



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Sistemas lineales continuos por pedazos en el plano

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Bruno Campoy Garza

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, Diciembre de 2015

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Juan Andrés Castillo Valenzuela
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Índice general

Introducción	1
1. Clasificación de SLPP	3
2. Caso n y $A_1^T n$ linealmente independientes	11
2.1. Doble Tangencia	11
2.2. Forma Normal	12
3. Caso n y $A_1^T n$ linealmente dependientes	21
3.1. Forma Normal	21
4. Análisis de Bifurcaciones	29
4.1. n y $A_1^T n$ linealmente independientes	29
4.1.1. Centro-Silla	32
4.1.2. Foco-Foco	44
4.2. n y $A_1^T n$ linealmente dependientes	53
4.2.1. Bifurcación silla-nodo	54
Apéndices	59
A. Resultados de Ecuaciones Diferenciales	59
B. Argumentos trigonométricos	66
C. Teorema de la Función Implícita	67
Bibliografía	68

Introducción

La teoría cualitativa y geométrica de sistemas dinámicos es una herramienta poderosa para el análisis y la comprensión de una gran cantidad de problemas. Esta forma de estudio de sistemas dinámicos ha ido concretándose y perfeccionándose con el tiempo y es ahora una metodología bien establecida y eficiente utilizada para entender el comportamiento de muchos fenómenos físicos como el flujo de fluidos, la deformación elástica, sistemas no lineales biológicos y ópticos, entre otros. Sin embargo, existen fenómenos naturales que no pueden ser estudiados o modelados usando sistemas dinámicos convencionales de la forma $\dot{x} = F(x)$, donde F es un campo vectorial suave, ya que presentan una dinámica descrita por funciones definidas a trozos, donde la dinámica cambia abruptamente y, por lo tanto, no es suave. Estos fenómenos tienen una naturaleza compuesta por procesos continuos o discretos que ocurren por partes, es decir, con un desarrollo continuo que es interrumpido por eventos instantáneos, por ejemplo, el presionar un interruptor en un circuito eléctrico, dispositivos mecánicos donde sus componentes impactan unos con otros y otros eventos que ocurren debido a fricción, colisión, deslizamiento, entre otros (ver [1], [3], [4]). Dichos fenómenos pueden ser representados mediante sistemas dinámicos por partes. El estudio de dichos sistemas es relativamente nuevo y hasta la fecha se cuenta con conocimientos de problemas abordados en el plano \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 . En este trabajo nos limitaremos a estudiar sistemas lineales de este tipo en el plano.

Para entender qué es un sistema lineal por pedazos (SLPP), imaginemos el plano pero dividamos a éste mediante n curvas

$$\Sigma_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : H_n(x) = 0\},$$

donde H_n es una función escalar suave para $n \in \mathbb{N}$. Σ_n son llamadas *curvas de conmutación*. Esta partición del plano dá lugar a m regiones, de tal manera que la unión de todas estas regiones y las curvas de conmutación es todo el plano. Llamemos R_i a cada una de estas regiones y definamos ahora un sistema de la forma

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x) & \text{para } x \in R_1, \\ F_2(x) & \text{para } x \in R_2, \\ \vdots & \\ F_m(x) & \text{para } x \in R_m, \end{cases}$$

donde $F_i = A_i x + b_i$, $A_i \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^2$ para $i = 1, \dots, m$. Hemos definido así un sistema compuesto de m subsistemas lineales, cada uno definido en cada una de las diferentes regiones delimitadas por las curvas Σ_n . De esta manera, el sistema \dot{x} tiene una dinámica diferente en cada región, cuyos flujos desaparecen al intersectar

alguna recta de conmutación. Análogamente, lo mismo ocurre en \mathbb{R}^3 , sólo que en este caso las curvas de conmutación son superficies. Así es como los SLPP poseen retratos fase geoméricamente ricos que presentan fenómenos que generalmente no ocurren en los sistemas lineales, como la existencia de ciclos límite, bifurcaciones, entre otros, es decir, al exhibir dos o más flujos de sistemas lineales diferentes en un mismo plano, puede que éstos den lugar a eventos exclusivos de los sistemas no lineales. Sin embargo, cuando pensamos en el momento en el que el flujo del sistema en alguna región interseca a una curva de conmutación, podríamos hacernos preguntas como ¿qué pasa con el flujo del otro lado de Σ_n justo al pasar por la conmutación? ó ¿el cruce con Σ_n es suave o la dirección del flujo cambia abruptamente? La respuesta a la segunda pregunta es que en los SLPP ocurren ambas cosas. Cuando el flujo en todas las regiones atraviesa las curvas de conmutación de una forma suave, es decir, que el flujo corta a la curva con el mismo vector tangente, entonces el SLPP correspondiente a dicho flujo es llamado **continuo**, mientras que los sistemas en donde el flujo cambia de dirección abruptamente al cortar a una curva Σ_n son llamados **discontinuos**.

En este trabajo estudiaremos SLPP continuos (SLCPP), restringiendo el número de curvas de conmutación a solamente una. Más aún, supondremos que dicha curva es una recta, la cual llamaremos **recta de conmutación**. Esta recta da lugar a solamente dos regiones en el plano. Consideraremos sistemas de la forma $\dot{x} = f(x)$, donde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y f es un campo vectorial lineal por pedazos continuo. Analizaremos diversos casos particulares de SLCPP, construyendo formas normales para éstos para facilitar la investigación de la ocurrencia de fenómenos como la aparición de ciclos límite y bifurcaciones.

En el primer capítulo de este trabajo se da la clasificación de los SLPP en continuos y discontinuos. Asimismo, se definen los conceptos básicos de SLPP, como puntos de equilibrio, equilibrios virtuales, puntos de tangencia y de doble tangencia, conjuntos de cruce, de deslizamiento y de escape, entre otros. A continuación, los sistemas lineales continuos por pedazos se clasifican a su vez en dos tipos: aquellos que tienen un punto de doble tangencia y aquellos que no lo tienen.

En los capítulos 2 y 3 se encuentran formas normales para cada familia de SLCPP. En el último capítulo se lleva a cabo un análisis de la dinámica de las formas normales de estos sistemas que fueron obtenidas anteriormente. Para el caso de SLCPP con un punto de doble tangencia, se estudian los escenarios foco-silla y foco-foco. En el primero se demuestra la existencia de una órbita homoclínica y un fenómeno muy particular, el cual llamamos *ciclo límite-centro*. Para el caso foco-foco se demuestra la existencia de un ciclo límite. Finalmente, para SLCPP sin punto de doble tangencia, se demuestra la existencia de la clásica bifurcación silla-nodo.

Capítulo 1

Clasificación de SLPP

En este capítulo clasificamos los SLPP en discontinuos y continuos y describimos geoméricamente algunos ejemplos de ambos. Presentamos después algunos conceptos y definiciones relevantes y, finalmente, clasificamos los SLCPP a su vez en dos familias.

Sea

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : n^T(x - q_0) = 0\},$$

donde $n, q_0 \in \mathbb{R}^2$, la recta de conmutación. Esta recta divide al plano \mathbb{R}^2 en dos regiones. Definamos cada una de éstas de la siguiente manera:

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : n^T(x - q_0) < 0\},$$

$$R_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : n^T(x - q_0) > 0\}.$$

Definición 1.1. *Un sistema lineal por pedazos en el plano es un sistema constituido por dos subsistemas lineales de la forma*

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x) & \text{para } x \in R_1, \\ F_2(x) & \text{para } x \in R_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $F_i(x) = A_i x + b_i$, con $A_i \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^2$ para $i = 1, 2$.

Definamos también otras dos rectas importantes en \mathbb{R}^2 :

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : n^T(A_1 x + b_1) = 0, \text{ para } x \in R_1 \cup \Sigma\},$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : n^T(A_2 x + b_2) = 0, \text{ para } x \in R_2 \cup \Sigma\}.$$

Por la manera en la que fueron definidas dichas rectas, éstas tienen la propiedad de que el flujo en cada uno de sus puntos es paralelo a Σ .

En la Figura 1.1 se presenta una ilustración geométrica del sistema (1.1) en el plano.

Ejemplo 1. *Considere el siguiente SLPP:*

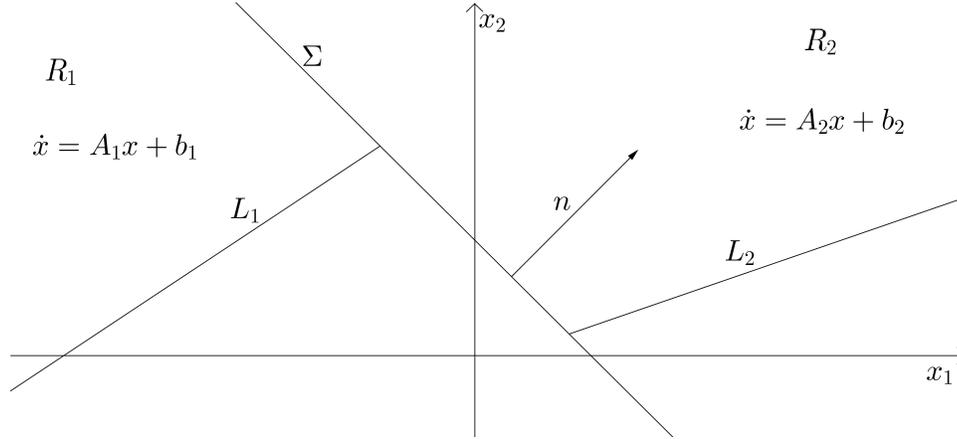


Figura 1.1: Sistema lineal por pedazos (1.1).

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{para } x \in R_1 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para } x \in R_2, \end{cases} \quad (1.2)$$

cuyo retrato fase se ilustra en la Figura 1.2.

Aclaremos que, en este ejemplo:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 - 2 = 0\}, \\ L_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 2x_2 + 6 = 0, \text{ para } x \in R_1 \cup \Sigma\}, \\ L_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -2x_1 + x_2 + 4 = 0, \text{ para } x \in R_2 \cup \Sigma\}. \end{aligned}$$

Primeramente notemos que los equilibrios p_1 en R_1 y p_2 en R_2 están sobre L_1 y L_2 respectivamente. Esto no es una coincidencia y será probado posteriormente. Es claro ver cómo el flujo cambia de dirección abruptamente al llegar a Σ y cruza ésta de una forma que no es “suave”. Los SLPP en los cuales ocurre ésto son llamados *sistemas lineales discontinuos por pedazos* (o *sistemas Filippov* (ver [2])) y éste es un ejemplo de uno de ellos. Observemos además que los puntos de tangencia de L_1 con Σ y L_2 con Σ , T_1 y T_2 respectivamente, delimitan segmentos de Σ en los cuales el comportamiento del flujo al llegar a ésta es distinto. En el segmento que está “por arriba” de T_1 , el flujo “escapa” o “se aleja” de Σ . Llamaremos a éste el *conjunto de escape* y lo denotaremos como Σ_e . En el segmento comprendido entre T_1 y T_2 las órbitas fluyen desde R_1 hasta llegar a Σ , para cruzar a ésta siguiendo el flujo en la misma dirección. Este segmento es llamado el *conjunto de cruce* y es denotado Σ_c . Similarmente, “debajo” de T_2 , las órbitas que vienen desde R_1 y R_2 colisionan entre sí al llegar a Σ , por lo que éstas se deslizan sobre Σ al llegar a ésta. Este segmento es llamado *conjunto de deslizamiento* y lo denotamos Σ_s . También es claro ver que la

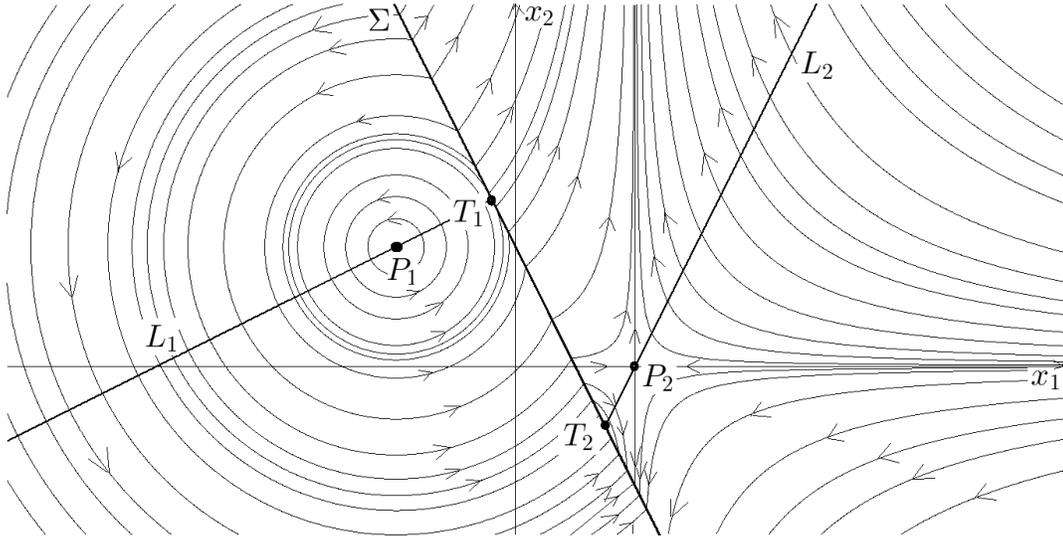


Figura 1.2: Retrato fase del sistema (1.2).

órbita del centro en R_1 que es tangente a Σ en T_1 está, en efecto, contenida en R_1 , pero la órbita de la silla en R_2 que es tangente a Σ en T_2 , está también contenida en R_1 y no en R_2 , como habría de esperarse. Estos dos casos son llamados *tangencia visible* y *tangencia invisible* respectivamente.

Ejemplo 2. Considere ahora el siguiente SLPP:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{para } x \in R_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para } x \in R_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

cuyo retrato fase se ilustra en la Figura 1.3.

En este caso particular, Σ y L_1 son exactamente las mismas que en el Ejemplo 1 y

$$L_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_2 + 4 = 0, \text{ para } x \in R_2 \cup \Sigma\}.$$

Observando la Figura 1.3, podemos ver que tanto L_1 como L_2 intersectan a Σ en el mismo punto, x_0 . Este es conocido como el *punto de doble tangencia* o *two-fold point* en inglés y se estudiará posteriormente. Otro detalle significativo que puede verse en el retrato fase, es cómo el punto de equilibrio en R_1 , p_1 , está naturalmente contenido en R_1 , pero p_2 no está en R_2 , sino también en R_1 . Esto último es conocido como *equilibrio virtual*. También podemos ver que el centro en R_1 está siendo atrapado por un ciclo límite que se forma al combinar las dos distintas dinámicas del sistema. Por último, todas las órbitas observables en la figura cruzan a Σ de una manera suave, es decir, no hay cambios abruptos en el flujo o en la dirección de este al

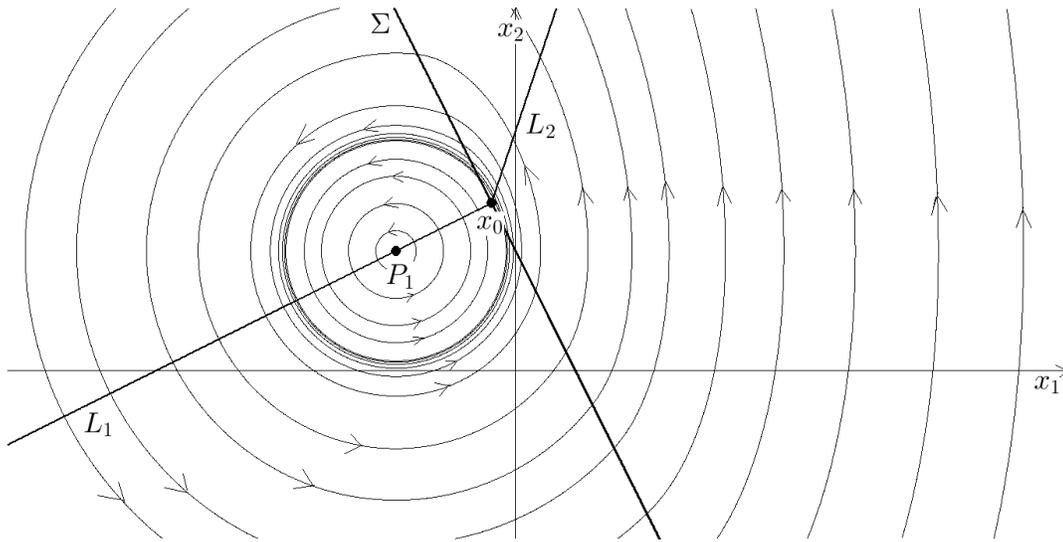


Figura 1.3: Retrato fase del sistema (1.3).

cruzar Σ . A los SLPP con esta característica se les conoce como *sistemas lineales continuos por pedazos* (SLCPP). Adicionalmente, cabe mencionar que en este tipo de sistemas en particular, no hay conjuntos de deslizamiento ni de escape, los cuales se presentan exclusivamente en los sistemas *Filippov*. En este ejemplo, L_1 , L_2 y Σ concurren en un mismo punto, sin embargo, también existen SLCPP en los cuales ésto no ocurre, sino que las tres son paralelas y, por lo tanto, no existe ningún punto de doble tangencia. Ilustramos ahora un sistema continuo con estas características en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Consideremos ahora el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{para } x \in R_1 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{para } x \in R_2, \end{cases} \quad (1.4)$$

y su respectivo retrato fase, ilustrado en la Figura 1.4.

Σ es exactamente la misma a la de los dos ejemplos anteriores y además:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 + 1 = 0\}, \\ L_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 - 5 = 0\}. \end{aligned}$$

Es fácil observar que este sistema es continuo, al ver el cruce suave que se da a través de Σ y también al ver que no hay segmentos de escape ni de deslizamiento sobre ésta. A diferencia del sistema (1.3), en este caso, L_1 , L_2 y Σ son todas paralelas entre sí,

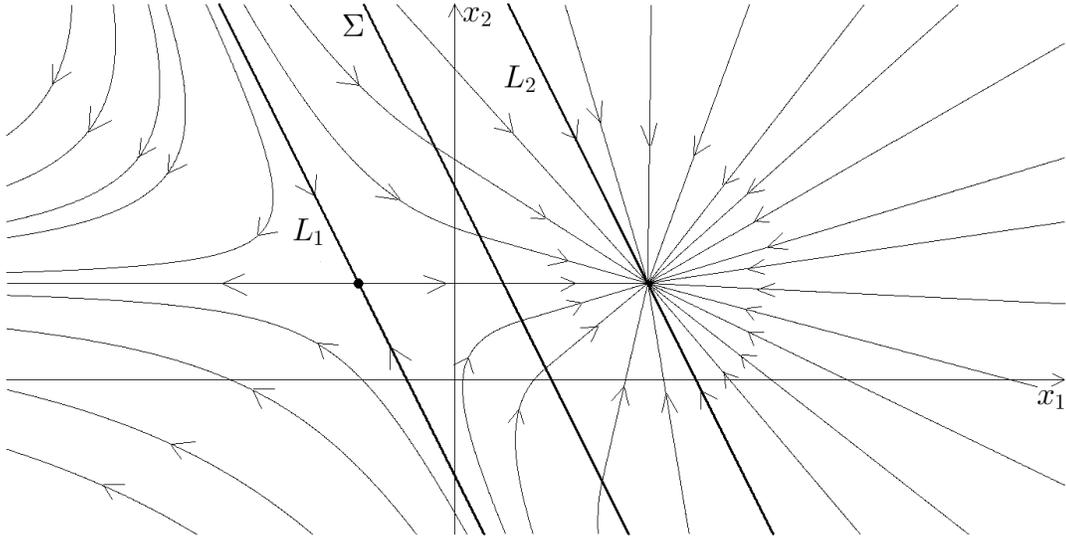


Figura 1.4: Retrato fase del sistema (1.4).

por lo que no existe el punto doble tangencia x_0 . Este ejemplo es útil también para ilustrar más fácilmente cómo el flujo sobre L_1 y L_2 se mueve de una forma paralela a Σ .

Definamos ahora cada uno de los conjuntos mencionados anteriormente (ver [2]):

Sea

$$\sigma(x) = \langle n, F_1(x) \rangle \langle n, F_2(x) \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual.

Definición 1.2. El conjunto de cruce $\Sigma_c \subset \Sigma$ se define como

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : \sigma(x) > 0\}.$$

Definición 1.3. El conjunto de deslizamiento Σ_s es el complemento de Σ_c en Σ , es decir,

$$\Sigma_s = \{x \in \Sigma : \sigma(x) \leq 0\}.$$

Generalmente, el segmento de deslizamiento puede ser estable o inestable en la dirección normal. Si

$$\langle n, F_1(x) \rangle > 0 \text{ y } \langle n, F_2(x) \rangle < 0,$$

dicho segmento es estable, mientras que si

$$\langle n, F_1(x) \rangle < 0 \text{ y } \langle n, F_2(x) \rangle > 0,$$

éste es inestable. El conjunto de escape Σ_e se define como el segmento de deslizamiento inestable. El segmento de deslizamiento presenta una dinámica propia y,

por lo tanto, se pueden tener puntos de equilibrios en éste. Estos equilibrios son conocidos como *pseudo equilibrios*. Actualmente se cuenta con teoría acerca de dicha dinámica, aunque en este trabajo no profundizaremos más al respecto.

