientables. Entonces M es una forma espacial y, por lo tanto, tiene una estructura hiperbólica que además es orientable.

Para visualizar la variedad hiperbólica anterior, se puede utilizar la teoría de nudos, sobre todo los nudos hiperbólicos que, por definición, son nudos en $\mathbb{R}^3$ cuyo complemento tiene una estructura hiperbólica. El nudo característico de la variedad anterior es el nudo ocho.

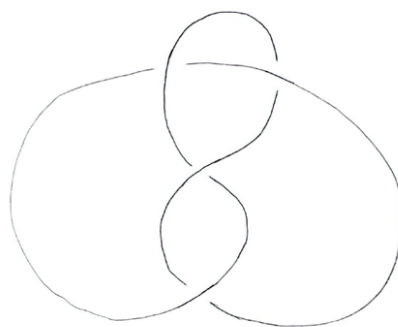


FIGURA 2.6: Nudo ocho

Teorema 2.7.3.1. *La 3-variedad hiperbólica orientable M es homeomorfa al complemento del nudo ocho en $\hat{\mathbb{R}}^3$.*

Demostración. Tomando al nudo ocho L y se le añaden dos arcos (el 1 y 2). Ahora se etiqueta el nudo ocho como en la figura siguiente. Este objeto es un 1-complejo K^1 (la definición de complejo celular y la definición de n-celdas se puede ver en [9]).

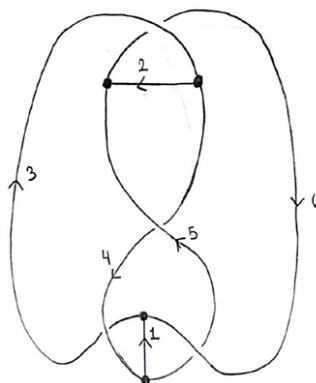


FIGURA 2.7: Celular complejo K_1

Al complejo celular K^1 se le adhieren cuatro 2-celdas, $A = \{1, 1^{-1}, 5, 2^{-1}, 4\}$, $B = \{1, 3, 2, 6, 1^{-1}\}$, $C = \{1, 3, 2, 2^{-1}, 4\}$, $D = \{2, 6, 1^{-1}, 5, 2^{-1}\}$ obteniendo así el 2-complejo K^2 .



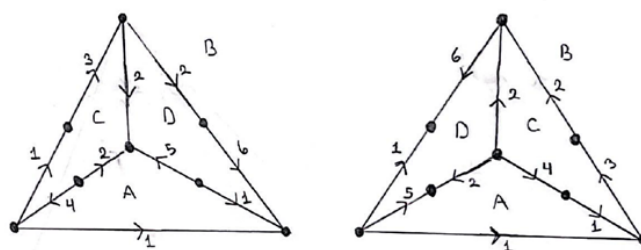
FIGURA 2.8: 2-celdas de K^2

Con esto se puede obtener que $\hat{\mathbb{R}}^3 \setminus K^2$ es homeomorfo a dos bolas abiertas disjuntas. Esto sucede porque existe un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{R}}^3 \setminus K^1$ al complemento del complejo celular K y este homeomorfismo manda las 2-celdas de K^2 a dos celdas de K , que esas 2-celdas terminan formando una esfera generalizada y estas dividen al espacio en dos bolas abiertas.



FIGURA 2.9: Celular complejo K

Teniendo que K^2 divide al espacio en dos abiertos, ambas se pueden ver como el interior de 3-celdas y las fronteras de estas 3-celdas vienen siendo K^2 . Con esto se extiende K^2 a un 3-complejo K^3 . A cada 3-celda se puede ver como uno de los siguientes tetraedros.

FIGURA 2.10: 3-celdas de K^3

Notar que el nudo ocho está conformado por las 1-celdas 3, 4, 5 y 6. Por lo tanto, cuando se colapsen estas 1-celdas se obtendrán 4 puntos (los vértices de los tetraedros); al quitar estos puntos, esta nos dará los tetraedros ideales con la configuración que teníamos al construir la 3-variedad hiperbólica M . Con esto se obtiene que M es homeomorfo a $\hat{\mathbb{R}}^3 \setminus L$. ■

Si se quiere ver la demostración a más detalle del complemento del nudo ocho u otras demostraciones, se pueden ver en [12, 15, 20].

2.8. Teorema de geometrización de Thurston

Para finalizar con este capítulo, se dará un teorema que tiene como finalidad dar un resultado análogo al que da el teorema de uniformización para 3-variedades.

Teorema 2.8.0.1 (Conjetura de geometrización). *Cualquier 3-variedad compacta es geométrica o se descompone (por cirugías a lo largo de esferas y toros incompresibles) en variedades geométricas.*

Para 3-variedades, solo existen 8 posibles estructuras geométricas para dichas variedades. Estas variedades geométricas son localmente homogéneas y simplemente conexas. Se tiene que todo espacio localmente homogéneo compacto es cociente de alguno de estos 8 espacios geométricos cociente de un subgrupo discreto de isometrías. Dichos espacios geométricos son los siguientes:

- Espacio Euclidiano $\mathbb{E}^3$
- Espacio esférico S^3
- Espacio hiperbólico $\mathcal{H}^3$
- La geometría de $S^2 \times \mathbb{E}^1$
- La geometría del espacio $\mathcal{H}^2 \times \mathbb{E}^1$
- La geometría nula
- La cubierta universal de $SL(2, \mathbb{R})$
- La geometría del sol

Este es un teorema que demostró Perelman utilizando el flujo de Ricci. En [4] se da una "demostración" de la conjetura de geometrización de Thurston. En dicho artículo trata de dar las ideas de dicha demostración cuando esta seguía siendo revisada y en [7] se da un vistazo a las 8 geometrías posibles.

La conjetura de geometrización de Thurston (ahora teorema) trata de dar un análogo del teorema de uniformización dado en el capítulo 1. Y con lo visto en este capítulo, de las 8 geometrías posibles, se pueden construir 3 de ellas: Euclidianas, esféricas e hiperbólicas. Al igual que en el teorema de uniformización, la geometría "más común" es la hiperbólica, con la cual son fácilmente construidas por medio de grupos Kleinianos.

Capítulo 3

Teoría de grupos Kleinianos complejos

Al ver la generalización del capítulo 2, se puede notar que hubo unas características que se hicieron de lado, principalmente la propiedad de que las transformaciones de Möbius eran biholomorfas. Por tanto, para esta generalización, el principal enfoque es el preservar las propiedades del espacio complejo.

Al tener que la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es holomorfa a la línea proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$, se puede construir la nueva generalización con el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$.

3.1. Espacio proyectivo complejo

El espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ es el conjunto de rectas en $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen sin el origen.

$$\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

donde $\sim$ es una relación de equivalencia tal que si $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$, $z \sim w$ si y solo si $w = \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Denotamos $[z_1 : \dots : z_{n+1}]$ a la clase de equivalencia de $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. A $[z_1 : \dots : z_{n+1}]$ se le llama coordenadas homogéneas (también se les puede llamar puntos).

El espacio proyectivo complejo como $\mathbb{CP}^n$, que resulta ser un espacio métrico compacto y conexo, donde su distancia es la métrica Fubini-Study.

Ahora se darán dos formas de descomponer el espacio proyectivo complejo.

Proposición 3.1.0.1. $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{C}^{n+1} \cup \mathbb{CP}^{n-1}$

Demostración. Esta descomposición se obtiene al tener el hiperplano $H = \{(z_1, \dots, z_n, 1) \in \mathbb{C}^{n+1}\}$ del espacio $\mathbb{C}^{n+1}$. Donde se puede ver de manera sencilla que cada línea que pasa por el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$ que intersecta con el hiperplano H , esta intersección es única, haciendo que todas estas líneas las podamos ver como el hiperplano H , que es homeomorfo a $\mathbb{C}^n$. Las líneas faltantes son las líneas que pasan por el origen sin el origen, que están contenidas en el hiperplano donde la última entrada es 0 (que lo podemos ver como el espacio $\mathbb{C}^n$) y esto por definición es $\mathbb{CP}^{n-1}$. ■

Una segunda descomposición de $\mathbb{CP}^n$ es a través de 3 conjuntos de líneas complejas. Se toma a $\mathbb{C}^{n+1}$ y se descompone en $V_- \cup V_0 \cup V_+$, donde V_- consiste de los puntos $(Z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que $\|Z\|^2 < \|z_{n+1}\|^2$, los elementos de V_0 serán los que $\|Z\|^2 = \|z_{n+1}\|^2$ y para V_+ son los elementos que $\|Z\|^2 > \|z_{n+1}\|^2$.

Los conjuntos V_- , V_0 , V_+ son conjuntos generados por líneas complejas negativas, nulas y positivas, respectivamente. Esto es por el hecho de que si se tiene un punto $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $z \in V_-$, el punto λz también estará en V_- , con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Lo mismo sucede con los otros 2 conjuntos. Al conjunto V_0 se le llega a conocer como el cono de luz.

La descomposición en $\mathbb{CP}^n$ sale de proyectivizar cada uno de estos conjuntos de $\mathbb{C}^{n+1}$ a $\mathbb{CP}^n$. Estos conjuntos proyectivizados $[V_-]$, $[V_0]$, $[V_+]$ siguen siendo disjuntos, pues al V_- contener toda la línea compleja menos el origen, al proyectivizar esta línea queda en un punto de $[V_-]$ que sigue satisfaciendo la desigualdad $\|Z\|^2 < \|z_{n+1}\|^2$ y lo mismo sucede con los otros dos conjuntos. Esta descomposición tomará más relevancia para construir el espacio hiperbólico complejo.

Definición 3.1.0.1. Un *espacio homogéneo* X respecto a un grupo G es un espacio X tal que G actúa transitivamente en X .

Proposición 3.1.0.2. Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo de G ; entonces el espacio de clases laterales G/H es un espacio homogéneo de un grupo G con grupo de isotropía H .

Proposición 3.1.0.3. $\mathbb{CP}^n$ es un espacio homogéneo bajo la acción de $PSL(n+1, \mathbb{C})$.

Demostración. Como $SL(2, \mathbb{C})$ actúa transitivamente en $\mathbb{CP}^1$ y utilizando el teorema de órbita y estabilizador, se tiene que $\mathbb{CP}^1 = SL(2, \mathbb{C})/B$, donde B es un subgrupo de Borel de $SL(2, \mathbb{C})$, con

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{C}^*, ad = 1, b \in \mathbb{C} \right\}$$

En el teorema de órbita estabilizador dice que $O_x = G/G_x$, donde x es un elemento de un conjunto donde actúa G , O_x es la órbita en x y G_x es el estabilizador en x . Se toma el punto $[1 : 0] \in \mathbb{CP}^1$ y se tiene que $O_{[1:0]} = \mathbb{CP}^1$, esto porque $SL(2, \mathbb{C})$ actúa transitivamente en $\mathbb{CP}^1$ y el estabilizador en $[1 : 0]$ es B , pues para que una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

Dejé fijo a $[1 : 0]$, $c = 0$, obteniendo así que los elementos que lo fijan sean los de B . ■

Definición 3.1.0.2. Sea H un subconjunto de $\mathbb{CP}^n$. H será un subespacio proyectivo de dimensión k de $\mathbb{CP}^n$ si existe un subespacio de dimensión $k+1$ $\hat{H}$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que al proyectivizar al subespacio $\hat{H} \setminus \{0\}$ a $\mathbb{CP}^n$ es igual a H .

