



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Un Análisis y Aplicación de la Bifurcación
Takens-Bogdanov

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Ana Luisa Llanes Luna

Director de Tesis: Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro

Hermosillo, Sonora, México, Diciembre, 2014

SINODALES

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Horacio Leyva Castellanos
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Una persona usualmente se convierte en aquello que él cree que es. Si yo sigo diciéndome a mí mismo que no puedo hacer algo, es posible que yo termine siendo incapaz de hacerlo. Por el contrario si yo tengo la creencia que sí puedo hacerlo, con seguridad yo adquiriré la capacidad de realizarlo aunque no la haya tenido al principio

Mahatma Gandhi

Dedicada

*A la memoria de mi Padre
Sr. Francisco Javier Llanes Tanori*

*A mi Madre
Sra. María Felipa Luna*

*A mi hermano
Javier Alejandro Llanes Luna*

*A mi hijo
Francisco Javier Lizarraga Llanes*

A Dios

Agradecimientos

Agradezco a cada uno de los sinodales, Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro, Dr. Fernando Verduzco González, Dr. Daniel Olmos Liceaga, M.C Horacio Leyva Castellanos, gracias por el tiempo que han dedicado en la revisión de este trabajo de tesis, gracias por los comentarios y sugerencias, gracias por el apoyo recibido no solo en la culminación de este trabajo sino a lo largo de mi estancia en la Lic. en Matemáticas.

Agradezco a Dios por permitirme culminar una más de mis metas, gracias por ser ese compañero que estuvo en las noches de desvelo y en los días de angustia, gracias por no dejarme caer y sobre todo gracias por permitirme llegar a este momento. Yo sin ti nada soy.

Agradezco a esa persona que me ha demostrado que nada es imposible, Mi madre, ella que con su esfuerzo, paciencia y mucho amor me ha llevado por el mejor de los caminos. Gracias por todo tu apoyo. Te amo.

A Carmen Luna, no solo mi tía, mi segunda madre, gracias por siempre estar ahí y apoyarnos tanto. Te quiero mucho.

A mi hermano, por ser el mejor de los compañeros. Por demostrarme que si nos proponemos algo, ese algo se puede conseguir con constancia, disciplina y mucha paciencia. Te quiero mucho.

A mi Director de Tesis, mentor y profesor, Dr. Francisco A. Carrillo Navarro. Gracias por ser el guía no solo en este trabajo, también por serlo en mi incursión al fascinante mundo de los sistemas dinámicos. Gracias por todo el tiempo dedicado, no sólo a la preparación y revisión de este trabajo, sino también en el apoyo brindado durante la Licenciatura. Ha sido un gran honor trabajar con usted y una bendición para mi conocerlo. Lo admiro mucho, siento una gran cariño y respeto por usted.

A la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, mi tutora, mi profesora, mi amiga. Mil gracias por cada una de sus palabras, gracias por otorgarme la confianza y sobre todo su cariño. La quiero mucho.

A mis profesores de la licenciatura, muchísimas gracias por su apoyo incondicional, por su paciencia y por ser parte importante de esta meta.

A mis amigas y amigos, faltan palabras y espacio para poder agradecer a cada uno de ustedes. Gracias por ser un gran apoyo, por su tiempo, por compartir experiencias, por todos y cada uno de los momentos que hemos vivido juntos en esta etapa. Gracias por ser y estar ahí.

Por ultimo pero no menos importantes, agradezco a mi Padre, a pesar de tu ausencia física, estoy plenamente segura que tú has sido ese ángel que me ha acompañado en mi caminar. Gracias por todo el amor que me demostraste.

A mi hijo, gracias por llegar a mi vida y ser el motivo principal para la culminación de este trabajo. Te amo infinitamente.

Gracias a todas esas personas que directa o indirectamente han formado parte de este trabajo.

Ana Luisa Llanes Luna
Diciembre de 2014

Índice general

1. Preliminares	3
1.1. <i>Teoría de la variedad central</i>	3
1.1.1. <i>Campos vectoriales no parametrizados</i>	3
1.1.2. <i>Campos vectoriales parametrizados</i>	5
1.2. <i>Formas Normales</i>	6
1.3. <i>Campos Vectoriales Equivalentes y Conjugados</i>	7
1.4. <i>Bifurcaciones de codimensión uno</i>	8
1.4.1. <i>Bifurcación silla-nodo</i>	8
1.4.2. <i>Bifurcación de Hopf</i>	9
1.4.3. <i>El primer coeficiente de Lyapunov</i>	11
1.5. <i>Deformación Versal</i>	12
1.6. <i>Teoría de Melnikov</i>	13
1.6.1. <i>Bifurcación homoclínica</i>	15
2. La bifurcación Takens-Bogdanov	17
2.1. <i>La deformación versal de Guckenheimer y Holmes</i>	18
2.1.1. <i>Bifurcación silla-nodo</i>	19
2.1.2. <i>Bifurcación de Hopf</i>	21
3. Análisis de la bifurcación doble cero de Y. A. Kuznetsov	23
3.1. <i>Primer transformación de coordenadas</i>	23
3.2. <i>Segunda transformación de coordenadas</i>	26
3.3. <i>Una traslación en las coordenadas</i>	28
3.4. <i>Segunda reducción del sistema</i>	29

3.5.	<i>Una reparametrización final del tiempo. Estableciendo nuevos parámetros</i>	31
3.6.	<i>Diagrama de bifurcación de la deformación versal</i>	33
4.	La bifurcación doble cero mediante formas bilineales	35
4.1.	<i>Planteamiento del problema</i>	35
4.2.	<i>Dinámica en la variedad central</i>	36
4.2.1.	<i>Forma de Jordan</i>	36
4.2.2.	<i>Cambio de coordenadas</i>	37
4.3.	<i>Teorema Principal</i>	39
4.3.1.	<i>Equivalencia topológica entre la variedad central y la deformación versal</i>	39
5.	La equivalencia entre dos análisis: Kuznetsov y Formas bilineales	49
5.0.2.	<i>Teorema principal</i>	54
6.	Un problema de aplicación	57
6.1.	<i>Descripción del sistema</i>	57

Introducción

La teoría de bifurcaciones es un campo matemático que se centra en el estudio de los cambios que presenta la estructura cualitativa o topológica del comportamiento de un conjunto de ecuaciones. Muchas personas nos hemos preguntado ¿qué papel o importancia tiene esta teoría en la vida cotidiana?, esta teoría tiene una importancia práctica muy importante en ingeniería, física, biología, química y en la misma matemática. Tal vez alguien se ha cuestionado el hecho de que algunas poblaciones (animales, bacterias, virus, etc.) presentan un patrón o un ciclo en cuanto a su forma de reproducción, vida o muerte, y esta teoría es de mucha importancia ya que nos permite reconstruir el pasado o el futuro de la dinámica de dicha población y de una manera muy acertada. Establezcamos de manera formal que es una bifurcación.

Formalmente, una bifurcación se da cuando una pequeña variación en los valores de los parámetros de un sistema, conocidos como parámetros de bifurcación, causa un cambio cualitativo o topológico en su comportamiento. Existen dos tipos de bifurcaciones, *bifurcaciones locales* y *bifurcaciones globales*. Las bifurcaciones locales pueden ser analizadas mediante cambios en las propiedades de la estabilidad local, conforme los parámetros varían de un valor a otro valor. Las bifurcaciones de tipo local más conocidas son: *silla-nodo*, *pitchfork*, *transcrítica* y *la Hopf*. Por otra parte, las bifurcaciones globales se pueden observar en mayores conjuntos invariantes del sistema, los cuales chocan entre ellos o con los puntos de equilibrio del sistema. Por lo cual no pueden ser detectados de forma exclusiva mediante un análisis de los puntos de equilibrio. Las bifurcaciones globales más conocidas son: *la homoclínica*, *la heteroclínica* y *la de período infinito*.

Nosotros centraremos nuestra atención en el estudio de la bifurcación Takens-Bogdanov, también conocida como la doble cero, es una bifurcación de codimensión dos, es decir, que basta con variar dos de sus parámetros para que dicha bifurcación pueda ocurrir. Lleva el nombre de Rifkat Bogdanov y Floris Takens, que simultáneamente pero de forma independiente encontraron una deformación versal de esta bifurcación.

Un sistema $\dot{x} = f(x)$ experimenta esta bifurcación en un punto de equilibrio $x = 0$, si la linealización del sistema alrededor de este punto de equilibrio, tiene un valor propio cero de multiplicidad dos y el resto de los valores propios tienen parte real diferente de cero.

Tres bifurcaciones de codimension uno se dan alrededor del punto de bifurcación y éstas son: La bifurcación silla-nodo, la bifurcación de Hopf y la bifurcación Homoclínica.

El objetivo de este trabajo es demostrar la equivalencia entre dos desarrollos de la familia bi-paramétrica que “desdobla” a la bifurcación Takens-Bogdanov. Los trabajos que se estudiaran a continuación son, el análisis realizado por Yuri A. Kuznetsov, en su libro *Elements of Applied Bifurcation Theory* ([1]) para un campo no lineal en \mathbb{R}^2 , y el otro es el análisis hecho por Fco. Armando Carrillo, et. al en [2] y [3], para un campo vectorial en \mathbb{R}^n . Dicha equivalencia se demuestra para $n = 2$.

Una vez establecido el objetivo de este trabajo, de manera general, el texto consta de seis capítulos organizados de la siguiente manera: en el Capítulo 1 *Preliminares* abordamos conceptos matemáticos que serán de gran ayuda para poder establecer resultados y definiciones que se usaran en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 *La bifurcación Takens-Bogdanov* se muestra el estudio de esta bifurcación, realizado por Guckenheimer y Holmes en [6], la deformación versal que el presenta, así como los retratos fase del sistema analizado en [5].

En los Capítulos 3 y 4 *Análisis de la bifurcación doble cero de Y. A. Kuznetsov, Análisis de la bifurcación doble cero mediante formas bilineales* respectivamente, analizamos los resultados de interés, es decir, los teoremas que ambos autores nos presentan. En nuestro trabajo presentamos cálculos y observaciones que ellos omiten en su trabajo, estos cálculos y observaciones serán de gran utilidad en el capítulo 5, ya que éstos nos ayudaran a demostrar la equivalencia de estos resultados.

En el Capítulo 5, el cual es el capítulo central de esta tesis, se presenta el resultado más importante, la equivalencia entre los teoremas que anteriormente se estudiaron. Con una serie de cálculos, se demuestra que efectivamente los teoremas son equivalentes.

Por último, con el objetivo de complementar la información presentada en el cuerpo de este trabajo, en el capítulo 6 se presenta un problema de aplicación, en el cual se demuestra analíticamente que dicho problema experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov, para esto hacemos uso del teorema principal del capítulo 4, además se presentan las simulaciones del sistema elaboradas en el software Maple.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan una serie de conceptos y resultados que serán de gran utilidad en los capítulos siguientes de este estudio. En su mayoría, dichos resultados son extraídos de [3].

1.1. Teoría de la variedad central

1.1.1. Campos vectoriales no parametrizados

Consideremos un campo vectorial de la forma siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y), \\ \dot{y} &= By + g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= 0, & Df(0, 0) &= 0 \\ g(0, 0) &= 0, & Dg(0, 0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

En lo anterior, A es una matriz $c \times c$ que tiene valores propios con parte real cero, B es una matriz $s \times s$ que tiene valores propios con parte real negativa, y f y g son funciones C^r ($r \geq 2$).

Definición 1.1.1. Una variedad invariante se llama **Variedad Central** de (1.1) si puede ser representada de manera local como

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), \|x\| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

para δ suficientemente pequeña.

Observación 1.1.1. Las condiciones $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ implican que $W_{loc}^c(0)$ es tangente al eigenespacio central E^c en $(x, y) = (0, 0)$.

A continuación se enuncian tres teoremas, los cuales se demuestran en [4]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

Teorema 1.1.1. *Existe una C^r variedad central para el sistema (1.1). La dinámica del sistema (1.1), restringida a la variedad central, está dada, para u suficientemente pequeña, por el siguiente sistema c -dimensional*

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^c. \quad (1.3)$$

El resultado anterior establece que la dinámica de (1.3) cerca de $u = 0$ determina la dinámica de (1.1) cerca de $(x, y) = 0$.

Teorema 1.1.2. *(i) Supongamos que $u = 0$ es una solución estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.3); entonces $(x, y) = 0$ es una solución estable (asintóticamente estable) (inestable) de (1.1).*

(ii) Supongamos que $u = 0$ es una solución estable de (1.3). Entonces si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.1) con $(x(0), y(0))$ suficientemente pequeño, entonces existe una solución $u(t)$ de (1.3) de modo que si $t \rightarrow \infty$ entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{\gamma t}), \\ y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{\gamma t}), \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es constante.

Observación 1.1.2. *Dicho en otras palabras, lo que nos asegura el teorema anterior es que la solución $u(t)$ del sistema (1.3), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.1), sobre el eigenespacio $E^c \cong \mathbb{R}^k$*

El último teorema proporciona un método para aproximar la función $h(x)$, cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciar dicho teorema, encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya incógnita es la función $h(x)$. Sea $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c$, luego, se cumple que $y(t) = h(x(t))$, y derivando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (1.4)$$

Todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (1.1), entonces, la ecuación (1.4) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$N(h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0. \quad (1.5)$$

Luego, el problema es encontrar $h(x)$ tal que satisfaga la ecuación (1.5), a esta ecuación se le conoce como *ecuación homológica*. Encontrar la solución de esta ecuación en derivadas parciales es en general más difícil que resolver el sistema (1.1), sin embargo, el teorema siguiente nos permitirá aproximar la solución de (1.5) con grado de precisión deseado.

Teorema 1.1.3. *Sea $\phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$ de clase C^1 , con $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces*

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q), \quad \text{cuando } x \rightarrow 0.$$

1.1.2. Campos vectoriales parametrizados

Consideremos un sistema no lineal parametrizado, escrito en su forma de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.6)$$

con $(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p$, donde A posee valores propios con parte real cero y B posee valores propios con parte real negativa, con $f(0) = Df(0) = 0$ y $g(0) = Dg(0) = 0$. Supongamos que $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ es un vector de estados, luego podemos reescribir (1.6) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.7)$$

llamado el *sistema suspendido*, que a su vez los reescribiremos de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Entonces, tenemos un eigenspacio central de dimensiones $c + p$, por lo tanto existe una función $y = h(x, \varepsilon)$ cuya gráfica es la variedad central, localmente alrededor del origen $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$, del sistema (1.8). Luego, la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

y la ecuación (1.5) para determinar $h(x, \varepsilon)$ se reduce a

$$\mathcal{N}(h(x, \varepsilon)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, \varepsilon)(Ax + f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon)) - Bh(x, \varepsilon) - g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0. \quad (1.10)$$

1.2. Formas Normales

El método de Formas normales proporciona una manera de encontrar un sistema de coordenadas en la que un sistema dinámico toma su forma “más simple”. En dicho método tres características deberán ser evidentes:

1.- El método es local en el sentido de que las transformaciones de coordenadas se generan en una vecindad de una solución conocida. Para nuestros propósitos, la solución conocida será un punto de equilibrio.

2.- En general, las transformaciones de coordenadas serán funciones no lineales de las variables dependientes. Sin embargo, el punto importante es que estas transformaciones de coordenadas se encuentran al resolver una serie de problemas lineales.

3.- La estructura de la forma normal está enteramente determinado por la naturaleza de la parte lineal del campo vectorial.

Dado un sistema no lineal

$$\dot{x} = X(x),$$

con $X(0) = 0$, debemos encontrar un cambio de coordenadas $x = y + h(y)$ tal que el sistema en las nuevas coordenadas este dada en su expresión “más simple”.