Debido a la naturaleza del sistema (1.1), cuando consideramos puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\dot{x}(\bar{x}) = 0$, pueden presentarse diferentes casos: el caso natural se daría si \bar{x} cumpliera que $\dot{x}(\bar{x}) = 0$ para el sistema definido en la misma región donde se encuentra \bar{x} . Sin embargo, podría tenerse que \bar{x} cumpla que $\dot{x}(\bar{x}) = 0$ en alguna de las dos regiones R_1 ó R_2 , pero se encuentre del lado opuesto de Σ . Para categorizar estos escenarios, definimos \bar{x} para cada uno de ellos:

Definición 1.4. Diremos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema (1.1) en R_1 si $F_1(\bar{x}) = 0$ y, además, $\bar{x} \in R_1$. Similarmente, \bar{x} es un equilibrio en R_2 si $F_2(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in R_2$. Diremos que \bar{x} es un equilibrio frontera si $\bar{x} \in \Sigma$.

Definición 1.5. Diremos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio virtual de (1.1) en R_1 si $F_1(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in R_2$. De igual manera, \bar{x} es un equilibrio virtual en R_2 si $F_2(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in R_1$.

Sean p_1 y p_2 equilibrios en R_1 y R_2 , respectivamente, del sistema (1.1). Sabemos que éstos cumplen que

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + b_1 &= 0 \quad \text{y} \\ A_2 p_2 + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por n^T por la izquierda en ambas ecuaciones, tenemos

$$n^T(A_1 p_1 + b_1) = 0 \quad \text{y} \quad n^T(A_2 p_2 + b_2) = 0,$$

es decir, p_1 y p_2 son puntos de L_1 y L_2 respectivamente. Esto nos lleva a enunciar el siguiente lema:

Lema 1.1. Si p_1 y p_2 son equilibrios del sistema (1.1) en R_1 y R_2 respectivamente, entonces estos son puntos de L_1 y L_2 respectivamente.

Los SLPP se clasifican en dos tipos: los Filippov y los continuos, los cuales fueron ilustrados anteriormente: el ejemplo 1 es un sistema Filippov y los ejemplos 2 y 3 son sistemas continuos. En los sistemas Filippov es posible que se presente deslizamiento, mientras que en los continuos este fenómeno no es posible. En este trabajo nos dedicaremos al estudio solamente de SLCPP, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.6. Diremos que el sistema lineal por pedazos (1.1) es continuo si

$$F_1(x) = F_2(x) \quad \forall x \in \Sigma.$$

Por otra parte, si existen puntos en Σ para los cuales $F_1(x) \neq F_2(x)$, diremos que el sistema es *discontinuo* (o Filippov).

De manera equivalente, el sistema (1.1) es continuo si

$$A_1x + b_1 = A_2x + b_2, \forall x \in \Sigma \iff (A_2 - A_1)x = b_1 - b_2, \forall x \in \Sigma. \quad (1.5)$$

Haciendo $A = A_2 - A_1$ y $b = b_1 - b_2$, reescribimos (1.5) como

$$Ax = b \quad \text{para todo } x \text{ tal que } n^T x = n^T q_0.$$

Llamemos r_1^T y r_2^T al primer y segundo renglón de A respectivamente y supongamos que $b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces obtenemos el sistema lineal

$$Ax = b \iff \begin{cases} r_1^T x = c_1, \\ r_2^T x = c_2. \end{cases}$$

Para que este sistema tenga como solución todos los puntos en Σ , se debe cumplir que $|A| = 0$, ya que, de lo contrario, el sistema tendría una única solución. Pero, de esto tenemos que r_1 y r_2 son linealmente dependientes y que ambos son múltiplos de n . Hagamos

$$\begin{aligned} r_i^T &= \alpha_i n^T \quad y \\ c_i &= \alpha_i n^T q_0, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Es decir,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 n^T \\ \alpha_2 n^T \end{pmatrix} = \alpha n^T \quad y \\ b &= \begin{pmatrix} \alpha_1 n^T q_0 \\ \alpha_2 n^T q_0 \end{pmatrix} = \alpha n^T q_0, \end{aligned}$$

con $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Con lo anterior, hemos demostrado el siguiente lema:

Lema 1.2. *Si el sistema (1.1) es continuo, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tal que*

$$A_2 - A_1 = \alpha n^T \quad y \quad (1.6)$$

$$b_1 - b_2 = \alpha n^T q_0. \quad (1.7)$$

Observación 1.1. *Este lema también es válido para SL CPP en \mathbb{R}^n .*

Ahora que hemos restringido nuestro objeto de estudio a SL CPP, pasaremos a clasificar también éstos. Dentro de los SL CPP existen solamente dos tipos, los cuales fueron descritos e ilustrados en los ejemplos 2 y 3 y que ahora caracterizaremos geoméricamente estableciendo la siguiente proposición y corolario. Primeramente, enunciaremos el siguiente lema sin demostración ya que se hará uso de él posteriormente:

Lema 1.3. *Si v_1 y v_2 son dos vectores linealmente independientes cualesquiera y $k \in \mathbb{R}$, entonces v_1 y $v_3 = kv_1 + v_2$ son linealmente independientes.*

Proposición 1. *Considere el sistema continuo (1.1). n y $A_1^T n$ son linealmente independientes si y sólo si n y $A_2^T n$ son linealmente independientes.*

Demostración. Multiplicando por n^T por la izquierda en (1.6) tenemos

$$\begin{aligned} n^T(A_2 - A_1) &= n^T(\alpha n^T), \\ n^T A_2 - n^T A_1 &= (n^T \alpha) n^T. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\alpha_0 = n^T \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} n^T A_2 - n^T A_1 &= \alpha_0 n^T, \\ n^T A_2 &= \alpha_0 n^T + n^T A_1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Del Lema 1.3 y (1.9) obtenemos lo deseado. □

Corolario 1.1. *n y $A_1^T n$ son linealmente dependientes si y sólo si n y $A_2^T n$ son linealmente dependientes.*

Con la Proposición 1 y el Corolario 1.1 se han distinguido los dos tipos de SLCPP que se estudiarán en este trabajo. En los capítulos posteriores se tratarán cada uno de estos sistemas por separado, exhibiendo aspectos relevantes de cada uno. Adicionalmente, sobreentendiendo que trabajaremos únicamente con sistemas continuos, a partir de ahora omitiremos la palabra “continuo” al momento de nombrar éstos, y nos referiremos a ellos simplemente como “sistemas”.

Capítulo 2

Caso n y $A_1^T n$ linealmente independientes

En este capítulo examinaremos la geometría del sistema (1.1) cuando $A_1^T n$ y n son linealmente independientes y, por lo tanto, lo son también $A_2^T n$ y n ; así como también obtendremos una forma normal para éste, con el fin de simplificar su estudio.

2.1. Doble Tangencia

Sabemos, por la Proposición 1, que tanto L_1 como L_2 intersectan a Σ , sin embargo, éstas no se intersectan en puntos arbitrarios, sino que son concurrentes, es decir, se intersectan en un mismo punto. A continuación damos la prueba de esto con el siguiente lema:

Lema 2.1. *Considere el sistema (1.1). Si n y $A_1^T n$ son linealmente independientes, entonces $L_1 \cap L_2 \cap \Sigma = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^2$.*

Demostración. Por hipótesis, Σ y L_1 no son paralelas, por lo tanto éstas se intersectan, digamos, en x_0 . Como $x_0 \in \Sigma$ y por continuidad del sistema, tenemos

$$A_1 x_0 + b_1 = A_2 x_0 + b_2.$$

Ahora multiplicamos por n^T por la izquierda en esta igualdad y obtenemos

$$n^T(A_1 x_0 + b_1) = n^T(A_2 x_0 + b_2).$$

Pero, como $x_0 \in L_1$, $n^T(A_1 x_0 + b_1) = 0$, por lo que

$$n^T(A_2 x_0 + b_2) = 0.$$

Es decir, x_0 es también un punto de L_2 . □

Llamaremos a x_0 el *punto de doble tangencia*.

Geoméricamente, el sistema (1.1) con estas características tiene la forma siguiente (ver Figura 2.1):

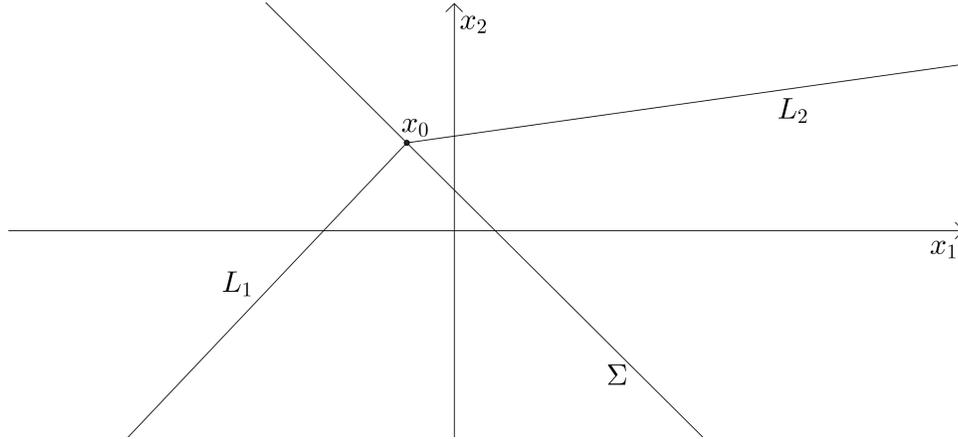


Figura 2.1: Σ , L_1 y L_2 se intersectan en x_0 .

Podemos observar que el Lema 2.1 es válido también en \mathbb{R}^3 , sólo que en este caso, se trataría de dos planos π_1 y π_2 que concurren con un plano de conmutación, formando una recta de puntos de doble tangencia en la intersección de éstos tres. De manera análoga, en \mathbb{R}^n se tiene la concurrencia de dos hiperplanos con un hiperplano de conmutación.

Cabe aclarar que, debido a la independencia lineal de L_1 y L_2 con Σ y al dominio en el que se han definido las primeras dos, éstas no se prolongan infinitamente y, por lo tanto, no son rectas, sino *rayos* y nos referiremos a ellos como tales. A continuación obtendremos la expresión explícita de una forma normal para el sistema (1.1).

2.2. Forma Normal

En esta sección transformaremos el sistema (1.1) en un sistema nuevo, con el fin de simplificar la estructura geométrica del sistema original y así, poder estudiarlo más fácilmente. Para ello, consideremos el cambio de coordenadas

$$y = T(x - x_0), \quad (2.1)$$

donde $T = \begin{pmatrix} n^T \\ n^T A_1 \end{pmatrix}$ y x_0 es el punto de doble tangencia del sistema (1.1). Notemos que, como n y $A_1^T n$ son linealmente independientes, se tiene que $|T| \neq 0$ y, por lo tanto, existe T^{-1} . Hagamos $T^{-1} = (s_1 \ s_2)$, para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$.

Primero, apliquemos esta transformación a la recta Σ despejando x en (2.1) y sus-

tituyendo esta en su ecuación de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} n^T(x - q_0) &= 0, \\ n^T x - n^T q_0 &= 0, \\ n^T(T^{-1}y + x_0) - n^T q_0 &= 0, \\ (n^T T^{-1})y + n^T x_0 - n^T q_0 &= 0, \\ (n^T T^{-1})y + n^T(x_0 - q_0) &= 0, \end{aligned}$$

pero, como x_0 está en Σ , se tiene que $n^T(x_0 - q_0) = 0$, por lo que obtenemos

$$(n^T T^{-1})y = 0. \quad (2.2)$$

Por otra parte, sabemos que T y T^{-1} están relacionadas de la forma

$$TT^{-1} = I, \quad (2.3)$$

lo que podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} n^T \\ n^T A_1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Combinando (2.4) y (2.2), tenemos que

$$(n^T T^{-1})y = e_1^T y = y_1 = 0,$$

es decir, Σ se transforma en la recta

$$\bar{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0\}. \quad (2.5)$$

Observemos que $\bar{\Sigma}$ determina dos nuevas regiones en el plano:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 < 0\} \text{ y} \\ \bar{R}_2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0\}. \end{aligned}$$

En ocasiones, nos referiremos a estas regiones como $y_1 < 0$ y $y_1 > 0$ respectivamente.

De manera similar, hagamos ésto para L_1 :

$$\begin{aligned} n^T(A_1 x + b_1) &= 0, \\ n^T(A_1(T^{-1}y + x_0) + b_1) &= 0, \\ (n^T A_1 T^{-1})y + n^T A_1 x_0 + n^T b_1 &= 0, \\ (n^T A_1 T^{-1})y + n^T(A_1 x_0 + b_1) &= 0, \end{aligned}$$

pero, $n^T(A_1 x_0 + b_1) = 0$, ya que x_0 está en L_1 , por lo que tenemos

$$(n^T A_1 T^{-1})y = 0,$$

y, utilizando (2.4) en esta expresión, obtenemos

$$(n^T A_1 T^{-1})y = e_2^T y = y_2 = 0.$$

En otras palabras, L_1 se transforma en el rayo

$$\bar{L}_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0, \text{ para } y \in \bar{R}_1 \cup \bar{\Sigma}\}. \quad (2.6)$$

Análogamente, para L_2 tenemos

$$(n^T A_2 T^{-1})y = 0.$$

Ahora, de (1.9), tenemos que $n^T A_2 = n^T A_1 + \alpha_0 n^T$. Multiplicando por T^{-1} por la derecha en esta igualdad, obtenemos

$$n^T A_2 T^{-1} = n^T A_1 T^{-1} + \alpha_0 (n^T T^{-1}),$$

pero, por (2.4), esto es

$$n^T A_2 T^{-1} = e_2^T + \alpha_0 e_1^T,$$

es decir

$$n^T A_2 T^{-1} = (\alpha_0, 1), \quad (2.7)$$

por lo que

$$(n^T A_2 T^{-1})y = (\alpha_0, 1)y = \alpha_0 y_1 + y_2 = 0,$$

o bien,

$$y_2 = -\alpha_0 y_1.$$

Así, L_2 es transformado en

$$\bar{L}_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -\alpha_0 y_1, \text{ para } y \in \bar{R}_2 \cup \bar{\Sigma}\}. \quad (2.8)$$

Hasta ahora, hemos calculado la nueva recta $\bar{\Sigma}$ y rayos \bar{L}_1 y \bar{L}_2 de la forma normal que estamos construyendo. Lo que sigue es encontrar la expresión explícita del nuevo sistema. Para hacer esto, derivemos ambos miembros de (2.1):

$$\begin{aligned} y &= T(x - x_0), \\ \dot{y} &= T\dot{x}, \\ &= T(A_1 x + b_1), \\ &= T A_1 x + T b_1, \\ &= T A_1 (T^{-1} y + x_0) + T b_1, \\ &= (T A_1 T^{-1})y + T(A_1 x_0 + b_1). \end{aligned}$$

Haciendo $\bar{A}_1 = T A_1 T^{-1}$ y $\bar{b}_1 = T(A_1 x_0 + b_1)$, se tiene

$$\dot{y} = \bar{A}_1 y + \bar{b}_1,$$

en $y_1 < 0$. Análogamente, en $y_1 > 0$ tenemos

$$\dot{y} = \bar{A}_2 y + \bar{b}_2.$$

Podemos ver que los nuevos \bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \bar{b}_1 y \bar{b}_2 están definidos en términos de los A_1 , A_2 , b_1 y b_2 originales. Calculemos ahora cada uno de estos nuevos objetos. Sabemos que

$$\bar{A}_1 = T A_1 T^{-1} = \begin{pmatrix} n^T A_1 T^{-1} \\ n^T A_1^2 T^{-1} \end{pmatrix},$$

pero veamos cuáles son las entradas de esta matriz. Por (2.4) tenemos que

$$n^T A_1 T^{-1} = (0, 1),$$

y, además,

$$\begin{aligned} n^T A_1^2 T^{-1} &= n^T A_1^2 (s_1 \ s_2), \\ &= (n^T A_1^2 s_1, n^T A_1^2 s_2). \end{aligned}$$

Hagamos

$$c_1 = n^T A_1^2 s_1 \quad \text{y} \quad (2.9)$$

$$c_2 = n^T A_1^2 s_2. \quad (2.10)$$

Entonces, concluimos que

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, tenemos que

$$\bar{A}_2 = T A_2 T^{-1} = \begin{pmatrix} n^T A_2 T^{-1} \\ n^T A_1 A_2 T^{-1} \end{pmatrix},$$

pero,

$$\begin{aligned} n^T A_1 A_2 T^{-1} &= n^T A_1 A_2 (s_1 \ s_2), \\ &= (n^T A_1 A_2 s_1, n^T A_1 A_2 s_2). \end{aligned}$$

Haciendo

$$d_1 = n^T A_1 A_2 s_1 \quad \text{y} \quad (2.11)$$

$$d_2 = n^T A_1 A_2 s_2 \quad (2.12)$$

y por (2.7), obtenemos que

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}.$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= T(A_1 x_0 + b_1), \\ &= \begin{pmatrix} n^T (A_1 x_0 + b_1) \\ n^T A_1 (A_1 x_0 + b_1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pero, $n^T(A_1x_0 + b_1) = 0$, ya que x_0 está en L_1 . Haciendo

$$b_0 = n^T A_1(A_1x_0 + b_1), \quad (2.13)$$

obtenemos

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Por último,

$$\begin{aligned} \bar{b}_2 &= T(A_2x_0 + b_2,) \\ &= \begin{pmatrix} n^T(A_2x_0 + b_2) \\ n^T A_1(A_2x_0 + b_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pero, de igual manera, $n^T(A_2x_0 + b_2) = 0$, por ser x_0 un punto en L_2 y, como x_0 está en Σ y por continuidad del sistema, entonces

$$n^T A_1(A_2x_0 + b_2) = n^T A_1(A_1x_0 + b_1) = b_0.$$

Es decir,

$$\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2. $d_2 = c_2$.

Demostración. Multipliquemos por s_2 por la derecha en ambos miembros de (1.6) para obtener

$$A_2s_2 = A_1s_2 + \alpha n^T s_2. \quad (2.14)$$

Luego, de (2.3) tenemos que

$$TT^{-1} = \begin{pmatrix} n^T \\ n^T A_1 \end{pmatrix} (s_1 \ s_2) = \begin{pmatrix} n^T s_1 & n^T s_2 \\ n^T A_1 s_1 & n^T A_1 s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero prestemos particular atención a

$$n^T s_2 = 0.$$

Sustituyendo lo anterior en (2.14), obtenemos que

$$A_2s_2 = A_1s_2. \quad (2.15)$$

Luego,

$$\begin{aligned} d_2 &= n^T A_1(A_2s_2), \\ &= n^T A_1(A_1s_2), \\ &= n^T A_1^2 s_2, \\ &= c_2. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. Si $A_1x_0 + b_1 \neq 0$, entonces $b_0 \neq 0$.

Demostración. Sabemos que $n^T(A_1x_0 + b_1) = 0$, ya que x_0 es un punto en L_1 . En otras palabras: n es ortogonal a $A_1x_0 + b_1$. Si suponemos ahora que $b_0 = 0$, es decir, $n^T A_1(A_1x_0 + b_1) = 0$, esto implicaría que $A_1^T n$ fuese ortogonal a $A_1x_0 + b_1$ y, en consecuencia, paralelo a n , es decir, linealmente dependiente con n , lo cual es una contradicción, ya que n y $A_1^T n$ son linealmente independientes. Por lo tanto, se debe tener que $b_0 \neq 0$. \square

En conclusión, la forma normal del sistema (1.1) cuando $A_1^T n$ y $A_2^T n$ son linealmente independientes con n es

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ d_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

el cual está constituido por cinco parámetros. Observemos que, dependiendo del signo de α_0 , el rayo \bar{L}_2 puede tomar lugar en diferentes cuadrantes del plano. En las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 se ilustra geoméricamente el sistema (2.16) en función del parámetro α_0 .