Definición 3.1.0.3. Sea P un subconjunto de $\mathbb{CP}^n$. Se define a $\langle P \rangle$ como el siguiente conjunto:

$$\langle P \rangle = \cap \{l \subset \mathbb{CP}^n : l \text{ es un subespacio proyectivo y } P \subset l\}$$

$\langle P \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{CP}^n$.

En particular, si $p, q \in \mathbb{CP}^n$ son puntos distintos, el conjunto $\langle \{p, q\} \rangle$ es el único subespacio proyectivo propio que pasa por p y q . A dicho espacio se le llama línea proyectiva compleja y se le denota por $\overleftrightarrow{p, q}$.

3.2. Grupo de biholomorfismos

Al igual que en la teoría clásica, se buscan los automorfismos biholomorfos en $\mathbb{CP}^2$, que es el siguiente grupo:

$$PSL(n+1, \mathbb{C}) := SL(n+1, \mathbb{C}) / \sim$$

donde $SL(n+1, \mathbb{C})$ es el grupo de matrices de $n+1 \times n+1$ con entradas complejas y determinante 1 y la relación de equivalencia $\sim$ tal que $A, B \in SL(n+1, \mathbb{C})$, $A \sim B$ si y solo si $A = \lambda B$ con $\lambda^{n+1} = 1$.

Teorema 3.2.0.1. *El grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^n$ es el grupo $PSL(n+1, \mathbb{C})$*

La demostración de este teorema o, más bien, la idea de la demostración, se puede ver en [5], que dice que todo holomorfismo endomorfo de $\mathbb{CP}^n$ a $\mathbb{CP}^n$ es inducido por un polinomio que cumple ciertas características; el caso en el que se anda es cuando el polinomio es lineal.

Utilizando la descomposición de $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{C}^{n+1} \cup \mathbb{CP}^{n-1}$, se tiene que el grupo $PSL(n+1, \mathbb{C})$ actúa de alguna manera en $\mathbb{C}^n$. A continuación se mostrará cómo $PSL(3, \mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{C}^2$ y el mismo argumento es válido para las demás dimensiones.

Dada una matriz $A \in SL(3, \mathbb{C})$ y un vector $v \in \mathbb{C}^3$, la acción es $v \mapsto Av$. Esta acción induce una acción bien definida en $\mathbb{CP}^2$ con $[v] \mapsto [Av]$

Al igual que en el caso de $\mathbb{CP}^1$, $PSL(3, \mathbb{C})$ no actúa naturalmente en $\mathbb{C}^2$, pero sí actúa en $\mathbb{CP}^2$, que es una compactificación de $\mathbb{C}^2$.

Podemos ver a $\mathbb{C}^2 \simeq \{[z : w : 1]\} \subset \mathbb{CP}^2$ como:

$$[z : w : 1] \mapsto^A \left[\frac{az + bw + c}{gz + hw + k} : \frac{dz + ew + f}{gz + hw + k} : 1 \right]$$

3.2.1. Clasificación de los elementos biholomorfos

La clasificación para los elementos de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ estará clasificada en parabólicos, elípticos y loxodrómicos, como en los casos anteriores, la cual se hará a través de sus valores propios y si es diagonalizable o no.

Definición 3.2.1.1. Sea $\gamma \in PSL(n+1, \mathbb{C})$, entonces:

- γ será elíptico si es diagonalizable y sus valores propios son unitarios.
- γ será loxodrómico si sus valores propios (generalizados) son no unitarios.
- γ será parabólico si no es diagonalizable y sus valores propios (generalizados) son unitarios.

Al analizar el caso clásico, observamos que, además de tener la clasificación anterior (a través de su forma prototípica), se tiene una clasificación algebraica que es por la traza. Esta clasificación no está generalizada para cualquier dimensión n ; de hecho, solo lo está para el caso cuando n es igual a 1 y 2 en $\mathbb{CP}^n$. El motivo por el que no se tiene una clasificación general es por la cantidad de subclases que se necesitan para hacer la clasificación. Para $n = 1$ solo se necesitan las clases de elíptico, parabólico y loxodrómico. Para $n = 2$, cada clase tiene como resultado distintas subclases que se verán más adelante después que se defina el conjunto límite.

Grupo Afín

Con la descomposición $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1}$, es claro que las transformaciones afines de $\mathbb{C}^n$ dejan invariante al hiperplano al infinito $\mathbb{CP}^{n-1}$. Por lo tanto, cada mapeo lleva líneas de $\mathbb{C}^n$ a líneas de $\mathbb{C}^n$, así que la transformación se extiende naturalmente al hiperplano al infinito. Esto da una inclusión natural del grupo afín

$$\text{Aff}(\mathbb{C}^n) \cong GL(n, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$$

al grupo proyectivo $PSL(n+1, \mathbb{C})$. A los elementos del grupo afín se les puede ver como:

$$\begin{pmatrix} M_{n \times n} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con v un vector en $\mathbb{C}^n$

Grupo proyectivo de Lorentz

Uno de los grupos más estudiados en esta teoría viene siendo el grupo hiperbólico complejo $PU(n, 1)$, que es un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$. Para entender más a detalle este grupo, es necesario entender el espacio hiperbólico complejo.

Para empezar, se toma al espacio $\mathbb{C}^{n,1}$, que viene siendo el espacio $\mathbb{C}^{n+1}$ equipado con la forma Hermitiana $\langle, \rangle$ dada por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n - u_{n+1} \bar{v}_{n+1} \quad (3.1)$$

donde $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ y $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$. Esta forma corresponde a la matriz Hermitiana:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y es claro que $\langle u, v \rangle = u H v^*$, donde v^* es la matriz traspuesta v^T y en todas sus entradas se les aplica la conjugación compleja.

Como se tiene que $\mathbb{C}^{n,1} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ y que este espacio se puede descomponer en $V_- \cup V_0 \cup V_+$, se toma la intersección de V_- y de V_0 en el hiperplano definido por $z_{n+1} = 1$. Para V_- se tiene que es la siguiente esfera:

$$\mathbb{S} := \{(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\} \quad (3.2)$$

Y para V_0 se tiene que será una bola con frontera $\mathbb{S}$ que es la siguiente:

$$\mathbb{B} := \{(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\} \quad (3.3)$$

A la bola $\mathbb{B}$ equipada con la métrica hiperbólica compleja se le llama el modelo de la bola unitaria para el espacio hiperbólico complejo.

El motivo por el que se explica este modelo es para definir el espacio hiperbólico complejo con el modelo proyectivo. Para construir este modelo, se puede notar que las líneas complejas que pasan por el origen, que sean nulas, entonces intersectan con la esfera $\mathbb{S}$ en un punto. Con esto se puede concluir que la proyectivización $(V_0 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ es difeomorfa a $\mathbb{S}$. Similarmente, se consideran las líneas negativas y con ello se tendrá que $[V_-] = (V_- \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ es homeomorfo a $[\mathbb{B}]$, siendo $[\mathbb{B}] \in \mathbb{CP}^n$.

A la bola $[\mathbb{B}]$ se le puede equipar una métrica que es heredada de $\mathbb{B}$, y con esto se obtiene el modelo proyectivo del espacio hiperbólico complejo; este será el espacio que se estará utilizando y se le denotará por $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Con esta construcción se tiene que el grupo proyectivo de Lorentz $PU(n, 1)$ actúa en $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$ como su grupo de isometrías holomorfas. Con esto es claro que $PU(n, 1)$ es un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$.

La métrica del espacio hiperbólico complejo $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$ es:

$$\rho([x], [y]) = 2 \cosh^{-1} \sqrt{\frac{\langle x, y \rangle \langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}}$$

donde $\langle, \rangle$ es el producto Hermitiano.

3.3. Conjunto límite

Uno de los puntos donde esta generalización difiere con las anteriores es en el caso del conjunto límite, pues a pesar de tener una definición que está bien definida, que es la del complemento de la región de discontinuidad, se tienen otras definiciones que al final son equivalentes entre sí, haciendo que no importe qué definición se tome, uno siempre tendrá lo mismo. Para este caso complejo, esto no sucederá, haciendo que, dependiendo de la definición que uno tome, el conjunto límite puede no estar bien definido.

La primera forma de querer definir conjunto límite puede venir de que el conjunto límite es el complemento de la región de discontinuidad. Utilizando estos conjuntos, obtenemos la siguiente definición:

Definición 3.3.0.1. *Sea X un espacio topológico y sea G un grupo que actúa en X . El conjunto límite $\Lambda(G)$ es el complemento de la máxima región de discontinuidad de G en X .*

A primera instancia, esta definición es bastante intuitiva, pues es como se define en los otros casos. El problema de esta definición es que la máxima región de discontinuidad de un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ que actúa en $\mathbb{CP}^n$ no es única; esto hace que, a la hora de trabajar el conjunto límite o la región de discontinuidad, dependiendo de la elección del conjunto que se tome, se puedan llegar a resultados distintos. Más adelante, cuando se definan las subclases de los elementos de $\mathbb{CP}^2$, se dará un ejemplo donde se vea que la máxima región de discontinuidad no es única.

Una de las definiciones más apropiadas es el conjunto límite de Kulkarni. Para ello tomamos un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff X y un grupo G que actúa en X . Se toman los siguientes tres conjuntos:

- Sea $L_0(G)$ la cerradura de los puntos de X con grupo de isotropía infinito.
- $L_1(G)$ es la cerradura de los puntos de acumulación de las órbitas de los puntos en $X \setminus L_0(G)$
- $L_2(G)$ es la cerradura de los puntos de acumulación de las órbitas de subconjuntos compactos $K \subset X \setminus \{L_0(G) \cup L_1(G)\}$

Definición 3.3.0.2. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y sea G un grupo de automorfismos de X . El conjunto límite de Kulkarni de G en X es el conjunto:

$$\Lambda_K(G) := L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G)$$

La región de discontinuidad de Kulkarni es el complemento del conjunto límite de Kulkarni.

En [6] se utiliza la definición de Kulkarni para dar la siguiente clasificación para los elementos de $PSL(n+1, \mathbb{C})$.

Proposición 3.3.0.1. Sea $\gamma \in PSL(n+1, \mathbb{C})$, entonces:

- γ es elíptico si y solo si el conjunto límite de Kulkarni de $\langle \gamma \rangle$ es vacío o todo $\mathbb{CP}^n$.
- γ es parabólico si y solo si el conjunto límite de Kulkarni de $\langle \gamma \rangle$ es un subespacio proyectivo.
- γ es loxodrómico si y solo si el conjunto límite de Kulkarni de $\langle \gamma \rangle$ se describe como la unión de dos subespacios proyectivos propios.

Otra definición es una con base en la equicontinuidad; aunque esta definición no se vio en los capítulos anteriores, esta definición es equivalente a las vistas en esos capítulos.

Definición 3.3.0.3. Sea G un grupo que actúa en una variedad X . La región de equicontinuidad de G , denotada por $Eq(G)$, es el conjunto de puntos $x \in X$ donde existe una vecindad U de x tal que $G|_U$ es una familia normal.

Recordar que una colección de transformaciones es una familia normal si y solo si cada sucesión de elementos distintos tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos.