Supongamos que el campo $X(x)$ ha sido desarrollado en serie de Taylor alrededor del equilibrio $x = 0$, y que, además, su parte lineal se encuentra en forma de Jordan,

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots, \quad (1.11)$$

donde $F_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una campo vectorial cuyos elementos son polinomios homogéneos de grado r . Supongamos que el campo $X(x)$ posee términos no lineales de grado r en adelante, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots \quad (1.12)$$

Considere el cambio de coordenadas

$$x = y + h_r(y), \quad (1.13)$$

donde $h_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , tal que $\|h_r(y)\| \ll 1$. La idea es encontrar h_r tal que el sistema (1.12) en nuestras nuevas coordenadas no posea términos de grado r . Derivando (1.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y))\dot{y}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

pero en $I + Dh_r(y)$ tenemos que $\|Dh_r y\| < 1$ ¹, entonces es una matriz invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots,$$

¹Aquí $\|\cdot\|$ representa a la norma euclidiana, es decir, $\|A\| = \sqrt{|\lambda|}$, donde λ es el valor propio de A .

luego, de (1.14) se sigue que

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1}\dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots).\end{aligned}$$

Pero $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y)$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(J(y + h_r(y)) + F_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1})) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1})\end{aligned}$$

donde $\tilde{F}_r(y) = F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy$.

Observación 1.2.1. *El campo vectorial $X(x)$ posee términos no lineales a partir de orden r , entonces el cambio de coordenadas $x = y + h_r(y)$ produce un nuevo campo vectorial que posee también términos no lineales a partir de orden r .*

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$. Considere el espacio vectorial H_r de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , y sea $L_J : H_r \rightarrow H_r$ el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y).$$

Tal operación se conoce como el *corchete de Lie* de los campos vectoriales Jy y $h_r(y)$. Para esto basta con probar que L_J es invertible, ya que $\tilde{F}_r = 0$ si y solo si $h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$.

1.3. Campos Vectoriales Equivalentes y Conjugados

Sean

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.16)$$

dos campos vectoriales C^r ($r \geq 1$) definidos en \mathbb{R}^n (o un conjunto abierto lo suficientemente grande en \mathbb{R}^n).

Definición 1.3.1. *Las dinámicas generadas por los campos vectoriales f y g se dice que son C^k equivalentes ($k \leq r$), si existe un difeomorfismo $h \in C^k$ el cual toma órbitas del flujo generado por f , $\phi(t, x)$, en órbitas del flujo generado por g , $\varphi(t, y)$, preservando la orientación pero no necesariamente la parametrización en el tiempo. Si h preserva además la parametrización en el tiempo, entonces las dinámicas generadas por f y g se dice que son C^k conjugadas.*

Observación 1.3.1. *El término “preservando la orientación” en la definición anterior refiere al hecho de que la dirección del movimiento no tiene cambios a lo largo de una órbita bajo C^k equivalencia.*

A continuación, enunciaremos algunas de las consecuencias en las dinámicas de los campos vectoriales de la definición 1.3.1. Los enunciados se darán en forma de proposiciones cuyas demostraciones se pueden estudiar en [5].

Proposición 1.3.1. *Supongamos que f y g son C^k conjugados; entonces*

i) Puntos fijos de f son mapeados en puntos fijos de g ;

ii) Órbitas T -periódicas de f son mapeados en órbitas T -periódicas.

Proposición 1.3.2. *Supongamos que f y g son C^k conjugados ($k \geq 1$) y $f(x_0) = 0$; entonces $Df(x_0)$ tiene los mismos valores propios que $Dg(h(x_0))$.*

Proposición 1.3.3. *Supongamos que f y g son C^k equivalentes; entonces*

i) Puntos fijos de f son mapeados en puntos fijos de g ;

ii) Órbitas periódicas de f son mapeadas en órbitas periódicas de g , pero los períodos no necesariamente son iguales.

Proposición 1.3.4. *Supongamos que f y g son C^k equivalentes ($k \geq 1$) y $f(x_0) = 0$; entonces los valores propios de $Df(x_0)$ y los valores propios de $Dg(h(x_0))$ difieren por el producto de una constante positiva.*

1.4. Bifurcaciones de codimensión uno

En esta sección estudiaremos de manera general dos bifurcaciones que forman parte de la bifurcación Takens-Bogdanov. Existen además otras bifurcaciones de codimensión uno, estas son la bifurcación Transcrítica y la bifurcación horquilla o pitchfork.

1.4.1. Bifurcación silla-nodo

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = \mu \pm x^2. \quad (1.17)$$

Se dice que (1.17) es la *forma normal* para la bifurcación silla-nodo. Para $\mu > 0$ existen dos puntos críticos $x = \pm\sqrt{\mu}$. Tomemos $\dot{x} = \mu - x^2$, tal que $Df(x, \mu) = -2x$,

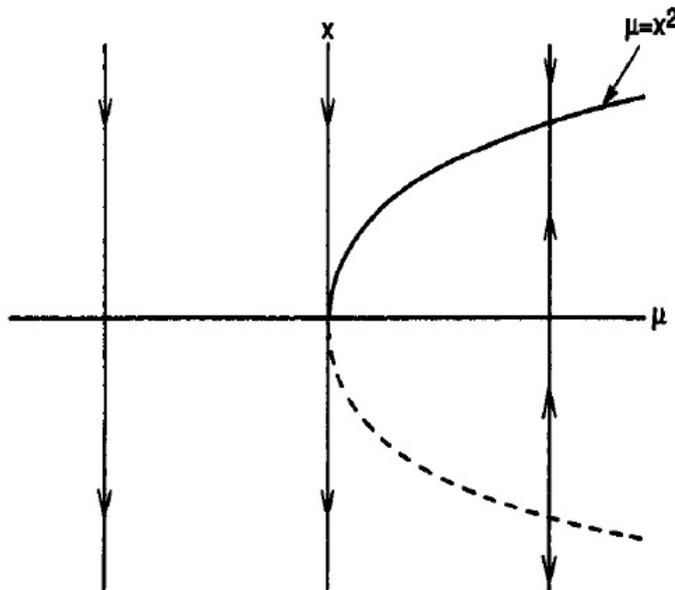


Figura 1.1: Digrama de bifurcación. Bifurcación silla-nodo

$Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp\sqrt{\mu}$; y vemos que el punto crítico $x = \sqrt{\mu}$ es estable, mientras que el punto $x = -\sqrt{\mu}$ es inestable. Para $\mu = 0$, existe solamente un único punto crítico, $x = 0$ y es un punto crítico *no hiperbólico*, ya que $Df(0, 0) = 0$; el campo vectorial $f(x) = -x^2$ no es estructuralmente estable; y $\mu = 0$ es un valor de bifurcación. Para $\mu < 0$ no existen puntos críticos. La figura siguiente muestra el digrama de bifurcación de la silla-nodo, para $\mu > 0$ las variedades estable e inestable unidimensionales, están dadas por $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$, $W^u(\sqrt{\mu}) = (-\infty, -\sqrt{\mu})$. Análogamente para $\dot{x} = \mu + x^2$.

1.4.2. Bifurcación de Hopf

Consideremos aquí un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.18)$$

con $\mu = \mu_0$ y un punto de equilibrio $x = x_0$, en el cual $Df(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios puramente imaginarios, $\pm\omega$, con $\omega > 0$ y ningún otro valor propio con parte real cero. El teorema de la función implícita garantiza (ya que $Df(x_0, \mu_0)$ es invertible) que para cada μ cerca de μ_0 existirá un punto de equilibrio $p(\mu)$ cerca de x_0 el cual varía suavemente con μ . No obstante las dimensiones de las variedades estable e inestable en $p(\mu)$ cambian si los valores propios de $Df(p(\mu))$ cruzan el eje imaginario en μ_0 . Este cambio

cualitativo en el flujo local cerca de $p(\mu)$ se debe marcar por algunos otros cambios locales en los retratos fase que no implican puntos fijos. Una pista de qué sucede en el problema genérico de la bifurcación que implica un equilibrio con valores propios imaginarios puros se puede obtener de examinar los sistemas lineales en los cuales hay un cambio de este tipo. Por ejemplo, considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y\end{aligned}\tag{1.19}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\tag{1.20}$$

Cuando $\mu < 0$, las soluciones espirales convergen al origen, y cuando $\mu > 0$ las soluciones espirales se alejan del origen. Cuando $\mu = 0$, todas las soluciones son periódicas. Incluso en una familia uni-paramétrica de ecuaciones, es frecuente encontrar un valor del parámetro en el cual haya una familia completa de órbitas periódicas, más aún, hay una superficie de órbitas periódicas que aparece en el problema genérico (1.18). Mediante cambios de coordenadas suaves, las series de Taylor de grado 3 (tomando $k = 1$), para el problema general puede ser trasladado a la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + l_1(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ \dot{y} &= (\omega x + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + l_1(x^2 + y^2))y,\end{aligned}\tag{1.21}$$

la cual puede ser expresada en coordenadas polares como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2.\end{aligned}\tag{1.22}$$

Como el lado derecho de la ecuación \dot{r} en (1.22) es independiente de θ , vemos que existen órbitas periódicas de (1.21) las cuales son círculos de radio $r = cte$, obtenidos de las soluciones diferentes de cero de $\dot{r} = 0$ en (1.22). Si $l_1 \neq 0$ y $d \neq 0$ (el teorema líneas abajo especifica quien es y que representa esta constante) esas soluciones permanecen a lo largo de la parábola $\mu = \frac{l_1 r^2}{d}$. Esto implica que la superficie de órbitas periódicas tiene una tangencia cuadrática con su plano tangente $\mu = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. El teorema de la bifurcación de Hopf establece que las propiedades cualitativas de (1.21) cerca del origen permanecen sin cambio si se agregan los términos de orden superior al sistema:

Teorema 1.4.1 (Teorema de la bifurcación de Hopf). *Supongamos que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, tiene un punto de equilibrio (x_0, μ_0) tal que*

(H1) *$D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero.*

(H2) Sean $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ los valores propios de $D_x f(x_0, \mu)$ los cuales son imaginarios en $\mu = \mu_0$, tales que

$$d = \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0. \quad (1.23)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave para el cual la expansión de Taylor de grado tres sobre la variedad central, en coordenadas polares, es dada por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2. \end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$, entonces existe una superficie de soluciones periódicas en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el eigenespacio de $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ que coincide en dimensión dos, con el paraboloido $\mu = -\frac{l_1}{d}r^2$. Si $l_1 < 0$, entonces, esas soluciones periódicas son estables, mientras que si $l_1 > 0$, son ciclos límite inestables.

Una prueba de este teorema está dada en [7].

Observación 1.4.1. Si $l_1 < 0$, se dice que la bifurcación de Hopf es Supercrítica, mientras que si $l_1 > 0$, se dice que la bifurcación de Hopf es Subcrítica. Los coeficientes de estabilidad d y l_1 son llamados velocidad de cruce y primer coeficiente de Lyapunov, respectivamente.

Observación 1.4.2. La dirección hacia donde abre la superficie de soluciones periódicas en la variedad central nos la proporciona el signo del producto $d \cdot l_1$, si $d \cdot l_1 > 0$ abre hacia la izquierda del valor de bifurcación, si $d \cdot l_1 < 0$ abre hacia la derecha del valor de bifurcación.

Observación 1.4.3. Como en la bifurcación silla-nodo, existen cuatro diferentes direcciones para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf que dependen de los signos de d y l . Ver figura 1.5.

Estas direcciones estan representadas en la Figura 1.2.

1.4.3. El primer coeficiente de Lyapunov

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x), \quad (1.24)$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$ con $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$. Entonces

$$l_1 = \frac{1}{16\omega}(R_1 + R_2), \quad (1.25)$$

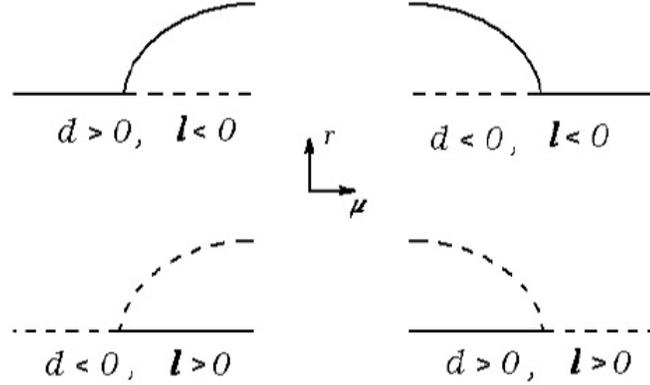


Figura 1.2: Direcciones y estabilidades de la bifurcación de Hopf

donde

$$\begin{aligned}
 R_1 &= [F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2}]|_{x=x_0} \\
 R_2 &= [F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2}]|_{x=x_0}.
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

1.5. Deformación Versal

Consideremos los campos vectoriales

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) \\
 \dot{y} &= g(y),
 \end{aligned}$$

donde f y g son $C^r(V)$, con $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Diremos que f y g son *topológicamente equivalentes* si existe un difeomorfismo $h \in C^k$, el cual toma órbitas de el flujo generado por f , en órbitas del flujo generado por g , preservándose la orientación pero no necesariamente la parametrización en el tiempo. Si h preserva la parametrización en el tiempo, entonces decimos que f y g son *topológicamente conjugados*.

Considérese ahora los campos vectoriales “suaves”

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x, \lambda) \\
 \dot{y} &= g(y, \mu),
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$, y $\mu \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que existen puntos de equilibrio tales que $f(x_0, \lambda_0) = 0$ y $g(y_0, \mu_0) = 0$. Diremos que los campos vectoriales l -paramétrico f y m -paramétrico g son *topológicamente equivalentes* si existe un mapeo continuo $h : U \rightarrow V$, con

U una vecindad de (x_0, λ_0) y V una vecindad de y_0 , con $h(x_0, \lambda_0) = y_0$, tal que, para cada $\lambda \approx \lambda_0$, $h_\lambda(\cdot) = h(\cdot, \lambda)$, es un homeomorfismo que exhibe la equivalencia topológica entre f y g . Si h_λ preserva la parametrización en el tiempo, diremos que f y g son *topológicamente conjugados*.

Diremos que el campo vectorial suave m -paramétrico

$$\dot{x} = v(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, con $v(x_0, \mu_0) = 0$, es *inducido* por (1.27) si existe un mapeo continuo $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, con $\varphi(\mu_0) = \lambda_0$, tal que

$$v(x, \mu) = f(x, \varphi(\mu)).$$

Definición 1.5.1. *La familia de campos vectoriales suaves (1.27) es llamada una **deformación versal** de*

$$\dot{x} = f(x, \lambda_0) \tag{1.28}$$

en el punto $x = x_0$, si cada familia m -paramétrica suave que se reduce a (1.28) para una elección particular de los parámetros es equivalente a una familia de campos vectoriales inducida por (1.27).

1.6. Teoría de Melnikov

La teoría de Melnikov nos provee de una herramienta analítica para establecer la existencia de trayectorias homoclínicas transversales a mapeos de Poincaré para órbitas periódicas de sistemas dinámicos perturbados. Consideremos el sistema siguiente

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t) \tag{1.29}$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y g es periódica de período T en t .

Nota 1.6.1. *El sistema puede ser escrito como un sistema autónomo en \mathbb{R}^3 definiendo $x_3 = t$.*

Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Supongamos entonces:

- A1. Para $\varepsilon = 0$ el sistema (1.29) tiene una órbita homoclínica $\Gamma_0 : x = \gamma(t)$, $-\infty < t < \infty$, en un punto silla hiperbólico x_0 y
- A2. Para $\varepsilon = 0$ el sistema (1.29) tiene una familia uni-paramétrica de órbitas periódicas $\gamma_\alpha(t)$ de período T_α en el interior de Γ_0 con $\frac{\partial \gamma_\alpha(0)}{\partial \alpha} \neq 0$; ver figura 1.3.

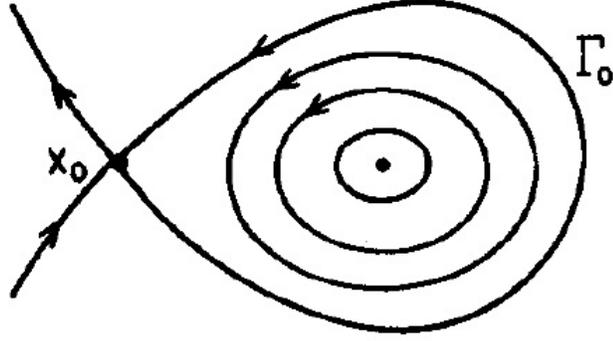


Figura 1.3: Retrato fase del sistema (1.29) no perturbado.