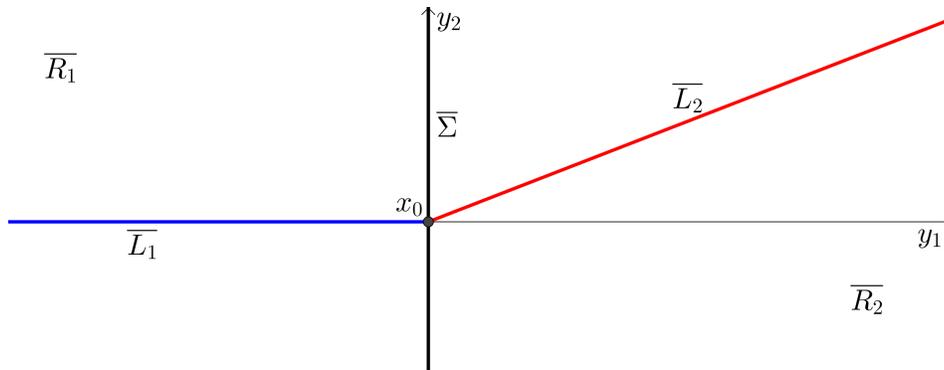
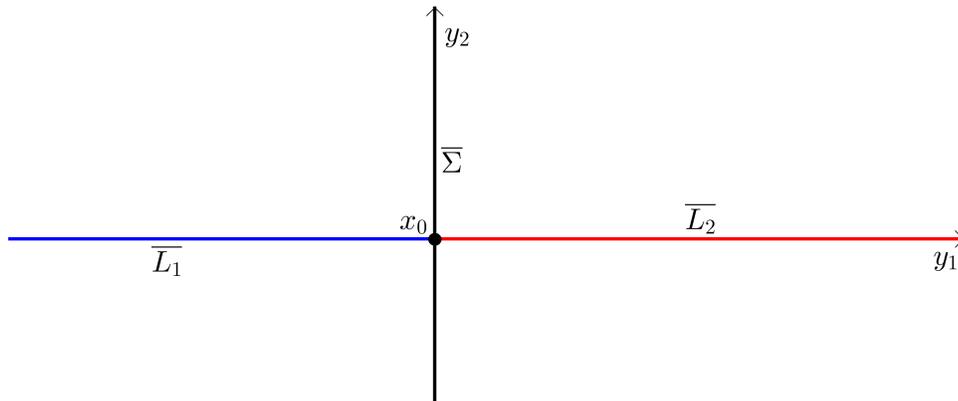
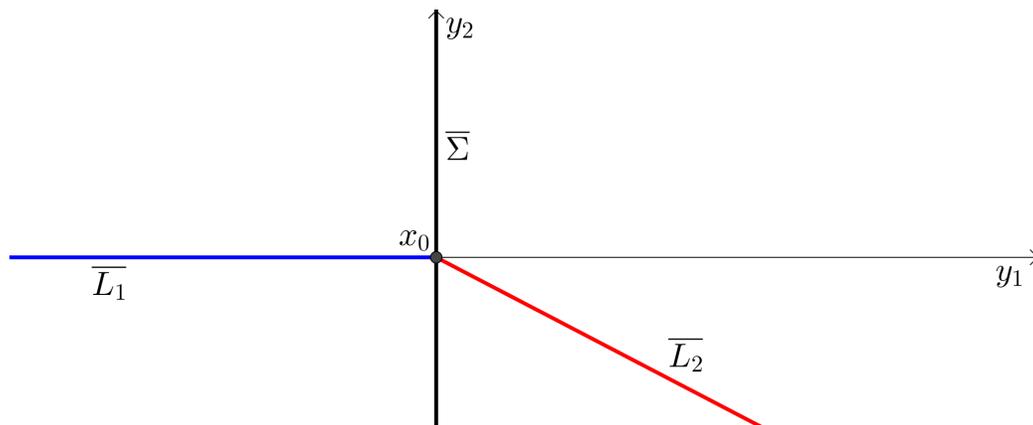


Figura 2.2: Sistema (2.16) ($\alpha_0 < 0$).

Para ilustrar cómo el cambio de coordenadas (2.1) transforma al sistema (1.1), a continuación presentamos un ejemplo de un caso particular de la forma normal (2.16) que hemos construido.

Ejemplo 4. Consideremos de nuevo el sistema (1.3) del ejemplo 2 del capítulo 1. Transformémoslo ahora a su forma normal respectiva utilizando el cambio de coordenadas (2.1). Para ello, basta con calcular las matrices \bar{A}_1, \bar{A}_2 y los vectores \bar{b}_1 y \bar{b}_2 de (2.16), para lo cual, es necesario calcular los cinco parámetros c_1, c_2, b_0, d_1 y α_0 de dicha forma normal. También debemos obtener la expresión para el nuevo rayo \bar{L}_2 , ya que \bar{L}_1 y $\bar{\Sigma}$ no dependen de los parámetros originales del sistema (1.3).

Figura 2.3: ($\alpha_0 = 0$).Figura 2.4: ($\alpha_0 > 0$).

Hagamos ahora los cálculos. De (2.9) y (2.10), obtenemos que

$$c_1 = -1 \quad y \quad c_2 = 0,$$

por lo que

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, por (1.8), (2.11) y (2.13) respectivamente, tenemos:

$$\alpha_0 = 1, \quad d_1 = -3 \quad y \quad b_0 = -4,$$

por lo que

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

y además

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, la forma normal del sistema (1.3) es:

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} & \text{para } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} & \text{para } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

cuyo retrato fase se ilustra en la Figura 2.5.

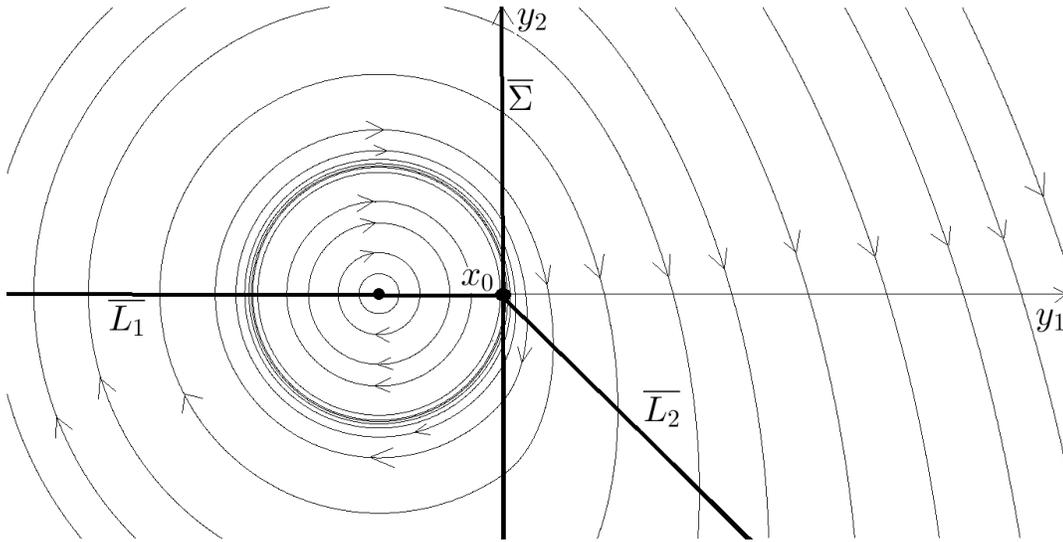


Figura 2.5: Retrato fase del sistema (2.17) ($\alpha_0 = 1$).

De (2.8) podemos ver que

$$\bar{L}_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -y_1 \text{ para } y \in \bar{R}_2 \cup \bar{\Sigma}\}.$$

Podemos ver que la dinámica del sistema original (1.3) se preserva, así como la virtualidad y no virtualidad de los respectivos equilibrios: existe un centro en $y_1 < 0$ y un nodo inestable virtual en $y_1 > 0$. También se ha preservado la continuidad del sistema original, así como el ciclo límite inestable que atrapa al centro en su interior en la región $y_1 < 0$.

La dinámica del sistema (2.16) es particularmente rica y permite exhibir fenómenos como la existencia de ciclos límite y órbitas homoclínicas, los cuales no ocurren en sistemas lineales usuales, sino solamente en sistemas no lineales y, como se verá posteriormente, también en SLCPP. Se mostrará un análisis más detallado de dicho sistema y de su dinámica en el capítulo 4.

Capítulo 3

Caso n y $A_1^T n$ linealmente dependientes

Este es el escenario fundamentado en el Corolario 1.1, donde tanto L_1 como L_2 son paralelas a Σ . Primeramente, como estamos suponiendo que $A_1^T n$ y n son linealmente dependientes, del Corolario 1.1 se sigue que también lo son $A_2^T n$ y n . En otras palabras,

$$n^T A_1 = \beta_1 n^T \text{ para } \beta_1 \neq 0 \text{ y} \quad (3.1)$$

$$n^T A_2 = \beta_2 n^T \text{ para } \beta_2 \neq 0. \quad (3.2)$$

En general, en el sistema (1.1) con estas características podría darse el caso en que $L_1 \subset R_2$ ó $L_2 \subset R_1$, ó también podría ocurrir que $L_1, L_2 \subset R_1$ como $L_1, L_2 \subset R_2$. También podría darse que L_1 sea igual a L_2 en R_1 o en R_2 , o incluso tanto L_1 como L_2 podrían ser iguales a Σ . Dadas todas estas posibilidades, para especificar un sólo caso de estudio, supondremos que se cumple el caso ideal, es decir, que $L_1 \subset R_1$, $L_2 \subset R_2$ y que todas las rectas son distintas. El sistema en cuestión se ilustra en la Figura 3.1.

3.1. Forma Normal

De manera similar a la sección 2.2, simplificaremos la estructura geométrica del sistema (1.1) transformando las rectas Σ , L_1 y L_2 en nuevas rectas que definiremos posteriormente. Para ello, consideremos el cambio de coordenadas

$$y = T(x - q_0) \quad (3.3)$$

con $q_0 \in \Sigma$ y $T = \begin{pmatrix} n^T \\ v_0^T \end{pmatrix}$, con v_0 y n linealmente independientes, v_0 por determinarse. Luego, existe T^{-1} de la forma $T^{-1} = (s_1 \ s_2)$, con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$. Observemos que T y T^{-1} en esta sección son distintas a las utilizadas en la sección 2.2. Haremos uso de las mismas letras simplemente para reutilizar ecuaciones de la sección 2.2.

De manera análoga a lo hecho anteriormente, si aplicamos esta transformación a Σ , obtenemos que ésta es transformada en $\bar{\Sigma}$ definida en (2.5) ($\bar{\Sigma}$ es la recta $y_1 = 0$) y, como sabemos, ésta divide al plano en \bar{R}_1 y \bar{R}_2 definidas en la sección 2.2.

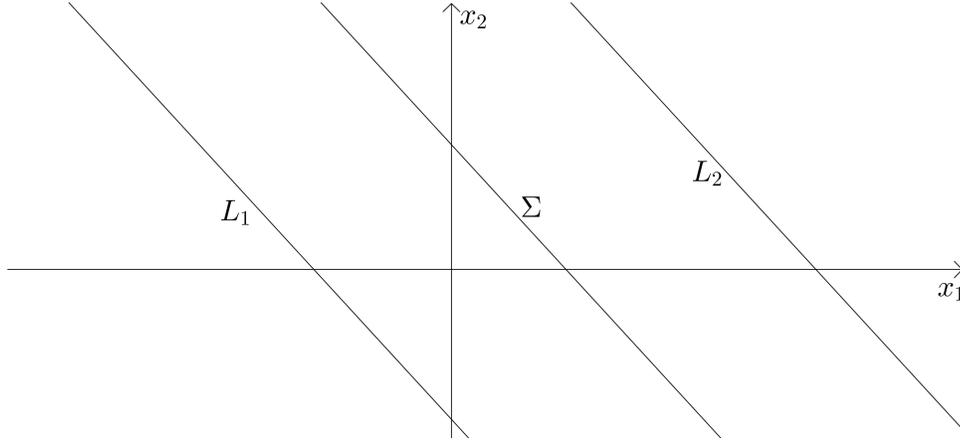


Figura 3.1: L_1, L_2 y Σ son paralelas y distintas.

Ahora, aplicando la transformación a L_1 , obtenemos

$$(n^T A_1 T^{-1})y + n^T (A_1 q_0 + b_1) = 0. \quad (3.4)$$

Por otra parte, como $TT^{-1} = I$, entonces

$$\begin{pmatrix} n^T T^{-1} \\ v_0^T T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Utilizando el primer renglón de (3.5) y (3.1) podemos concluir que

$$\begin{aligned} n^T A_1 T^{-1} &= (n^T A_1) T^{-1}, \\ &= (\beta_1 n^T) T^{-1}, \\ &= \beta_1 (n^T T^{-1}), \\ &= (\beta_1 e_1^T), \\ n^T A_1 T^{-1} &= (\beta_1, 0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

por lo que

$$\begin{aligned} (n^T A_1 T^{-1})y &= (\beta_1, 0)y, \\ &= \beta_1 y_1. \end{aligned}$$

Luego, haciendo

$$c_0 = n^T (A_i q_0 + b_i), i = 1, 2, \quad (3.7)$$

escribimos (3.4) como

$$\beta_1 y_1 + c_0 = 0,$$

o bien,

$$y_1 = -\frac{c_0}{\beta_1},$$

con $\beta_1 \neq 0$. Es decir, L_1 es transformada en la recta

$$\bar{L}_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = -\frac{c_0}{\beta_1}\}. \quad (3.8)$$

Observemos que, como $x_0 \in \Sigma$,

$$A_1 q_0 + b_1 = 0,$$

pero, por ser Σ y L_1 paralelas, tenemos que $q_0 \notin L_1$, es decir,

$$n^T(A_1 q_0 + b_1) = c_0 \neq 0.$$

Análogamente, aplicando la transformación a L_2 , llegamos a que ésta se convierte en la nueva recta

$$\bar{L}_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = -\frac{c_0}{\beta_2}\}. \quad (3.9)$$

Hemos convertido las tres rectas originales en tres rectas verticales. Como observábamos al principio de este capítulo, puede que $\bar{\Sigma}$, \bar{L}_1 y \bar{L}_2 sean todas iguales o que $\bar{L}_1 \subset \bar{R}_2$ ó $\bar{L}_2 \subset \bar{R}_1$. En este trabajo nos limitaremos a estudiar el escenario en el que $\bar{L}_1 \subset \bar{R}_1$ y $\bar{L}_2 \subset \bar{R}_2$ y las tres rectas son distintas. Sin embargo, para que ésto se dé, se debe tener que

$$\begin{aligned} -\frac{c_0}{\beta_1} &< 0 \quad \text{y} \\ -\frac{c_0}{\beta_2} &> 0. \end{aligned}$$

De manera exhaustiva, si $c_0 > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \beta_1 &> 0 \quad \text{y} \\ \beta_2 &< 0, \end{aligned}$$

en cambio, si $c_0 < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \beta_1 &< 0 \quad \text{y} \\ \beta_2 &> 0. \end{aligned}$$

En otra palabras, basta con que $\beta_1 \beta_2 < 0$ para obtener el escenario que estudiaremos.

A continuación obtendremos la expresión explícita para esta forma normal. Derivemos ambos miembros de (3.3):

$$\begin{aligned} y &= T(x - q_0), \\ \dot{y} &= T\dot{x}, \\ &= T[A_1(T^{-1}y + q_0) + b_1], \\ &= (TA_1T^{-1})y + TA_1q_0 + Tb_1, \\ &= (TA_1T^{-1})y + T(A_1q_0 + b_1). \end{aligned}$$

Haciendo $\bar{A}_1 = TA_1T^{-1}$ y $\bar{b}_1 = T(A_1q_0 + b_1)$, tenemos que el sistema en \bar{R}_1 está dado por

$$\dot{y} = \bar{A}_1 y + \bar{b}_1.$$

Análogamente, en \bar{R}_2 , obtenemos

$$\dot{y} = \bar{A}_2 y + \bar{b}_2.$$

Calculemos ahora cada una de estas matrices y vectores:

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} n^T A_1 T^{-1} \\ v_0^T A_1 T^{-1} \end{pmatrix},$$

sin embargo,

$$v_0^T A_1 T^{-1} = (v_0^T A_1 s_1 \quad v_0^T A_1 s_2).$$

Haciendo

$$c_1 = v_0^T A_1 s_1 \quad y \tag{3.10}$$

$$c_2 = v_0^T A_1 s_2 \tag{3.11}$$

y por (3.6), obtenemos

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} n^T A_2 T^{-1} \\ v_0^T A_2 T^{-1} \end{pmatrix},$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} (n^T A_2)T^{-1} &= (\beta_2 n^T)T^{-1}, \\ &= \beta_2 (n^T T^{-1}), \end{aligned}$$

y, por (3.2) y el primer renglón de (3.5),

$$\begin{aligned} (n^T A_2)T^{-1} &= (\beta_2 n^T)T^{-1} \\ &= \beta_2 (n^T T^{-1}) \\ &= \beta_2 e_1^T, \\ &= (\beta_2, 0). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} v_0^T A_2 T^{-1} &= v_0^T A_2 (s_1 \quad s_2), \\ &= (v_0^T A_2 s_1 \quad v_0^T A_2 s_2), \end{aligned}$$

y haciendo

$$d_1 = v_0^T A_2 s_1 \quad \text{y} \quad (3.12)$$

$$d_2 = v_0^T A_2 s_2, \quad (3.13)$$

tenemos que

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a los vectores:

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} n^T(A_1 q_0 + b_1) \\ v_0^T(A_1 q_0 + b_1) \end{pmatrix}.$$

Hagamos

$$d_0 = v_0^T(A_1 q_0 + b_1), \quad (3.14)$$

para obtener

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que, ya que $q_0 \in \Sigma$ y por continuidad del sistema, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{b}_2 &= T(A_2 q_0 + b_2), \\ &= T(A_1 q_0 + b_1), \\ &= \bar{b}_1. \end{aligned}$$

Por último, podemos usar (2.15) (es decir, el hecho de que $A_2 s_2 = A_1 s_2$) para concluir que

$$\begin{aligned} d_2 &= v_0^T(A_2 s_2), \\ &= v_0^T(A_1 s_2), \\ &= c_2. \end{aligned}$$

Lema 3.1. *Existe v_0 tal que $d_0 = 0$.*

Demostración. Sabemos que $c_0 = n^T(A_1 q_0 + b_1) \neq 0$, es decir, n no es ortogonal al vector $A_1 q_0 + b_1$. Es claro que podemos tomar algún \bar{v}_0 linealmente independiente con n tal que $\bar{v}_0(A_1 q_0 + b_1) = 0$, es decir, $d_0 = 0$. \square

Finalmente, la forma normal del sistema (1.1) cuando $A_1^T n$ y $A_2^T n$ son linealmente dependientes con n es:

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{para } y_1 < 0 \\ \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ d_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{para } y_1 > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

el cual se ilustra geoméricamente en la Figura 3.2.

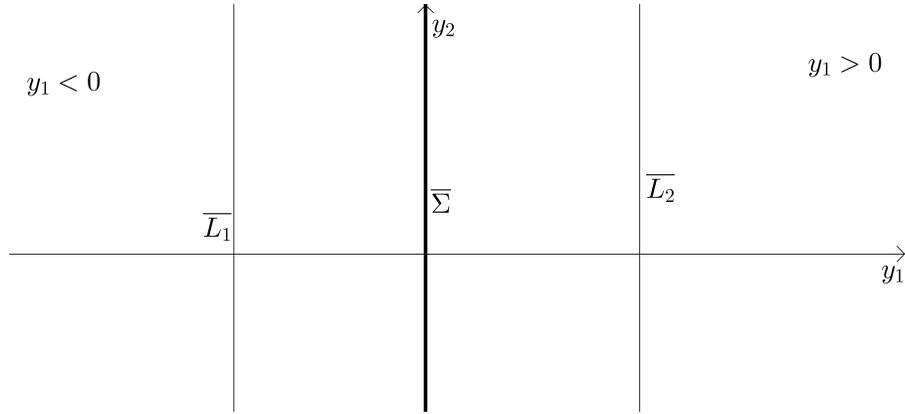


Figura 3.2: Sistema (3.15).

De manera similar a lo que se hizo en la sección 2.2, aplicaremos este procedimiento descrito para obtener la forma normal de un sistema estudiado anteriormente.

Ejemplo 5. Consideremos de nuevo el sistema (1.4) del Ejemplo 3 del capítulo 1. De manera similar al ejemplo 4, transformaremos dicho sistema a su forma normal usando el cambio de coordenadas (3.3). Calcularemos los parámetros $\beta_1, c_1, c_2, c_0, \beta_2$ y d_1 para obtener $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{b}_1$ y \bar{b}_2 y especificaremos las expresiones para \bar{L}_1 y \bar{L}_2 .

Hagamos los cálculos correspondientes. Tomemos $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma$ del sistema (1.4), para obtener

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y, por (3.14), $d_0 = 0$.

De (3.1), (3.10) y (3.11), podemos obtener:

$$\beta_1 = 1, \quad c_1 = 1 \quad \text{y} \quad c_2 = -1,$$

por lo que

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, de (3.2) y (3.12), tenemos que

$$\beta_2 = -1 \quad \text{y} \quad d_1 = 0,$$

por lo que

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Además, de (3.7), podemos obtener:

$$c_0 = 3,$$

por lo que

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la forma normal del sistema (1.4) es:

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{para } y_1 < 0 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{para } y_1 > 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

y su retrato fase correspondiente se ilustra en la Figura 3.3.

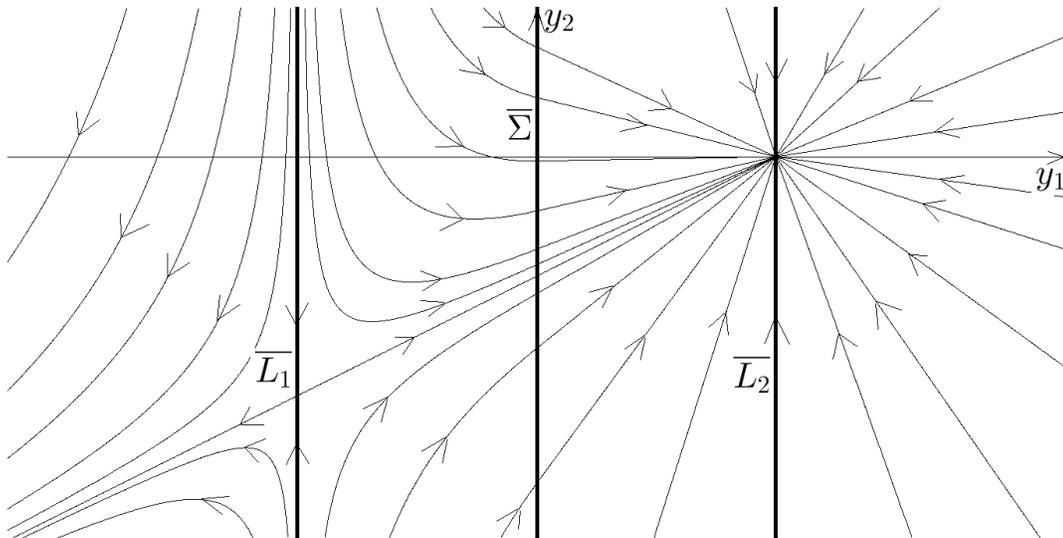


Figura 3.3: Retrato fase del sistema (3.16).