Observación 3.3.0.1. *Notar que la definición de región de discontinuidad no depende de la definición de equicontinuidad y utiliza la de familia normal. Esto se debe a que si G actúa como una familia normal en x , esto implica que G es equicontinua en x ; la implicación sale de uno de los teoremas de Arzela-Ascoli [8]. Por lo tanto, para la región de equicontinuidad se le pedirá algo más específico que solo equicontinuidad.*

Teorema 3.3.0.2. *Sea G un subgrupo discreto de $\hat{\mathbb{M}}^n$. Entonces la región de equicontinuidad de G coincide con la región de discontinuidad $S^n \setminus \Lambda(G)$.*

Con este teorema tenemos que la región de equicontinuidad y la región de discontinuidad son equivalentes para el caso clásico y la generalización anterior, aunque para nuestro caso en el espacio proyectivo esta equivalencia ya no se cumple; el ejemplo se dará en la subclasificación de los elementos de $\mathbb{CP}^2$.

Al igual que con la definición de Kulkarni, en [6] se da una clasificación de los elementos de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ utilizando la región de equicontinuidad.

Proposición 3.3.0.3. *Sea $\gamma \in PSL(n+1, \mathbb{C})$, entonces:*

- *γ Es un elemento elíptico si y solo si la región de equicontinuidad bajo $\langle \gamma \rangle$ es todo $\mathbb{CP}^n$.*
- *γ Es parabólico si y solo si el complemento de la región de equicontinuidad de $\langle \gamma \rangle$ es un solo subespacio proyectivo.*
- *γ Es loxodrómico si y solo si el complemento de la región de equicontinuidad de $\langle \gamma \rangle$ se puede describir como la unión de dos subespacio proyectivos de $\mathbb{CP}^n$.*

Hay otras definiciones para el conjunto límite, como la de Chen-Greenberg, que se utiliza como definición para subgrupo de $PU(n, 1)$, que son los automorfismos de espacio hiperbólico complejo. Otra definición se puede dar para los grupos de Schottky complejos. La principal definición que se estará utilizando en adelante será la de Kulkarni, a menos que se diga lo contrario.

3.3.1. Subclasificación de $\mathbb{CP}^2$

Con la siguiente subclasificación se verá con más detalle por qué las distintas definiciones de conjunto límite no son equivalentes y se terminará con una clasificación algebraica de los elementos de $\mathbb{CP}^2$ con base en la traza y un respectivo polinomio.

Definición 3.3.1.1. *Un elemento $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ es elíptico si y solo si tiene un levantamiento $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tal que g es diagonalizable y todos sus valores propios son valores complejos unitarios.*

Proposición 3.3.1.1. *Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ un elemento **elíptico** y sea $Eq(\langle \hat{g} \rangle)$ la región de equicontinuidad de $\langle \hat{g} \rangle$. Entonces los conjuntos de Kulkarni L_0, L_1, L_2 son los siguientes:*

- Si $\hat{g}$ es de orden finito, entonces:

$$\mathbb{CP}^2 \setminus Eq(\langle \hat{g} \rangle) = L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = \emptyset$$

- Si $\hat{g}$ es de orden infinito, entonces:

$$Eq(\langle \hat{g} \rangle) = L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = \emptyset$$

Si $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ es un elemento elíptico y su levantamiento $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tiene que todos sus valores propios son distintos, entonces $\hat{g}$ se le llamará **elíptico regular**. Y si resulta que su levantamiento tiene dos valores propios iguales, entonces se le llamará **reflexión compleja**.

$$E = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Donde existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \lambda_3^n$ y $\lambda_1 \lambda_2^{-1} \neq 1$. E tiene como puntos fijos a $e_1 = [1 : 0 : 0]$, $e_2 = [0 : 1 : 0]$ y $e_3 = [0 : 0 : 1]$.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2^{-1} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la línea $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es invariante y, haciendo lo mismo con las líneas $\overleftrightarrow{e_2, e_3}$ y $\overleftrightarrow{e_1, e_3}$, se llega a que también son invariantes.

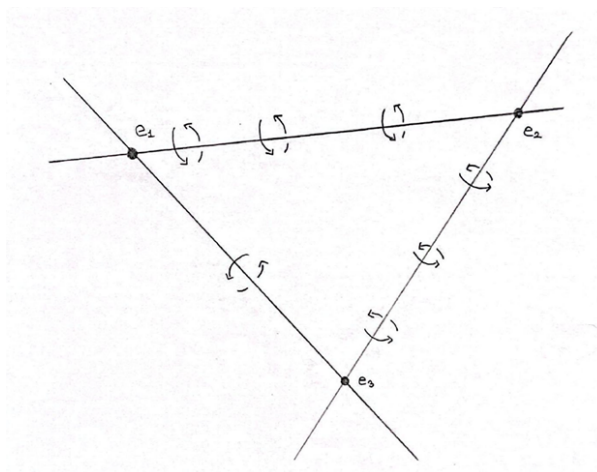


FIGURA 3.1: Dinámica de un elíptico regular en tres líneas proyectivas

En las tres líneas se tiene que E actúa como un elemento elíptico de $\mathbb{CP}^1$.

Definición 3.3.1.2. Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$, se le llamará **unipotente** si su levantamiento $g \in SL(3, \mathbb{C})$ es no diagonalizable y sus valores propios generalizados son iguales a 1. En el caso de que al menos un valor propio generalizado sea distinto de 1, se le llamará **elipto-parabólica**.

Definición 3.3.1.3. Un elemento $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ que sea unipotente o elipto-parabólico se le llamará **parabólico**.

En el caso de que un elemento parabólico sea elipto-parabólico, se le dirá que es racional si sus valores propios generalizados distintos de 1 son de la forma $e^{2\pi i x}$ y x es un número racional. En caso de que uno de los valores propios generalizados distinto de uno sea de la forma $e^{2\pi i x}$ con x un número irracional, entonces se le llamará irracional.

Proposición 3.3.1.2. Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$

- Si se asume que el levantamiento de $\hat{g}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $L_0(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1}, e_2^{\rightarrow}$, $L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = \{e_1\}$ y $Eq(\langle \hat{g} \rangle) = \Omega_{Kul}(\langle \hat{g} \rangle)$.

- Si el levantamiento es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $\hat{g}$ tiene solo un punto fijo, el cual es e_1 , $L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = \{e_1\}$ y $L_2(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1}, e_2^{\rightarrow}$, donde $\hat{g}$ actúa en la línea $\overleftarrow{e_1}, e_2^{\rightarrow}$. Como un elemento parabólico clásico y $Eq(\langle \hat{g} \rangle) = \Omega_{Kul}(\langle \hat{g} \rangle)$.

- Si el levantamiento es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = e^{2\pi i x} \neq 1$, entonces $\hat{g}$ tiene dos puntos fijos y son e_1 y e_3 . Si λ es racional, entonces $L_0(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1}, e_3^{\rightarrow}$, $L_1(\hat{g}) = \{e_1\}$ y $L_2(\hat{g}) = \{e_1\}$, y si es irracional, entonces $L_0(\hat{g}) = \{e_1, e_3\}$, $L_1(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1}, e_3^{\rightarrow}$ y $L_2(\hat{g}) = \{e_1\}$

Sea toma al parabólico unipotente

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dicho elemento unipotente solo tiene un punto fijo, siendo este $e_1 = [1 : 0 : 0]$

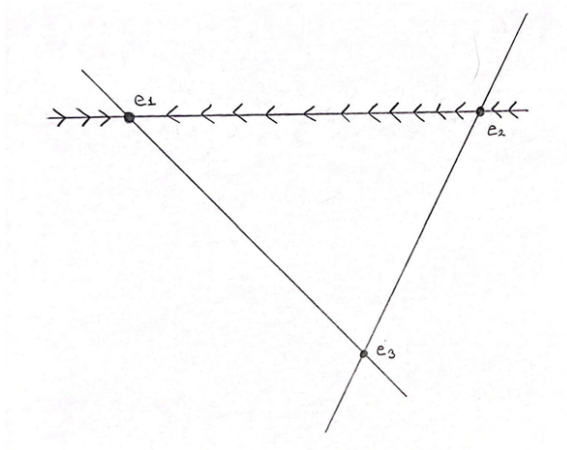


FIGURA 3.2: Dinámica de un parabólico unipotente en la línea $\overleftarrow{e_1}, e_2^{\rightarrow}$

Se analizara la dinámica de P en las líneas $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$, $\overleftrightarrow{e_2, e_3}$ y $\overleftrightarrow{e_1, e_3}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con esto se tiene que la línea $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es invariante. Si se toma a los elementos de $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ como $[x : 1 : 0]$, la dinámica de P en $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es igual a la dinámica de un parabólico en $\mathbb{CP}^1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y+z \\ z \end{bmatrix}$$

En ambas líneas $\overleftrightarrow{e_2, e_3}$ y $\overleftrightarrow{e_1, e_3}$ no son invariantes.

Definición 3.3.1.4. Un elemento **loxodrómico** será aquel que no sea un elemento parabólico ni elíptico.

Definición 3.3.1.5. Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ un elemento loxodrómico. Se le llama **loxo-parabólico** si su levantamiento de $g \in SL(3, \mathbb{C})$ no es diagonalizable.

Definición 3.3.1.6. Si $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ es loxodrómico y su levantamiento es diagonalizable, se le llama **homotecia compleja** si tiene dos valores propios iguales. Si todos sus valores propios son distintos, pero la norma de dos de ellos es igual, entonces se llamará **hélice**. En caso de que todos los valores propios sean distintos y de normas distintas, se le llama **fuertemente loxodrómico**.

Proposición 3.3.1.3. Si $\hat{g}$ es un loxo-parabólico con puntos fijos e_1, e_3 . Entonces $L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = \{e_1, e_3\}$ y $L_2(\hat{g}) = \overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3}$, donde $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es una línea $\hat{g}$ -invariante y $\hat{g}$ actúa en $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ como un elemento parabólico clásico. Más aún, $Eq(\langle \hat{g} \rangle) = \Omega_{Kul}(\langle \hat{g} \rangle)$.

Proposición 3.3.1.4. Si $\hat{g}$ es una homotecia compleja cuyos puntos fijos consisten en una línea R y un punto $z_0 \notin R$, entonces $L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = R \cup \{z_0\}$.

Proposición 3.3.1.5. *Si $\hat{g}$ es una hélice con puntos fijos e_1, e_2, e_3 , entonces: $L_0(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$ si $\hat{g}$ es racional y si es irracional $L_0(\hat{g}) = \{e_1, e_2, e_3\}$ y en cualquier caso $L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$*

Corolario 3.3.1.6. *Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ una homotecia o una hélice, entonces $Eq(\langle \hat{g} \rangle) = \overleftarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$.*

Proposición 3.3.1.7. *Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ un fuertemente loxodrómico con puntos fijos e_1, e_2, e_3 . Entonces $L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = \{e_1, e_2, e_3\}$, donde e_3 es un punto atractor en $\mathbb{CP}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$ y e_1 es un punto repulsor en $\mathbb{CP}^2 \setminus \overleftarrow{e_2, e_3}$. Más aún, $L_2(\hat{g}) = \overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_2, e_3} = \mathbb{CP}^2 \setminus Eq(\langle \hat{g} \rangle)$*

Se toma al siguiente elemento fuertemente loxodrómico.