La función de Melnikov $M(t_0)$ está definida como

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_{t_0}^t \nabla \cdot f(\gamma_0(s)) ds} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt \quad (1.30)$$

donde el producto \wedge de dos vectores u y $v \in \mathbb{R}^2$ es definido como $u \wedge v = u_1 v_2 - v_1 u_2$. Nótese que la función de Melnikov $M(t_0)$ es proporcional a la derivada del mapeo de Poincaré con respecto al parámetro ε en el interior de una vecindad del ciclo separatriz Γ_0 (o en una vecindad de un ciclo). Antes de establecer el resultado principal de Melnikov concerniente a la existencia de una órbita homoclínica transversa al mapeo de Poincaré, necesitamos el siguiente lema, el cual establece la existencia de una órbita periódica $\gamma_\varepsilon(t)$ de (1.29), y de aquí la existencia del mapeo de Poincaré P_ε , para (1.29) con ε suficientemente pequeño.

Lema 1.6.1. *Bajo las suposiciones A1 y A2, para ε suficientemente pequeño, (1.29) tiene una única órbita periódica hiperbólica $\gamma_\varepsilon(t) = x_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Correspondientemente, el mapeo de Poincaré P_ε tiene un único punto fijo hiperbólico del tipo silla $x_\varepsilon = x_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

Teorema 1.6.1. *Bajo las suposiciones A1 y A2, si la función de Melnikov $M(t_0)$ definida por (1.30) tiene un cero simple en $[0, T]$ entonces para todo $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeño, las variedades estable e inestable $W^s(x_\varepsilon)$ y $W^u(x_\varepsilon)$ del mapeo de Poincaré P_ε se intersectan transversalmente; es decir, P_ε tiene una órbita homoclínica transversa. Y si $M(t_0) > 0$ ($o < 0$) para toda t_0 entonces $W^s(x_\varepsilon) \cap W^u(x_\varepsilon) = \emptyset$*

Nota 1.6.2. *Las suposiciones, las pruebas del lema como la del teorema, son tomadas y pueden ser analizadas en [6].*

Observación 1.6.1. Si para $\varepsilon = 0$, (1.29) es un sistema Hamiltoniano, es decir, si

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T,$$

entonces $\nabla \cdot f = 0$ y la función de Melnikov toma la forma

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt \quad (1.31)$$

Consideremos el sistema en el plano

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t, \mu) \quad (1.32)$$

donde el sistema no perturbado ($\varepsilon = 0$) es un sistema Hamiltoniano y $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Teorema 1.6.2. Supongamos que A1 y A2 se satisfacen para (1.32). Si $M(t_0)$ dada por (1.31) tiene un cero simple, entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la órbita homoclínica persiste para (1.32).

1.6.1. Bifurcación homoclínica

Supongamos el campo vectorial (1.32) (donde el sistema no perturbado es un sistema Hamiltoniano), en este caso la función de Melnikov depende del parámetro μ , es decir la podemos escribir $M(t_0, \mu)$ y tenemos el siguiente teorema de bifurcación para la función de Melnikov.

Teorema 1.6.3. Si para (1.31) se satisface que $M(t_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 M}{\partial t_0^2}(t_0, \mu_0) \neq 0$ y $\frac{\partial M}{\partial \mu}(t_0, \mu_0) \neq 0$, entonces para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeño, el sistema (1.31) experimenta una bifurcación homoclínica a partir del valor de bifurcación $\mu = \mu_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

La prueba de este teorema puede ser analizada en [5].

Capítulo 2

La bifurcación Takens-Bogdanov

La bifurcación Takens-Bogdanov, también conocida como doble cero, es la bifurcación de codimensión dos más estudiada. El nombre de esta bifurcación se debe a los matemáticos Floris Takens y Rifkat Bogdanov que de manera independiente pero casi simultáneamente iniciaron el estudio de dicha bifurcación. Que una bifurcación sea de codimensión dos quiere decir que basta con que se varíen sólo dos de sus parámetros para que la bifurcación ocurra.

Un sistema de la forma

$$\dot{z} = f(z)$$

experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov, si tiene un equilibrio z_0 tal que $Df(z_0)$ tiene un eigenvalor cero de multiplicidad dos. Tres bifurcaciones de codimensión uno se dan alrededor del punto de bifurcación y éstas son: La bifurcación silla-nodo, la bifurcación de Hopf y la bifurcación homoclínica.

Takens y Bogdanov utilizaron las siguientes formas normales respectivamente:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 + az_1^2 \\ bz_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

y

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde ambos consideraron $ab \neq 0$. Además, mostraron de manera independiente que los términos de orden mayor o igual a tres no modifican la dinámica de estas formas normales, y por lo tanto pueden ser truncadas en orden dos, además mostraron que las deformaciones versales para (2.1) y (2.2) son de la forma

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 + \mu_2z_1 + az_1^2 \\ \mu_1 + bz_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

y

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu_1 + \mu_2z_1 + az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

respectivamente. Por otra parte, J. Guckenheimer y P. Holmes, aplicando (2.2) demostraron que

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu_1 + \mu_2 z_2 + a z_1^2 + b z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

también es una deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov. Las equivalencias de estas deformaciones se pueden consultar en [3].

2.1. La deformación versal de Guckenheimer y Holmes

Consideremos el sistema en su forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 \pm xy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ahora tomemos la deformación versal analizada por Guckenheimer y P. Holmes,

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} y \\ \mu_1 + \mu_2 y + a x^2 + b x y \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde $b = \pm 1$ y $a = 1$, aquí se analizará el caso $b = -1$ (el caso $b = 1$ se puede estudiar en [5]), es decir, nuestro candidato a deformación versal es el siguiente:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} y \\ \mu_1 + \mu_2 y + x^2 - x y \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Podemos observar que los puntos de equilibrio de dicha deformación versal están dados por:

$$\begin{aligned} (x^+, y) &= (+\sqrt{-\mu_1}, 0) \\ (x^-, y) &= (-\sqrt{-\mu_1}, 0) \end{aligned}$$

en particular observemos que para $\mu_1 > 0$ no existen puntos de equilibrio.

Entonces la Jacobiana de nuestra deformación versal es

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x - y & \mu_2 - x \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

evaluando los equilibrios del sistema en (2.9) obtenemos:

$$Df(x^+, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{-\mu_1} & \mu_2 - \sqrt{-\mu_1} \end{pmatrix},$$

donde su polinomio característico esta dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\mu_2 - \sqrt{-\mu_1})\lambda - 2\sqrt{-\mu_1}, \quad (2.10)$$

y

$$Df(x^-, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{-\mu_1} & \mu_2 + \sqrt{-\mu_1} \end{pmatrix},$$

donde su polinomio característico esta dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\mu_2 + \sqrt{-\mu_1})\lambda + 2\sqrt{-\mu_1}, \quad (2.11)$$

los valores propios de (2.10) están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mu_2 - \sqrt{-\mu_1}) \pm \sqrt{(\mu_2 - \sqrt{-\mu_1})^2 + 8\sqrt{-\mu_1}}}{2},$$

entonces (x^+, y) es una silla para toda μ_2 . De (2.11) obtenemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mu_2 + \sqrt{-\mu_1}) \pm \sqrt{(\mu_2 + \sqrt{-\mu_1})^2 - 8\sqrt{-\mu_1}}}{2}.$$

Entonces si $\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}$ la rama de equilibrio (x^-, y) son centros. Nosotros podemos observar que en (x^+, y) si $\mu_1 = 0$ los valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = \mu_2, 0,$$

por lo tanto podríamos esperar que μ_1 sea una curva de bifurcación, en la que nace una bifurcación silla-nodo. Además en (x^-, y) con $\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}$ los valores propios son dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2\sqrt{-\mu_1}},$$

por tanto análogamente podríamos esperar que $\mu_2 = -\sqrt{-\mu_2}$ sea una curva de bifurcación en la que aparentemente ocurre la bifurcación de Hopf.

2.1.1. Bifurcación silla-nodo

Encontremos la forma normal de nuestro sistema, para esto debemos obtener la matriz de cambio de base, para ello fijemos $\mu_1 = 0$ y μ_2 arbitrario, es decir, utilicemos los valores propios de la forma

$$\lambda_{1,2} = \mu_2, 0.$$

Entonces nuestra matriz cambio de base esta dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

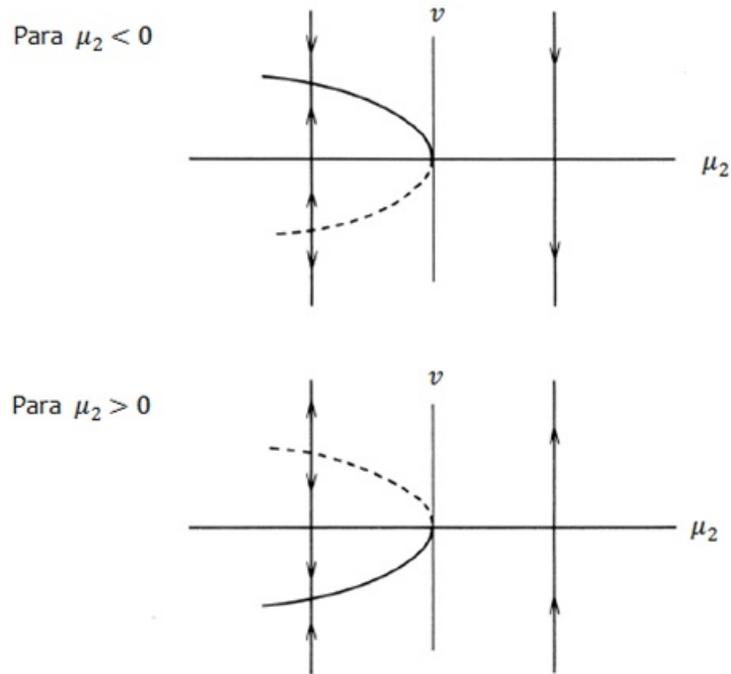


Figura 2.1: Bifurcación Silla-nodo

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

sustituyendo \dot{x} y \dot{y} en la ecuación anterior y haciendo una serie de cálculos, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} \mu_1 + (u+v)^2 - (u+v)(\mu_2 u) \\ -(\mu_1 + (u+v)^2 - (u+v)(\mu_2 u)) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Por lo que la dinámica en la variedad central esta dada por:

$$\dot{v} = -\frac{1}{\mu_2}(\mu_1 + v^2) + \mathcal{O}(|u, v|^3),$$

por lo tanto la bifurcación ocurre en $\mu_1 = 0$. La Figura 6.1 muestra el diagrama de la bifurcación.

2.1.2. Bifurcación de Hopf

Analicemos el cambio de estabilidad de los puntos de equilibrio de (x^-, y) en $\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}$ y $\mu_1 < 0$. Para (2.11) los valores propios asociados son

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{2\sqrt{-\mu_1}}.$$

Si consideramos μ_2 como un parámetro, en $\lambda_{1,2} = \frac{(\mu_2 - \sqrt{-\mu_1} \pm \sqrt{(\mu_2 - \sqrt{-\mu_1})^2 + 8\sqrt{-\mu_1}}}{2}$ y derivando la parte real con respecto a μ_2 , obtenemos

$$\left. \frac{d}{d\mu_2} (Re \lambda_{1,2}) \right|_{\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

por tanto, aseguramos que la bifurcación de Hopf ocurre en $\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}$.

Lo que haremos primero será desplazar los puntos de equilibrio al origen, lo cual obtendremos con un cambio de coordenadas, el cual se denotará de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - x^- \\ \bar{y} &= y \end{aligned} \quad (2.14)$$

por lo que (2.6) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{-\mu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

ahora pongamos la parte lineal de (2.15) en su forma normal a través de la siguiente transformación

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2\sqrt{-\mu_1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{-\mu_1}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2\sqrt{-\mu_1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

sustituyendo $\dot{\bar{x}}$ y $\dot{\bar{y}}$ en (2.16) y haciendo unas serie de cálculos, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\sqrt{-\mu_1}} \\ -\sqrt{2\sqrt{-\mu_1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v^2}{\sqrt{2\sqrt{-\mu_1}}} - uv \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Notemos que el sistema (2.17) toma la forma de la ecuación (1.24), por lo cual podemos calcular (1.25). Donde $\omega = \sqrt{2\sqrt{-\mu_1}}$, $f = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{-\mu_1}}}v^2 - uv$ y $g = 0$ haciendo una serie de cálculos obtenemos que

$$l_1 = \frac{-1}{16\sqrt{-\mu_1}} < 0$$

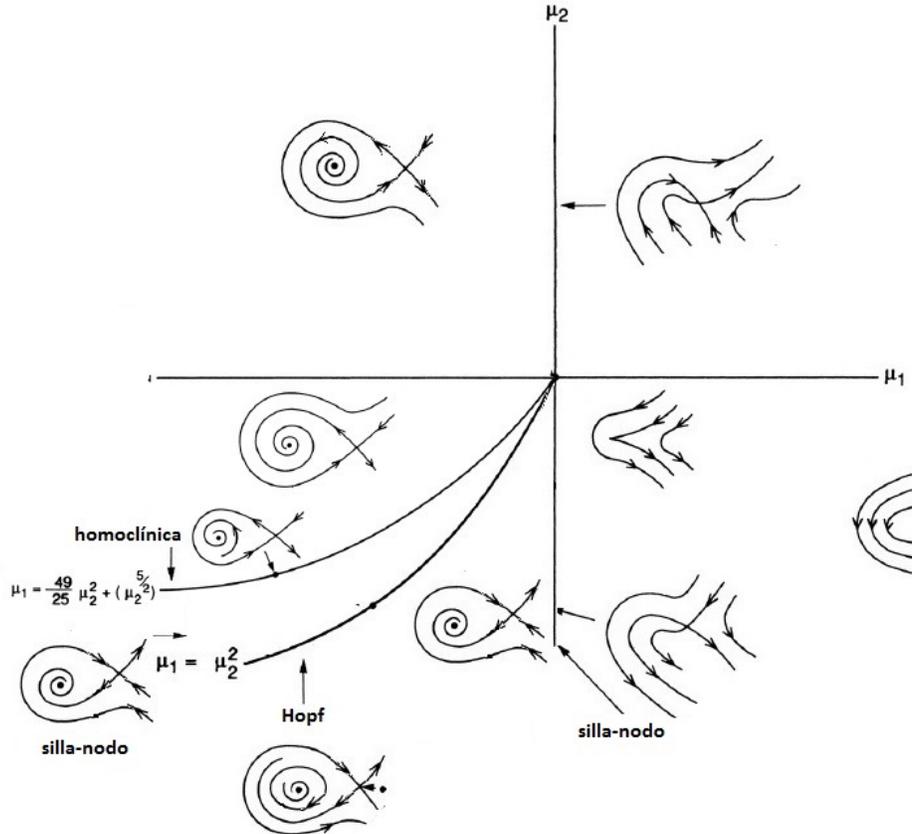


Figura 2.2: Bifurcación Takens-Bogdanov

lo que indica que la bifurcación de Hopf es *supercrítica*.

Además de las bifurcaciones silla-nodo y de Hopf, ocurre la bifurcación homoclínica, la cual, por la complejidad de su estudio no se presenta en este capítulo, pero dicho estudio puede consultarse en [5].

Capítulo 3

Análisis de la bifurcación doble cero de Y. A. Kuznetsov

Consideremos un sistema en el plano

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

donde f es suave. Supongamos que $x = 0$ es un equilibrio para el sistema (3.1) en $\alpha = 0$, tal que, la matriz Jacobiana evaluada en este equilibrio tiene un valor propio cero de multiplicidad dos.