Las expresiones para las rectas \bar{L}_1 y \bar{L}_2 son las siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = -3\} \quad y \\ \bar{L}_2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 3\}. \end{aligned}$$

Podemos ver que la dinámica del sistema original (1.4) se preserva, así como la no virtualidad de ambos equilibrios: existe una silla en $y_1 < 0$ y un nodo estable en $y_1 > 0$. También se ha preservado la continuidad del sistema original, así como la órbita heteroclínica que conecta el equilibrio en $y_1 < 0$ con el de la región $y_1 > 0$.

Capítulo 4

Análisis de Bifurcaciones

En este capítulo analizaremos la dinámica de los sistemas (2.16) y (3.15) exhibiendo casos particulares de éstos en donde se dan diferentes fenómenos de bifurcaciones que generalmente no ocurren en los sistemas lineales. Sin perder de vista que estaremos trabajando con las formas normales de los SLCPP que construimos previamente, readoptaremos la variable original x , así como también los símbolos originales Σ , L_1 y L_2 para las rectas (o rayos), y nos referiremos a \bar{R}_1 como $x_1 < 0$ y a \bar{R}_2 como $x_1 > 0$ simplemente. Además, supondremos que A_1 y A_2 son invertibles.

4.1. n y $A_1^T n$ linealmente independientes

En esta sección nos ocuparemos del estudio del sistema (2.16). Hagamos un rápido recordatorio de la forma de dicho sistema:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ d_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0. \end{cases}$$

Primeramente, observemos el campo de direcciones del flujo en este sistema, el cual está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + b_0, \end{aligned}$$

para $x_1 < 0$, y

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_0 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= d_1 x_1 + c_2 x_2 + b_0, \end{aligned}$$

para $x_1 > 0$. Notemos que en $x_1 < 0$, el flujo se mueve horizontalmente hacia la derecha para $x_2 > 0$ y horizontalmente hacia la izquierda para $x_2 < 0$. En cuanto a la región $x_1 > 0$, el flujo tiene dirección horizontal hacia la derecha cuando pasa “por arriba” de L_2 , es decir, cuando $x_2 > -\alpha_0 x_1$, y se mueve horizontalmente hacia la izquierda cuando pasa “por debajo” de L_2 , es decir, cuando $x_2 < -\alpha_0 x_1$. Este flujo se ilustra en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 (se tomaron $c_1 = c_2 = 0.2$, $b_0 = d_1 = 0.1$).

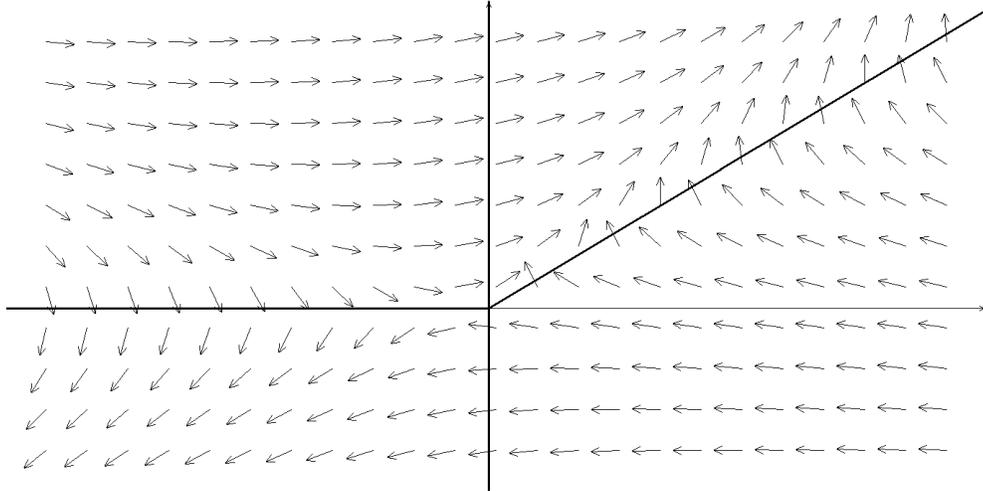


Figura 4.1: Campo de direcciones del flujo del sistema (2.16) ($\alpha_0 < 0$).

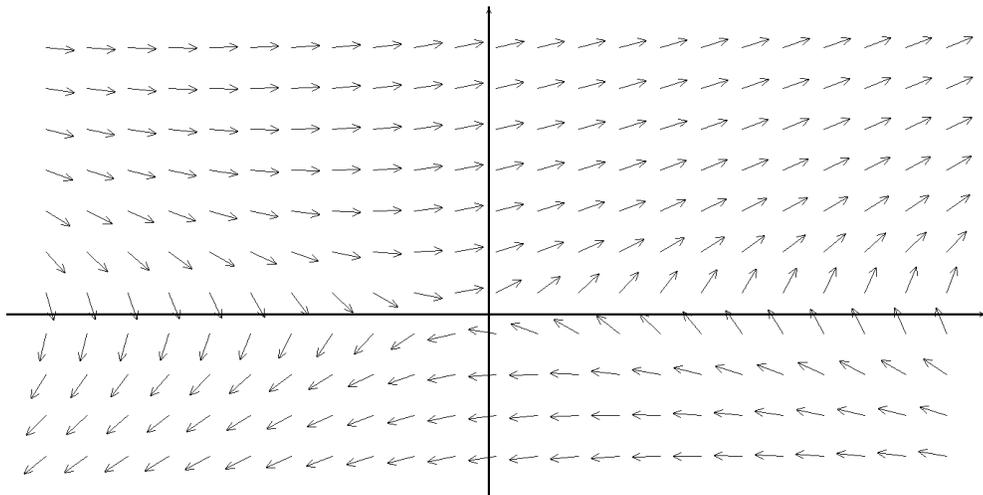
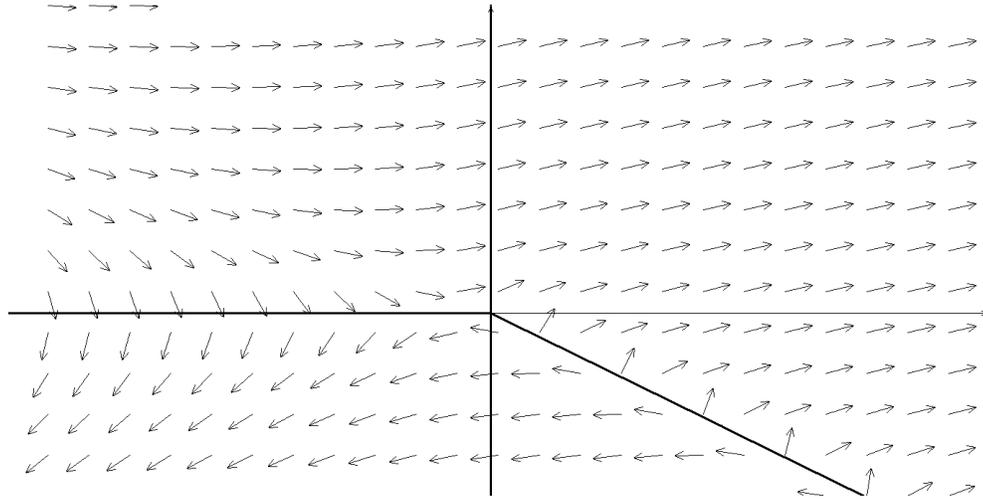


Figura 4.2: ($\alpha_0 = 0$).

Figura 4.3: ($\alpha_0 > 0$).

Sea $p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$ el equilibrio en la región $x_1 < 0$. Haciendo los cálculos correspondientes, podemos obtener que

$$p_{11} = -\frac{b_0}{c_1} \quad \text{y}$$

$$p_{12} = 0,$$

con $c_1 \neq 0$. También se debe tener que $p_{11} < 0$, por lo tanto es necesario que $b_0 c_1 > 0$, o de lo contrario, p_1 sería un equilibrio virtual.

Análogamente, para el equilibrio $p_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ en la región $x_1 > 0$ tenemos

$$p_{21} = \frac{b_0}{\alpha_0 c_2 - d_1} \quad \text{y}$$

$$p_{22} = -\frac{\alpha_0 b_0}{\alpha_0 c_2 - d_1},$$

con $\alpha_0 c_2 - d_1 \neq 0$. Nuevamente, para evitar la virtualidad del equilibrio p_2 , se debe tener que $p_{21} > 0$. Hacemos estas aclaraciones ya que, **a menos que se especifique lo contrario**, descartaremos la virtualidad de los equilibrios en cualquiera de las dos regiones y nos limitaremos a trabajar solamente con puntos de equilibrio.

Lema 4.1. *Si p_1 y p_2 son los equilibrios del sistema (2.16) en $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$ respectivamente, entonces éstos no pueden ser puntos silla simultáneamente.*

Demostración. Supongamos que $b_0 > 0$. Por la no-virtualidad de p_1 se tiene que $c_1 > 0$, y así, p_1 es una silla en $x_1 < 0$, ya que $|A_1| = -c_1 < 0$. Por otra parte, de la no-virtualidad de p_2 se sigue que $\alpha_0 c_2 - d_1 > 0$, pero $|A_2| = \alpha_0 c_2 - d_1$, por lo que p_2 no puede ser una silla.

Supongamos ahora que $b_0 < 0$. Usando el mismo argumento, tenemos que $|A_2| = \alpha_0 c_2 - d_1 < 0$, por lo que p_2 es una silla en $x_1 > 0$. Sin embargo, también se tiene que $c_1 < 0$, por lo que $|A_1| = -c_1 > 0$, es decir, p_1 no puede ser una silla. \square

4.1.1. Centro-Silla

En esta sección analizaremos el caso en el cual p_1 es un centro en $x_1 < 0$ y p_2 es una silla en $x_1 > 0$. Exploraremos la existencia de un fenómeno llamado ciclo límite-centro y la bifurcación en la cual éste cambia de estabilidad. Primeramente notemos que, por ser p_1 un centro, se tiene que $\text{tr}(A_1) = 0$, es decir, que $c_2 = 0$. Entonces, el caso particular del sistema (2.16) que trataremos en este apartado es el siguiente:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}, & \text{para } x_1 < 0 \\ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ d_1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}, & \text{para } x_1 > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Más aún, como p_2 es una silla, tenemos que $|A_2| < 0$, pero $|A_2| = -d_1$, por lo que se sigue que $d_1 > 0$. Tenemos también que $p_{21} = -\frac{b_0}{d_1}$ y, por la no-virtualidad de p_2 , se tiene que $b_0 < 0$. De manera similar, por la no-virtualidad de p_1 , tenemos que $c_1 < 0$. Cabe aclarar que, a menos que se especifique lo contrario, supondremos que $\alpha_0 < 0$, es decir, trabajaremos con el caso particular del sistema (2.16) ilustrado en la Figura 4.1

Para comprender mejor la dinámica alrededor de p_2 , procederemos a determinar los espacios invariantes E^u y E^s , para lo cual necesitaremos los valores propios λ_{21} y λ_{22} de A_2 y los vectores propios v_{21} y v_{22} asociados a estos de manera respectiva.

Haciendo los cálculos correspondientes, obtenemos que λ_{21} y λ_{22} son:

$$\begin{aligned} \lambda_{21} &= \frac{1}{2} \left((\alpha_0 + c_2) + \sqrt{(\alpha_0 - c_2)^2 + 4d_1} \right), \\ \lambda_{22} &= \frac{1}{2} \left((\alpha_0 + c_2) - \sqrt{(\alpha_0 - c_2)^2 + 4d_1} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

y además, v_{21} y v_{22} son:

$$\begin{aligned} v_{21} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{21} - \alpha_0 \end{pmatrix}, \\ v_{22} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{22} - \alpha_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que, independientemente de los valores que tomen c_2 y d_1 se tendrá que $\lambda_{21} > 0$ y que $\lambda_{22} < 0$, por lo que

$$E^u = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{21} - \alpha_0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E^s = \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ \lambda_{22} - \alpha_0 \end{array} \right) \right\rangle.$$

La Figura 4.4 es un bosquejo para ilustrar E^u y E^s .

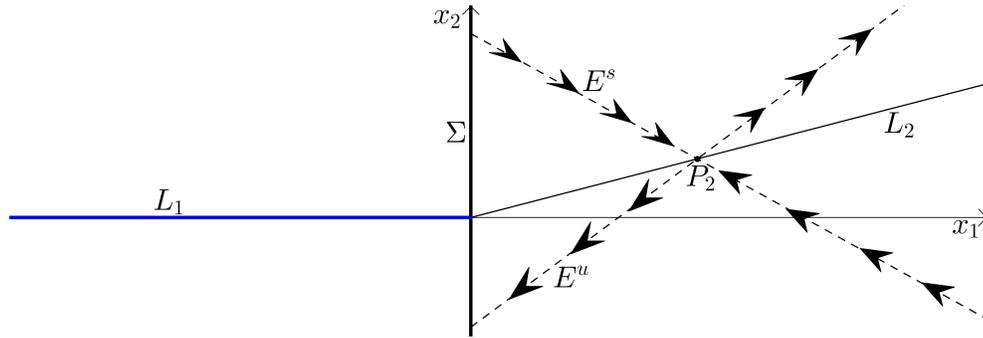


Figura 4.4: Espacios invariantes E^u y E^s en $x_1 > 0$ ($\alpha_0 < 0$).

Observemos que E^u no se traslapa con L_2 , ya que, de ser así, se daría que

$$\lambda_{21} - \alpha_0 = -\alpha_0,$$

de donde se tendría que

$$\lambda_{21} = 0,$$

lo cual no es posible, ya que p_2 es una silla. Más aún, como $\lambda_{21} > 0$, tenemos que

$$\lambda_{21} - \alpha_0 > -\alpha_0,$$

por lo que la inclinación de E^u siempre es mayor que la de L_2 . Análogamente, E^s no se traslapa con L_2 , y

$$\lambda_{22} - \alpha_0 < -\alpha_0,$$

por lo que la inclinación de L_2 es mayor que la de E^s .

Ahora consideremos de nuevo p_2 . Sabemos que E^u y E^s son rayos en $x_1 > 0$ y que intersectan a Σ . Llamemos X_u y X_s a estos dos rayos, respectivamente, q_1 al punto de intersección de X_s con Σ y q_2 al punto de intersección de X_u con Σ , y hagamos

$$q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix},$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix}.$$

Observemos que, por ser q_1 y q_2 ambos puntos de Σ , se tiene que $q_{11} = 0$ y $q_{21} = 0$. Calculemos ahora q_{12} y q_{22} . Sabemos que tanto X_s como X_u pasan por p_2 , por lo que las ecuaciones de estos dos rayos están dadas por

$$X_u = p_2 + sv_{21},$$

$$X_s = p_2 + sv_{22},$$

con $s \in \mathbb{R}$. Sabemos, además, que q_1 también es un punto en X_s , por lo que se cumple

$$X_s = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{22} - \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

de donde obtenemos que

$$p_{21} + s = 0,$$

por lo que

$$s = -p_{21}.$$

Por otra parte, de (4.3) tenemos también que

$$(\alpha_0 p_{21} + p_{22}) - p_{21} \lambda_{22} = q_{12},$$

pero, como p_2 es un punto de L_2 , obtenemos que

$$q_{12} = -\lambda_{22} p_{21}.$$

Análogamente, podemos obtener que

$$q_{22} = -\lambda_{21} p_{21}.$$

Consideremos ahora el retrato fase del sistema (4.1), el cual se ilustra en la Figura 4.5.

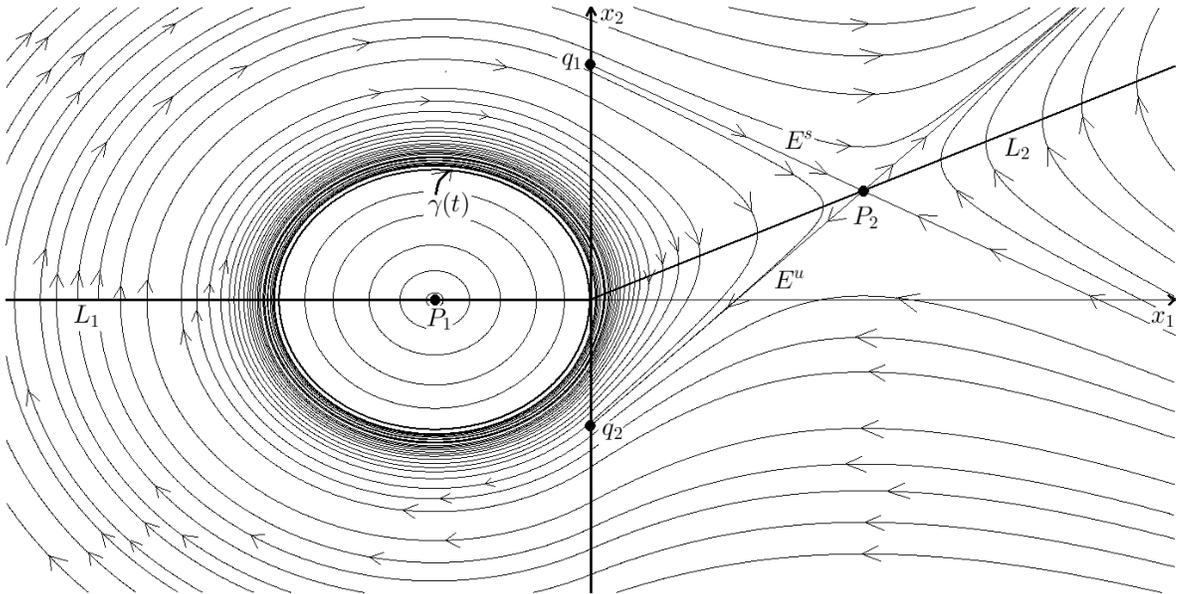


Figura 4.5: Retrato fase de (4.1) ($\alpha_0 < 0$).

Prestemos especial atención a la órbita que nace en el origen y fluye describiendo una elipse en $x_1 < 0$; llamémosle $\gamma(t)$. Por la simetría de dicha elipse, sabemos que,

para algún \bar{t} , el flujo de esta órbita regresa al mismo punto de partida sin atravesar Σ , ni abandonar la región $x_1 < 0$ de ninguna manera. Al llegar de nuevo al punto de partida, es decir, al origen, el flujo continúa describiendo exactamente la misma elipse $\gamma(t)$, la cual, eventualmente volverá una vez más al origen para repetir este evento. También podemos ver que las soluciones que nacen en el segmento de Σ entre q_1 y q_2 convergen a $\gamma(t)$. A continuación enunciaremos ésto con la siguiente proposición y daremos una demostración con un enfoque geométrico.

Proposición 2. *Considere el sistema (4.1). Si $\alpha_0 < 0$, $b_0 < 0$, $d_1 > 0$, $c_1 < 0$ y $c_2 = 0$, entonces $\gamma(t)$ es una solución estable.*

Demostración. Sean $\phi_t(x)$ y $\psi_t(x)$ el flujo del sistema en $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$ respectivamente y definamos

$$\Delta = q_{12} + q_{22}.$$

Notemos que, como $\alpha_0 < 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &= -\lambda_{22}p_{21} - \lambda_{21}p_{21}, \\ &= -p_{21}(\lambda_{21} + \lambda_{22}), \\ &= \frac{b_0}{d_1}\alpha_0, \\ &> 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$q_{12} > -q_{22},$$

o bien,

$$|q_{12}| > |q_{22}|. \quad (4.4)$$

Consideremos ahora el flujo en $x_1 < 0$ que nace en q_2 ,

$$\phi_t(q_2).$$

Esta fluye describiendo un arco elíptico, el cual, eventualmente llegará de nuevo a algún punto en Σ , pero, debido a que este arco es simétrico, este último punto forzosamente deberá ser $-q_2$. En otras palabras, existe t_0 tal que

$$\phi_{t_0}(q_2) = -q_2,$$

con

$$0 < -q_{22} < q_{12},$$

debido a (4.4) (Ver Figura 4.6).