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Donde $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$. L tiene tres puntos fijos: e_1, e_2, e_3 . La dinámica en la línea $\overleftarrow{e_1, e_2}$ tiene lo mismo que en el análisis del elemento elíptico.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2^{-1} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

La cual es invariante y lo mismo sucede con las otras dos líneas. La diferencia en la dinámica del loxodrómico es que en cada línea, L actúa como un loxodrómico de $\mathbb{CP}^1$, esto pues $|\lambda_1/\lambda_2| < 1$ y la acción es $z \mapsto (\lambda_1/\lambda_2)z$ en la línea $\overleftarrow{e_1, e_2}$.

Si se toma L^n , se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^n x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2$$

y si se toma a L^{-n} , se tendrá que converge a e_1 . Al aplicar el mismo análisis en las líneas $\overleftarrow{e_2, e_3}$ y $\overleftarrow{e_1, e_3}$, se concluye que e_1 es un punto repulsor, e_3 es atractor y e_2 es un punto silla.

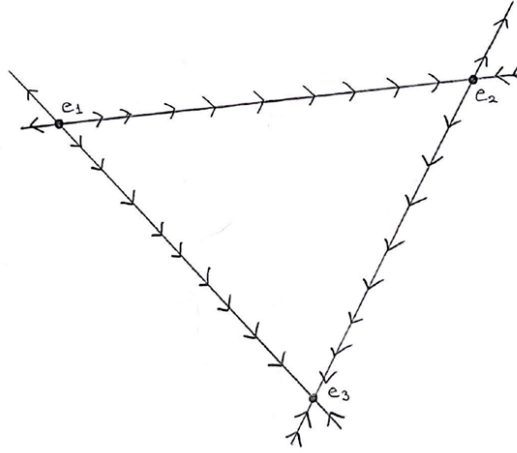


FIGURA 3.3: Dinámica de un fuertemente loxodrómico en tres líneas proyectivas

Estas definiciones se pueden simplificar en un solo teorema que sería el siguiente:

Teorema 3.3.1.8. *Para todo $g \in PSL(3, \mathbb{C})$ menos la identidad, se puede clasificar como una y solo una de las siguientes clases: elíptico, parabólico y loxodrómico.*

- *Si g es elíptico, será regular si todos sus valores propios son distintos y reflexión compleja si repite dos valores propios.*
- *Si g es parabólica, se le llama unipotente si sus valores propios generalizados son 1; en el caso de que no lo sean, se le llama elipto-parabólico.*
- *Si g es loxodrómico y no es diagonalizable, se le llama loxo-parabólico; si es diagonalizable y todas sus normas son distintas, será fuertemente loxodrómico; en caso de que dos normas sean iguales, se le llamará homotecia compleja si la tercera es 1 y, en el caso de que no lo sea, se le llama rotación.*

En el caso clásico se tiene una clasificación con base en la traza de los elementos, para este caso de $\mathbb{CP}^2$ también se tendrá una clasificación algebraica que es la siguiente:

Teorema 3.3.1.9. *Sea $F(x, y) = x^2y^2 - 4(x^3 + y^3) + 18xy - 27$ un polinomio complejo y sea $g \in SL(3, \mathbb{C})$. Sea $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ la projectivización de g , entonces g es :*

- *Elíptico regular si y solo si $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) < 0$.*
- *hiperbólica complejo y loxodrómica si y solo si $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) > 0$.*
- *Elipso-parabólica si y solo si $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$, $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$, $\tau(g) \notin 3C_3$ y $\hat{g}$ no es elíptica.*
- *Conjugado a una reflexión compleja si y solo si $\tau(g) \notin 3C_3$, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$.*
- *Parabólica unipotente si y solo si $\tau(g) \in 3C_3$, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $\hat{g}$ no es la identidad.*
- *Loxodrómica regular pero no hiperbólica compleja si y solo si $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) \neq 0$.*
- *homotecia compleja si y solo si g es diagonalizable $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$.*
- *Loxo-parabólica si y solo si $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$ y $\tau(g)$ no es diagonalizable.*

La clasificación en el caso clásico es notoriamente más simple y parecen distintos; para ese caso pareciera que no utiliza un polinomio, pero se puede reescribir para que se asemeje a la clasificación que se acaba de dar con el polinomio $x^2 - 4$. El conjunto C_3 consiste en las raíces del polinomio $x^3 - 1 = 0$.

El motivo por el que no se tiene una clasificación algebraica que dependa de la traza para los casos de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ con $n > 3$ es por las diversas subclases que se obtendrían; notar que para el caso clásico era suficiente con tres clases (o 4 si dividimos los hiperbólicos de los loxodrómicos) y para este se necesitan 8 clases. Para dimensiones más grandes, la cantidad de clases es mayor, haciendo que la clasificación sea cada vez más complicada.

3.4. Grupos Kleinianos complejos

A pesar de no tener una definición única para el conjunto límite, basta con tomarse la definición de acción propia y discontinua para definir el grupo Kleiniano complejo, ya que estas sí están bien definidas.

Definición 3.4.0.1. Sea Γ un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ y sea Ω el conjunto abierto Γ -invariante de $\mathbb{CP}^n$. La acción de Γ es **discontinua** en Ω si cada punto $x \in \Omega(\Gamma)$ tiene una vecindad U_x que interseca una cantidad finita de elementos de su Γ -órbita.

Definición 3.4.0.2. Sea Γ un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ y sea Ω un conjunto abierto Γ -invariante de $\mathbb{CP}^n$. Γ **actúa propia y discontinuamente** en Ω si para cada compacto $K \subset \Omega$ se tiene que K interseca una cantidad finita de copias de su Γ -órbita.

Teorema 3.4.0.1. Si $\Gamma < PSL(n+1, \mathbb{C})$ actúa discontinuamente en algún abierto Ω , entonces Γ es un grupo discreto.

Definición 3.4.0.3. Un subgrupo discreto $\Gamma < PSL(n+1, \mathbb{C})$ se le llamará **grupo Kleiniano complejo** si actúa propia y discontinuamente en algún abierto; sea Ω un conjunto abierto Γ -invariante de $\mathbb{CP}^n$.

3.4.1. Ejemplos de grupos Kleinianos complejos

3.4.1.1. Grupo Kleinianos hiperbólico complejos

Cada subgrupo discreto de $PU(n, 1)$ es un subgrupo discreto de $PSL(3, \mathbb{C})$ en el cual actúa propia y discontinuamente en el espacio $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$. Por lo tanto, un grupo discreto de $PU(n, 1)$ es un grupo Kleiniano complejo. Por definición, el cociente de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n/\Gamma$ es un orbifoldo hiperbólico complejo.

3.4.1.2. Grupo afín

Como ya se vio anteriormente, el grupo $\text{Aff}(\mathbb{C}^n)$ es un subgrupo de $PSL(3, \mathbb{C})$ y con esto, cada subgrupo discreto de $\text{Aff}(\mathbb{C}^n)$ con región de discontinuidad no vacía tiene como resultado un subgrupo discreto proyectivo con región de discontinuidad no vacía y, por ende, un grupo Kleiniano complejo.

Ejemplos más en concreto de estos grupos son el grupo fundamental de una variedad de Hopf, el grupo fundamental de un toro complejo. Más adelante se verán ambos grupos a mayor detalle.

3.4.1.3. Grupo de Schottky

Se considera una colección $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_r\}$ de n -espacios proyectivos en $\mathbb{CP}^{2n+1}$ que sean disjuntos entre sí. Dada una vecindad $U_1, \dots, U_r$ de los L_i , se puede probar que existe una vecindad tubular compacta V_i de L_i que contenga a U_i y una transformación proyectiva T_i de $\mathbb{CP}^{2n+1}$ para $i = 1, \dots, r$ que intercambia el interior de V_i con el exterior, dejando invariante a la frontera $E_i = \partial V_i$. Los E_i son espejos que tienen el mismo rol en $\mathbb{CP}^{2n+1}$ que las $(n-1)$ -esferas en S^n para definir el grupo de Schottky en el caso conformal. El grupo generado por las transformaciones T_i genera un grupo Kleiniano complejo.

3.4.1.4. Grupos de suspensión

Sea Γ un subgrupo de $PSL(n, \mathbb{C})$ y se considera al mapeo cubriente $\pi_n : SL(n, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(n, \mathbb{C})$. Sea $\hat{\Gamma} \subset SL(n, \mathbb{C})$ la imagen inversa $\pi_n^{-1}(\Gamma)$. Se toma a $\mathbb{CP}^n$ como $\mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1}$ y a $\tilde{\Gamma}$ como un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ tal que actúa como $\hat{\Gamma}$ en $\mathbb{C}^n$ y la acción en el hiperplano al infinito $\mathbb{CP}^{n-1}$ que actúe como Γ . Al grupo $\tilde{\Gamma}$ se le llama grupo de suspensión. De esta manera se "extiende" un grupo de $PSL(n, \mathbb{C})$ a $PSL(n+1, \mathbb{C})$. Bajo ciertas condiciones, si se toma un grupo Kleiniano complejo de $PSL(n, \mathbb{C})$ al tener su grupo de suspensión, este será un grupo Kleiniano complejo en $PSL(n+1, \mathbb{C})$.

3.4.2. propiedades de grupos Kleinianos complejos

Proposición 3.4.2.1. *Sea Γ un subgrupo discreto de $PSL(n+1, \mathbb{C})$, entonces Γ es finito si y solo si cada uno de los elementos de Γ son de orden finito.*

Proposición 3.4.2.2. *Sea Γ un subgrupo discreto de $PSL(n+1, \mathbb{C})$, entonces Γ es finito si y solo si $\Lambda_{Kul}(\Gamma) = \emptyset$.*

Demostración. Es claro que si Γ es finito, $\Lambda_{Kul}(\Gamma)$ será finito. Sea Γ un subgrupo de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda_{Kul}(\Gamma)$ es finito. Supóngase que Γ no es finito; entonces existe

un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que su orden es infinito. Sea $\tilde{\gamma}$ el levantamiento de γ y x un valor propio de $\tilde{\gamma}$; este valor propio existe, pues $\mathbb{C}$ es completo como campo. Entonces $[x]$ es un punto fijo de γ y, por lo tanto, $[x] \in L_0(\Gamma)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Γ debe ser finito. ■

Proposición 3.4.2.3. *Sea Γ un subgrupo discreto de $PSL(n+1, \mathbb{C})$ de orden infinito, con $n > 1$. Entonces el conjunto límite de Kulkarni de Γ siempre contiene un espacio proyectivo de dimensión de por lo menos 1.*

Esta proposición implica que para $n > 1$, el conjunto de Kulkarni contiene un espacio proyectivo de dimensión positiva; por ende, el conjunto límite de Kulkarni es de cardinalidad infinita. Así que no tiene sentido el contar los puntos en el conjunto límite. Para $n = 2$ se tiene un resultado similar al caso clásico, con la diferencia de que en vez de contar cuántos puntos hay en el conjunto límite, se observa cuántas líneas complejas tiene en algún conjunto límite.