3.1. *Primer transformación de coordenadas*

Escribamos el sistema (3.1) con $\alpha = 0$ de la forma siguiente

$$\dot{x} = A_0x + F(x), \quad (3.2)$$

donde $A_0 = Df(0, 0)$ y $F(x) = f(x, 0) - A_0x$ es una función suave y $F(x) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$. Entonces las condiciones de bifurcación implican que

$$\det A_0 = 0 \quad y \quad \text{tr} A_0 = 0,$$

suponiendo que

$$\text{K1) } A_0 \neq 0,$$

es decir A_0 tiene al menos un elemento diferente de cero. Existen dos vectores reales linealmente independientes $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$A_0v_0 = 0, \quad A_0v_1 = v_0, \quad (3.3)$$

donde v_0 es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$, mientras v_1 es el vector propio generalizado de A_0 correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 0$. Por otra parte existen vectores propios $w_0, w_1 \in \mathbb{R}^2$ de la matriz A_0^T tal que

$$A_0^T w_1 = 0 \quad y \quad A_0^T w_0 = w_1. \quad (3.4)$$

Llamemos P a la matriz formada por los vectores propios, es decir,

$$P = (v_0 \quad v_1)$$

entonces existe una matriz P^{-1} conformada de la siguiente manera

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$P^{-1}P = I,$$

es decir

$$P^{-1}P = I = \begin{pmatrix} \langle v_0, w_0 \rangle & \langle v_1, w_0 \rangle \\ \langle v_0, w_1 \rangle & \langle v_1, w_1 \rangle \end{pmatrix},$$

afirmamos que

$$\langle v_i, w_j \rangle = 1 \quad si \quad i = j \quad (3.5)$$

y

$$\langle v_i, w_j \rangle = 0 \quad si \quad i \neq j, \quad (3.6)$$

la existencia y el como se obtienen los vectores propios, tales que satisfacen (3.5) y (3.6) estan probados en [2], donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en \mathbb{R}^2

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Si $v_{0,1}$ son seleccionados como base, entonces cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado como

$$x = Py = v_0 y_1 + v_1 y_2,$$

para algún $y_{1,2} \in \mathbb{R}$. Considerando (3.5) y (3.6), encontramos que las coordenadas (y_1, y_2) estan dadas por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle w_0, x \rangle \\ \langle w_1, x \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

derivando (3.7) con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \dot{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = P^{-1}[A_0Py + F(Py)]$$

por lo cual el sistema (3.2) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle F(y_1v_0 + y_2v_1), w_0 \rangle \\ \langle F(y_1v_0 + y_2v_1), w_1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Donde $P^{-1}A_0P$ es el bloque cero de Jordan, es decir

$$P^{-1}A_0P = J_0$$

donde

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las coordenadas (y_1, y_2) para toda α con $\|\alpha\|$ pequeño, el sistema (3.1) se lee

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_0 \rangle \\ \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_1 \rangle \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

y para $\alpha = 0$ se reduce a (3.8).

Expandiendo en serie de Taylor la parte derecha de (3.9) con respecto a y en $y = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \langle f(0, \alpha), w_0 \rangle + \frac{\partial}{\partial y_1} \langle f(0, \alpha), w_0 \rangle y_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} \langle f(0, \alpha), w_0 \rangle y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(0, \alpha), w_0 \rangle y_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle f(0, \alpha), w_0 \rangle y_1 y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \langle f(0, \alpha), w_0 \rangle y_2^2 + \mathcal{O}(\|y\|^3) \\ \dot{y}_2 &= \langle f(0, \alpha), w_1 \rangle + \frac{\partial}{\partial y_1} \langle f(0, \alpha), w_1 \rangle y_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} \langle f(0, \alpha), w_1 \rangle y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(0, \alpha), w_1 \rangle y_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle f(0, \alpha), w_1 \rangle y_1 y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \langle f(0, \alpha), w_1 \rangle y_2^2 + \mathcal{O}(\|y\|^3) \end{aligned} ,$$

denotemos

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial y_1^i \partial y_2^j} \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_0 \rangle \right|_{y=0}, \\ b_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial y_1^i \partial y_2^j} \langle f(y_1v_0 + y_2v_1, \alpha), w_1 \rangle \right|_{y=0}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

que se expresan en términos del lado derecho $f(x, \alpha)$ de (3.1) y de los vectores propios $v_{0,1}$ y $w_{0,1}$, reescribiendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_2^2 + P_1(y, \alpha), \\ \dot{y}_2 &= b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)y_1 + b_{01}(\alpha)y_2 + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_1^2 + b_{11}(\alpha)y_1y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_2^2 + P_2(y, \alpha) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $P_{1,2}(y, \alpha) = \mathcal{O}(\|y\|^3)$ son funciones suaves. Además

$$a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

Es aquí donde comenzaremos la conversión de (3.11) en una forma más simple, a base de mas transformaciones suaves e invertibles y la reparametrización del tiempo.

3.2. *Segunda transformación de coordenadas*

Introduzcamos nuevas variables (u_1, u_2) , donde u_2 denota la parte derecha de la primera ecuación de (3.11) y renombraremos a y_1 por u_1

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 \\ u_2 &= y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + P_1(y, \alpha), \end{aligned}$$

definimos además a $y_2 := u_2 - a_{00}(\alpha)$, esta transformación es invertible en alguna vecindad de $y = 0$ y para $\|\alpha\|$ pequeño que dependerá sin problema de los parámetros. Si $\alpha = 0$, el origen $y = 0$ es un punto fijo de este mapeo. Derivando el sistema anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)u_1 + b_{01}(\alpha)(u_2 - a_{00}(\alpha)) + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)u_1^2 + b_{11}(\alpha)u_1(u_2 - a_{00}(\alpha)) \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)(u_2 - a_{00}(\alpha))^2 + P_2(u, \alpha) + a_{10}(\alpha)u_2 + a_{01}(\alpha)(b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)u_1 \\ &\quad + b_{01}(\alpha)(u_2 - a_{00}(\alpha)) + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)u_1^2 + b_{11}(\alpha)u_1(u_2 - a_{00}(\alpha)) + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)(u_2 - a_{00}(\alpha))^2 + P_2(u, \alpha)) \\ &\quad + a_{20}(\alpha)u_1u_2 + a_{11}(\alpha)(u_2(u_2 - a_{00}(\alpha)) + u_1(b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)u_1 + b_{01}(\alpha)(u_2 - a_{00}(\alpha)) \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)u_1^2 + b_{11}(\alpha)u_1(u_2 - a_{00}(\alpha)) + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)(u_2 - a_{00}(\alpha))^2 + P_2(u, \alpha)), \end{aligned}$$

reescribiendo el sistema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= b_{00}(\alpha) - b_{01}(\alpha)a_{00} + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)a_{00}^2(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{00}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{01}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha) + \frac{1}{2}a_{00}^2(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{02}(\alpha) + \frac{1}{2}a_{00}^2(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{02}(\alpha) + (b_{10}(\alpha) - a_{00}(\alpha)b_{11}(\alpha) \\
&\quad + a_{01}(\alpha)b_{10}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{11}(\alpha) + a_{11}(\alpha)b_{00}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{11}(\alpha)b_{01}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{10}(\alpha) + a_{00}^2(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{11}(\alpha))u_1 + (b_{01}(\alpha) - a_{00}(\alpha)b_{02}(\alpha) + a_{10}(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{01}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{02}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{11}(\alpha) + a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha) - 2a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{01}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{02}(\alpha) \\
&\quad + a_{10}(\alpha))u_2 + \left(\frac{1}{2}b_{20}(\alpha) + \frac{1}{2}a_{01}(\alpha)b_{20}(\alpha) + a_{11}(\alpha)b_{10}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{11}(\alpha)b_{11}(\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{20}(\alpha)\right)u_1^2 + (b_{11}(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{11}(\alpha) + a_{20}(\alpha) + a_{11}(\alpha)b_{01}(\alpha) + a_{02}(\alpha)b_{10}(\alpha) \\
&\quad - 2a_{00}(\alpha)b_{11}(\alpha)a_{02}(\alpha))u_1u_2 + \left(\frac{1}{2}b_{02}(\alpha) + \frac{1}{2}a_{01}(\alpha)b_{02}(\alpha) + a_{11}(\alpha) + a_{02}(\alpha)b_{01}(\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{02}(\alpha)\right)u_2^2 + Q(u, \alpha)
\end{aligned}$$

esta transformación convierte al sistema (3.11) en

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= g_{00}(\alpha) + g_{10}(\alpha)u_1 + g_{01}(\alpha)u_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)u_1^2 + g_{11}(\alpha)u_1u_2 + \frac{1}{2}g_{02}(\alpha)u_2^2 + Q(u, \alpha),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $g_{kl}(\alpha)$ son funciones suaves, además con $g_{00}(0) = g_{10}(0) = g_{01}(0) = 0$ y $Q(\cdot, \alpha) = \mathcal{O}(\|u\|^3)$ es una función suave. Podemos verificar que

$$\begin{aligned}
g_{20}(0) &= b_{20}(0), \\
g_{11}(0) &= a_{20}(0) + b_{11}(0), \\
g_{02}(0) &= b_{02}(0) + 2a_{11}(0).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
g_{00}(\alpha) &= b_{00}(\alpha) - b_{01}(\alpha)a_{00} + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)a_{00}^2(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{00}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{01}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha) + \frac{1}{2}a_{00}^2(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{02}(\alpha) + \frac{1}{2}a_{00}^2(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{02}(\alpha) \\
g_{10}(\alpha) &= b_{10}(\alpha) - a_{00}(\alpha)b_{11}(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{10}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{11}(\alpha) + a_{11}(\alpha)b_{00}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{11}(\alpha)b_{01}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{10}(\alpha) + a_{00}^2(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{11}(\alpha) \\
g_{01}(\alpha) &= b_{01}(\alpha) - a_{00}(\alpha)b_{02}(\alpha) + a_{10}(\alpha) + a_{01}(\alpha)b_{01}(\alpha) - a_{00}(\alpha)a_{01}(\alpha)b_{02}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{11}(\alpha) + a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha) - 2a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{01}(\alpha) \\
&\quad - a_{00}(\alpha)a_{02}(\alpha)b_{02}(\alpha) + a_{10}(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Las funciones $a_{kl}(\alpha)$ y $b_{kl}(\alpha)$ se anulan en $\alpha = 0$, para todo $k + l \leq 1$ y los términos restantes son suficientes para calcular las primeras derivadas parciales de $g_{00}(\alpha)$, $g_{10}(\alpha)$ y $g_{01}(\alpha)$ con respecto a (α_1, α_2) en $\alpha = 0$.

3.3. Una traslación en las coordenadas

Comenzaremos haciendo un cambio del parámetro dependiente en la dirección u_1 , tal que

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \delta(\alpha), \\ u_2 &= v_2 \end{aligned}$$

por lo que el sistema (3.12) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= g_{00}(\alpha) + g_{10}(\alpha)(v_1 + \delta(\alpha)) + g_{01}(\alpha)v_2 + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)(v_1 + \delta(\alpha))^2 \\ &\quad + g_{11}(\alpha)(v_1 + \delta(\alpha))v_2 + \frac{1}{2}g_{02}(\alpha)v_2^2 + Q(v, \alpha), \end{aligned}$$

simplificando dicha transformación obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= g_{00}(\alpha) + g_{10}(\alpha)\delta(\alpha) + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)\delta^2(\alpha) + (g_{10}(\alpha) + g_{20}(\alpha)\delta(\alpha))v_1 + (g_{01}(\alpha) + g_{11}(\alpha)\delta(\alpha))v_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)v_1^2 + g_{11}(\alpha)v_1v_2 + \frac{1}{2}g_{02}(\alpha)v_2^2 + \mathcal{O}(\|v\|^3) + \mathcal{O}(\|v, \delta(\alpha)\|^3). \end{aligned}$$

Para eliminar el término v_2 , suponemos que

$$\text{K2) } g_{11}(0) = a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0.$$

Entonces los argumentos basados en el Teorema de la función implícita prueban la existencia local de una función suave,

$$\delta(\alpha) = -\frac{g_{01}(\alpha)}{g_{11}(\alpha)}$$

la cual se desprende de K2), ya que $g_{11}(\alpha) \neq 0$ para toda $\alpha \approx 0$.

Esto nos lleva al sistema siguiente

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= g_{00} - g_{10}\frac{g_{01}(\alpha)}{g_{11}(0)} + \mathcal{O}(\delta^2) + (g_{10} + g_{20}(-\frac{g_{01}(\alpha)}{g_{11}(0)})) + \mathcal{O}(\delta^2))v_1 + \frac{1}{2}(g_{20} + \mathcal{O}(\delta))v_1^2 \\ &\quad + (g_{11} + \mathcal{O}(\delta))v_1v_2 + \frac{1}{2}(g_{02} + \mathcal{O}(\delta))v_2^2 + \mathcal{O}(\|v\|^3), \end{aligned}$$

simplificando lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= h_{00}(\alpha) + h_{10}(\alpha)v_1 + \frac{1}{2}h_{20}(\alpha)v_1^2 + h_{11}(\alpha)v_1v_2 + \frac{1}{2}h_{02}(\alpha)v_2^2 + R(v, \alpha). \end{aligned}$$

Donde las h_{kl} y $R(v, \alpha) = \mathcal{O}(\|v\|^3)$ son funciones suaves.

Sabemos entonces que

$$\begin{aligned} h_{00}(\alpha) &= g_{00}(\alpha) - g_{10}(\alpha) \frac{g_{01}(\alpha)}{g_{11}(0)} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ h_{10}(\alpha) &= g_{10}(\alpha) - g_{01}(\alpha) \frac{g_{20}(0)}{g_{11}(0)} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde nuevamente sólo los términos necesarios para calcular las primeras derivadas parciales con respecto a (α_1, α_2) en $\alpha = 0$ se mantienen. Notemos que $h_{00}(0) = h_{10}(0) = 0$, podemos concluir entonces que los únicos valores relevantes de h_{kl} , son aquellos que cumplen que $k + l = 2$, y se dan en $\alpha = 0$. Estos términos están dados por,

$$\begin{aligned} h_{20}(0) &= g_{20}(0), \\ h_{11}(0) &= g_{11}(0), \\ h_{02}(0) &= g_{02}(0), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde cada $g_{kl}(0)$ con $k + l = 2$, son determinados por (3.13).

3.4. Segunda reducción del sistema

Ahora introduciremos un nuevo tiempo τ a través de la ecuación

$$dt = (1 + \theta v_1) d\tau$$

donde $\theta = \theta(\alpha)$ es una función suave que se definirá más adelante.

Con esta reparametrización reescribimos (3.15) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2(1 + \theta v_1) \\ \dot{v}_2 &= [h_{00}(\alpha) + h_{10}(\alpha)v_1 + \frac{1}{2}h_{20}(\alpha)v_1^2 + h_{11}(\alpha)v_1v_2 + \frac{1}{2}h_{02}(\alpha)v_2^2 + R(v, \alpha)](1 + \theta v_1), \end{aligned}$$

y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 + \theta v_1 v_2 \\ \dot{v}_2 &= h_{00}(\alpha) + (h_{10}(\alpha) + h_{00}(\alpha)\theta)v_1 + \frac{1}{2}(h_{20}(\alpha) + 2h_{10}(\alpha)\theta)v_1^2 \\ &\quad + h_{11}(\alpha)v_1v_2 + \frac{1}{2}h_{02}(\alpha)v_2^2 + \mathcal{O}(\|v\|^3), \end{aligned}$$

Notemos que el sistema tiene una forma similar al sistema (3.11), lo cual implica que podemos reducir una vez más a un oscilador no lineal, de nueva cuenta por una transformación de coordenadas similar a la utilizada anteriormente, entonces las nuevas coordenadas

son dadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\xi_1 &= v_1 \\ \xi_2 &= v_2 + \theta v_1 v_2,\end{aligned}$$

mapeando el origen en si mismo para toda θ . Entonces el sistema en las nuevas coordenadas (ξ_1, ξ_2) toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= h_{00}(\alpha) + (h_{10}(\alpha) + h_{00}(\alpha)\theta)\xi_1 + \frac{1}{2}(h_{20}(\alpha) + 2h_{10}(\alpha)\theta)\xi_1^2 \\ &\quad + h_{11}(\alpha)\xi_1\xi_2 + \frac{1}{2}(h_{02}(\alpha) + 2\theta)\xi_2^2 + \mathcal{O}(\|\xi\|^3)\end{aligned}$$

reescribamos el sistema de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_{00}(\alpha) + f_{10}(\alpha)\xi_1 + \frac{1}{2}f_{20}(\alpha)\xi_1^2 + f_{11}(\alpha)\xi_1\xi_2 + \frac{1}{2}f_{02}(\alpha)\xi_2^2 + \mathcal{O}(\|\xi\|^3)\end{aligned}\quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned}f_{00}(\alpha) &= h_{00}(\alpha), \\ f_{10}(\alpha) &= h_{10}(\alpha) + h_{00}(\alpha)\theta(\alpha), \\ f_{20}(\alpha) &= h_{20}(\alpha) + 2h_{10}(\alpha)\theta(\alpha), \\ f_{11}(\alpha) &= h_{11}(\alpha), \\ f_{02}(\alpha) &= h_{02}(\alpha) + 2\theta(\alpha).\end{aligned}$$

Ahora, definamos

$$\theta(\alpha) = -\frac{h_{02}(\alpha)}{2}$$

definida de esta manera podemos eliminar el término ξ_2^2 , con lo que especifica la reparametrización del tiempo.