A continuación, este flujo continúa, pero ahora en la región $x_1 > 0$, donde hay una silla. Ahora hablaremos del flujo en $x_1 > 0$ que nace en $-q_2$:

$$\psi_t(-q_2).$$

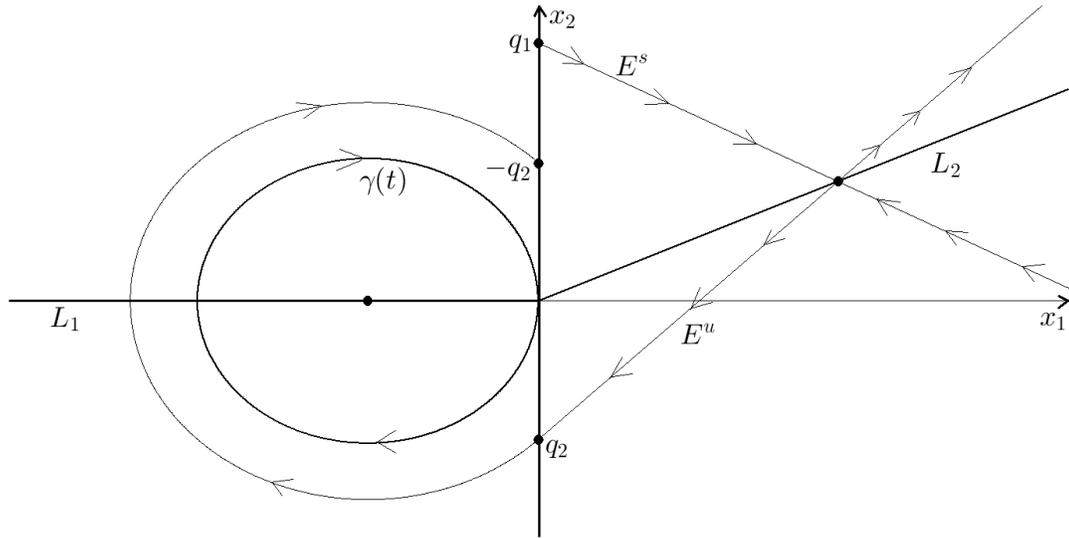


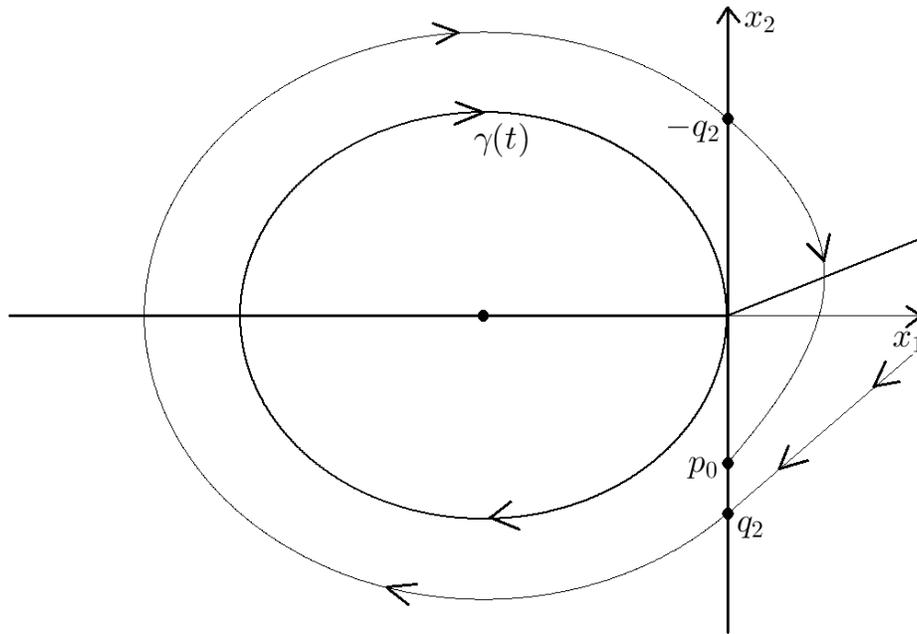
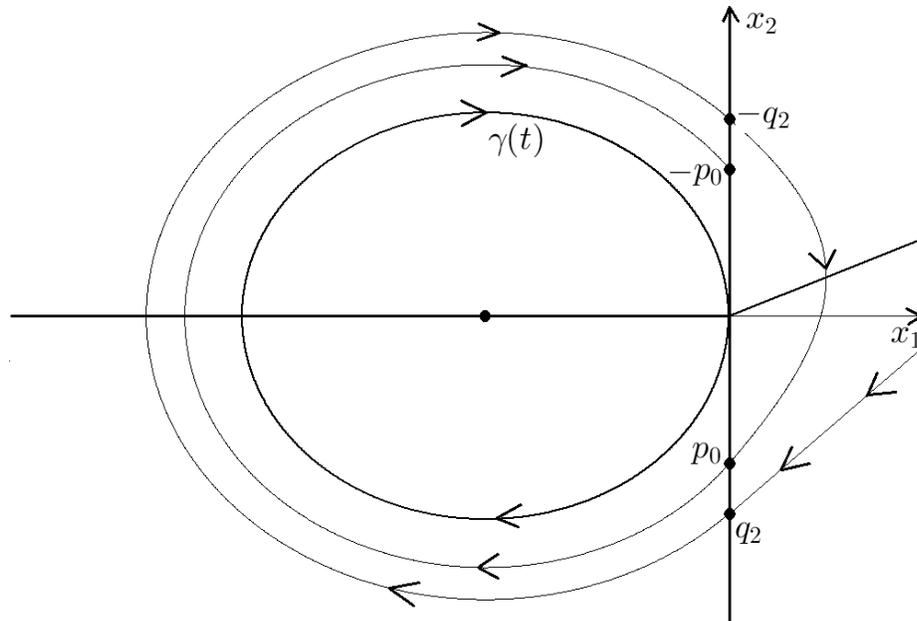
Figura 4.6: Arco elíptico en $x_1 < 0$.

Dicha órbita fluye de forma horizontalmente positiva hasta intersectar a L_2 , donde atraviesa a ésta de forma vertical hacia abajo y cambia de dirección, ahora fluyendo de manera negativa horizontalmente. Sabemos que la órbita no puede atravesar a E^u ni coincidir con q_2 , por lo que, necesariamente, debe existir t_1 tal que

$$\psi_{t_1}(-q_2) = p_0,$$

con $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{02} \end{pmatrix} \in \Sigma$ tal que (ver Figura 4.7)

$$q_{22} < p_{02} < 0.$$

Figura 4.7: $\psi_t(-q_2)$ en $x_1 > 0$.Figura 4.8: Arco elíptico de p_0 hasta $-p_0$.

Luego, el flujo se incorpora a la región $x_1 < 0$ y se describe otro arco elíptico que inicia en p_0 y, por simetría, regresa a Σ , intersectando a ésta exactamente en $-p_0$ (ver Figura 4.8).

De la misma manera, a continuación se describe otra órbita en $x_1 > 0$ que inicia en $-p_0$ y vuelve a Σ en algún punto $p_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{01}^1 \end{pmatrix}$ tal que $p_{02} < p_{01}^1 < 0$ (ver Figura 4.9).

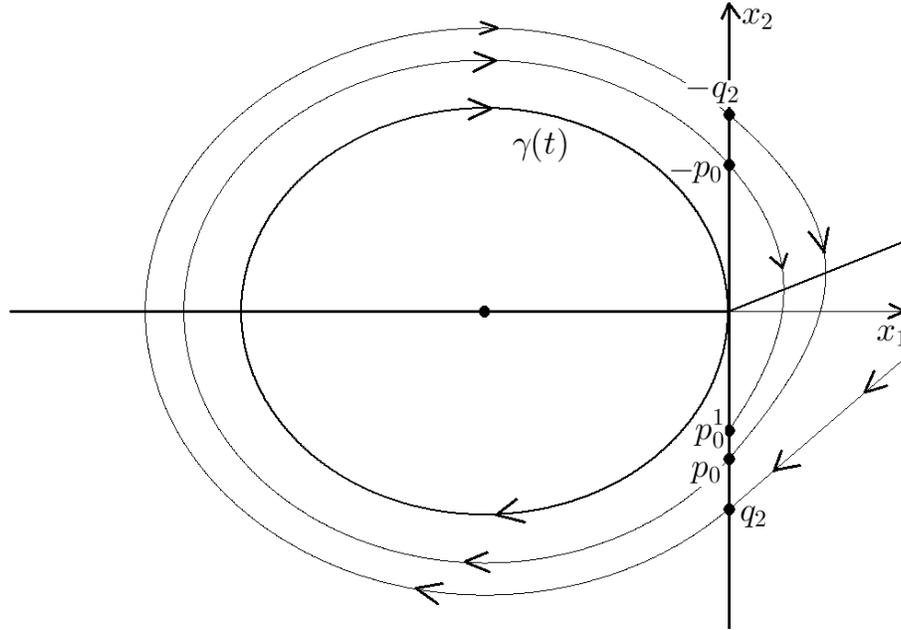


Figura 4.9: Ilustración del proceso descrito.

Luego, el flujo se incorpora de nuevo a la región $x_1 < 0$ y se repite el proceso sucesivamente (ver Figura 4.10).

En otras palabras, si $t \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\phi_t(q_2) \rightarrow \gamma(t).$$

Observemos que, el razonamiento anterior es también válido para cualquier punto $p = \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix}$ en Σ tal que $-q_{22} < p_y < q_{12}$, ya que, $\psi_t(p)$ viaja de la misma manera que $\psi_t(-q_2)$ hasta volver a Σ , sin embargo, esta primera órbita no toca a esta última, ni coincide con Σ en q_2 , por lo que $\psi_t(p)$ necesariamente regresa a Σ en un punto $p' = \begin{pmatrix} 0 \\ p'_y \end{pmatrix}$ tal que

$$q_2 < p'_y < p_{02}$$

y así, el proceso descrito anteriormente ocurre y, si $t \rightarrow \infty$,

$$\phi_t(p') \rightarrow \gamma(t).$$

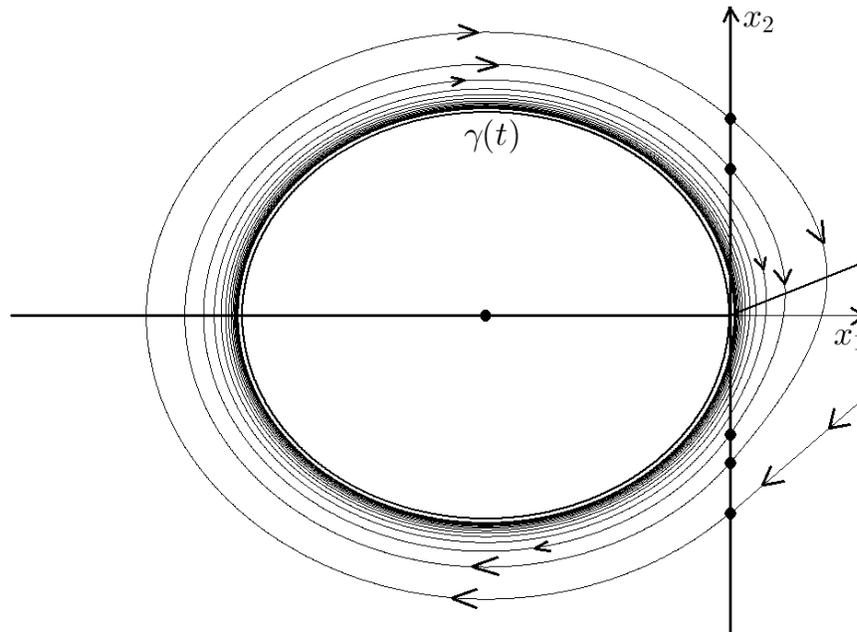


Figura 4.10: $\phi_t(q_2) \rightarrow \gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

De esta forma, tenemos también que

$$\phi_t(q) \rightarrow \gamma(t)$$

cuando $t \rightarrow \infty$, para $q = \begin{pmatrix} 0 \\ q_y \end{pmatrix} \in \Sigma$ tal que

$$q_{22} < q_y < -q_{22}.$$

□

Con el teorema anterior se ha probado que, al considerar puntos sobre el segmento de Σ que une a q_2 con q_1 , el flujo que nace en cualquiera de éstos, converge a $\gamma(t)$. Por otra parte, si consideramos ahora puntos en el interior de $\gamma(t)$, el flujo que nace en éstos describe elipses totalmente contenidas en $x_1 < 0$, como un centro cualquiera. Si consideramos lo que ocurre en todos estos puntos, tenemos que, mientras que en el interior de $\gamma(t)$ hay un centro, en su exterior, el flujo converge a ésta. Este fenómeno es conocido como un **ciclo límite-centro** (ver Figura 4.11).

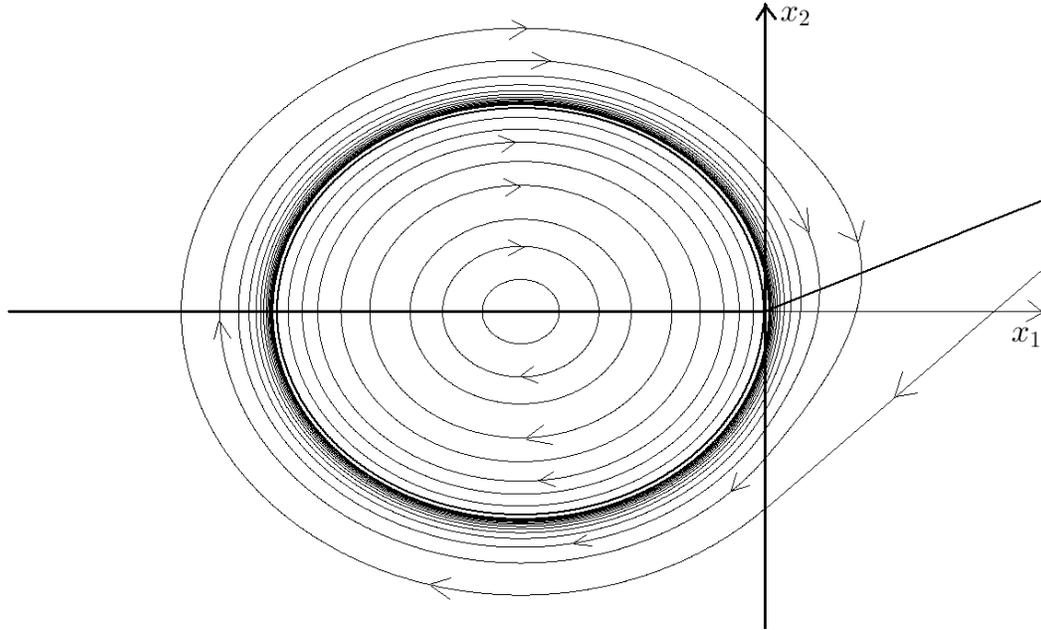


Figura 4.11: Ciclo límite-centro (estable).

Ahora consideremos el caso en que $\alpha_0 = 0$. Tenemos que

$$\Delta = 0,$$

por lo que

$$|q_{12}| = |q_{22}|.$$

Si consideramos ahora $\phi_t(q_2)$, sabemos que este flujo describirá un arco elíptico en $x_1 < 0$ y regresará a Σ para algún \bar{t} , exactamente en $-q_2$. Pero,

$$-q_2 = q_1,$$

por lo que, al continuar el flujo en $x_1 > 0$, éste se mueve sobre E^s hasta llegar a p_2 , luego se desliza por E^u hasta llegar de nuevo al punto de inicio, q_2 , para repetir la trayectoria (Ver Figura 4.12).

En otras palabras, existe una órbita homoclínica que conecta a p_2 consigo mismo. En la Figura 4.13 se presenta una ilustración del retrato fase de (4.1) para $\alpha_0 = 0$.

En cuanto al caso en que $\alpha_0 > 0$, tenemos que

$$\Delta < 0,$$

por lo que

$$q_{12} < -q_{22}. \quad (4.5)$$

De manera similar al caso en que $\alpha_0 < 0$, la dinámica del sistema (4.1) sugiere la creación de un *ciclo límite-centro*, sólo que, en este caso, $\gamma(t)$ es *inestable*. Procediendo de igual manera que en la prueba de la Proposición 2, demostraremos que

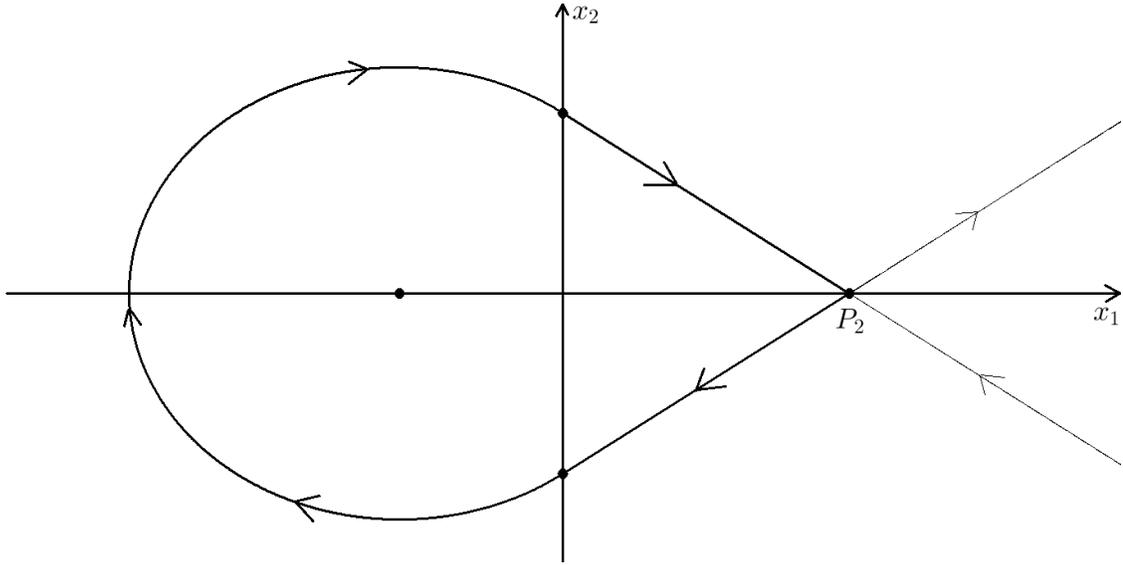


Figura 4.12: Órbita homoclínica que conecta a p_2 consigo mismo.

las soluciones que nacen en el exterior de $\gamma(t)$ divergen de ésta.

Primeramente probemos ésto para puntos sobre el segmento de Σ que conecta a q_1 con q_2 . Consideremos el flujo que nace en q_1 , solamente que en este caso consideremos el sentido inverso de este flujo. El flujo en reversa atraviesa $x_1 < 0$ formando un arco elíptico que regresa a Σ intersectando a ésta en $-q_1$, pero, en este caso,

$$q_{22} < -q_{12} < 0.$$

A continuación, el flujo continúa su trayectoria por $x_1 > 0$ y se repite el evento descrito en la prueba de la Proposición 2, es decir,

$$\phi_t(q_1) \rightarrow \gamma(t)$$

cuando $t \rightarrow -\infty$. Así, $\phi_t(q_1)$ diverge de $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver Figura 4.14).

Con esto y usando los mismos argumentos que en la prueba de dicho teorema, tenemos que para $p = \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix} \in \Sigma$ tal que

$$q_{22} < p_y < q_{12},$$

$$\phi_t(p) \rightarrow \gamma(t)$$

cuando $t \rightarrow -\infty$. Por lo tanto, $\phi_t(p)$ diverge de $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Es fácil ver que el flujo que nace en $q = \begin{pmatrix} 0 \\ q_y \end{pmatrix} \in \Sigma$ tal que

$$q_{12} < q_y$$

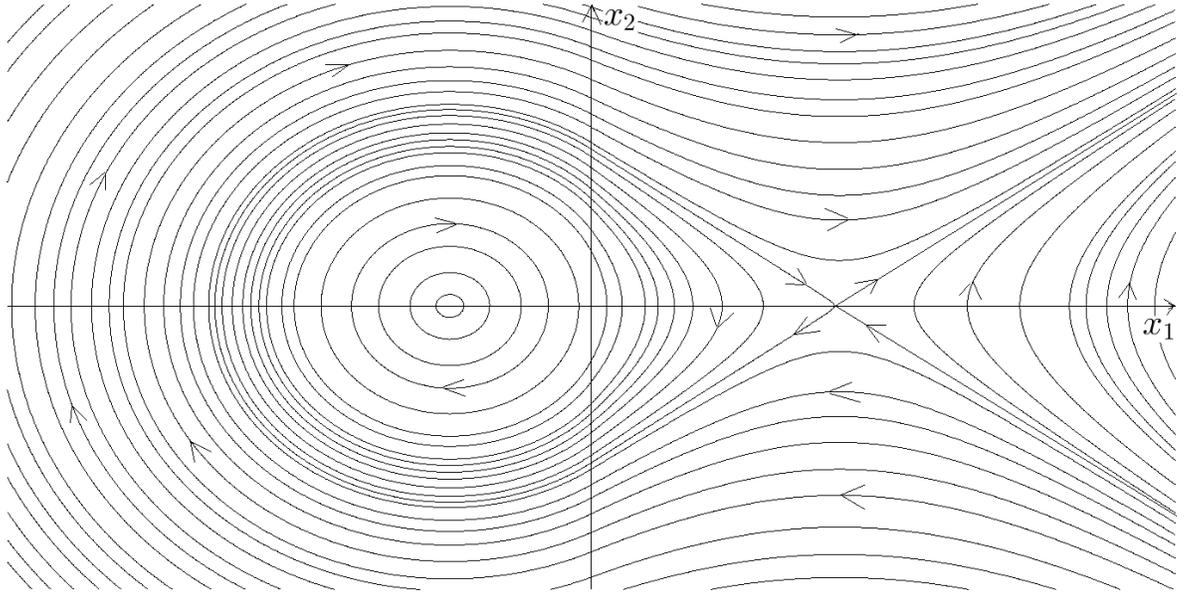


Figura 4.13: Retrato fase de (4.1) ($\alpha_0 = 0$).

se incorpora a la silla en $x_1 > 0$ y diverge de $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, el flujo que nace en $q' = \begin{pmatrix} 0 \\ q'_y \end{pmatrix} \in \Sigma$ tal que

$$q'_y < q_{22}$$

regresa a Σ en $-q'$ sólo para incorporarse a la silla y diverger también de $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Así, $\gamma(t)$ es un ciclo límite inestable en $x_1 < 0$. Luego, la dinámica en el interior de $\gamma(t)$ es la usual de un centro.

De esta forma, hemos confirmado la existencia de un ciclo límite-centro (ver Figura 4.15).