Teorema 3.4.2.4. *Sea Γ un subgrupo discreto infinito de $PSL(3, \mathbb{C})$ y sea $\Omega \subset \mathbb{CP}^2$ la región equicontinua, la región de discontinuidad de Kulkarni o la máxima región donde Γ actúa propia y discontinua. Entonces, el número de líneas contenidas en $\mathbb{CP}^2 \setminus \Omega$ es 1, 2, 3 o infinitas.*

Proposición 3.4.2.5. *Sea $p \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$ y sea $\{g_n\}$ una sucesión de elementos de $PU(n, 1)$ tal que $g_m(p) \rightarrow q \in \partial\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$ cuando $m \rightarrow \infty$. Entonces, para todo $p' \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n$, se tiene que $g_m(p') \rightarrow q$ cuando $m \rightarrow \infty$.*

La teoría de grupos Kleinianos complejos es una teoría relativamente nueva. Por esta razón no se conocen muchas propiedades para grupos Kleinianos complejos de $\mathbb{CP}^n$. La mayoría de propiedades es en dimensión 1 y 2. Las propiedades generales y algunas para dimensión 2, se necesita desarrollar un poco más de teoría que se sale de los objetivos de la tesis. Si se quiere ver más a profundidad, las propiedades de estos grupos se pueden ver en [2], [5] y en [6].

3.5. Variedades Complejas

Definición 3.5.0.1. Un **atlas holomorfo** en una variedad diferenciable es un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ de la forma $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ tal que la función de transición $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es holomorfa. Al par (U_i, φ_i) se le llama **carta holomorfa**.

Dos atlas holomorfos $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(U'_j, \varphi'_j)\}$ se dice que son equivalentes si todos los mapeos $\varphi_i \circ \varphi'_j{}^{-1} : \varphi'_j(U_i \cap U'_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U'_j)$ son holomorfos.

Definición 3.5.0.2. Una variedad compleja M de dimensión n es una variedad diferenciable real de dimensión $2n$ equipada con una clase de equivalencia inducida por un atlas complejo.

Se puede notar que la definición anterior se puede reescribir a la definición de (X, G) -variedad cambiando al espacio geométrico X por el espacio complejo $\mathbb{C}^n$, a la variedad M por una variedad diferenciable y al grupo de similitudes G se cambia por un grupo de holomorfismos.

Una variedad compleja se le dice conexa, compacta o simplemente conexa si la variedad diferenciable real M tiene esa propiedad. Si se quiere entender a más detalle lo que son las variedades complejas, se puede ver [14].

Proposición 3.5.0.1. $\mathbb{CP}^n$ es una variedad compleja

Demostración. Se toma a la cubierta estándar de $\mathbb{CP}^n$ generada por:

$$U_i := \{[z_1 : \dots : z_n : z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n : z_i \neq 0\}$$

con $i = 1, \dots, n+1$. A cada U_i se le asocia una función de la siguiente forma:

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \quad [z_1 : \dots : z_{n+1}] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right)$$

Faltará ver que son compatibles holomorfas. Se toman dos cartas $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ y se toma la función:

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

la cual está definida como:

$$\varphi_{ij}(w_1, \dots, w_n) = \left(\frac{w_1}{w_i}, \dots, \frac{w_{j-1}}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_n}{w_i} \right)$$

Dicha función es claramente biyectiva y para ver que es holomorfa bastará con ver que es holomorfa en cada una de sus entradas, lo cual cumplirá. En la entrada de $1/w_i$ será holomorfa, pues está definida en $\mathbb{C}^*$, y las demás entradas serán la función $f(x, y) = x/y$, que va de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}$ y la cual será holomorfa si se toma al dominio como $\mathbb{C}^2 \setminus \{(x, y) : y \neq 0\}$. Entonces las cartas son compatibles holomorfas, generando así una estructura compleja. Por lo tanto, $\mathbb{CP}^n$ es una variedad compleja. ■

Definición 3.5.0.3. *Una función holomorfa en una variedad compleja M es una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa para cada carta holomorfa (U_i, φ_i) de un atlas holomorfo de M .*

Definición 3.5.0.4. *Sea G un grupo que actúa en X . A la acción se le llama propia si el mapeo $G \times X \rightarrow X \times X$, $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ es propia en el sentido topológico.*

Sea G un grupo discreto que actúa libre y propia en una variedad compleja X . Entonces la acción satisface las siguientes condiciones:

- Para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta U_x tal que $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$ para todo $g \in G$
- Si $x, y \in X$, existe una vecindad abierta U_x y U_y tal que $U_x \cap g(U_y) = \emptyset$ para todo $g \in G$

La primera condición asegura que el espacio X/G admita cartas holomorfas y la segunda que el cociente sea un espacio Hausdorff.

Para ver que el cociente es Hausdorff, se hace de la misma manera que se probó que el cociente de un grupo Kleiniano con su región de discontinuidad es un espacio Hausdorff. Para ver que es una variedad compleja, se toma una cubierta de cartas holomorfas (U_i, φ_i) de X tal que $X = \cup U_i$, con $U_i \cap g(U_i) = \emptyset$ para $g \in G \setminus \{id\}$. Con esto se tiene que

$\pi : U_i \rightarrow \pi(U_i)$ es biyectiva y $\pi(U_i)$ es un abierto. Entonces las cartas holomorfas de X/G se definen por $\pi(U_i) \rightarrow U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$, teniendo estas cartas la siguiente forma $(\pi(U_i), \varphi_i \circ \pi^{-1})$. Dichas cartas generan un atlas holomorfo y con esto X/G es una variedad compleja.

Como $\mathbb{CP}^n$ es una variedad compleja y un grupo Kleiniano complejo Γ actúa propia y discontinuamente en una región de $\mathbb{CP}^n$, este grupo Kleiniano complejo es un grupo discreto, y su acción es propia. Con esto se tiene que si Ω es una región donde Γ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{CP}^n$, el cociente Ω/Γ será un orbifoldo, y si el grupo Kleiniano es libre de torsión, el cociente será una variedad compleja.

Teorema 3.5.0.2. *Sea $\Gamma < PSL(n+1, \mathbb{C})$ un grupo Kleiniano libre de torsión con región de discontinuidad Ω . Entonces Ω/Γ es una variedad compleja. En particular, Ω/Γ es Hausdorff.*

Al igual que en la generalización anterior, se puede utilizar el lema de Selberg para obtener grupos Kleinianos libres de torsión y asegurar que el cociente sea una variedad compleja. Para ver más información del lema de Selberg, se puede ver en [1].

Teorema 3.5.0.3 (Lema de Selberg). *Sea G un grupo de matrices finitamente generado sobre un campo de característica 0. Entonces G tiene un subgrupo de índice finito libre de torsión.*

Lastimosamente, no se tiene una proposición o un teorema que asegure que, al aplicar el lema de Selberg, la dinámica del grupo Kleiniano se preserve. El que se preserve la dinámica solo se puede asegurar para dimensión 1, que sería el caso clásico, y para dimensión 2, pero solo para el conjunto límite de Kulkarni. La demostración de la siguiente proposición se puede ver en [2].

Proposición 3.5.0.4. *Si H es un subgrupo de índice finito de $G \subset PSL(3, \mathbb{C})$, entonces:*

- $L_0(G) = L_0(H)$
- $L_1(G) = L_1(H)$
- $L_2(G) = L_2(H)$
- $\Lambda_{Kul}(H) = \Lambda_{Kul}(G)$ y $\Omega_{Kul}(H) = \Omega_{Kul}(G)$

3.5.1. Ejemplos de variedades complejas

3.5.1.1. Toro complejo

Sea $v_1, \dots, v_{2n} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ que son $\mathbb{R}$ linealmente independientes y sea g_i la traslación inducida por v_i . Entonces $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_{2n} \rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^{2n}$ y además Γ actúa propiamente discontinuamente y libre en $\mathbb{C}^n$. Con esto se obtiene que $\mathbb{C}^n/\Gamma$ es una variedad compleja y se le conoce como un toro complejo T^n .

Como las traslaciones g_i son transformaciones afines de $\mathbb{C}^n$, estas actúan también en $\mathbb{CP}^n$ y es fácil de ver que $\Omega_{Kul}(\Gamma) = Eq(\Gamma) = \mathbb{C}^n$ y que además es la región más grande donde Γ actúa propia y discontinuamente.

Observación 3.5.1.1. *Se puede notar que si se intercambia $\mathbb{C}^n$ con el espacio $\mathbb{R}^{2n}$, esta misma construcción permite construir toros que serán variedades Euclidianas, como se vio en el ejemplo de una 3-variedad Euclidiana. Esto lo que muestra es que el toro de dimensión par admite una estructura compleja y también una estructura geométrica. Esto también se puede observar en las superficies de Riemann, pues gracias al teorema de uniformización son el cociente de la esfera, el plano complejo o el espacio hiperbólico, y esto lo que genera es que puedan tener una estructura geométrica, ya sea la Euclidiana, esférica o hiperbólica. A estas variedades son ejemplos de variedades de Kähler (ver [13]). El siguiente ejemplo termina siendo un ejemplo más interesante si se tiene en cuenta que fue la primera variedad compleja no Kähler que se descubrió.*

3.5.1.2. Variedad de Hopf

Sea g un elemento de $GL(3, \mathbb{C})$ de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\det(g) = \lambda^2$, Entonces multiplicamos a g por $1/\lambda^{2/3}$, esto para que su determinante sea igual a 1

$$g' = \frac{1}{\lambda^{2/3}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2/3} \end{pmatrix}$$

Entonces $g' \in SL(3, \mathbb{C})$. Se proyectiviza la matriz g' para que este en $PSL(3, \mathbb{C})$, quedando así que:

$$[g'] = \begin{bmatrix} \lambda^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2/3} \end{bmatrix}$$

$[g']$ es un elemento loxodrómico, más en específico una homotecia compleja de $PSL(3, \mathbb{C})$.

Al ser $[g']$ una homotecia compleja, se tiene que $\Omega_{Kul}(\Gamma) = Eq(\Gamma) = \Omega_M(\Gamma) = \mathbb{CP}^2 \setminus \{\overrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}\}$, la cual es homeomorfa a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. El grupo Γ es el grupo generado por $[g']$.

Al espacio cociente $\Omega_{Kul}(\Gamma)/\Gamma$ se le conoce como superficie de Hopf.

Al ser la superficie de Hopf un concepto más viejo que la de grupo Kleiniano complejo, esta puede ser construida de manera independiente de los grupos Kleinianos complejos y esa construcción es de la siguiente manera.

Sea $\Gamma_g = \langle g \rangle$ una contracción en $\mathbb{C}^n$ de la forma:

$$g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$g(z) = \mu z$$

El grupo Γ_g es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y actúa propiamente discontinuamente y libre en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, obteniendo que $S = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\Gamma_g$ sea una variedad compleja compacta y se le llama variedad de Hopf. Cuando $n = 2$, a dicha variedad se le llamará superficie de Hopf.

Notar que la construcción de la superficie de Hopf por un grupo Kleiniano complejo se dio para la dimensión $n = 2$ y la construcción alternativa fue general. Para hacer una construcción general para grupos Kleinianos complejos, se toma a la contracción g y, al ser esta una transformación lineal, se puede ver como una matriz. A la matriz obtenida se le extiende de manera diagonal a una transformación afín de $\mathbb{C}^n$, dando como resultado una matriz de $(n + 1) \times (n + 1)$; se normaliza y luego se proyectiviza para que esta esté en $PSL(n + 1, \mathbb{C})$. De esta manera, la contracción se puede ver como un elemento de $PSL(n + 1, \mathbb{C})$ y actuará discontinuamente por lo menos en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Por lo tanto, toda variedad de Hopf se puede ver como el cociente de un grupo Kleiniano complejo.