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \mu_1(\alpha) + \mu_2(\alpha)\xi_1 + A(\alpha)\xi_1^2 + B(\alpha)\xi_1\xi_2 + \mathcal{O}(\|\xi\|^3),\end{aligned}\quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha) &= h_{00}(\alpha), \\ \mu_2(\alpha) &= h_{20}(\alpha) - \frac{1}{2}h_{00}(\alpha)h_{02}(\alpha)\end{aligned}\quad (3.19)$$

y

$$\begin{aligned}A(\alpha) &= \frac{1}{2}[h_{20}(\alpha) - h_{10}(\alpha)h_{02}(\alpha)], \\ B(\alpha) &= h_{11}(\alpha).\end{aligned}\quad (3.20)$$

3.5. Una reparametrización final del tiempo. Estableciendo nuevos parámetros

Introduzcamos un nuevo tiempo (al cual denotaremos por t nuevamente)

$$t = \left| \frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} \right| \tau.$$

Sabemos que $B(0) = h_{11}(0) = g_{11}(0) = a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$ debido a $K2$), la nueva reparametrización estará bien definida si suponemos que

$$K3) \quad 2A(0) = h_{20}(0) = g_{20}(0) = b_{20}(0) \neq 0.$$

Simultáneamente, realizamos un escalamiento mediante la introducción de nuevas variables

$$\eta_1 = \frac{B^2(\alpha)}{A(\alpha)} \xi_1, \quad \eta_2 = \operatorname{sgn} \left(\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} \right) \frac{B^3(\alpha)}{A^2(\alpha)} \xi_2$$

nótese que los denominadores son diferentes de cero en $\alpha = 0$ porque $A(0) \neq 0$ y $B(0) \neq 0$. En las nuevas coordenadas (η_1, η_2) , el sistema (3.18) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + \mathcal{O}(\|\eta\|^3) \end{aligned} \quad (3.21)$$

con

$$s = \operatorname{sgn} \left(\frac{B(0)}{A(0)} \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{a_{20}(0) + b_{11}(0)}{b_{20}(0)} \right) = \pm 1$$

y

$$\beta_1(\alpha) = \frac{B^4(\alpha)}{A^3(\alpha)} \mu_1(\alpha),$$

$$\beta_2(\alpha) = \frac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)} \mu_2(\alpha).$$

Obviamente $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$. Con el fin de definir un cambio de parámetros invertible y suave alrededor del origen, suponemos la regularidad del mapeo $\alpha \mapsto \beta$ en $\alpha = 0$

$$K4) \quad \det \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \neq 0.$$

Esta condición es equivalente a la regularidad del mapeo $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha = 0$. En efecto, el lema siguiente se puede demostrar mediante cálculos sencillos.

$$(y, \alpha) \mapsto \left(P(y, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial P(y, \alpha)}{\partial y} \right), \det \left(\frac{\partial P(y, \alpha)}{\partial y} \right) \right)$$

Lema 3.5.1. *Sea el sistema (3.11) escrito como*

$$\dot{y} = P(y, \alpha), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

y se satisfacen las condiciones de no-degeneracidad K2) y K3). Entonces la condición de transversalidad K4) es equivalente a la regularidad del mapeo

$$(y, \alpha) \mapsto \left(P(y, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial P(y, \alpha)}{\partial y} \right), \det \left(\frac{\partial P(y, \alpha)}{\partial y} \right) \right)$$

en el punto $(y, \alpha) = (0, 0)$.

El mapeo en el Lema 3.5.1 es un mapeo de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4 , por lo que su regularidad significa la no anulación del determinante de su matriz Jacobiana.

Todo lo anterior, se ha realizado con la finalidad de demostrar que un sistema de la forma (3.1), que puede ser reescrito como (3.21), a través de transformaciones suaves e invertibles y una reparametrización en el tiempo, experimenta la bifurcación de Takens-Bogdanov en un equilibrio (x_0, μ_0) . Como consecuencia de todo lo anterior establezcamos el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1. *Supongamos que un sistema en el plano*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

donde f es suave, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con dos valores propios cero

$$\lambda_{1,2}(0) = 0.$$

Asumimos que las siguientes condiciones de generacidad se satisfacen:

K1) La matriz jacobiana $A(0) = f_x(0, 0) \neq 0$;

K2) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$;

K3) $b_{20} \neq 0$;

K4) El mapeo

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right), \det \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right) \right)$$

es regular en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Entonces existen transformaciones suaves e invertibles de variables en función de parámetros, una reparametrización en el tiempo que preserva la dirección y cambios suaves de parámetros invertibles, que en conjunto reducen el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + \mathcal{O}(\|\eta\|^3) \end{aligned}$$

donde

$$s = \operatorname{sgn} \left(\frac{a_{20}(0) + b_{11}(0)}{b_{20}(0)} \right) = \pm 1.$$

3.6. Diagrama de bifurcación de la deformación versal

Consideremos (3.21) sin los términos $\mathcal{O}(\|\eta\|^3)$ y tomemos $s = -1$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 - \eta_1\eta_2.\end{aligned}$$

Observemos que los puntos de equilibrio de nuestra deformación versal están dados por

$$(\eta_1^\pm, \eta_2) = \left(\frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right)$$

en particular observemos que para $\frac{1}{4}\beta_2 < \beta_1$ no existen puntos de equilibrio.

La jacobiana de nuestra deformación versal es

$$Df(\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_2 + 2\eta_1 - \eta_2 & -\eta_1 \end{pmatrix}$$

$$Df(\eta_1^\pm, \eta_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm\sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1} & \frac{1}{2}(\beta_2 \mp \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}) \end{pmatrix}.$$

Tomemos η_1^+ , en este caso los valores propios están dados por

$$(a) \quad \lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{2}(\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}) \pm \sqrt{(\frac{1}{2}(\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}))^2 + 4(\sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1})}}{2}$$

entonces el equilibrio (η_1^+, η_2) es una silla cuando $\beta_2^2 - 4\beta_1 > 0$.

Ahora bien, cuando tomamos η_1^- los valores propios están dados por

$$(b) \quad \lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{2}(\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}) \pm \sqrt{(\frac{1}{2}(\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}))^2 - 4(\sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1})}}{2}$$

si $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 < 0$ el equilibrio (η_1^-, η_2) son centros.

Observemos que en (a) si $\beta_2^2 - 4\beta_1 = 0$ los valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\beta_2, 0$$

por lo tanto podríamos esperar que $\beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2$ sea una curva de bifurcación, en la que ocurre una bifurcación silla-nodo. Además en (b) con $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 < 0$ los valores propios son dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\beta_2}i$$

por tanto podríamos esperar que el semieje negativo de β_2 sea una curva de bifurcación, en la que se da la bifurcación de Hopf.

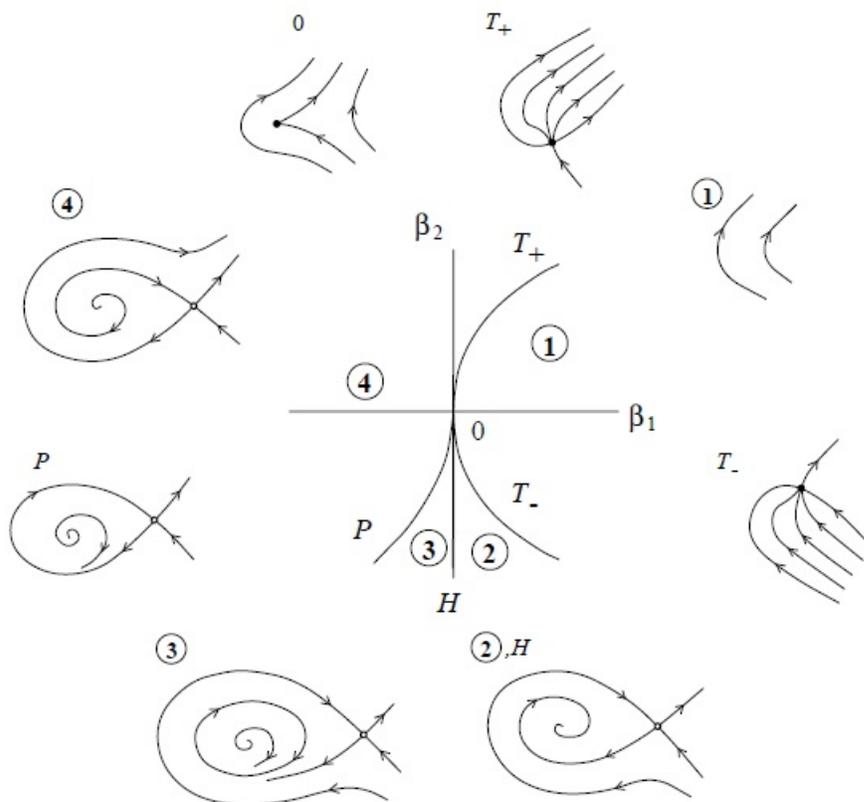


Figura 3.1: Bifurcación Takens-Bogdanov

Lema 3.6.1. *Existe una única curva P correspondiente a la bifurcación homoclínica, que se origina en $\beta = 0$ y se representa localmente de la siguiente manera:*

$$P = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2), \quad \beta_2 < 0\}.$$

Además, para $\|\beta\|$ pequeño, el sistema tiene un único ciclo estable e hiperbólico para los valores paramétricos dentro de la región limitada por la curva H bifurcación de Hopf y la curva P bifurcación homoclínica, y no existe algún otro ciclo fuera de esta región.

Capítulo 4

La bifurcación doble cero mediante formas bilineales

En 1974 y 1975 respectivamente, Takens y Bogdanov dieron condiciones suficientes para que un sistema no lineal m -paramétrico en el plano sea topológicamente equivalente a la deformación versal (o desdoblamiento universal) de la bifurcación Takens-Bogdanov. Y.A. Kuznetsov, obtiene con otro tipo de cálculos el caso particular $m = 2$ (estudiado en este trabajo). En este capítulo se presenta el caso $n = 2$ de la generalización al resultado de Takens-Bogdanov, siguiendo la filosofía del análisis de Kuznetsov, pero desde lo analizado en [2] y con otro tipo de herramientas matemáticas.

4.1. *Planteamiento del problema*

Considérese el campo vectorial

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}^2$ y $F \in C^r$ ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$), con $r \geq 2$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tal que

$$\text{H1) } F(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$\text{H2) } \sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = 0\}. \quad (\text{Considerando el caso no semisimple})$$

Nuestro objetivo en este capítulo es encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial F , tales que la dinámica sobre la variedad central en $x = x_0$, sea localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov genérica, en el plano

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde

$$ab \neq 0 \quad (4.3)$$

4.2. Dinámica en la variedad central

A continuación usaremos la teoría de las formas normales para determinar la dinámica sobre la variedad central en un punto de equilibrio $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$.

4.2.1. Forma de Jordan

Consideremos la expansión de Taylor alrededor de (x_0, μ_0) , para el campo vectorial $F(x, \mu)$ en (4.1)

$$F(x, \mu) = DF(x_0, \mu_0)(x - x_0) + F_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) + \frac{1}{2}D^2F(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) + \dots \quad (4.4)$$

de H2) tenemos que, la matriz $A = DF(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es similar a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 0$:

$$Ap_1 = 0; \quad Ap_2 = p_1. \quad (4.5)$$

Proposición 4.2.1. Sea $P = (p_1, p_2)$ donde p_1 y p_2 están dados en (4.5). Si

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{cases} q_2^T A = 0, \\ q_1^T A = q_2^T. \end{cases}$$

Observación 4.2.1. $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ son los vectores propios izquierdos de A asociados al valor propio $\lambda = 0$.

Prueba Sabemos que

$$P^{-1}AP = J$$

si multiplicamos P^{-1} por la derecha,

$$P^{-1}A = JP^{-1},$$

sustituyendo valores,

$$\begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}$$

por tanto, el resultado se sigue

$$\begin{aligned} q_1^T A &= q_2^T \\ q_2^T A &= 0 \end{aligned}$$

□

4.2.2. Cambio de coordenadas

En esta sección se hace un primer cambio de coordenadas para poner el campo vectorial de la parte derecha de (4.1) en su forma de Jordan. Consideremos el siguiente cambio de coordenadas y de parámetros

$$y = P^{-1}(x - x_0) \quad y \quad \alpha = \mu - \mu_0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}^2$$

derivando y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} \\ &= P^{-1}F(x, \mu) \\ &= P^{-1}(DF(x_0, \mu_0)(x - x_0) + F_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) + \dots) \\ &= P^{-1}DF(x_0, \mu_0)Py + P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) + P^{-1}F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \dots \end{aligned}$$

por lo tanto (4.1) se transforma en

$$\dot{y} = Jy + P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) + P^{-1}F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \dots \quad (4.6)$$

También tenemos,

$$\begin{aligned} D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) &= (Py)^T D^2F(x_0, \mu_0)(Py) \\ F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) &= \alpha^T F_{\mu x}(x_0, \mu_0)Py \end{aligned}$$

Definición 4.2.1. Dados $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_n \end{pmatrix}$ y $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times (r \times s)}$, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n \end{pmatrix}$, donde $L_i \in$

$\mathbb{R}^{r \times s}$, definimos el producto

$$\nu \bullet \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \nu_i L_i.$$

Entonces, si definimos $q_i = (q_{i1}, q_{i2})^T$ para $i = 1, 2$, observemos que

$$\begin{aligned} P^{-1} D^2 F(x_0, \mu_0)(Py, Py) &= \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (Py)^T D^2 F_1(x_0, \mu_0) Py \\ (Py)^T D^2 F_2(x_0, \mu_0) Py \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n=2} q_{1i} (Py)^T D^2 F_i(x_0, \mu_0) Py \\ \sum_{i=1}^{n=2} q_{2i} (Py)^T D^2 F_i(x_0, \mu_0) Py \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (Py)^T \sum_{i=1}^{n=2} q_{1i} D^2 F_i(x_0, \mu_0) Py \\ (Py)^T \sum_{i=1}^{n=2} q_{2i} D^2 F_i(x_0, \mu_0) Py \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (Py)^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) Py \\ (Py)^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) Py \end{pmatrix} \\ &= [(P^{-1} \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P)](y, y). \end{aligned}$$

De manera similar,

$$P^{-1} F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) = [(P^{-1} \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))P](\alpha, y).$$

Por lo tanto, el sistema puede ser escrito como el sistema extendido

$$\dot{y} = Jy + P^{-1} F_{\mu}(x_0, \mu_0)\alpha + \mathcal{F}(y, \alpha) \quad (4.7)$$

donde

$$\mathcal{F}(y, \alpha) = \frac{1}{2} [(P^{-1} \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P)](y, y) + [(P^{-1} \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)), P](\alpha, y) + \dots$$

Lema 4.2.1. Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

que satisface las condiciones de no hiperbolicidad $H1$, $H2$) en el punto de equilibrio (x_0, μ_0) . Entonces la dinámica en la variedad central biparametrizada en el punto de equilibrio $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$, está dada por

$$\dot{y} = Jy + R_0\alpha + R_1(\alpha, y) + \frac{1}{2}R_2(y, y) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|y, \alpha|^3) \quad (4.8)$$

donde

$$R_0 = P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0), \quad (4.9)$$

$$R_1 = P^{-1} \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)P, \quad (4.10)$$

$$R_2 = P^{-1} \bullet D^2F(x_0, \mu_0)(P, P). \quad (4.11)$$

4.3. Teorema Principal

En esta sección se prueba el teorema principal del capítulo. La prueba se divide en una serie de lemas, con los cuales el sistema (4.8) se transforma en la deformación versal de el caso genérico de la bifurcación Takens-Bogdanov.