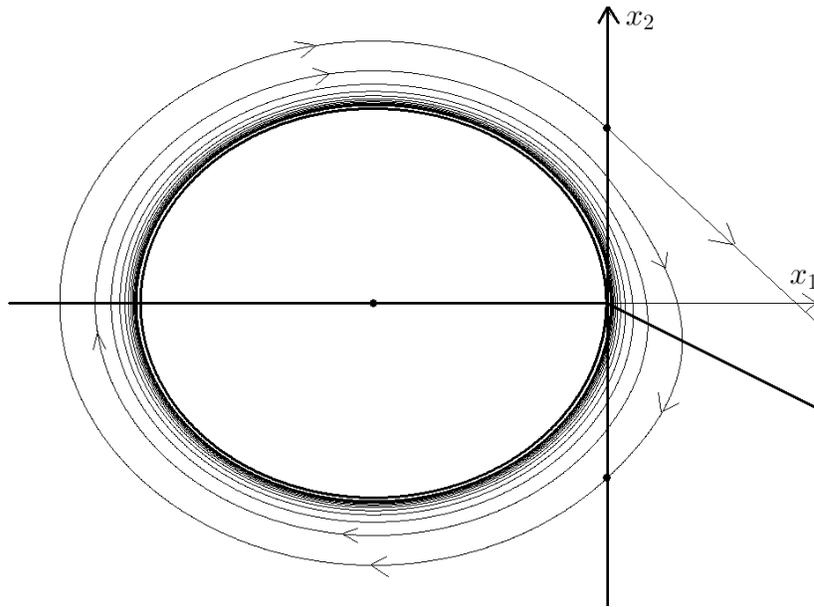


Figura 4.14: $\phi_t(q_1)$ diverge de $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

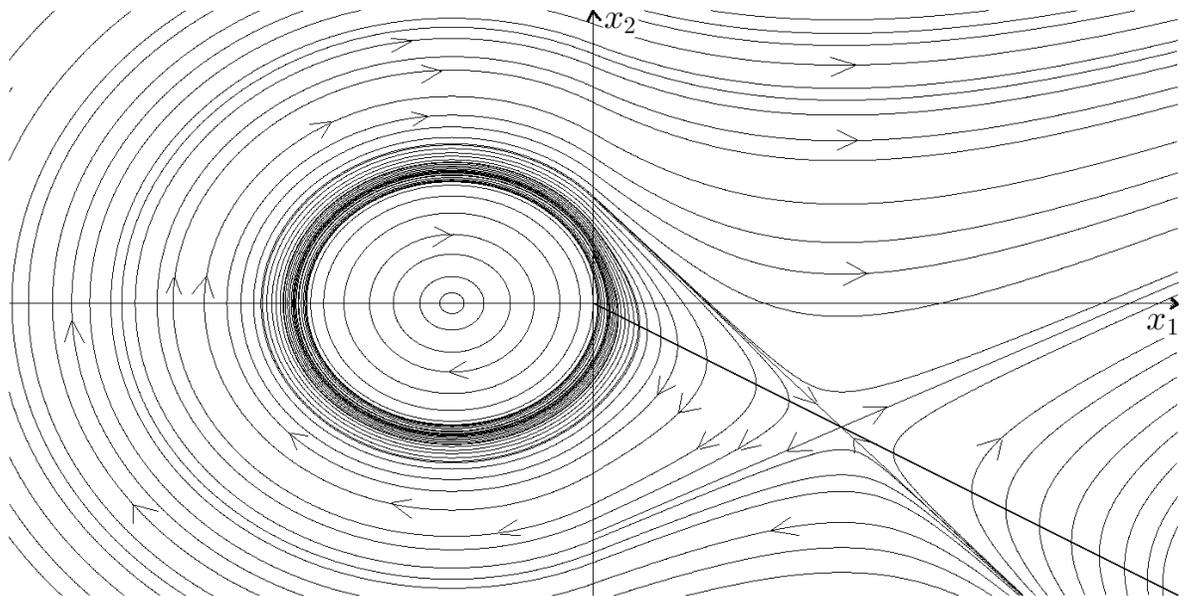


Figura 4.15: Retrato fase de (4.1) ($\alpha_0 > 0$).

4.1.2. Foco-Foco

Ahora nos dedicaremos al estudio de un caso particular del sistema (2.16)

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ d_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0, \end{cases}$$

en el cual p_1 es un foco virtual en $x_1 < 0$ y p_2 es un foco en $x_1 > 0$. El problema que ahora nos planteamos es probar la existencia de un ciclo límite dadas las condiciones establecidas para p_1 y p_2 . En otras palabras, exploraremos condiciones para las cuales ocurra un fenómeno como se ilustra en la Figura 4.16. Notemos que, en este caso, tenemos que $p_{21} > 0$. Tenemos también que $|A_1| = -c_1 > 0$, por lo que $c_1 < 0$. Además,

$$|A_2| = \alpha_0 c_2 - d_1 > 0$$

y, por la virtualidad de p_1 , se tiene que $b_0 > 0$.

Podrían surgir preguntas como: ¿por qué estudiaremos el caso en que p_1 es un equilibrio virtual?, ¿es realmente necesario que p_1 sea virtual? ó ¿qué ocurriría si este equilibrio no fuese virtual? La respuesta a la tercera pregunta es algo digno de aclarar y que, a su vez, responde las otras dos preguntas. Ahora justificaremos el porqué no es posible que tanto p_1 como p_2 sean focos simultáneamente. Supongamos, por un momento, que ambos equilibrios son focos y ninguno de ellos es virtual. Por las restricciones de parámetros establecidas anteriormente y por la no-virtualidad de p_2 tendríamos que $b_0 > 0$, lo que implicaría que p_1 fuese virtual, lo cual es una contradicción. Más aún, es fácil ver que la no-virtualidad de p_2 implica la virtualidad de p_1 y viceversa, debido al signo del parámetro b_0 en cada caso. De esta forma, podemos concluir que tanto el escenario en que p_1 y p_2 son ambos focos **no** es factible, así como tampoco lo es el caso en que ambos son focos virtuales. Necesariamente se debe tener que uno de los focos sea virtual y el otro no lo sea, lo cual es lo que estudiaremos en este apartado.

Parte del problema es dar respuesta a preguntas como: ¿existirán q_1 y q_2 tales que den sentido al evento ilustrado en la figura? y si fuese así, ¿para cuáles t_1, t_2 se daría esto? Es decir, debemos encontrar para qué $t_1 > 0$ podemos partir de q_1 mediante el flujo ψ_t hasta llegar a q_2 a través de $x_1 > 0$ y para qué $t_2 > 0$ podemos partir “de manera continua” de q_2 a mediante ϕ_t para regresar a q_1 atravesando la región $x_1 < 0$. Simbólicamente podemos plantear esta cuestión mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \psi_{t_1}(q_1) &= q_2, \\ \phi_{t_2}(q_2) &= q_1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\text{con } q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{12} \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{22} \end{pmatrix} \in \Sigma.$$

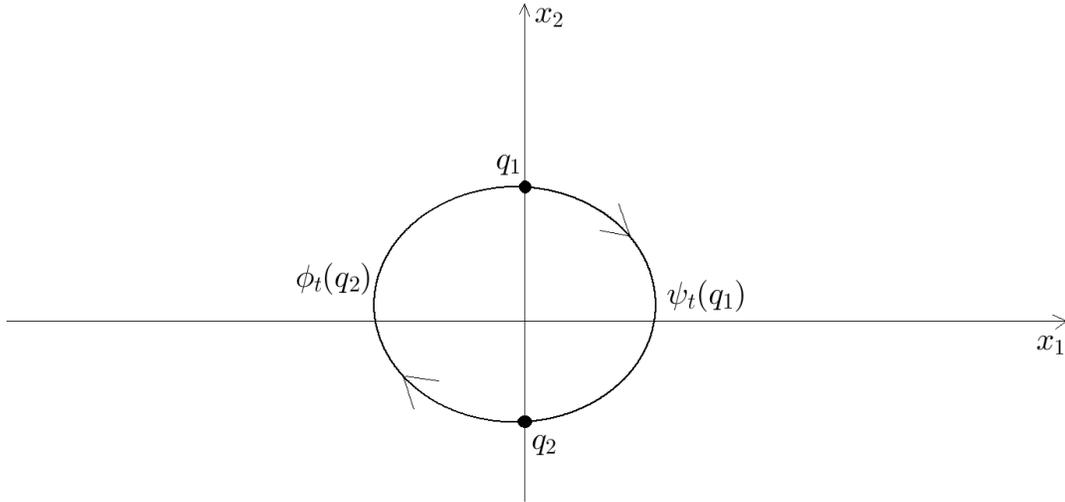
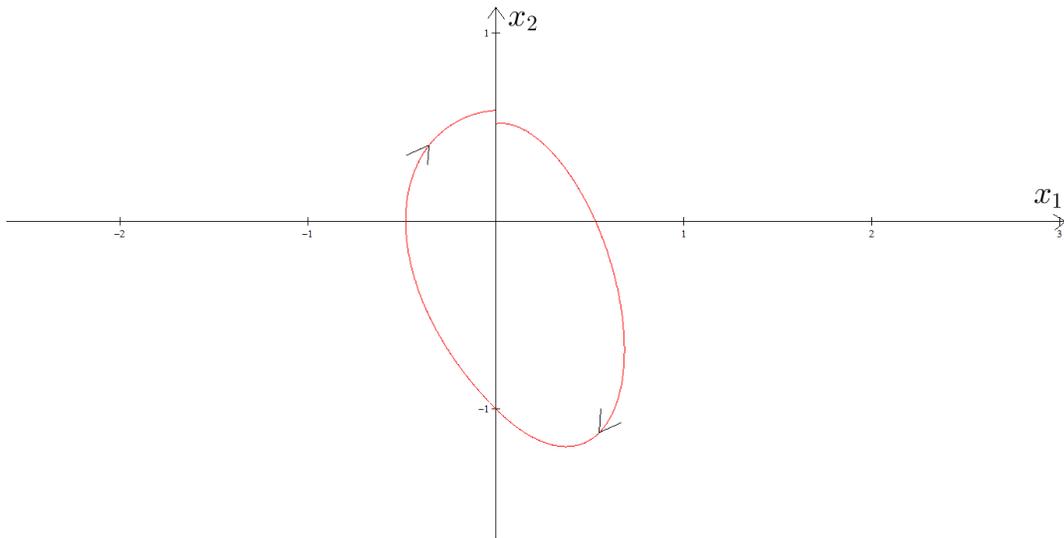


Figura 4.16: Ciclo límite hipotético.

Primeramente, presentaremos evidencia numérica que sugiere la existencia del ciclo límite en cuestión. Tomemos $c_1 = -1$, $b_0 = 0.4$, $\alpha_0 = 1$, $d_1 = -3$, $c_2 = -0.6$ y fijemos la condición inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es decir, tenemos un foco estable en $x_1 < 0$, ya que $\text{tr}(A_1) = c_1 < 0$ y un foco inestable en $x_1 > 0$, ya que $\text{tr}(A_2) = \alpha_0 + c_2 > 0$. La órbita que parte de la condición inicial que fijamos se ilustra en la Figura 4.17. Puede observarse que la órbita en $x_1 > 0$ interseca a Σ en un punto cuya or-

Figura 4.17: Órbita que parte de la condición inicial establecida. ($c_2 = -0.6$)

denada es menor a la ordenada del punto de intersección de Σ con la órbita en $x_1 < 0$. Ahora tomemos $c_2 = -0.7$ pero conservemos los mismos valores para to-

dos los demás parámetros, así como la condición inicial anterior. La órbita que parte de dicha condición inicial con este valor numérico para c_2 se ilustra en la Figura 4.18.

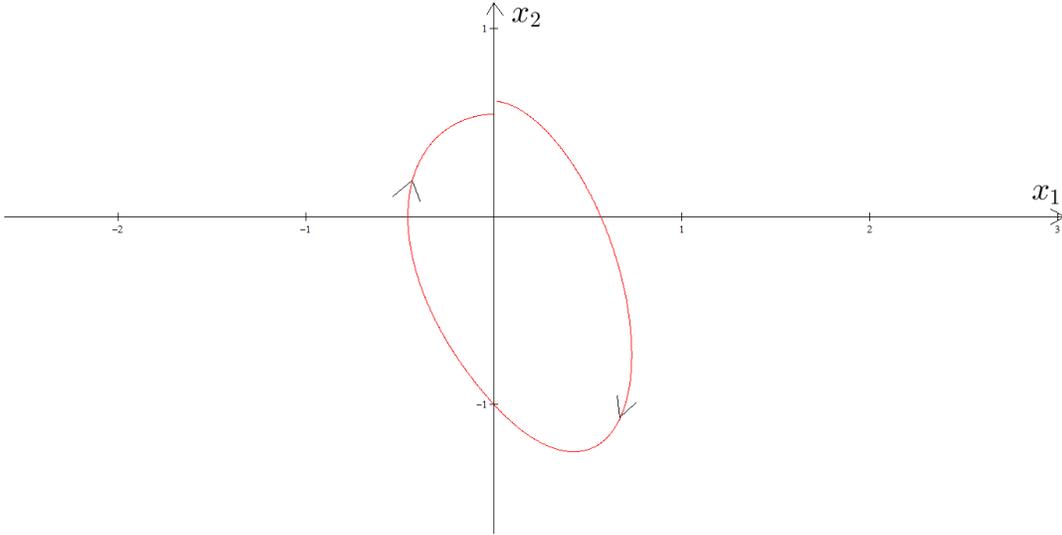


Figura 4.18: Órbita que parte de la condición inicial establecida. ($c_2 = -0.7$)

Ahora la órbita en $x_1 > 0$ intersecciona a Σ en un punto cuya ordenada es mayor a la ordenada del punto de intersección de Σ con la órbita en $x_1 < 0$. Esto indica que, cuando $c_2 = \delta$ para algún δ tal que $-0.6 < \delta < -0.7$, la órbita en $x_1 > 0$ interseccionará a Σ exactamente en el mismo punto de intersección con la órbita en $x_1 < 0$. Es decir, cuando $c_2 = \delta$ se tendrá la existencia del ciclo límite.

Habiendo presentado esta evidencia numérica de la existencia del ciclo límite en cuestión, daremos ahora una prueba analítica de que éste en efecto existe. Mantendremos la misma configuración presentada en la evidencia numérica, es decir, p_1 es un foco virtual estable ($tr(A_1) = c_2 < 0$) y p_2 es un foco inestable ($tr(A_2) = \alpha_0 + c_2 > 0$).

Primeramente, los valores propios de A_1 , λ_{11} y λ_{12} , son:

$$\lambda_{11} = \frac{1}{2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 + 4c_1} \right),$$

$$\lambda_{12} = \frac{1}{2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 + 4c_1} \right),$$

con $c_2^2 + 4c_1 < 0$.

Los valores propios de A_2 fueron calculados previamente en la sección 4.1.1 y están

dados en (4.2). Estos son:

$$\lambda_{21} = \frac{1}{2} \left((\alpha_0 + c_2) + \sqrt{(\alpha_0 - c_2)^2 + 4d_1} \right),$$

$$\lambda_{22} = \frac{1}{2} \left((\alpha_0 + c_2) - \sqrt{(\alpha_0 - c_2)^2 + 4d_1} \right),$$

con $(\alpha_0 - c_2)^2 + 4d_1 < 0$.

Hagamos

$$\alpha_1 = \operatorname{Re}(\lambda_{11,12}) < 0,$$

$$\alpha_2 = \operatorname{Re}(\lambda_{21,22}) > 0,$$

$$\beta_1 = \operatorname{Im}(\lambda_{11}),$$

$$\beta_2 = \operatorname{Im}(\lambda_{21}).$$

Recordemos que el flujo en $x_1 < 0$ y en $x_1 > 0$, $\phi_t(x)$ y $\psi_t(x)$ respectivamente están dados por (ver Apéndice A)

$$\phi_t(x) = e^{tA_1}(x - p_1) + p_1 \quad \text{y}$$

$$\psi_t(x) = e^{tA_2}(x - p_2) + p_2,$$

lo cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$\phi_t(x) = e^{\alpha_1 t} P_1 B_1(t) P_1^{-1}(x - p_1) + p_1,$$

$$\psi_t(x) = e^{\alpha_2 t} P_2 B_2(t) P_2^{-1}(x - p_2) + p_2,$$

donde

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta_i t & -\operatorname{sen} \beta_i t \\ \operatorname{sen} \beta_i t & \cos \beta_i t \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Así, podemos escribir (4.6) de la siguiente forma:

$$e^{\alpha_2 t_1} P_2 B_2(t_1) P_2^{-1}(q_1 - p_2) + (p_2 - q_2) = 0 \quad (4.7)$$

$$e^{\alpha_1 t_2} P_1 B_1(t_2) P_1^{-1}(q_2 - p_1) + (p_1 - q_1) = 0 \quad (4.8)$$

Ahora multipliquemos (4.7) por P_2^{-1} y (4.8) por P_1^{-1} , ambos por la izquierda para obtener:

$$e^{\alpha_2 t_1} B_2(t_1) P_2^{-1}(q_1 - p_2) + P_2^{-1}(p_2 - q_2) = 0$$

$$e^{\alpha_1 t_2} B_1(t_2) P_1^{-1}(q_2 - p_1) + P_1^{-1}(p_1 - q_1) = 0$$

Haciendo los cálculos correspondientes, obtenemos explícitamente el sistema (4.6). Este es el sistema que resolveremos:

$$f_1(t) = e^{\alpha_2 t}(\cos \beta_2 t + r_1 \operatorname{sen} \beta_2 t) = s_1, \quad (4.9)$$

$$f_2(t) = e^{\alpha_2 t}(\cos \beta_2 t - \frac{1}{r_1} \operatorname{sen} \beta_2 t) = 1, \quad (4.10)$$

$$g_1(t) = e^{\alpha_1 t}(\cos \beta_1 t + r_2 \operatorname{sen} \beta_1 t) = s_2, \quad (4.11)$$

$$g_2(t) = e^{\alpha_1 t}(\cos \beta_1 t - \frac{1}{r_2} \operatorname{sen} \beta_1 t) = 1, \quad (4.12)$$

donde

$$r_1 = \frac{\beta_2 b_0}{k_2},$$

$$s_1 = \frac{k_1}{k_2},$$

$$r_2 = \frac{\beta_1 b_0}{k_4},$$

$$s_2 = \frac{k_3}{k_4}$$

y además,

$$k_1 = b_0 \alpha_2 + q_{22}(\alpha_0 c_2 - d_1),$$

$$k_2 = b_0 \alpha_2 + q_{12}(\alpha_0 c_2 - d_1),$$

$$k_3 = \alpha_1 b_0 - q_{12} c_1,$$

$$k_4 = \alpha_1 b_0 - q_{22} c_1.$$

Obsérvese que $k_4 < 0$ y $k_2 > 0$. Los signos de k_1 y k_3 se determinarán más adelante de manera conveniente. Concluimos entonces que $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$.

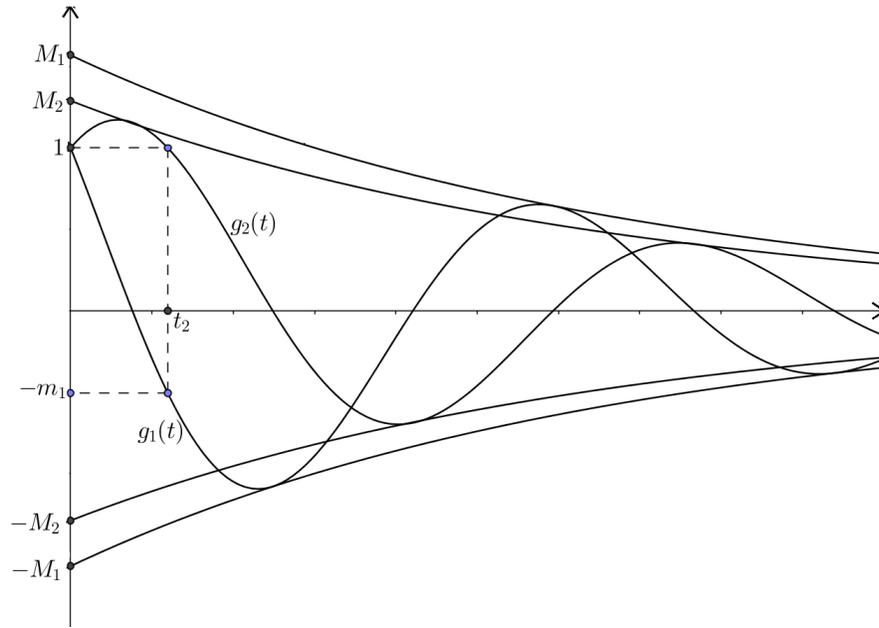
Para resolver este sistema, probaremos que existen $t_1 > 0$ que satisface simultáneamente (4.9) y (4.10) y $t_2 > 0$ que satisface simultáneamente (4.11) y (4.12). Primero resolvamos de esta manera (4.11) y (4.12).

Consideremos $g'_1(t)$ y $g'_2(t)$. Haciendo los cálculos correspondientes obtenemos que

$$g'_1(0) = \beta_1 r_2 + \alpha_1 < 0 \quad \text{y}$$

$$g'_2(0) = q_{22} c_1 > 0,$$

por lo que $g_1(t)$ es decreciente en $t = 0$ y $g_2(t)$ creciente en $t = 0$. Consideremos ahora las gráficas de ambas funciones, las cuales se ilustran en un mismo plano en la Figura 4.19.

Figura 4.19: Gráfica de $g_1(t)$ y $g_2(t)$.