Se puede observar que la variedad de Hopf S es una variedad de dimensión compleja n y el espacio $\mathbb{CP}^{n-1}$ es de dimensión compleja $n - 1$. A pesar de obtenerse con el mismo espacio $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. La distinción de las dimensiones se debe a la relación de equivalencia con la que se hace el cociente. Para el caso de $\mathbb{CP}^{n-1}$, se puede ver como si una de las dimensiones de $\mathbb{C}^n$ colapsara por la relación de equivalencia dada para el espacio proyectivo; en cambio, para S , su relación de equivalencias no genera este colapso de una de sus dimensiones.

Proposición 3.5.1.1. *La superficie de Hopf es un espacio homogéneo.*

Demostración. Se tiene una superficie de Hopf $S = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ tal que la acción de $\mathbb{Z}$ está definida por

$$(z, w) \mapsto \mu^k(z, w), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Al igual que en $\mathbb{CP}^1$, $SL(2, \mathbb{C})$ actúa transitivamente en S y teniendo el siguiente grupo:

$$B_\mu = \left\{ \begin{pmatrix} \mu^k & b \\ 0 & \mu^{-k} \end{pmatrix} \mid \mu, b \in \mathbb{C}, |\mu| > 1, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Se aplica el teorema de la órbita y estabilizador; se tiene que $S = SL(2, \mathbb{C})/B_\mu$. La órbita en el punto $[1 : 0]$ es todo S por la transitividad.

El estabilizador en $[1 : 0]$ serán las matrices de $SL(2, \mathbb{C})$ que fijen a $[1 : 0]$. Dada una matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

y se hace que actúe en $[1 : 0]$ quedando:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Entonces c debe ser igual a 0. Esto deja que $1 = a$, pero al estar en S , $1 = \mu^k$ con $k \in \mathbb{Z}$, por ende $a = \mu^k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Y para que la matriz tenga determinante igual a 1, $d = a^{-1} = \mu^{-k}$ dejando que los elementos de $SL(2, \mathbb{C})$ que dejan fijo a $[1 : 0]$ sean B_μ , entonces el estabilizador de $[1 : 0]$ es B_μ .

Esto deja que $S = SL(2, \mathbb{C})/B_\mu$ concluyendo así que S es homogéneo. ■

Definición 3.5.1.1. Sean M y F espacios topológicos. Un haz fibrado sobre M con modelo de fibra F es un espacio topológico E que tiene un mapeo continuo sobreyectivo $\pi : E \rightarrow M$ con la propiedad de que para todo $x \in M$, existe una vecindad $U_x \in M$ y un homeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times F$, llamada trivialización local de E sobre U_x .

$$\begin{array}{ccc} & \Phi & \\ \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\quad} & U_x \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U_x & & \end{array}$$

π_1 es la proyección natural de $U_x \times F$ a U_x . Al espacio E se le llama espacio total del haz, a M se le llama base y F el modelo de fibra. Se denota por $F \hookrightarrow M \rightarrow E$.

Proposición 3.5.1.2. La superficie de Hopf S es un haz fibrado holomorfo sobre $\mathbb{CP}^1$ con una fibra $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1$.

Demostración. Sea $[z]_{\mathbb{C}^*} \in \mathbb{CP}^1$, entonces $\pi^{-1}([z]_{\mathbb{C}^*}) = \{[\lambda z]_{\mathbb{Z}} : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Como se puede definir $\pi = \pi_{\mathbb{C}^*} \circ \pi_{\mathbb{Z}}^{-1}$ y $\pi_{\mathbb{C}^*}^{-1}([z]_{\mathbb{C}^*}) = \{\lambda z : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$, se tendrá que $\pi_{\mathbb{Z}}(\pi_{\mathbb{C}^*}^{-1}([z]_{\mathbb{C}^*})) = \{[\lambda z]_{\mathbb{Z}} : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ y, como se tiene que $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1$ (se puede ver en el capítulo 1 al construir el toro complejo con un loxodrómico), se puede concluir que la fibra de $[z]_{\mathbb{C}^*}$ sobre π es homeomorfa al toro complejo $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1$.

$$\begin{array}{ccc}
 & W & \\
 \pi_{\mathbb{Z}} \swarrow & & \searrow \pi_{\mathbb{C}} \\
 S & \xrightarrow{\Phi} & U_1 \times \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1 \\
 \pi \searrow & & \downarrow \\
 & \mathbb{CP}^n &
 \end{array}$$

Sea $U_1 = \{[z_1 : z_2]_{\mathbb{C}^*} \in \mathbb{CP}^1 : z_1 \neq 0\}$. Si $[z]_{\mathbb{Z}} \in h^{-1}(U_1)$, con $z = (z_1, z_2)$ y $z_1 \neq 0$, entonces $z = z_1(1, w)$, con $w = z_2/z_1$. Entonces $[z]_{\mathbb{Z}} = [z_1(1, w)]_{\mathbb{Z}}$

Se define $\Phi : \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1$ como $\Phi([z]_{\mathbb{Z}}) = ([z]_{\mathbb{C}^*}, [z_1]_{\mathbb{Z}})$, la cual es continua, ya que las proyecciones $\pi_{\mathbb{C}^*}$ y $\pi_{\mathbb{Z}}$ son funciones continuas y la inversa también lo será. Veamos que Φ sea biyectiva. Para ver que es inyectivo, sean $[z_1]_{\mathbb{Z}}, [\zeta]_{\mathbb{Z}} \in \pi^{-1}(U_1)$ tales que $([z]_{\mathbb{C}}, [z_1]_{\mathbb{Z}}) = ([\zeta]_{\mathbb{C}}, [\zeta_1]_{\mathbb{Z}}) \Rightarrow [z]_{\mathbb{C}} = [\zeta]_{\mathbb{C}}$ y $[z_1]_{\mathbb{Z}} = [\zeta_1]_{\mathbb{Z}} \Rightarrow z = \lambda\zeta$ y $z_1 = m\zeta_1$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow [z]_{\mathbb{Z}} = [z_1(1, \frac{z_2}{z_1})]_{\mathbb{Z}} = [m\zeta_1(1, \frac{\zeta_2}{\zeta_1})]_{\mathbb{Z}} = [\zeta_1(1, \frac{\zeta_2}{\zeta_1})]_{\mathbb{Z}} = [\zeta]_{\mathbb{Z}}$. Será claro que Φ es sobreyectiva, teniendo que Φ es un homeomorfismo.

Faltaría nomás ver que existe una trivialización local en el punto $[0 : 1]_{\mathbb{C}^*} \in \mathbb{CP}^1$. Para ello se toma el abierto $U_2 = \{[z_1 : z_2]_{\mathbb{C}^*} \in \mathbb{CP}^1 : z_2 \neq 0\}$ y la trivialización en este abierto es análoga a la de U_1 .

Por lo tanto, $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ ■

Proposición 3.5.1.3. *La superficie de Hopf S es difeomorfa a $S^3 \times S^1$.*

La idea de la demostración es hacer un cambio de variables de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ a $S^3 \times \mathbb{R}^+$, el cual se puede pasar a $S^3 \times \mathbb{R}$, viendo la acción de la contracción y pasar a $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\Gamma$ se observa que deja invariante a S^3 y a $\mathbb{R}$ lo manda a S^1 , teniendo que $S \cong S^3 \times S^1$.

De hecho, este resultado es más general, pues se tiene que una variedad de Hopf es difeomorfa a $S^{2n-1} \times S^1$.

Corolario 3.5.1.4. *La superficie de Hopf S es un espacio compacto.*

Demostración. Como S es particularmente homeomorfo a $S^3 \times S^1$, se utiliza el teorema de Tychonoff, que dice que un producto es compacto si y solo si cada una de sus componentes es compacta, y como S^3 y S^1 son compactos gracias al teorema de Heine-Borel, entonces el espacio producto también lo será. Por tanto, S es compacto. ■

3.5.1.3. La fibración de Hopf

Se considera a S^3 como un subconjunto de $\mathbb{C}^2$ y se identifica a S^1 con $\mathbb{CP}^1$. Entonces:

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

la fibración de Hopf se define de la siguiente manera:

$$h : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

$$(z, w) \mapsto [z : w]$$

Proposición 3.5.1.5. *Sea $h : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ la fibración de Hopf. Para todo elemento $p \in \mathbb{CP}^1$ la fibra $h^{-1}(p)$ es homeomorfa a un S^1 .*

Demostración. Sea $[z : w] \in \mathbb{CP}^1$, entonces

$$h^{-1}([z : w]) = \{(z_1, w_1) \in \mathbb{C}^2 : [z_1 : w_1] = [z : w]\}$$

Como $[z_1 : w_1] = [z : w]$, se tiene que $(z_1, w_1) = \lambda(z, w)$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Es claro que $(z_1, w_1), (z, w) \in S^3$, con esto se tiene que $\|(z_1, w_1)\| = \|(z, w)\| = 1$, entonces $\|(z_1, w_1)\| = \|\lambda(z, w)\| = |\lambda| \cdot \|(z, w)\| = 1 \implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = e^{i\theta}$, por tanto $h^{-1}([z : w]) = \{e^{i\theta}(z, w) : e^{i\theta} \in S^1\}$. ■

Proposición 3.5.1.6. *S^3 es un haz fibrado sobre $\mathbb{CP}^1$ con modelo de fibra S^1 .*

Demostración. Sea $h : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ la fibración de Hopf. Para ver que S^3 es un haz fibrado sobre $\mathbb{CP}^1$, basta ver que existe una trivialización en $h^{-1}(U_1)$, pues el caso para U_2 es análogo.

Sea $U_1 = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 : z_1 \neq 0\}$. Si se tiene $z \in h^{-1}(U_1)$, entonces $z = (z_1, z_2) \in S^3$, con $z_1 \neq 0$. Entonces $z = z_1(1, w)$, con $w = z_2/z_1$

Nótese que $|z_1| = 1/|(1, w)|$, pues $z \in S^3 \implies z = e^{i\theta}/|(1, w)| \implies z = e^{i\theta} \frac{(1, w)}{|(1, w)|}$

Se define la trivialización local $\Phi : h^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times S^1$. tal que:

$$\Phi(z_1, z_2) = ([z_1 : z_2], e^{i\theta})$$

donde $e^{i\theta} = z_1 \cdot |(1, \frac{z_2}{z_1})|$

Por lo tanto, $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ ■

Se puede observar que la fibración de Hopf es similar a la fibración $T_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow S \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Esto se hace viendo la fibración a nivel topológico como $S^1 \times S^1 \hookrightarrow S^3 \times S^1 \rightarrow S^2$. Entonces la fibración de Hopf se puede incrustar en la fibración en toros dejando fijo uno de los elementos de S^1 como $S^1 \times \{x\} \hookrightarrow S^3 \times \{x\} \rightarrow S^2$, con $x \in S^1$. Si se quiere conocer más sobre la fibración de Hopf, se puede ver [16].