4.3.1. Equivalencia topológica entre la variedad central y la deformación versal

Primero reescribimos (4.2) como

$$\dot{z} = Jz + \beta_1 e_2 + \beta_2 z_1 e_2 + h_0(z), \quad (4.12)$$

donde $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $h_0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}$.

Luego, nuestro objetivo es encontrar un cambio de coordenadas

$$y = z + L_0\alpha + L_1(\alpha, z) + \frac{1}{2}L_2(z, z),$$

donde $L_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{2 \times (2 \times 2)}$, tal que (4.8) sea transformado en (4.12). Observemos que

$$\dot{y} = (I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)\dot{z} \iff \dot{z} = (I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)^{-1}\dot{y}$$

pero para $|z| \approx 0$, tenemos que $(I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)^{-1} = I - \alpha^T L_1 - z^T L_2 + \dots$, entonces,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (I - \alpha^T L_1 - z^T L_2 + \dots)(J(z + L_0\alpha + L_1(\alpha, z) + \frac{1}{2}L_2(z, z)) \\ &\quad + R_0\alpha + R_1(\alpha, z + L_0\alpha + L_1(\alpha, z) + \frac{1}{2}L_2(z, z)) \\ &\quad + \frac{1}{2}R_2(z + L_0\alpha + L_1(\alpha, z) + \frac{1}{2}L_2(z, z), z + L_0\alpha + L_1(\alpha, z) + \frac{1}{2}L_2(z, z))) \end{aligned}$$

haciendo una serie de cálculos obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{z} = & J(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) + R_0\alpha + \alpha^T R_1(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) \\
 & + \frac{1}{2}(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z)^T R_2(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z)^T \\
 & - \alpha^T L_1 J(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) - \alpha^T L_1 R_0\alpha \\
 & - \alpha^T L_1(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) R_1\alpha \\
 & - \frac{1}{2}\alpha^T L_1(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z)^T R_2(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) \\
 & - z^T L_2 J(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) - z^T L_2 R_0\alpha \\
 & - z^T L_2(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z)^T R_1\alpha \\
 & - \frac{1}{2}z^T L_2(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z)^T R_2(z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2}z^T L_2 z) + \dots
 \end{aligned}$$

agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{z} = & Jz + (JL_0 + R_0)\alpha + z^T(\frac{1}{2}R_2L_0 - L_2JL_0 - L_2R_0)\alpha + \\
 & + \alpha^T(JL_1 + R_1 + \frac{1}{2}L_0^T R_2 - L_1J)z + z^T(\frac{1}{2}JL_2 + \frac{1}{2}R_2 - L_2J)z \\
 & + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|z, \alpha|^3)
 \end{aligned}$$

Observación 4.3.1. *Los términos de la forma $z^T(*)\alpha$ se agrupan con los términos de la forma $\alpha^T(*)z$. A continuación se demuestran las equivalencias de los términos.*

$$\begin{aligned}
 z^T R_2 L_0 \alpha &= z^T \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{01} \\ L_{02} \end{pmatrix} \alpha \\
 &= z^T \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{01}\alpha \\ L_{02}\alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z^T R_{21}(L_0\alpha) \\ z^T R_{22}(L_0\alpha) \end{pmatrix} \\
 &= \alpha^T L_0^T R_2 z.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^T(L_2(JL_0 + R_0))\alpha &= z^T \left[\begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{01} \\ L_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{pmatrix} \right) \right] \alpha \\
&= z^T \left[\begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} L_{02} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{pmatrix} \right) \right] \alpha \\
&= z^T \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{02} + R_{01} \\ R_{02} \end{pmatrix} \alpha \\
&= z^T \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{02}\alpha + R_{01}\alpha \\ R_{02}\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z^T L_{21} \\ z^T L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{02}\alpha + R_{01}\alpha \\ R_{02}\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z^T L_{21}^1(L_{02} + R_{01})\alpha + z^T L_{21}^2(R_{02})\alpha \\ z^T L_{22}^1(L_{02} + R_{01})\alpha + z^T L_{22}^2(R_{02})\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha^T(L_{21}(L_{02} + R_{01}) + L_{21}R_{02})^T z \\ \alpha^T(L_{22}(L_{02} + R_{01}) + L_{22}R_{02})^T z \end{pmatrix} \\
&= \alpha^T \left[\begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{02} + R_{01} \\ R_{02} \end{pmatrix} \right]^T z \\
&= \alpha^T \left[\begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} L_{02} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{pmatrix} \right)^T \right] z \\
&= \alpha^T [L_2(JL_0 + R_0)]^T z \\
&= \alpha^T [(JL_0 + R_0)^T L_2^T] z
\end{aligned}$$

por lo tanto, nuestro sistema se reduce a

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= Jz + (JL_0 + R_0)\alpha + \alpha^T(JL_1 + R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J - (L_2(JL_0 + R_0))^T)z \\
&\quad + z^T(\frac{1}{2}JL_2 + \frac{1}{2}R_2 - L_2 J)z + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|z, \alpha|^3).
\end{aligned}$$

Definimos los siguientes términos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_0 &= JL_0 + R_0, \\
\tilde{R}_1 &= \bar{L}_1 + R_1 - L_1 J + L_0^T R_2 - \tilde{R}_0^T L_2, \\
\tilde{R}_2 &= \bar{L}_2 + R_2 - 2L_2 J,
\end{aligned}$$

con,

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix},$$

$$\bar{L}_0 = \begin{pmatrix} L_{02}^T \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{L}_1 = \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{L}_2 = \begin{pmatrix} L_{22} \\ 0 \end{pmatrix};$$

entonces, el sistema (4.8) se reduce a

$$\dot{z} = Jz + \tilde{R}_0\alpha + \alpha^T \tilde{R}_1 z + \frac{1}{2} z^T \tilde{R}_2 z + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|z, \alpha|^3) \quad (4.13)$$

Observación 4.3.2. *En el transcurso de las pruebas de los siguientes lemas, haremos uso del siguiente hecho elemental: Si la matriz $X = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ es dividida en dos columnas, entonces*

$$XJ = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X^1 \end{pmatrix}.$$

Los lemas a que continuación se presentan, demuestran que el sistema (4.8) se transforma en (4.13), por lo tanto (4.8) sufre la bifurcación Takens-Bogdanov.

Lema 4.3.1. *Existe L_0 tal que $\tilde{R}_0\alpha = \beta_1 e_2$.*

Prueba. Recordemos que $R_0 = P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} R_{01}^T \\ R_{02}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \\ q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix}$ y $L_0 = \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix}$. Sustituyendo valores en \tilde{R}_0 ,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0\alpha &= (JL_0 + R_0)\alpha \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \\ q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} \right] \alpha \\ &= \left[\begin{pmatrix} L_{02}^T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \\ q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} \right] \alpha \end{aligned}$$

si definimos $L_{02} = -F_\mu^T(x_0, \mu_0)q_1$ y $\beta_1 = q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha$, entonces

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ -q_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix}.$$

por lo tanto, el resultado se sigue. □

Observación 4.3.3. L_{01} aún permanece sin determinarse.

Lema 4.3.2. *Existe L_2 tal que $\frac{1}{2}z^T \tilde{R}_2 z = (az_1^2 + bz_1 z_2)e_2$.*

Prueba. Primero,

$$R_2 = \begin{pmatrix} (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P) \\ (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P) \end{pmatrix},$$

donde

$$(q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P) = \begin{pmatrix} p_1^T D_i p_1 & p_1^T D_i p_2 \\ p_2^T D_i p_1 & p_2^T D_i p_2 \end{pmatrix},$$

con $D_i = q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z^T \tilde{R}_2 z &= \frac{1}{2}z^T (\bar{L}_2 + R_2 - 2L_2 J) z \\ &= \frac{1}{2}z^T \left(\begin{pmatrix} L_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P) \\ (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P, P) \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} J \right) z \\ &= \frac{1}{2}z^T \begin{pmatrix} L_{22} + q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)(P, P) - 2L_{21} J \\ q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)(P, P) - 2L_{22} J \end{pmatrix} z \\ &= \frac{1}{2}z^T \begin{pmatrix} (l_{11}^2 + p_1^T D_1 p_1 & l_{12}^2 + p_1^T D_1 p_2 - 2l_{11}^1) \\ (l_{12}^2 + p_2^T D_1 p_1 & l_{22}^2 + p_2^T D_1 p_2 - 2l_{12}^1) \\ (p_1^T D_2 p_1 & p_1^T D_2 p_2 - 2l_{11}^2) \\ (p_2^T D_2 p_1 & p_2^T D_2 p_2 - 2l_{12}^2) \end{pmatrix} z \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (z_1 & z_2) \begin{pmatrix} l_{11}^2 + p_1^T D_1 p_1 & l_{12}^2 + p_1^T D_1 p_2 - 2l_{11}^1 \\ l_{12}^2 + p_2^T D_1 p_1 & l_{22}^2 + p_2^T D_1 p_2 - 2l_{12}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ (z_1 & z_2) \begin{pmatrix} p_1^T D_2 p_1 & p_1^T D_2 p_2 - 2l_{11}^2 \\ p_2^T D_2 p_1 & p_2^T D_2 p_2 - 2l_{12}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1^2 (l_{11}^2 + p_1^T D_1 p_1) + z_1 z_2 (l_{12}^2 + p_1^T D_1 p_2 - 2l_{11}^1 + l_{12}^2 p_2^T D_1 p_1) \\ + z_2^2 (l_{22}^2 + p_2^T D_2 p_2 - 2l_{12}^1) \\ z_1^2 (p_1^T D_2 p_1) + z_1 z_2 (p_1^T D_2 p_2 - 2l_{11}^2 + p_2^T D_2 p_1) + z_2^2 (p_2^T D_2 p_2 - 2l_{12}^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si definimos

$$L_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 + p_1^T D_1 p_2 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix}$$

$$L_{22} = \begin{pmatrix} -p_1^T D_1 p_1 & \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 & 2l_{12}^1 - p_2^T D_1 p_2 \end{pmatrix}$$

el resultado se sigue, con

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}p_1^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_1 \\ b &= p_1^T(q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_1 + p_1^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_2. \end{aligned}$$

□

Lema 4.3.3. *Existen L_{01} y L_{12} tales que $\alpha^T \tilde{R}_1 z = \beta_2 z_1 e_2$.*

Prueba. Recordemos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} \\ \tilde{R}_{12} \end{pmatrix} \\ &= \bar{L}_1 + R_1 - L_1 J + L_0^T R_2 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ &= \begin{pmatrix} L_{12} + R_{11} - L_{11} J + L_0^T R_{21} - \tilde{R}_0^T L_{21} \\ R_{12} - L_{12} J + L_0^T R_{22} - R_0^T L_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si definimos

$$L_{12} = L_{11} J - R_{11} - L_0^T R_{21} + \tilde{R}_0^T L_{21},$$

entonces

$$\tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{12} + L_0^T (R_{22} + R_{21} J) - R_0^T (L_{21} J + L_{22}) + R_{11} J \end{pmatrix}.$$

Usando la observación (4.3.2)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{12} &= (\tilde{R}_{12}^1 \mid \tilde{R}_{12}^2) \\ &= (R_{12}^1 + L_0^T R_{22}^1 - \tilde{R}_0^T L_{22}^1 \mid R_{11}^1 + R_{12}^2 + L_0^T (R_{21}^1 + R_{22}^2) - \tilde{R}_0^T (L_{21}^1 + L_{22}^2)). \end{aligned}$$

Ahora de (4.10) y (4.11), se sigue que para $i, j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} R_{1i}^j &= (q_i \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))p_j \\ R_{2i}^j &= \begin{pmatrix} p_1^T D_i p_j \\ p_2^T D_i p_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que $\tilde{R}_0^T = (0 \mid R_{02})$, donde $R_{02} = F_\mu^T(x_0, \mu_0)q_2$.

La finalidad de expresar \tilde{R}_{12} en columnas, es para definir L_{01} y l_{12}^1 tal que el término $\tilde{R}_{12}^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{12}^2 &= R_{11}^1 + R_{12}^2 + L_0^T(R_{21}^1 + R_{22}^2) - \tilde{R}_0^T(L_{21}^1 + L_{22}^2) \\
&= R_{11}^1 + R_{12}^2 + (L_{01} \quad L_{02}) \left[\begin{pmatrix} p_1^T D_1 p_1 \\ p_2^T D_1 p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^T D_2 p_2 \\ p_2^T D_2 p_2 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - (0 \quad R_{02}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 + p_1^T D_1 p_2 + \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 \\ l_{12}^1 + 2l_{12}^1 - p_2^T D_1 p_2 \end{pmatrix} \\
&= R_{11}^1 + R_{12}^2 + L_{01}(p_1^T D_1 p_1 + p_1^T D_2 p_2) \\
&\quad + L_{02}(p_2^T D_1 p_1 + p_2^T D_2 p_2) - R_{02}(l_{12}^1 + 2l_{12}^1 - p_2^T D_1 p_2).
\end{aligned}$$

definiendo

$$L_{01} = \frac{1}{b}((l_{12}^1 + l_{22}^2)R_{02} - (p_2^T D_1 p_1 + p_2^T D_2 p_2)L_{02} - R_{11}^1 - R_{12}^2),$$

y

$$l_{12}^1 = \frac{1}{3}p_2^T D_1 p_1 + p_2,$$

se sigue que

$$\tilde{R}_{12} = (R_{12}^1 + L_0^T R_{22}^1 - \tilde{R}_0^T L_{22}^1 \quad | \quad 0).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{12}^1 &= R_{12}^1 + L_0^T R_{22}^1 - \tilde{R}_0^T L_{22}^1 \\
&= R_{12}^1 + (L_{01} \quad L_{02}) \begin{pmatrix} p_1^T D_2 p_1 \\ p_2^T D_2 p_1 \end{pmatrix} - (0 \quad R_{02}) \begin{pmatrix} -p_1^T D_1 p_1 \\ \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 \end{pmatrix} \\
&= R_{12}^1 + L_{01} p_1^T D_2 p_1 + L_{02} p_2^T D_2 p_1 - \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 R_{02} \\
&= R_{12}^1 + \frac{2a}{b}((p_2^T D_1 p_1 + p_2^T D_2 p_2)R_{01} + (l_{12}^1 + l_{22}^2)R_{02} - R_{11}^1 - R_{12}^2) \\
&\quad - p_2^T D_2 p_1 R_{01} - \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 R_{02} \\
&= (q_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))p_1 + \frac{2a}{b}(p_2^T D_1 p_1 + p_2^T D_2 p_2)R_{01} + \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 R_{02} \\
&\quad - \frac{2a}{b}(R_{11}^1 + R_{12}^2) - p_2^T D_2 p_1 R_{01} - \frac{1}{2} p_2^T D_2 p_2 R_{02}
\end{aligned}$$

reescribiendo \tilde{R}_{12}^1 en términos del campo original obtenemos,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{12}^1 &= \left[\frac{2a}{b} p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\
&\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 (q_i \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_i + (q_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_1, \right.
\end{aligned}$$

esto es,

$$\alpha^T \tilde{R}_1 z = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^T \tilde{R}_{12}^1 z_1 \end{pmatrix} = (\alpha^T \tilde{R}_{12}^1) z_1 e_2,$$

entonces, si definimos $\beta_2 = \alpha^T \tilde{R}_{12}^1$, el resultado se sigue. \square

Antes de establecer el teorema principal, renombramos a R_{12} y R_{02}

$$\begin{aligned} S_1 &= F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_2, \\ S_2 &= \begin{aligned} & \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\ & \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \right. \\ & \left. - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 (q_i \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_i + (q_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_1 \right] \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Además, para desdoblar la bifurcación doble cero de la variedad central, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} S_1^T(\mu - \mu_0) \\ S_2^T(\mu - \mu_0) \end{pmatrix}$$

debe de tener rango 2, es decir, S_1 y S_2 deben de ser linealmente independientes. Entonces como consecuencia de los lemas 4.3.1-4.3.3 podemos establecer ahora el resultado principal.