En general, $f(t) = A \cos(at) + B \operatorname{sen}(at) = M \cos(at + \phi)$, donde $a, A, B, \phi \in \mathbb{R}$ y $M = \sqrt{A^2 + B^2}$, así, $|A \cos(at) + B \operatorname{sen}(at)| \leq |M|$. De esta manera, tenemos que

$$g_1(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \phi_1), \quad (4.13)$$

$$g_2(t) = M_2 e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \phi_2), \quad (4.14)$$

con $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$. Por lo que

$$\begin{aligned} |g_1(t)| &\leq |M_1| e^{\alpha_1 t} \quad \text{y} \\ |g_2(t)| &\leq |M_2| e^{\alpha_1 t}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{1 + r_2^2} > 1 \quad \text{y} \\ M_2 &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2} > 1. \end{aligned}$$

En el Apéndice B se prueba que $\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$. De esto tenemos que

$$\begin{aligned} g_1(t) &= M_1 e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \phi_1), \\ &= M_1 e^{\alpha_1 t} \cos\left((\beta_1 t + \phi_2) + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

por lo que

$$g_1(t) = -M_1 e^{\alpha_1 t} \operatorname{sen}(\beta_1 t + \phi_2). \quad (4.15)$$

Al comparar (4.14) y (4.15), podemos ver que los puntos de tangencia de g_1 con $M_1 e^{\alpha_1 t}$ son los ceros de g_2 y viceversa, lo cual se observa claramente en la Figura 4.19, por lo cual es claro que existe algún $t_2 > 0$ tal que $g_2(t_2) = 1$ y $g_1(t_2) < 0$, es decir, que (4.12) tiene solución y, además, $t_2 = t_2(c_1, c_2, b_0, q_{22})$. Para que el mismo t_2 sea solución de (4.11), debemos resolver (ver Figura 4.19)

$$s_2 = g_1(t_2) = -m_1. \quad (4.16)$$

Pero $s_2 = s_2(q_{12})$, por lo tanto, (4.16) tiene como solución

$$q_{12} = \frac{\alpha_1 b_0 + m_1 k_4}{c_1}.$$

Esto garantiza que existe t_2 que es solución de (4.11) y (4.12) simultáneamente.

De manera análoga, resolvamos las dos ecuaciones restantes. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \alpha_2 + r_1 \beta_2 > 0 \quad \text{y} \\ f_2'(0) &= -q_{12}(\alpha_0 c_2 - d_1) < 0. \end{aligned}$$

En la Figura 4.20, las gráficas de $f_1(t)$ y $f_2(t)$:

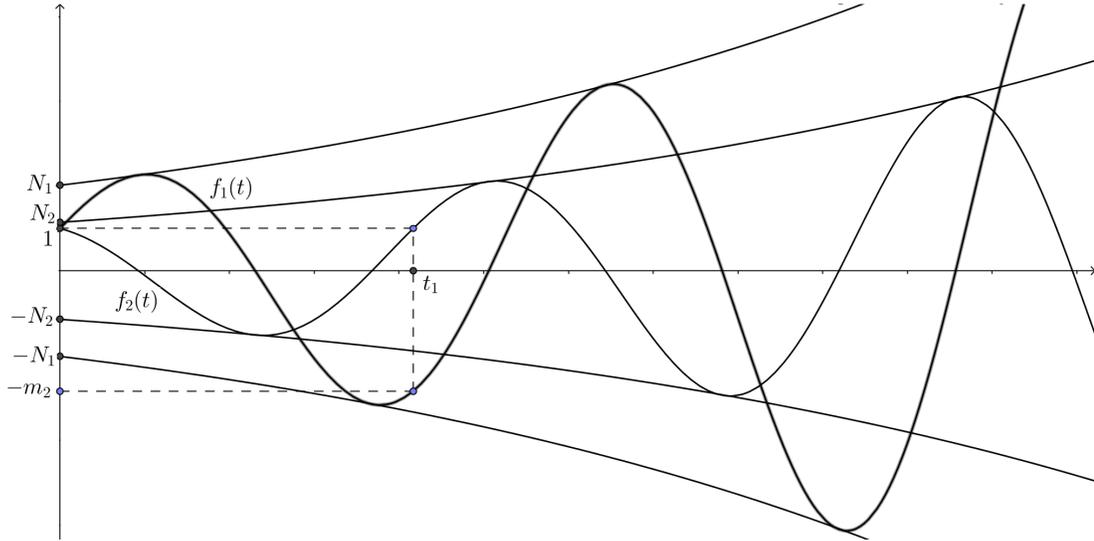


Figura 4.20: Gráfica de $f_1(t)$ y $f_2(t)$.

Por argumentos similares a los anteriores, tenemos que

$$f_1(t) = N_1 e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t + \rho_1), \quad (4.17)$$

$$f_2(t) = N_2 e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t + \rho_2), \quad (4.18)$$

por lo que,

$$\begin{aligned} |f_1(t)| &\leq |N_1| e^{\alpha_2 t} \quad \text{y} \\ |f_2(t)| &\leq |N_2| e^{\alpha_2 t}, \end{aligned}$$

donde

$$N_1 = \sqrt{1 + r_1^2} > 1 \text{ y}$$

$$N_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r_1}\right)^2} > 1.$$

De manera similar a lo anterior, podemos concluir que

$$f_1(t) = -N_1 e^{\alpha_2 t} \text{sen}(\beta_2 t + \rho_2) \quad (4.19)$$

y al comparar (4.18) y (4.19), vemos que los ceros de f_1 son los puntos de tangencia de f_2 con $N_2 e^{\alpha_2 t}$ y viceversa, lo que garantiza la existencia de una solución $t_1 = t_1(\alpha_0, d_1) > 0$ para (4.10). Ahora, para resolver (4.9) con dicho t_1 como solución, basta encontrar α_0 y d_1 tales que

$$s_1 = f_1(t_1) = -m_2,$$

con $m_2 = m_2(\alpha_0, d_1) > 0$. Es decir, encontrar α_0 y d_1 tales que cumplan la igualdad

$$-m_2 = \frac{k_1}{k_2} \iff$$

$$F(\alpha_0, d_1) = b_0(1 + m_2)(\alpha_0 + c_2) + 2(\alpha_0 c_2 - d_1)(q_{22} + m_2 q_{12}) = 0. \quad (4.20)$$

Utilizaremos el Teorema de la Función Implícita (ver Apéndice C) para resolver (4.20). Al inicio de la sección, demostramos la existencia de una solución particular de (4.20). Ahora bien,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, d_1) = b_0 \left((1 + m_2) + (\alpha_0 + c_2) \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_0} \right) + 2 \left((\alpha_0 c_2 - d_1) q_{12} \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_0} + (q_{22} + m_2 q_{12}) c_2 \right). \quad (4.21)$$

Obsérvese que $q_{22} + m_2 q_{12} < 0$ y $\frac{\partial m_2}{\partial \alpha_0} > 0$ en la solución particular, por lo tanto, $\frac{\partial F}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, d_1) > 0$, por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita.

De esta manera hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 1. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ d_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Si p_1 es un foco estable virtual en $x_1 < 0$ y p_2 es un foco inestable en $x_1 > 0$, entonces existe un ciclo límite.

Finalmente, para ilustrar la demostración anterior, procederemos a dar un ejemplo de un ciclo límite generado con valores numéricos para los parámetros de tal manera que las ecuaciones (4.9), (4.10), (4.11) y (4.12) son resueltas. Primeros fijemos los valores

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -0.5, \quad b_0 = 0.4 \quad \text{y} \quad q_{22} = -1.$$

Al dar estos cuatro parámetros, podemos escoger q_{12} tal que $t_2 \approx 2.25$, el cual es solución de (4.11) y (4.12). A continuación fijemos $\alpha_0 = 1$ y encontremos d_1 para obtener t_1 que resuelva las dos ecuaciones restantes. Para ello, hagamos

$$\begin{aligned} h_1 &= f_1(t_1) - s_2 = 0, \\ h_2 &= f_2(t_1) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Podemos utilizar una gráfica de t_1 vs d_1 para obtener una aproximación numérica para d_1 y t_1 (ver Figura 4.21).

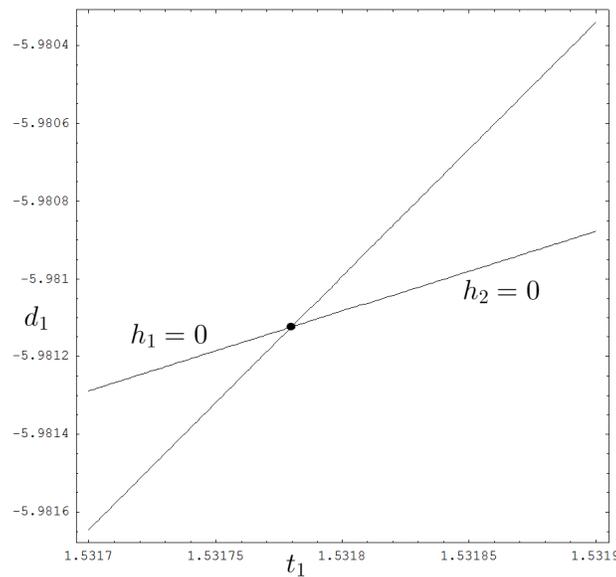


Figura 4.21: Gráfica de $h_1 = 0$ y $h_2 = 0$.

De la figura podemos obtener:

$$d_1 \approx -5.98113 \quad \text{y} \quad t_1 \approx 1.53178.$$

Con estos valores numéricos para todos los parámetros, podemos simular el ciclo límite que se genera (ver Figura 4.22).

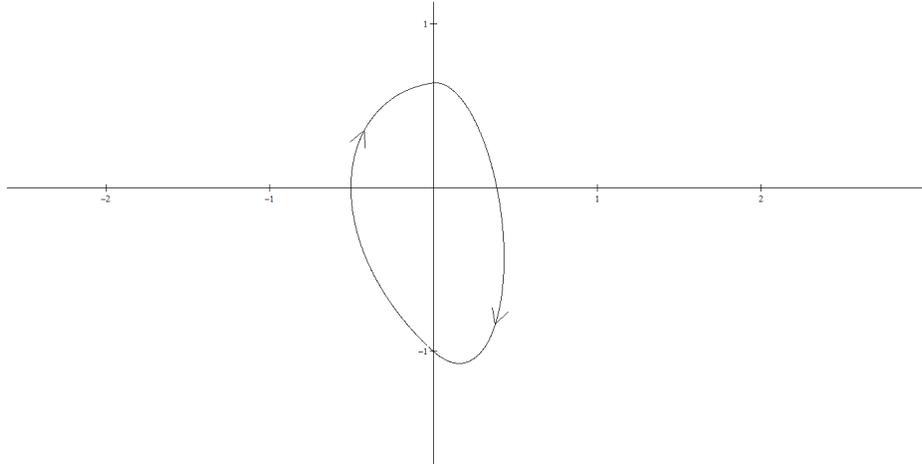


Figura 4.22: Ciclo límite simulado ($c_1 = -1$, $c_2 = -0.5$, $b_0 = 0.4$, $d_1 = -5.98113$, $\alpha_0 = 1$).

En la Figura 4.23 se verifica mediante simulación la estabilidad del ciclo límite.

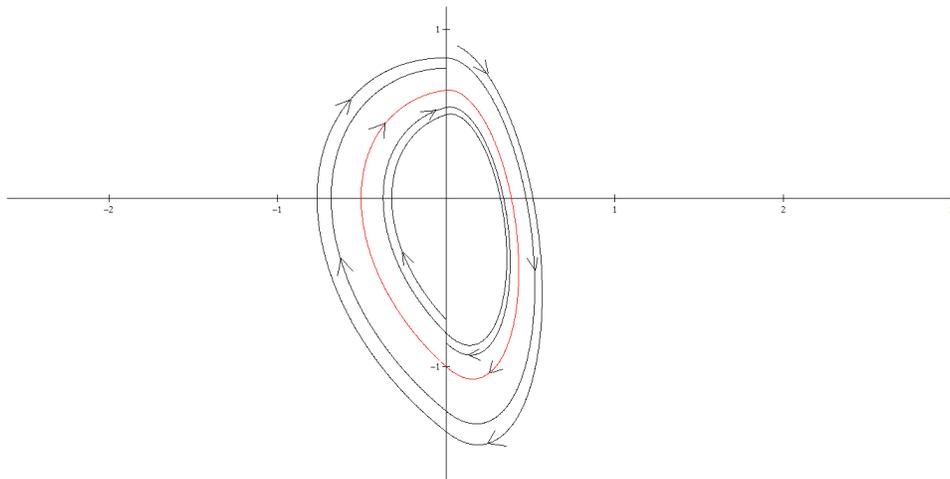


Figura 4.23: El ciclo límite simulado es estable.

4.2. n y $A_1^T n$ linealmente dependientes

En esta sección analizaremos la forma normal (3.15) exhibida en la sección 3.1. Debido a la dinámica que presenta este sistema, es posible observar la ocurrencia de la bifurcación silla-nodo, la cual presentaremos a continuación.

4.2.1. Bifurcación silla-nodo

Primeramente recordemos la estructura del sistema (3.15):

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{para } x_1 < 0 \\ \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ d_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{para } x_1 > 0 \end{cases}$$

En la sección 3.1 se aclaró que en este trabajo estudiaríamos el escenario en donde $\beta_1\beta_2 < 0$ para tener una sola recta L_1 ó L_2 en cada región delimitada por Σ , por lo que, al fijar c_2 , la dinámica en ambas regiones del plano queda determinada instantáneamente. Más aún, los únicos escenarios posibles son tener una silla en $x_1 < 0$ y un nodo en $x_1 > 0$, ó viceversa. Por ejemplo, si $c_2 < 0$ y $\beta_1 > 0$, entonces $\beta_2 < 0$, y así, p_1 es una silla, mientras que p_2 es un nodo. Por otro lado, si $c_2 < 0$, $\beta_1 < 0$ y $\beta_2 > 0$, entonces p_1 es un nodo y p_2 es una silla. Lo análogo ocurre si $c_2 > 0$.

Calculemos ahora los equilibrios en cada región: el equilibrio p_1 en $x_1 < 0$ es:

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{c_0}{\beta_1}, \\ p_{12} &= \frac{c_1 c_0}{\beta_1 c_2}. \end{aligned}$$

Para la región $x_1 > 0$, el equilibrio p_2 está dado por:

$$\begin{aligned} p_{21} &= -\frac{c_0}{\beta_2}, \\ p_{22} &= \frac{d_1 c_0}{\beta_2 c_2}. \end{aligned}$$

Observemos que las rectas L_1 y L_2 son invariantes y, además, debe darse que $c_2 \neq 0$. Sabemos también que

$$\sigma(A_1) = \{\beta_1, c_2\} \quad \text{y} \quad \sigma(A_2) = \{\beta_2, c_2\},$$

lo cual, al ser todos estos eigenvalores números reales, descarta inmediatamente la existencia de focos en este sistema. Además, los eigenvectores asociados a β_1, β_2 y c_2 respectivamente v_1, v_2 y v_3 son:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 - c_2}{c_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_2 - c_2}{d_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

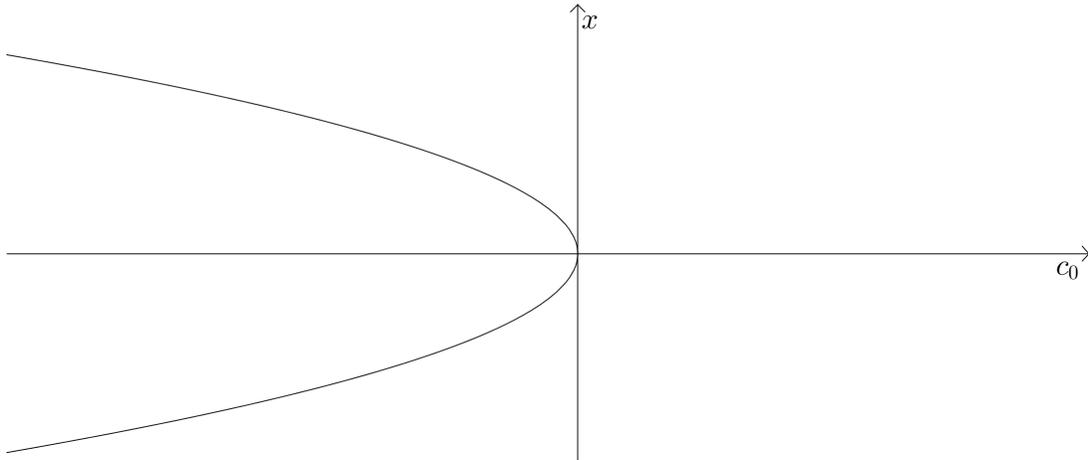


Figura 4.24: Existen dos equilibrios cuando $c_0 < 0$, un sólo equilibrio para $c_0 = 0$, el cual desaparece cuando $c_0 > 0$.

Mientras que el parámetro c_0 determina la virtualidad o la no-virtualidad de cada equilibrio, este también tiene un papel importante en la ocurrencia de la bifurcación silla-nodo. Es fácil observar que

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow 0, \\ p_2 &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $c_0 \rightarrow 0$. Además, al cambiar c_0 de signo, también se invierte la virtualidad de ambos equilibrios, es decir, si ambos equilibrios son virtuales, al cambiar de signo dicho parámetro, ambos equilibrios pasarán a ser no-virtuales y viceversa. Por ejemplo, si $\beta_1 < 0$ y $\beta_2 > 0$, entonces p_1 y p_2 son ambos equilibrios no-virtuales cuando $c_0 < 0$. Luego, a medida que $c_0 \rightarrow 0$, ambos equilibrios se acercan a 0 hasta colapsar en el origen para dar lugar a un sólo equilibrio cuando $c_0 = 0$. Después, cuando $c_0 > 0$, ambos equilibrios se vuelven virtuales, es decir, estos desaparecen. Esto se ilustra en la Figura 4.24. Análogamente, si fijamos $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$, tenemos que ambos equilibrios son virtuales cuando $c_0 < 0$ y también que estos se acercan a 0 a medida que lo hace c_0 , colapsando en el origen cuando $c_0 = 0$. Luego, si $c_0 > 0$, estos equilibrios se vuelven no-virtuales (ver Figura 4.25). En otras palabras, c_0 es el parámetro de la bifurcación silla-nodo que ocurre en este sistema. Así, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2. *Considere el sistema (3.15). Si $\beta_1\beta_2 < 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces ocurre la bifurcación silla-nodo en $c_0 = 0$.*

Ejemplo 6. *Tomemos $c_2 < 0, \beta_1 < 0$ y $\beta_2 > 0$, es decir, p_1 es un nodo estable y p_2 una silla. En las figuras 4.26, 4.27 y 4.28 se ilustra el retrato fase para el sistema con estas condiciones en función del signo de c_0 . Así, el diagrama de bifurcación para este ejemplo se ilustra en la Figura 4.29.*

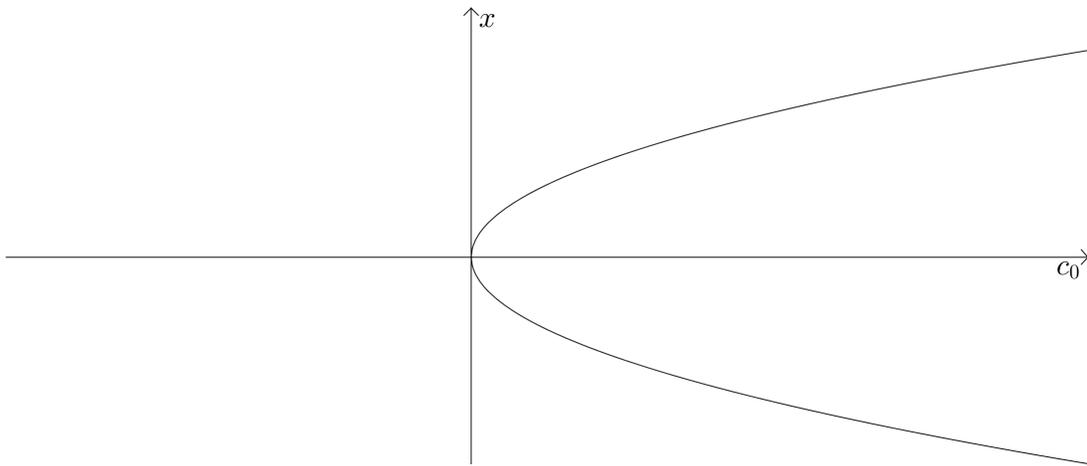


Figura 4.25: No hay equilibrios para $c_0 < 0$. Ambos colapsan en el origen cuando $c_0 = 0$ para volverse no-virtuales cuando $c_0 > 0$.