3.6. Clasificación de Kodaira

Para finalizar con el estudio de la teoría compleja, se puede notar que, en el caso clásico y en el conformal, los grupos Kleinianos tienen la utilidad de estudiar cierto tipo de variedades de alguna clasificación de estas. Para el caso clásico es el teorema de uniformización y en el conformal el teorema de geometrización. Para el caso de variedades complejas, la clasificación de estas variedades se da por el siguiente teorema.

Teorema 3.6.0.1. *Toda superficie compleja tiene un modelo minimal en exactamente una de las clases (1) a (10). El modelo es único salvo isomorfismos, excepto para una superficie con modelo minimal de clase (1) y (3).*

Las clases se clasifican por la dimensión de Kodaira y el primer número de Betti y son las siguientes:

- (1) Superficies racionales minimales. Estas superficies tienen $Kod(X) = -\infty$, $b_1(X) = 0$
- (2) Superficies de clase VII minimales. $Kod(X) = -\infty$ y $b_1(X) = 1$
- (3) Superficies de genero $g \geq 1$. $Kod(X) = -\infty$ y $b_1(X) = 2g$
- (4) Superficies de Enrike. $Kod(X) = 0$ y $b_1(X) = 0$
- (5) Superficies bi-elípticas. $Kod(X) = 0$ y $b_1(X) = 2$
- (6) Superficies de Kodaira. $Kod(X) = 0$ y $b_1(X) = 3$ o 1 dependiendo se son primarias o secundarias
- (7) Superficies K3. $Kod(X) = 0$ y $b_1(X) = 0$
- (8) Toros. $Kod(X) = 0$ y $b_1(X) = 4$
- (9) Superficies propiamente elípticas minimales. $Kod(X) = 1$
- (10) Superficies de tipo general minimales. $Kod(X) = 2$ y $b_1(X) \equiv 0(2)$

Se puede notar que para la clase 4 y 6 se tienen los mismos valores en la dimensión de Kodaira y en el primer número de Betti. Esto es porque la clasificación es más extensa; se hace la clasificación por 6 valores, pero para dejar la clasificación lo más simple posible, solo se muestran la dimensión de Kodaira y el primer número de Betti. En [3] se ve con más detenimiento dicha clasificación.

Con este teorema se obtiene un análogo al teorema de uniformización y al de geometrización de los casos clásicos y conformales. Para el caso clásico, se tiene que toda superficie de Riemann se puede definir por un grupo Kleiniano, para el caso conformal, se pueden construir variedades hiperbólicas y algunas Euclidianas y esféricas. Para este caso complejo, se tiene que por lo menos la clase (2) y (8) se pueden construir con grupos Kleinianos complejos. El caso (8) ya se dio un ejemplo, que es el propio toro complejo, y para el caso (2) se tienen las superficies de Hopf; también se tienen las superficies de Inue, que se pueden ver en [5].

Conclusiones

En este último capítulo se hará un análisis comparando las generalizaciones construidas en los capítulos 2 y 3, teniendo en cuenta lo realizado en el capítulo 1. Dicha comparación se centrará en distintos aspectos.

Espacio

En la teoría clásica se tiene como espacio base a $\mathbb{CP}^1$, que es homeomorfo a S^2 y holomorfo a $\mathbb{CP}^1$. Para la generalización, para el caso conformal, se tiene como espacio base a $\hat{\mathbb{R}}^n$, que es homeomorfo a S^n , y dependiendo del contexto, este anterior espacio puede ser el espacio hiperbólico $\mathcal{H}^n$. Para la generalización con los biholomorfismos, se tiene a $\mathbb{CP}^n$; en casos, se puede tomar al espacio hiperbólico complejo.

Ambos espacios en las generalizaciones llegan a ser homeomorfos para el caso de $n = 1$; para $n > 1$ dejan de ser homeomorfos. Con la esfera S^n se tiene como espacio topológico y para $\mathbb{CP}^n$ se tiene como un espacio con estructura compleja, al igual que en el caso clásico.

Grupo de automorfismos

Para los grupos de automorfismos, se tiene que en la primera generalización se preserva que el grupo actúe de manera conformal y se agrega que también pueda ser anticonformal (preserve ángulos, pero no la orientación). Para la segunda generalización, se preserva que el grupo actúe de manera biholomorfa. Es aquí donde se puede ver la primera gran diferencia entre las dos generalizaciones, pues mientras que en el caso clásico se tiene que el grupo es biholomorfo y conformal (prop. 1.2.0.7), para las generalizaciones solo se preserva una característica.

La clasificación de sus elementos llega a ser igual en los tres casos: parabólico, elíptico y loxodrómico. Su diferencia está en que en el caso complejo se puede tener una clasificación con la traza para $\mathbb{CP}^2$ al igual que en $\mathbb{CP}^1$ y para el caso conformal se puede hacer por la cantidad de puntos fijos. También cada una de las generalizaciones termina teniendo subclases, como los pseudo para la generalización en S^n y las diversas subclases de $\mathbb{CP}^2$.

Región de discontinuidad y conjunto límite

En el conjunto límite, para el caso conformal es exactamente igual que para el caso clásico. Es en el caso complejo en donde se hace una gran diferencia en los otros casos, pues para el caso complejo no se tiene una única definición para el conjunto límite y región de discontinuidad (los otros casos también tienen distintas definiciones, pero estas terminan siendo equivalentes entre sí). Debido a esta diferencia, se tienen distintas formas de calcular el conjunto límite de un grupo para el caso conformal y clásico. Para el caso complejo se tienen varias formas de obtener distintos conjuntos límites, que vienen siendo la de Kulkarni [def. 3.3.0.2], equicontinua [def. 3.3.0.3] y la del complemento de la máxima región de discontinuidad [def. 3.3.0.1] aunque esta última no está bien definida.

Grupo Kleiniano

En este apartado, las definiciones de grupos Kleinianos son iguales: grupos discretos (de $PSL(2, \mathbb{C})$, $\hat{M}^n$, $PSL(n+1, \mathbb{C})$) con región de discontinuidad no vacía. Aunque una diferencia sutil es que para S^n se pueden construir grupos de Schottky de cualquier $n \in \mathbb{N}$, pero para $\mathbb{CP}^n$ los grupos de Schottky solo existen para dimensiones impares.

En las generalizaciones, se tienen resultados similares para los grupos Kleinianos y discretos, como el de la proposición 1.3.0.3, que para el caso conformal (Teorema 2.5.2.6) es el mismo y para el caso complejo no se tiene el mismo resultado, pero sí uno parecido en el Teorema 3.4.2.4. La diferencia es que este es con líneas y no con puntos y también es solo para $\mathbb{CP}^2$ y no es general. Otro resultado más obvio es que el conjunto límite es vacío si y solo si el grupo es finito, lo cual se cumple en las tres teorías.

La lista podría ser más amplia, pero en el caso complejo se necesita desarrollar más teoría, pues es una teoría relativamente nueva en comparación con la otra generalización, que es bastante directa a la clásica. Esto hace que sean prácticamente la misma teoría. De

hecho, al tratar de estudiar grupos Kleinianos lo más común es que, al buscar información de estos, directamente salga información del caso conformal en vez de solo la clásica.

Cociente

Los cocientes que se construyen en los tres casos resultan ser espacios Hausdorff (2.6.0.1, 3.5.0.2). Se puede utilizar una región fundamental para entender mejor estos cocientes y con esto las tres teorías al final funcionan como una herramienta para construir variedades, sobre todo variedades diferenciables con alguna estructura más específica. Para el caso clásico y complejo se tiene que se construyen variedades complejas (superficies de Riemann para dimensión 1) y para el conformal se tiene que se pueden construir variedades Euclidianas, esféricas e hiperbólicas, con un cierto enfoque en las hiperbólicas.

Clasificación

Para los tres casos se tiene que aportar a la hora de estudiar las clasificaciones de variedades. Para el caso clásico, es el resultado más fuerte, pues el teorema de uniformización garantiza que toda superficie de Riemann se obtiene del cociente de un grupo Kleiniano. En el caso conformal, se tiene que se pueden estudiar por lo menos 3 de 8 geometrías para las 3-variedades compactas. Para el caso complejo se tiene la clasificación de Kodaira, de las cuales por lo menos 2 de las 10 clases se pueden estudiar con grupos Kleinianos complejos.

Apéndice A

Cubrientes

Un agregado que no se utiliza mucho en el escrito es la teoría de cubriente, la cual solo se llega a mencionar en la teoría clásica. A pesar de no utilizarse en las generalizaciones, la teoría de cubrientes resuena mucho en las generalizaciones, en particular a la hora de obtener los espacios cocientes. Esto es porque la proyectivización $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$ es un cubriente, con Γ un grupo Kleiniano cualquiera y Ω una región de discontinuidad de Γ , donde las hojas son las regiones fundamentales. También bajo ciertas condiciones se tendrá que el grupo Kleiniano es isomorfo al grupo fundamental del espacio cociente. Es por esto que a continuación se dará algo de la teoría de cubrientes.

Definición A.0.0.1. Sean X, Y espacios topológicos y $\rho : Y \rightarrow X$ continua. Para $x \in X$ llamamos a $\rho^{-1}(x)$ la **fibra** de ρ sobre x (la fibra de x) si $y \in \rho^{-1}(x)$, decimos que y está sobre x .

Si $\rho : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ son continuas, decimos que $f : Y \rightarrow Z$ preserva fibras si $\rho = q \circ f$.

Definición A.0.0.2. Sean X, Y espacios topológicos y una función $\rho : Y \rightarrow X$ se llama **mapeo cubriente** si cada $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $\rho^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j$, J discreto, donde V_j son abiertos disjuntos y $\rho|_{V_j}$ son abiertos disjuntos y $\rho|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ son homeomorfismos; en particular, ρ es homeomorfismo local. Al conjunto $\{V_j\}$ se le llama hojas.

Teorema A.0.0.1. Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff y $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Entonces, para cualesquiera $x_0, x_1 \in X$ estos tienen la misma cantidad de hojas.

Definición A.0.0.3. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $\rho : Y \rightarrow X$, $f : Z \rightarrow X$ continua. Un **levantamiento** de f con respecto a ρ es una función continua $g : Z \rightarrow Y$ tal que $f = \rho \circ g$, ie, el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow \rho \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Teorema A.0.0.2. Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff y $\rho : Y \rightarrow X$ aplicación cubriente. Sea Z un espacio topológico simplemente conexo, conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Sea $f : Z \rightarrow X$ continua. Entonces, para cada par $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$ con $f(z_0) = \rho(y_0)$, existe un único levantamiento $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

Definición A.0.0.4. Sean X, Y espacios topológicos conexos y $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente; decimos que ρ es **cubriente universal** de X si para cada aplicación cubriente $q : Z \rightarrow X$ con Z conexo y cada elección $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ con $\rho(y_0) = q(z_0)$, existe exactamente una función continua que preserva fibras $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f(y_0) = z_0$.

Teorema A.0.0.3. Sean X, Y variedades conexas, con Y simplemente conexa y $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente; entonces ρ es el cubriente universal.

Teorema A.0.0.4. Sea X una variedad conexa; entonces existe una variedad simplemente conexa $\tilde{X}$ y una aplicación cubriente $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$.

Corolario A.0.0.5. El cubriente del teorema anterior es el cubriente universal.

Definición A.0.0.5. Sean X, Y espacios topológicos y $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Una transformación cubriente o **transformación deck** es un homeomorfismo $f : Y \rightarrow Y$ que preserva fibras.