Teorema 4.3.1. *Dado el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (4.15)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}^2$, tal que, existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, que satisface las condiciones

$$H1) F(x_0, \mu_0) = 0$$

$$H2) \sigma[DF(x_0, \mu_0)] = \{\lambda_{1,2} = 0\} \quad (\text{no hiperbolicidad})$$

$$H3) ab \neq 0 \quad (\text{no degeneracidad})$$

$$H4) S_1 \text{ y } S_2 \text{ son linealmente independientes,} \quad (\text{transversalidad})$$

donde

$$a = \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1,$$

$$b = p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2,$$

donde p_i y q_j son vectores propios derechos e izquierdos respectivamente, asociados al valor propio $\lambda = 0$ y S_1, S_2 son dados por (4.14). Entonces la dinámica sobre la variedad

central del sistema (4.15) en $x = x_0$ y $\mu \approx \mu_0$, el cual es dado por (4.8), es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + az_1^2 + bz_1 z_2,\end{aligned}$$

donde $\beta_1 = S_1^T(\mu - \mu_0)$ y $\beta_2 = S_2^T(\mu - \mu_0)$.

Capítulo 5

La equivalencia entre dos análisis: Kuznetsov y Formas bilineales

En los capítulos anteriores se presenta la bifurcación de Takens-Bogdanov desde dos diferentes puntos de vista, uno es el analizado en el capítulo 3 y el otro en el capítulo 4. La finalidad de este capítulo es demostrar que ambos puntos de vista son equivalentes. Por tal motivo retomaremos los teoremas que ambos nos presentan.

Teorema 5.0.2 (Kuznetsov). *Supongamos que un sistema en el plano*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

donde f es suave, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con dos valores propios cero

$$\lambda_{1,2}(0) = 0.$$

Asumimos que las siguientes condiciones de generacidad se satisfacen:

K1) La matriz jacobiana $A(0) = f_x(0, 0) \neq 0$;

K2) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$;

K3) $b_{20} \neq 0$;

K4) El mapeo

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right), \det \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right) \right)$$

es regular en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Entonces existen transformaciones suaves e invertibles de variables en función de parámetros, una reparametrización en el tiempo que preserve la dirección y cambios suaves de parámetros invertibles, que en conjunto reducen el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + \mathcal{O}(\|\eta\|^3) \end{aligned}$$

donde

$$s = \operatorname{sgn} \left(\frac{a_{20}(0) + b_{11}(0)}{b_{20}(0)} \right) = \pm 1.$$

Teorema 5.0.3 (Carrillo et. al). *Dado el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (5.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}^2$, tal que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ que satisface las condiciones

$$H1) F(x_0, \mu_0) = 0$$

$$H2) \sigma[DF(x_0, \mu_0)] = \{\lambda_{1,2} = 0\} \quad (\text{no hiperbolicidad})$$

$$H3) ab \neq 0 \quad (\text{no degeneracidad})$$

$$H4) S_1 \text{ y } S_2 \text{ son linealmente independientes,} \quad (\text{transversalidad})$$

donde

$$a = \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1,$$

$$b = p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2,$$

donde p_i y q_j son vectores propios derechos e izquierdos respectivamente, asociados al valor propio $\lambda = 0$ y S_1 , y S_1 , S_2 son dados por (4.14). Entonces la dinámica sobre la variedad central del sistema (4.15) en $x = x_0$ y $\mu \approx \mu_0$, el cual es dado por (4.8), es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2, \end{aligned}$$

donde $\beta_1 = S_1^T(\mu - \mu_0)$ y $\beta_2 = S_2^T(\mu - \mu_0)$.

A continuación demostraremos la equivalencia entre los teoremas. En primer lugar notemos que K1) es equivalente a H1) y H2), los cuales satisfacen las condiciones de no-hiperbolicidad de nuestro sistema, por lo cual no es necesario hacer ningún tipo de cálculos. Lo interesante de nuestro problema se encuentra en las siguientes condiciones.

Lema 5.0.4. *K2) y K3) son equivalentes a H3).*

Prueba H3) $ab \neq 0$, donde

$$a = \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1,$$

$$b = p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2,$$

y K2) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$, K3) $b_{20} \neq 0$.

Comparando la expansión en serie de Taylor de los sistemas (3.11) y de (4.7) se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} a_{11}(0) &= p_1^T(q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_2, \\ a_{20}(0) &= p_1^T(q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_1, \\ a_{02}(0) &= p_2^T(q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_2, \\ b_{11}(0) &= p_1^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_2, \\ b_{20}(0) &= p_1^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_1, \\ b_{02}(0) &= p_2^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_2. \end{aligned}$$

donde a se asocia con q_1 , b se asocia con q_2 , i se asocia con p_1 y j se asocia con p_2 . Ahora describimos a y b en términos de a_{ij} y b_{ij} , es decir,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}p_1^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_1 \\ &= \frac{1}{2}b_{20}(0), \\ b &= p_1^T(q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_1 + p_1^T(q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0))p_2 \\ &= a_{20}(0) + b_{11}(0). \end{aligned}$$

Retomando las hipótesis tenemos que, $ab \neq 0$, $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$ y $b_{20} \neq 0$, entonces

$$ab = \left(\frac{1}{2}b_{20}(0)\right)(a_{20}(0) + b_{11}(0)) \neq 0$$

□

Observación 5.0.4. *Notemos que,*

$$s = \text{sgn}[2ab] = \text{sgn}[b_{20}(0)(a_{20}(0) + b_{11}(0))] = \pm 1,$$

que se toma en cuenta en el teorema de Kuznetsov.

Lema 5.0.5. $K_4)$ es equivalente a $H_4)$

Prueba. Recordemos que dice la hipótesis, primero $H_4)$ S_1 y S_2 son linealmente independientes, es decir, el determinante de la matriz formada por los vectores S_1 y S_2 es diferente de cero,

$$\det[S_1 \ S_2] \neq 0$$

Recordemos quien es S_1 ,

$$S_1 = F^T(x_0, \mu_0)q_2 = \begin{pmatrix} F_{\mu_1}^1(x_0, \mu_0) & F_{\mu_1}^2(x_0, \mu_0) \\ F_{\mu_2}^1(x_0, \mu_0) & F_{\mu_2}^2(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2^1 \\ q_2^2 \end{pmatrix}$$

realizando el producto de S_1 , obtenemos

$$S_1 = \begin{pmatrix} \langle F_{\mu 1}(x_0, \mu_0), q_2 \rangle \\ \langle F_{\mu 2}(x_0, \mu_0), q_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Por definición, $b_{ij}(\alpha) = \langle f(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_1 \rangle|_{y=0}$, si se define

$$b_{00\alpha_i}(\alpha) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial y_1^i \partial y_2^j} \langle f_{\alpha_i}(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_1 \rangle|_{y=0}$$

donde $i = 1, 2$, entonces S_1 es equivalente a

$$S_1 = \begin{pmatrix} b_{00\alpha 1} \\ b_{00\alpha 2} \end{pmatrix}.$$

Análogamente, $a_{00\alpha_i}$ se define como

$$a_{00\alpha_i}(\alpha) = \langle f_{\alpha_i}(y_1 v_0 + y_2 v_1), w_0 \rangle|_{y=0}.$$

Siguiendo el razonamiento anterior para S_2 .

$$\begin{aligned} S_2 &= \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\ &\quad - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 F_{\mu}^T(x_0, \mu_0) q_1 \\ &\quad \left. - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 (q_i \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_i + (q_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_1 \right]. \end{aligned}$$

entonces en términos de a_{ij} y b_{ij} se reescribe como,

$$bS_2 = \begin{bmatrix} (2a(a_{11} + b_{02}) - bb_{11})a_{00\alpha 1} - 2a(a_{10\alpha 1} + b_{01\alpha 1}) - bb_{10\alpha 1} \\ (2a(a_{11} + b_{02}) - bb_{11})a_{00\alpha 2} - 2a(a_{10\alpha 2} + b_{01\alpha 2}) - bb_{10\alpha 2} \end{bmatrix}.$$

Ahora formamos la matriz con entradas S_1 y bS_2

$$FB = \begin{bmatrix} b_{00\alpha 1} & (2a(a_{11} + b_{02}) - bb_{11})a_{00\alpha 1} - 2a(a_{10\alpha 1} + b_{01\alpha 1}) - bb_{10\alpha 1} \\ b_{00\alpha 2} & (2a(a_{11} + b_{02}) - bb_{11})a_{00\alpha 2} - 2a(a_{10\alpha 2} + b_{01\alpha 2}) - bb_{10\alpha 2} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} |FB| &= b_{00\alpha 1} a_{00\alpha 2} b_{20} a_{11} + b_{00\alpha 1} a_{00\alpha 2} b_{20} b_{02} - b_{00\alpha 1} a_{00\alpha 2} b_{11} a_{20} - b_{00\alpha 1} a_{00\alpha 2} b_{11}^2 \\ &\quad - b_{00\alpha 1} b_{20} a_{10\alpha 2} - b_{00\alpha 1} b_{20} b_{01\alpha 2} + b_{00\alpha 1} b_{10\alpha 2} a_{20} + b_{00\alpha 1} b_{10\alpha 2} b_{11} \\ &\quad - b_{00\alpha 2} a_{00\alpha 1} b_{20} a_{11} - b_{00\alpha 2} a_{00\alpha 1} b_{20} b_{02} + b_{00\alpha 2} a_{00\alpha 1} b_{11} a_{20} + b_{00\alpha 2} a_{00\alpha 1} b_{11}^2 \\ &\quad + b_{00\alpha 2} b_{20} a_{10\alpha 1} + b_{00\alpha 2} b_{20} b_{01\alpha 1} - b_{00\alpha 2} b_{10\alpha 1} a_{20} - b_{00\alpha 2} b_{10\alpha 1} b_{11} \end{aligned} \quad (5.2)$$

A continuación recordemos lo que nos dice la otra hipótesis, K4) El mapeo

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right), \det \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right) \right)$$

es regular en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$, es decir, el determinante de la matriz formada por los vectores del mapeo en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$ es diferente de cero,

$$\det(DM) \neq 0,$$

donde

$$MK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a_{00\alpha 1} & a_{00\alpha 2} \\ 0 & 0 & b_{00\alpha 1} & b_{00\alpha 2} \\ a_{20} + b_{11} & a_{11} + b_{02} & a_{10\alpha 1} + b_{01\alpha 1} & a_{10\alpha 2} + b_{01\alpha 2} \\ -b_{20} & -b_{11} & -b_{10\alpha 1} & -b_{10\alpha 2} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} |MK| &= -b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{20}a_{11} - b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{20}b_{02} + b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{11}a_{20} + b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{11}^2 \\ &+ b_{00\alpha 1}b_{20}a_{10\alpha 2} + b_{00\alpha 1}b_{20}b_{01\alpha 2} - b_{00\alpha 1}b_{10\alpha 2}a_{20} - b_{00\alpha 1}b_{10\alpha 2}b_{11} \\ &+ b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{20}a_{11} + b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{20}b_{02} - b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{11}a_{20} - b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{11}^2 \\ &- b_{00\alpha 2}b_{20}a_{10\alpha 1} - b_{00\alpha 2}b_{20}b_{01\alpha 1} + b_{00\alpha 2}b_{10\alpha 1}a_{20} + b_{00\alpha 2}b_{10\alpha 1}b_{11}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Entonces, es natural hacernos las siguientes preguntas; ¿cuáles son las soluciones, tales que $|FB| = 0$?, ¿éstas soluciones son las mismas que hacen que $|MK| = 0$?, ¿podemos hablar de un si y sólo si?, es decir, ¿las soluciones que hacen que $|MK| = 0$ son las mismas que hacen que $|FB| = 0$?

A continuación se presentan las tres soluciones tales que $|FB| = 0$, las cuales han sido calculadas con el software Maple12;

la primera es cuando,

$$\begin{aligned} b_{01\alpha 2} &= -\frac{1}{b_{00\alpha 1}b_{20}}(-b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{20}a_{11} - b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{20}b_{02} + b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{11}a_{20} \\ &+ b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{11}^2 + b_{00\alpha 1}b_{20}a_{10\alpha 2} - b_{00\alpha 1}b_{10\alpha 2}a_{20} - b_{00\alpha 1}b_{10\alpha 2}b_{11} \\ &+ b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{20}a_{11} + b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{20}b_{02} - b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{11}a_{20} - b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{11}^2 \\ &- b_{00\alpha 2}b_{20}a_{10\alpha 1} - b_{00\alpha 2}b_{20}b_{01\alpha 1} + b_{00\alpha 2}b_{10\alpha 1}a_{20} + b_{00\alpha 2}b_{10\alpha 1}b_{11}), \end{aligned}$$

la segunda cuando,

$$b_{00\alpha 1} = 0, b_{00\alpha 2} = 0,$$

y la última cuando,

$$b_{00\alpha 1} = 0,$$

$$b_{01\alpha 1} = \frac{1}{b_{20}}(a_{00\alpha 1}b_{20}a_{11} + a_{00\alpha 1}b_{20}b_{02} - a_{00\alpha 1}b_{11}a_{20} - a_{00\alpha 1}b_{11}^2 - b_{20}a_{10\alpha 1} + b_{10\alpha 1}a_{20} + b_{10\alpha 1}b_{11}).$$

Dichas soluciones son también soluciones de $|MK|$, es decir, $|MK|$ evaluado en cada una de estas soluciones es cero, por lo tanto, las soluciones tales que $|FB| = 0$ hacen que el $|MK| = 0$.

Análogamente, para las soluciones del $|MK|$ y utilizando el software Maple12 obtenemos las siguientes tres soluciones, la primera es cuando,

$$\begin{aligned} b_{01\alpha 2} = & -\frac{1}{b_{00\alpha 1}b_{20}}(-b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{20}a_{11} - b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{20}b_{02} + b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{11}a_{20} \\ & + b_{00\alpha 1}a_{00\alpha 2}b_{11}^2 + b_{00\alpha 1}b_{20}a_{10\alpha 2} - b_{00\alpha 1}b_{10\alpha 2}a_{20} - b_{00\alpha 1}b_{10\alpha 2}b_{11} \\ & + b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{20}a_{11} + b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{20}b_{02} - b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{11}a_{20} - b_{00\alpha 2}a_{00\alpha 1}b_{11}^2 \\ & - b_{00\alpha 2}b_{20}a_{10\alpha 1} - b_{00\alpha 2}b_{20}b_{01\alpha 1} + b_{00\alpha 2}b_{10\alpha 1}a_{20} + b_{00\alpha 2}b_{10\alpha 1}b_{11}), \end{aligned}$$

la segunda es,

$$b_{00\alpha 1} = 0, b_{00\alpha 2} = 0,$$

y la última esta dada por,

$$b_{00\alpha 1} = 0,$$

$$b_{01\alpha 1} = \frac{1}{b_{20}}(a_{00\alpha 1}b_{20}a_{11} + a_{00\alpha 1}b_{20}b_{02} - a_{00\alpha 1}b_{11}a_{20} - a_{00\alpha 1}b_{11}^2 - b_{20}a_{10\alpha 1} + b_{10\alpha 1}a_{20} + b_{10\alpha 1}b_{11}).$$

Estas tres soluciones son también soluciones de $|FB|$, es decir, evaluando cada una de estas soluciones en $|FB| = 0$, por lo tanto, las soluciones tales que $|MK| = 0$ hacen que el $|FB| = 0$. Por lo tanto, hemos demostrado que las soluciones (únicas) de $|FB|$ son también soluciones de $|MK|$ y análogamente, las soluciones de $|MK|$ son soluciones de $|FB|$. Así el lema ha quedado demostrado. □

Por lo tanto, queda demostrada la equivalencia entre los teoremas de Kuznetsov y de las formas bilineales .

5.0.2. Teorema principal

Una vez demostrado los lemas anteriores, a continuación se presenta el resultado principal de este trabajo.

Teorema 5.0.4. *Dado el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}^2$ y F suficientemente suave, existe un punto $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, tal que las siguientes condiciones son equivalentes:

Condición de no hiperbolicidad

- 1) La matriz jacobiana $A(0) = f_x(0, 0) \neq 0$
- 2) $F(x_0, \mu_0) = 0$ y $\sigma[DF(x_0, \mu_0)] = \{\lambda_{1,2} = 0\}$ (caso no semisimple)

Condición de no degeneracidad

3) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$ y $b_{20} \neq 0$

4) $ab \neq 0$

Condición de transversalidad

5) El mapeo

$$(x, \alpha) \mapsto \left(f(x, \alpha), \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right), \det \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \right) \right)$$

es regular en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$.