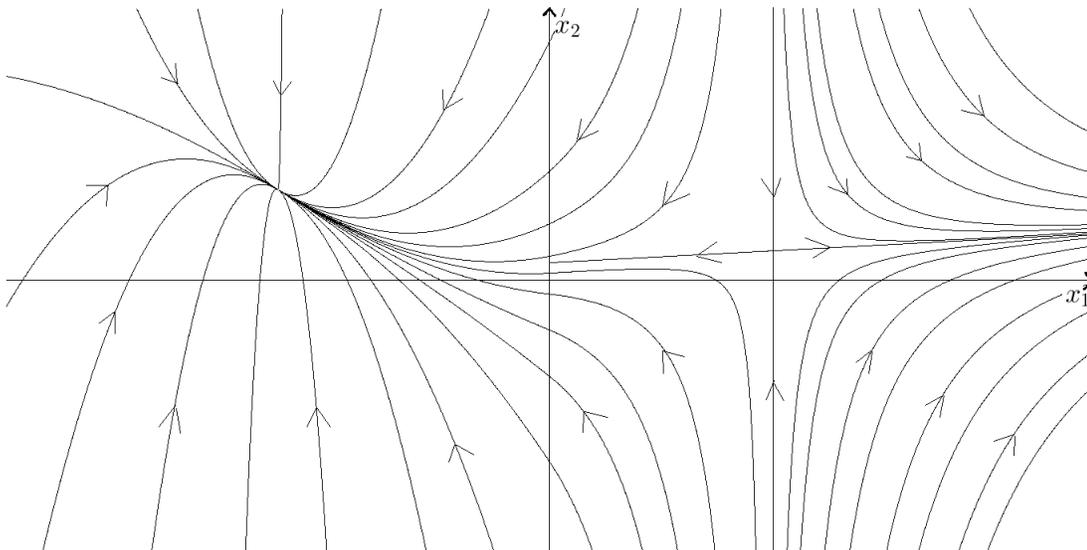
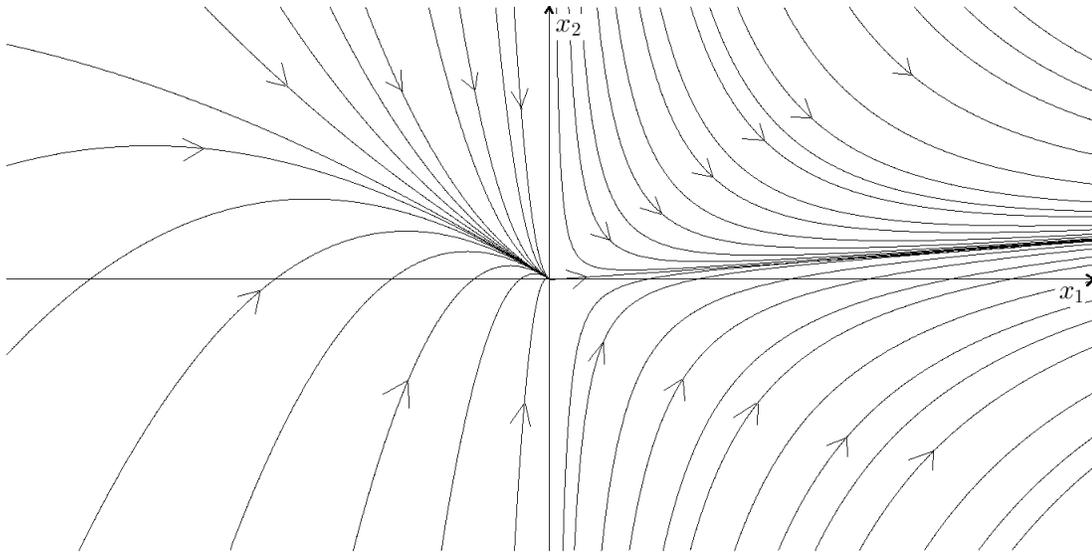
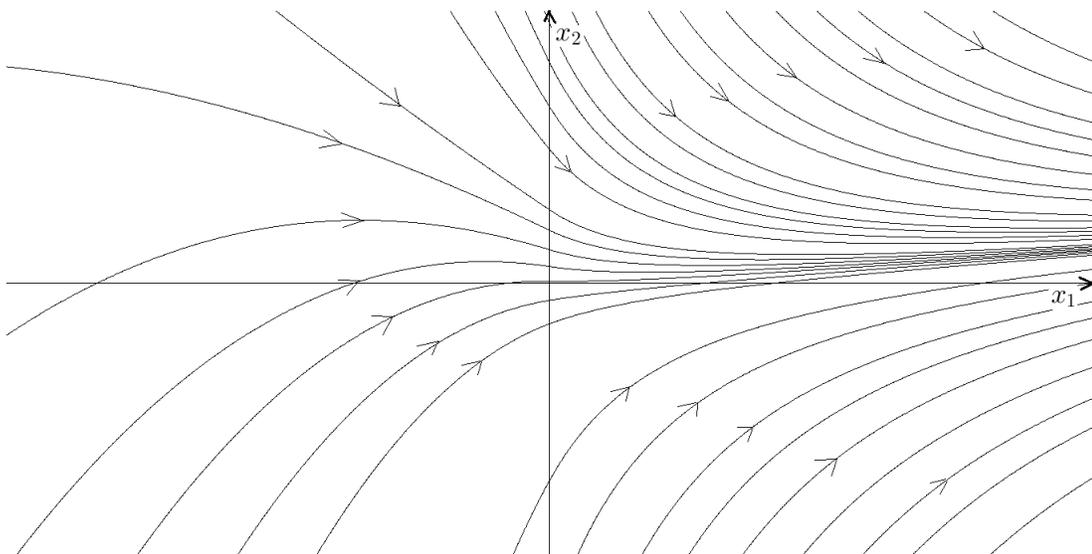


Figura 4.26: Retrato fase para $c_0 < 0$.

Figura 4.27: ($c_0 = 0$).Figura 4.28: ($c_0 > 0$).

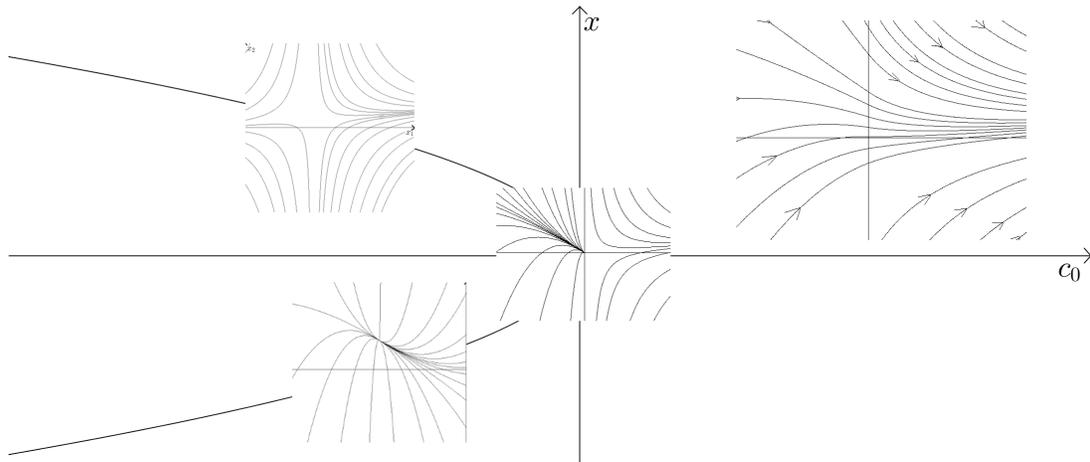


Figura 4.29: Diagrama de bifurcación para el ejemplo 6.

Ejemplo 7. Ahora hagamos $c_2 < 0, \beta_1 > 0$ y $\beta_2 < 0$. Tenemos así que p_1 es una silla y p_2 un nodo estable. De manera similar al ejemplo anterior, se ilustra el diagrama de bifurcación para este caso en la Figura 4.30.

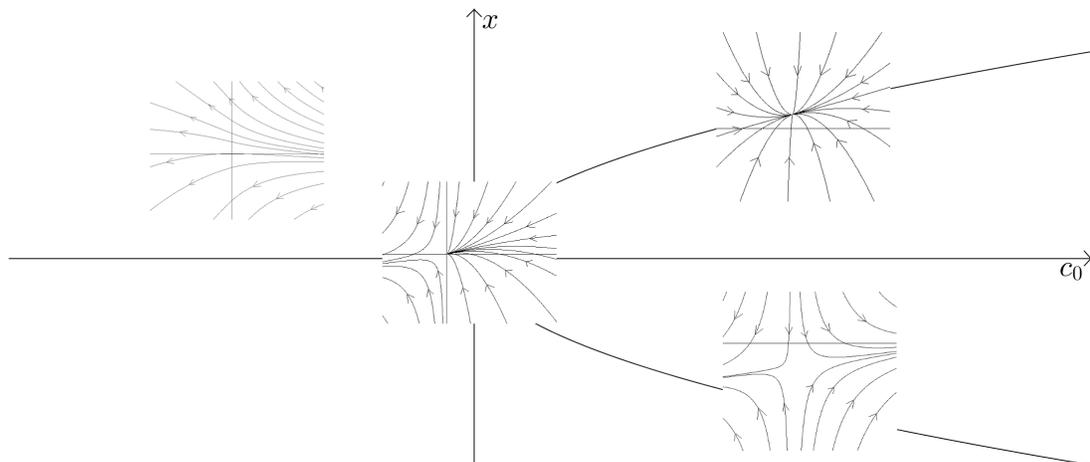


Figura 4.30: Diagrama de bifurcación para el ejemplo 7.

Apéndice A

Resultados de Ecuaciones Diferenciales

Clasificación de retratos fase de sistemas lineales

Sabemos que existen cuatro tipos diferentes de retratos fase para sistemas lineales: nodos, focos, centros y sillas. A continuación clasificamos cada uno de ellos (ver [5]):

Considere el siguiente sistema lineal simple en \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = Ax \tag{A.1}$$

y sean $\mu_1 = \text{tr}(A)$ y $\mu_2 = \det(A)$, entonces

1. Si $\mu_2 < 0$, entonces (A.1) tiene un punto silla en el origen.
2. Si $\mu_2 > 0$ y $\mu_1^2 - 4\mu_2 \geq 0$ entonces (A.1) tiene un nodo en el origen. Es estable si $\mu_1 < 0$ e inestable si $\mu_1 > 0$.
3. Si $\mu_2 > 0$, $\mu_1^2 - 4\mu_2 < 0$ y $\mu_1 \neq 0$, entonces (A.1) tiene un foco en el origen. Es estable si $\mu_1 < 0$ e inestable si $\mu_1 > 0$.
4. Si $\mu_2 > 0$ y $\mu_1 = 0$ entonces (A.1) tiene un centro en el origen.

El sistema no homogéneo

$$\dot{x} = Ax + b$$

es simplemente una traslación de (A.1).

Solución de sistemas lineales no homogéneos

Consideremos el sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax + b, \tag{A.2}$$

con $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$ y $|A| \neq 0$, la solución de este sistema puede calcularse de la siguiente manera:

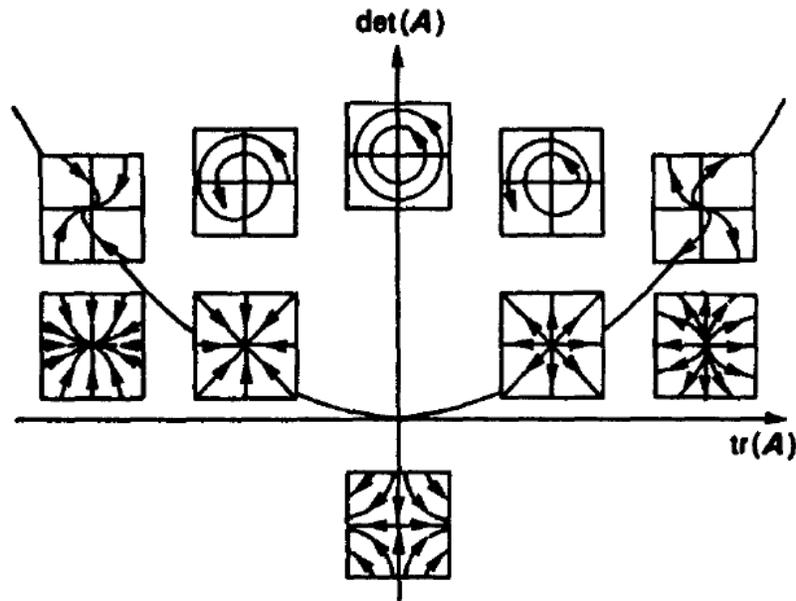


Figura A.1: Retratos fase del sistema (A.1) en función de la traza y el determinante de A .

Sabemos que, como $|A| \neq 0$, entonces existe solamente un equilibrio \tilde{x} , el cual está dado por

$$\tilde{x} = -A^{-1}b.$$

“Factoricemos” A en (A.2) para escribir \dot{x} como

$$\dot{x} = A(x + A^{-1}b).$$

Ahora, utilicemos el cambio de variable

$$y = x + A^{-1}b, \tag{A.3}$$

y derivemos esta expresión para obtener

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}, \\ \dot{y} &= Ay. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Como sabemos, la solución de (A.4) que parte de la condición inicial y_0 está dada por

$$y = e^{tA}y_0.$$

Podemos escribir la solución anterior en términos de x para obtener la solución del sistema original (A.2):

$$x(t) + A^{-1}b = e^{tA}(x_0 + A^{-1}b),$$

por lo que

$$x(t) = e^{tA}(x_0 + A^{-1}b) - A^{-1}b$$

y escribiendo esto último en términos de \tilde{x} , tenemos

$$x(t) = e^{tA}(x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x} \tag{A.5}$$

para la condición inicial $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$.

Matriz Exponencial cuando existe un foco

Consideremos la matriz A tal que

$$A \sim J,$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y, además, los valores propios λ_1 y λ_2 de A son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta, \end{aligned}$$

cuyos vectores propios respectivos son

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos también que existe una matriz P invertible de la forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

tal que $A = PJP^{-1}$, por lo que podemos calcular e^{tA} como

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1},$$

donde

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\operatorname{sen} \beta t \\ \operatorname{sen} \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Órbitas elípticas de un centro

En este apartado probaremos que las órbitas de un centro (en particular el sistema (4.1)) son elípticas. Consideremos el sistema de la forma

$$\dot{x} = Jx, \quad (\text{A.6})$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Observemos que $\sigma(J) = \{\pm i\omega\}$, por lo que, como sabemos, las soluciones de este sistema forman un centro. Dichas soluciones están dadas por

$$x(t) = e^{tJ} x_0.$$

Además, también sabemos que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\operatorname{sen} \omega t \\ \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Suponiendo que $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$, con $x_{01}, x_{02} \in \mathbb{R}$, entonces escribimos $x(t)$ como

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\operatorname{sen} \omega t \\ \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$x_1(t) = x_{01} \cos \omega t - x_{02} \operatorname{sen} \omega t,$$

$$x_2(t) = x_{01} \operatorname{sen} \omega t + x_{02} \cos \omega t.$$

Luego,

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_{01}^2 + x_{02}^2. \quad (\text{A.7})$$

Podemos reescribir (A.7) haciendo $r^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2$, de tal manera que la conclusión a la que llegaremos se vea de una forma más clara:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Como podemos ver, las soluciones $x(t)$ son circunferencias para cada t . Esto prueba que las órbitas del centro en el sistema (A.6) son circunferencias.

Ahora pasaremos a explorar el sistema de la forma

$$\dot{x} = Ax, \quad (\text{A.8})$$

donde $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $A \sim J$, con J definida como en (A.6). Por esta similitud sabemos que existe P invertible tal que $A = PJP^{-1}$. Consideremos ahora el cambio de coordenadas

$$y = P^{-1}x, \quad (\text{A.9})$$

también con $|P^{-1}| \neq 0$. Derivemos ahora y para obtener el nuevo sistema de manera explícita:

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= P^{-1}\dot{x}, \\
 &= P^{-1}(Ax), \\
 &= P^{-1}A(Py), \\
 &= (P^{-1}AP)y, \\
 \dot{y} &= Jy.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Usando el cambio de coordenadas (A.9), hemos transformado el sistema (A.8) en otro de la forma (A.6), el cual sabemos que tiene un único equilibrio, que es un centro. Por lo expuesto anteriormente, sabemos también que las órbitas de dicho centro son circunferencias y que, para la condición inicial dada por $y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$ se cumple

$$y_1^2 + y_2^2 = y_{01}^2 + y_{02}^2. \tag{A.11}$$

Pero lo que nos interesa es determinar el comportamiento de las órbitas del centro en el sistema (A.8). Para lograr esto, el objetivo es utilizar la relación que existe entre (A.8) y (A.10), establecida mediante P .

Consideremos de nuevo P^{-1} y llamemos $w_1^T = (w_{11} \ w_{12})$ y $w_2^T = (w_{21} \ w_{22})$ a su primer y segundo renglón respectivamente. Entonces, por (A.9), tenemos

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^T x \\ w_2^T x \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
 y_1 &= w_1^T x, \\
 y_2 &= w_2^T x.
 \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 w_1^T x &= (w_{11} \ w_{12}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= w_{11}x_1 + w_{12}x_2,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 w_2^T x &= (w_{21} \ w_{22}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= w_{21}x_1 + w_{22}x_2
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$y_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2, \tag{A.12}$$

$$y_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2. \tag{A.13}$$

Sustituyendo (A.12) y (A.13) en (A.11) y haciendo $r_0^2 = y_{01}^2 + y_{02}^2$, obtenemos

$$(w_{11}x_1 + w_{12}x_2)^2 + (w_{21}x_1 + w_{22}x_2)^2 = r_0^2.$$

Desarrollando esta expresión y reacomodando términos, obtenemos una ecuación cuadrática en x_1 y x_2 :

$$(w_{11}^2 + w_{21}^2)x_1^2 + 2(w_{11}w_{12} + w_{21}w_{22})x_1x_2 + (w_{12}^2 + w_{22}^2)x_2^2 - r_0^2 = 0. \quad (\text{A.14})$$

Consideremos ahora el indicador I de esta ecuación. Haciendo los cálculos correspondientes, obtenemos que

$$I = -4(w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12})^2.$$

Notemos que $I \neq 0$, ya que, para que esto se dé, se debe tener que

$$w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12} = 0,$$

lo cual no es posible, ya que

$$w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12} = |P^{-1}| \neq 0.$$

Por lo tanto concluimos que $I < 0$ y así, (A.14) es la ecuación de una elipse. Con esto hemos probado que las órbitas del centro en el sistema (A.8) son, en general, elipses.

Volvamos ahora al sistema (4.1). Sabemos que p_1 es un centro con órbitas elípticas, pero pasemos a investigar bajo qué condiciones estas órbitas serán circunferencias. De (A.14) podemos observar que, para que esta sea la ecuación de una circunferencia, se debe tener que

$$w_{11}w_{12} + w_{21}w_{22} = 0,$$

y también que

$$w_{11}^2 + w_{21}^2 = w_{12}^2 + w_{22}^2. \quad (\text{A.15})$$

Sabemos que $\sigma(A_1) = \{\lambda_{11} = \sqrt{-c_1}i, \lambda_{12} = -\sqrt{-c_1}i\}$ y que el vector propio v asociado a λ_{11} es

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-c_1} \end{pmatrix} i,$$

por lo que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{-c_1} & 0 \end{pmatrix},$$

y así,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{-\sqrt{-c_1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned}w_{11} &= 0, \\w_{12} &= \frac{1}{-\sqrt{-c_1}}, \\w_{21} &= 1, \\w_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Sustituyendo estas cuatro igualdades en (A.15), tenemos

$$c_1 = -1,$$

es decir, las órbitas del centro en $x_1 < 0$ son circunferencias para $c_1 = -1$ y elipses para $c_1 \neq -1$.

Apéndice B

Argumentos trigonométricos

Sabemos que

$$\begin{aligned}g_1(t) &= M_1 e^{\alpha_1 t} (\cos(\beta_1 t + \phi_1)) \\ &= M_1 e^{\alpha_1 t} (\cos(\beta_1 t) \cos(\phi_1) - \operatorname{sen}(\beta_1 t) \operatorname{sen}(\phi_1))\end{aligned}$$

sin embargo, por (4.11), tenemos que

$$\begin{aligned}\cos \phi_1 &= M_1 \quad \text{y} \\ \operatorname{sen} \phi_1 &= -M_1 r_2,\end{aligned}$$

por lo que $\tan \phi_1 = -r_2 > 0$. Similarmente,

$$\begin{aligned}g_2(t) &= M_2 e^{\alpha_2 t} (\cos(\beta_2 t + \phi_2)) \\ &= M_2 e^{\alpha_2 t} (\cos(\beta_2 t) \cos(\phi_2) - \operatorname{sen}(\beta_2 t) \operatorname{sen}(\phi_2)),\end{aligned}$$

y por (4.12), tenemos que

$$\begin{aligned}\cos \phi_2 &= M_2 \quad \text{y} \\ \operatorname{sen} \phi_2 &= M_2 \frac{1}{r_2},\end{aligned}$$

por lo que $\tan(\phi_2) = \frac{1}{r_2} < 0$. Luego, sabemos que

$$\tan(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}{1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2},$$

pero $\tan \phi_1 \tan \phi_2 = -1$, por lo que

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Análogamente, puede calcularse que

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Apéndice C

Teorema de la Función Implícita

El siguiente teorema fue extraído de [7] y se incluye sin demostración.

Teorema 3 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a (x_0, y_0) y $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $M = D_y f(x_0, y_0)$. Si $\det(M) \neq 0$, entonces existe un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 y un conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a y_0 , con la siguiente propiedad: para cada $x \in A$, existe una única $g(x) \in B$ tal que $f(x, g(x)) = 0$. La función g es diferenciable.*

Bibliografía

- [1] Freire, Emilio. Bifurcations Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones. *International Journal of Bifurcations and Chaos*. 1998.
- [2] Kuznetsov, Yu. A., Sinaldi, S., Gragnani, A. One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos*. 2002.
- [3] Guardia, M., Seara, T.M., Teixeira, M.A. Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations*. 2011.
- [4] Di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., Kowalczyk, P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems Theory and Applications. Springer, 2008.
- [5] Verduzco, F., Leyva, H. Notas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II.
- [6] Llibre, J., Novaes, Douglas D., Teixeira, M.A. Limit Cycles Bifurcating from the Periodic Orbits of a Discontinuous Piecewise Linear Differentiable Center with Two Zones. *International Journal of Bifurcations and Chaos*. 2014.
- [7] Spivak, M. Calculus on Manifolds. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.