El conjunto de transformaciones cubrientes de $\rho : Y \rightarrow X$ junto con la composición de funciones es un grupo y lo denotamos

$$\text{Deck}(Y/X) \text{ o } \text{Deck}(Y \rightarrow^\rho X)$$

También se llama grupo de transformaciones cubrientes o **grupo deck**.

Definición A.0.0.6. Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff y $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. El cubriente universal se llama **cubriente de Galois** si para cada par de puntos $y_0, y_1 \in Y$ con $\rho(y_0) = \rho(y_1)$, existe una transformación cubriente $f : Y \rightarrow Y$ tal que $f(y_0) = y_1$.

Observación A.0.0.1. Otra manera de decir que $\rho : Y \rightarrow X$ es cubriente Galois es que $\text{Deck}(Y/X)$ actúa transitivamente en cada fibra.

A.0.0.1. Grupos fundamentales

X espacio topológicos, una curva es $u : [0, 1] \rightarrow X$, $a := u(0)$ es el punto inicial y $b := u(1)$ el punto final.

Definición A.0.0.7. Sea X un espacio topológico, $u, v : I \rightarrow X$ dos curvas entre a y b . u y v son **homotópicas**, $u \sim v$, si existe $H : I \times I \rightarrow X$ con $I = [0, 1]$, continua tal que:

- $h(t, 0) = u(t) \quad \forall t \in I$
- $h(t, 1) = v(t) \quad \forall t \in I$
- $h(0, s) = a, \quad h(1, s) = b \quad \forall s \in I$

Teorema A.0.0.6. Sea X un espacio topológico, la relación dada por la homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las curvas que van de a a b , con $a, b \in X$

Definición A.0.0.8. Sean $a, b, c \in X$ en un espacio topológico. Sea $u : I \rightarrow X$ curva entre a y b , $v : I \rightarrow X$ curva entre b y c . $\cdot$ el producto de dos curvas es la curva $u \cdot v : I \rightarrow X$, entre a y c .

$$u \cdot v(t) = \begin{cases} u(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ v(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

la curva inversa de u es la curva $u^- : I \rightarrow X$ entre b y a , $u^-(t) = u(1 - t)$.

Definición A.0.0.9. Sea X un espacio topológico y $a \in X$ la curva constante en a es la función constante $u_0 : I \rightarrow X$, $u_0 \equiv a$.

Proposición A.0.0.7. Sea X un espacio topológico, $a, b, c \in X$, $u, v, w : I \rightarrow X$ curvas tal que $u(0) = a$, $u(1) = b = v(0)$, $v(1) = c = w(0)$, $w(1) = d$. Sea $u_0 \equiv a$, $v_0 \equiv b$ y $w_0 \equiv c$ curvas constantes. Entonces:

- $u_0 \cdot u \sim u \sim u \cdot v_0$
- $u \cdot u^- \sim u_0$
- $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$

Definición A.0.0.10. Sea X un espacio topológico.

- $u : I \rightarrow X$ es cerrado si $u(0) = u(1)$.
- La curva cerrada u con punto inicial a tiene homotopía nula si $u \sim u_0 \equiv a$.

Definición A.0.0.11. Sea X un espacio topológico, $a \in X$. El conjunto $\pi_1(X, a)$ de clases de equivalencia de homotopía de curvas cerradas con punto inicial a , junto con la operación de producto, es un grupo. Se llama **grupo fundamental** de X con base a .

Teorema A.0.0.8. *Si X es un espacio topológico conexo por trayectorias, $\pi_1(X, a)$ no depende de a . Escribimos en este caso $\pi_1(X)$*

Teorema A.0.0.9. *Si X es simplemente conexo, $\pi_1(X) = \{id\} = 0$*

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si $u : I \rightarrow X$ es una curva en X , entonces $f \circ u : I \rightarrow Y$ es una curva en Y . Si $u, u' : I \rightarrow X$ son curvas tal que $u \sim u'$ entonces $f \circ u \sim f \circ u'$. Esto implica que f induce un morfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$ con $[u] \mapsto [f \circ u]$. Si $g : Y \rightarrow Z$ es continua, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Teorema A.0.0.10. *Supongamos que X es una variedad conexa y $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ su cubriente universal. Entonces ρ es Galois y $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$.*

Sea $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ una aplicación cubriente. Hay un morfismo natural inyectivo de grupos $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Recordar que $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ son curvas cerradas homotópicas en Y si y solo si $w_1 = p(\tilde{w}_1)$, $w_2 = p(\tilde{w}_2)$ son homotópicas en X .

El grupo $p_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0)$

Proposición A.0.0.11. *Si $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, $q : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ cubrientes con grupos definidores M y N respectivamente. Entonces hay un cubriente $r : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ con $p = q \circ r$ si y solo si $M < N$. En particular, si $M = N$, entonces Y es homeomorfo a Z y decimos que ambos cubrientes son equivalentes.*

A.0.0.2. Cubrientes regulares

Definición A.0.0.12. *Un cubriente $p : Y \rightarrow X$ tal que el grupo definidor $p_*(\pi_1(Y))$ es normal en $\pi_1(X)$ se llama regular o normal.*

Teorema A.0.0.12. *Sea $p : Y \rightarrow X$ un cubriente regular con un grupo definidor $N \triangleleft \pi_1(X)$, entonces hay un grupo de homeomorfismos $G := \{g : Y \rightarrow Y\}$ tal que $\Omega_0(G) = Y$ y que satisfacen que y_1, y_2 están en la misma G -órbita si y solo si $p(y_1) = p(y_2)$.*

Más aún, si escogemos puntos base $y_0 \in Y$ y $x_0 = p(y_0) \in X$, hay un isomorfismo de grupos $\Phi : \pi_1(X, x_0)/N \rightarrow G$ con $G = \text{Deck}(Y \rightarrow^p X)$.

Teorema A.0.0.13. *Un cubriente es de Galois si y solo si es normal.*

Sea $p : Y \rightarrow X$, $q : Z \rightarrow X$ cubrientes regulares con grupo definidor M, N respectivamente con $M \subset N$. Entonces, sea $r : Y \rightarrow Z$ cubriente con $p = q \circ r$, $M, N \triangleleft \pi_1(X)$ y como $M \subset N$ entonces $M \triangleleft N \cong \pi_1(X)$ ya que $M = p_*(\pi_1(Z)) \cong \pi_1(Z)$. Entonces, $r : Y \rightarrow Z$ es regular.

Teorema A.0.0.14. *Hay un homeomorfismo $\psi : G \rightarrow H$ con $\ker(\psi) = J$.*

Definición A.0.0.13. *La cardinalidad de la fibra sobre cualquier punto de un cubriente $p : Y \rightarrow X$ es constante y se determina por el índice del cubriente.*

Proposición A.0.0.15. *Sea $p : Y \rightarrow X$ cubriente regular, entonces el índice de p es de orden de $\text{Deck}(Y \rightarrow^p X)$.*

Corolario A.0.0.16. *El orden de J es igual al índice del cubriente $r : Y \rightarrow Z$. El índice de J en G es el índice del cubriente $q : Z \rightarrow X$.*

Teorema A.0.0.17. *Sea X conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo. Hay una biyección entre clases de isomorfismos de cubrientes $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ y el conjunto de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ dado por*

$$(Y, y_0) \rightarrow^p (X, x_0) \mapsto p_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0)$$

Teorema A.0.0.18. *Sea $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ cubriente, Y conexo por trayectorias y X conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Sea $H = p_*(\pi_1(Y, y_0))$, entonces $N(H)/H \cong \text{Deck}(Y \rightarrow^p X)$*

Teorema A.0.0.19. *Si $G < \text{Aut}(Y)$ actúa libre y discontinuamente en Y , entonces:*

- $p : Y \rightarrow Y/G, y \mapsto Gy$ es cubriente regular.
- $G = \text{Deck}(Y \rightarrow^p Y/G)$ si Y es conexo por trayectorias.
- $G \cong \pi_1(Y/G)/p_*(\pi_1(Y))$ si Y es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias.

Proposición A.0.0.20. *Sea $\pi : (\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un espacio cubriente conexo por trayectorias de un espacio conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias X , y sea H el grupo $\pi_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)) < \pi_1(X, x_0)$. Entonces:*

- *El espacio cubriente es normal si y solo si $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$.*
- $G(\hat{X})$ es isomorfo a $N(H)/H$, donde $N(H)$ es el normalizador de H en $\pi_1(X, x_0)$.

En particular, $G(\hat{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$ si $\hat{X}$ es un cubriente normal. Por tanto, para el cubriente universal $\pi : \hat{X} \rightarrow X$, $G(\hat{X}) \cong \pi_1(X)$.

Bibliografía

- [1] Roger C Alperin. An elementary account of selberg's lemma. *L'Enseignement Math.*, 33:269–273, 1987. [96](#)
- [2] Waldemar Barrera, Angel Cano, and Juan Navarrete. On the number of lines in the limit set for discrete subgroups of $\mathrm{psl}(3, \mathbb{R})$. *Pacific Journal of Mathematics*, 281(1): 17–49, 2016. [93](#), [96](#)
- [3] Wolf Barth, Klaus Hulek, Chris Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2003. [104](#)
- [4] Esther Cabezas-Rivas and Vicente Miquel. Demostración de hamilton-perelman de las conjeturas de poincaré y thurston. 2006. [73](#)
- [5] Angel Cano, Juan Pablo Navarrete, and José Seade. *Complex kleinian groups*. Springer, 2012. [77](#), [93](#), [104](#)
- [6] Angel Cano, Luis Loeza, and Alejandro Ucan-Puc. Projective cyclic groups in higher dimensions. *Linear Algebra and its Applications*, 531:169–209, 2017. [82](#), [83](#), [93](#)
- [7] Rémi Coulon, Elisabetta A Matsumoto, Henry Segerman, and Steve J Trettel. Ray-marching thurston geometries. *Experimental Mathematics*, 31(4):1197–1277, 2022. [73](#)
- [8] Theodore Gamelin. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2003. [83](#)
- [9] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. [70](#)
- [10] Rubén A Hidalgo. Grupos kleinianos y variedades hiperbolicas una introducción. 2000.
- [11] Rubén A Hidalgo. Transformaciones de mobius: Una introduccion. *Departamento de-Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile*, 2012. [49](#)
- [12] Mihail Hurmuzov. Hyperbolic structure of knot complements. [72](#)
- [13] Daniel Huybrechts. *Complex geometry: an introduction*. Springer, 2005. [97](#)
- [14] Kunihiro Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures*, volume 283. Springer Science & Business Media, 2012. [94](#)

-
- [15] Marc Lackenby. Hyperbolic manifolds (graduate course). Notas de curso, Mathematical Institute, University of Oxford, 2000. URL <https://people.maths.ox.ac.uk/lackenby/>. 72
- [16] Pedro Ramón López Gómez et al. Sobre la fibración de hopf y la paralelización de esferas. 2020. 103
- [17] Bernard Maskit. *Kleinian groups*, volume 287. Springer Science & Business Media, 2012. 25
- [18] Katsuhiko Matsuzaki and Masahiko Taniguchi. *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*. Clarendon Press, 1998. 25
- [19] John G Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer, 2006. 64
- [20] William P Thurston. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. 1982. 72