6) S_1 y S_2 son linealmente independientes.

Capítulo 6

Un problema de aplicación

En este capítulo consideramos un sistema depredador-presa de tipo Gause con respuesta funcional no-monótona. Holling tipo 4. Este problema es analizado en [9]

6.1. Descripción del sistema

En la dinámica de poblaciones, una respuesta funcional del depredador a la densidad de la presa se refiere al cambio en la densidad de presa adjunta por unidad de tiempo por los depredadores como los cambios en la de densidad de presa. El modelo más simple de respuesta funcional se obtiene asumiendo que en el tiempo disponible para la búsqueda, el cambio total en la concentración de la densidad/sustrato presa es proporcional a la concentración de densidad/sustrato presa. Por tanto, si $x(t)$ representa la concentración densidad sustrato/presa en un tiempo t , entonces la respuesta funcional es $ax(t)$, donde $a > 0$ constante.

Consideremos el sistema dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xg(x, k) - yp(x) \\ \dot{y} &= (-\delta + q(x))y,\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde $g(x, k) = r(1 - \frac{x}{k})$, $p(x) = \frac{x}{\mu_1 + x^2}$ y $q(x) = \frac{x\mu_2}{\mu_1 + x^2}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; r, k, δ constantes positivas, μ_1, μ_2 parámetros, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\dot{X} = f(X, \mu)\tag{6.2}$$

donde $f(X, \mu) = \begin{pmatrix} xr(1 - \frac{x}{k}) - y(\frac{x}{\mu_1 + x^2}) \\ (-\delta + \frac{x\mu_2}{\mu_1 + x^2})y \end{pmatrix}$.

Entonces, nos preguntamos, ¿(6.2) experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov?, para responder a esta pregunta tendríamos que verificar que:

- Existe $(X_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(X_0, \mu_0) = 0$ y $Df(X_0, \mu_0) \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $a \cdot b \neq 0$,
- $|S_1 S_2| \neq 0$

Para comenzar, el equilibrio de interés del sistema esta dado por $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ \frac{r}{k} \end{pmatrix}$ y $\mu_0 = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{4} \\ k\delta \end{pmatrix}$.

De (6.2), obtenemos

$$Df(X, \mu) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{x}{k}) - \frac{rx}{k} - \frac{y}{\mu_1 + x^2} + \frac{2x^2 y}{(\mu_1 + x^2)^2} & \frac{x}{\mu_1 + x^2} \\ y(\frac{\mu_2}{\mu_1 + x^2} - \frac{2\mu_2 x^2}{(\mu_1 + x^2)^2}) & \frac{\mu_2 x}{\mu_1 + x^2} - \delta \end{pmatrix}$$

y sustituyendo X_0, μ_0 en $Df(X, \mu)$ tenemos el siguiente resultado,

$$Df(X_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $Df(X_0, \mu_0) \approx J$. Por lo tanto hemos demostrado la primera hipótesis del teorema, es decir, que el sistema (6.2) tiene al menos un equilibrio no-hiperbólico.

Observación 6.1.1. *Para poder demostrar analíticamente que el sistema experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov necesitaremos una serie de cálculos de vectores propios y segundas derivadas, que a continuación se presentan, ya que estos nos servirán para calcular, a , b y los vectores S_1 y S_2 y así poder verificar las hipótesis restantes.*

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix};$$

$$q_1^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \end{pmatrix},$$

$$q_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix};$$

donde p_1, p_2 son los vectores propios asociados a los valores propios de $Df(X_0, \mu_0)$ y q_1^T, q_2^T son los vectores propios izquierdos generalizados de $Df(X_0, \mu_0)$.

$$D^2 f(X, \mu) = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{cc} -\frac{2r}{k} + \frac{6xy}{(\mu_1+x^2)^2} - \frac{8x^3y}{(\mu_1+x^2)^3} & -\frac{1}{\mu_1+x^2} + \frac{2x^2}{(\mu_1+x^2)^2} \\ -\frac{1}{\mu_1+x^2} + \frac{2x^2}{(\mu_1+x^2)^2} & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} y \left(-\frac{6\mu_2x}{(\mu_1+x^2)^2} + \frac{8\mu_2x^3}{(\mu_1+x^2)^3} \right) & \frac{\mu_2}{\mu_1+x^2} - \frac{2\mu_2x^2}{(\mu_1+x^2)^2} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1+x^2} - \frac{2\mu_2x^2}{(\mu_1+x^2)^2} & 0 \end{array} \right) \end{pmatrix},$$

$$D^2 f(X_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix};$$

$$Df_\mu(X, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{xy}{(\mu_1+x^2)^2} & 0 \\ -\frac{xy\mu_2}{(\mu_1+x^2)^2} & \frac{xy}{\mu_1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$f_{\mu x}(X, \mu) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y}{(\mu_1+x^2)^2} - \frac{4x^2y}{\mu_1+x^2} & \frac{x}{(\mu_1+x^2)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{y\mu_2}{(\mu_1+x^2)^2} + \frac{4y\mu_2x^2}{(\mu_1+x^2)^3} & \frac{\mu_2x}{(\mu_1+x^2)^2} \\ \frac{y}{\mu_1+x^2} - \frac{2x^2y}{(\mu_1+x^2)^2} & \frac{x}{\mu_1+x^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$f_{\mu x}(X, \mu) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k^2} & \frac{2}{k^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{r\delta}{k} & -\frac{2\delta}{k^2} \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo términos obtenemos,

$$a = \frac{1}{2} (1 \ 0) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{r\delta}{2k}$$

análogamente para b

$$b = (1 \ 0) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 \ 0) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} = -\frac{r}{k},$$

por lo tanto hemos demostrado la segunda hipótesis de nuestro teorema.

Para poder afirmar entonces que el sistema experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov, nos resta solo demostrar que $|S_1 S_2| \neq 0$, recordemos que $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} S_1 &= f_\mu^T(X_0, \mu_0) q_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r}{2k} & -\frac{r\delta}{2} \\ 0 & \frac{rk}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r\delta}{2k} \\ -\frac{r}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right. \\ &\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 (q_i \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_i + (q_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) p_1 \right] \\ &= (-\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} \\ &\quad + (1 \quad -k) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} \\ &\quad - (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{r}{2k} & -\frac{r\delta}{2} \\ 0 & \frac{rk}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \right] \\ &= (-\delta \left(-\frac{(r+\delta r)}{k} + \frac{\delta r}{k} \right) - \frac{\delta r}{k}) \begin{pmatrix} \frac{r-\delta r}{2k} \\ \frac{r}{4} \end{pmatrix} + \delta \left(\begin{pmatrix} \frac{\delta r-1}{k^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{(\delta r+2\delta)}{k^2} \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -\frac{\delta r}{k^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\delta(1+2\delta+r)}{k^2} \\ -\frac{\delta}{k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces $|S_1 S_2| \neq 0$, donde

$$|S_1 S_2| = -\frac{r\delta(4\delta + 1 + r)}{4k^2}$$

por lo tanto, hemos demostrado la tercera y última hipótesis de nuestro teorema, así queda demostrado que efectivamente el sistema (6.2) experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov, todo esto de manera analítica.

Nota 6.1.1. *Los cálculos que se presentan en este capítulo se han realizado con el software Maple al igual que los retratos fase del sistema (6.2).*

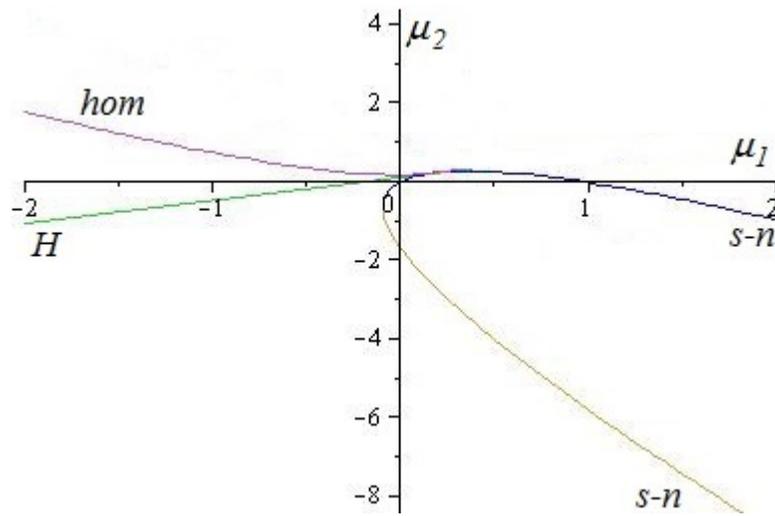
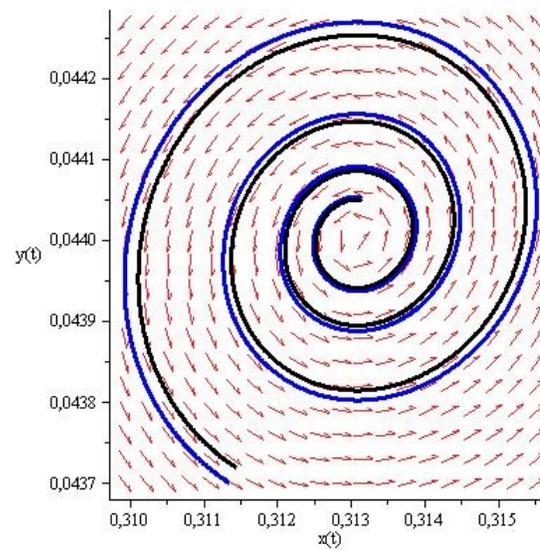


Figura 6.1: Diagrama de Bifurcación

Figura 6.2: Foco inestable, con valores en $\mu_1 = -0,01184375000$ y $\mu_2 = 0,002941176470$, mostrado en el plano x_1x_2 .

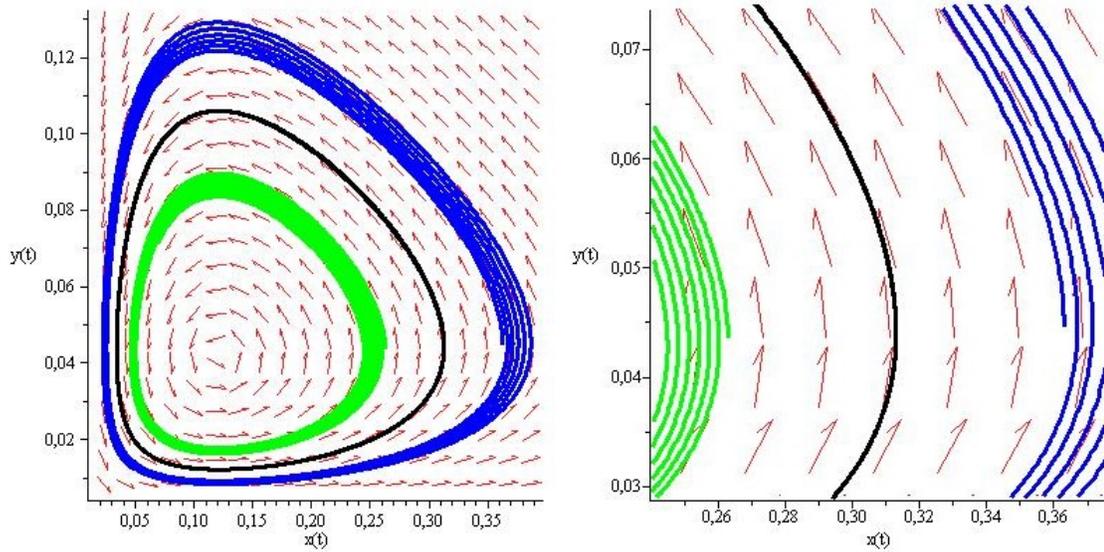


Figura 6.3: Ciclo límite inestable, con valores en $\mu_1 = -0,000625000000$ y $\mu_2 = 0,05573529411$, mostrado en el plano x_1x_2 .

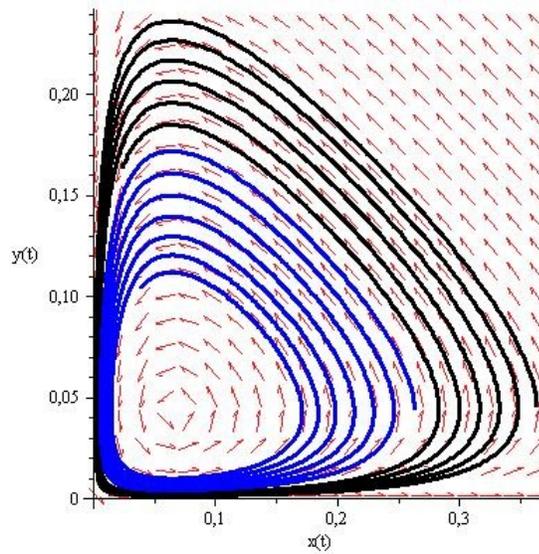


Figura 6.4: Foco estable, con valores en $\mu_1 = -0,03125000000$ y $\mu_2 = 0,1470588235$, mostrado en el plano x_1x_2 .

Conclusiones

Existen diversos análisis de la bifurcación doble cero, tal vez unos más complejos que otros. En este trabajo se han analizado dos puntos de vista, que se valen de herramientas diferentes para demostrar que un sistema en el plano experimenta dicha bifurcación. Kuznetsov en su trabajo, ha demostrado que haciendo cambios en la coordenadas, parámetros y reparametrizaciones en el tiempo, un sistema sea topológicamente equivalente a la deformación versal que en 1975 es propuesta por el matemático R.I. Bogdanov. Carrillo et. al. siguiendo la filosofía de Kuznetsov pero con otro tipo de herramientas han demostrado que un sistema experimenta dicha bifurcación.

Hemos realizado un estudio de los diferentes análisis que han realizado sobre la bifurcación Takens-Bogdanov, todo esto para poder demostrar que a pesar de los diferentes métodos que presentan los autores los resultados que se obtienen son los mismos, a veces pueden variar según los parámetros que se utilizan, esto se ve reflejado en los retratos fase de los sistemas que se estudian en cada uno de estos análisis.

Como consecuencia nos preguntamos,

¿Es posible demostrar con el tipo de herramientas empleadas en los capítulos 3 y 4 que un sistema $\dot{x} = f(x, \alpha)$ que satisface las condiciones de bifurcación, es topológicamente equivalente a la deformación versal que proporciona Takens?

De no ser posible, ¿cuáles son las restricciones que existen o bien que se debería de modificar para poder emplearlas?

Con respecto a la hipótesis K4), ¿por qué no elegir $\det \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \neq 0$?, ¿Cuáles son sus diferencias?

¿Que pasaría si estableciéramos $\det \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \neq 0$ como nuestra hipótesis de transversalidad?, ¿podríamos concluir que aun así los teoremas son equivalentes?

Sería muy interesante dar respuesta a los cuestionamientos anteriores. La elaboración de este trabajo ha tenido grandes satisfacciones personales como académicas ya que la mayor parte del tiempo es muy difícil comprender algunas metodologías de resolución, pero gracias

a las equivalencias demostradas se pueden optar por aquella que sea más amigable con el lector.

Bibliografía

- [1] Y.A. Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Sciences, Vol. 112. Springer. Second Edition. 2000.
- [2] F.A. Carrillo N., F. Verduzco G. y J. Delgado F. *Analysis of the Takens-Bogdanov Bifurcation on m -parameterized Vector Fields*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 20, No. 4 (2010) 995–1005.
- [3] F.A. Carrillo N., Análisis y Control de la Bifurcación Takens-Bogdanov. Tesis Doctoral. (2009).
- [4] Jack Carr. Applications of Centre Manifold Theory. Springer-Verlag. 1981.
- [5] S. Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Texts in Applied Mathematics. Vol. 2. Springer-Verlag. Second Edition. 2003.
- [6] J. Guckenheimer y P. Holmes. Nonlinear oscillations, Dynamical systems, y bifurcations of vector fields. Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag. 1993.
- [7] S. Chow, C. Li and D. Wang. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge University Press. 1994.
- [8] Arrowsmith, D. R. and Place, C. M.; An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge, Gran Bretana 1990.
- [9] Shigui Ruan y Dongmei Xiao. *Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*. SIAM J. Appl. Math., Vol. 61, No. 4 1445–1472. 2001.