UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Generalizaciones del Teorema Minimax y Equilibrios en Juegos de Suma Cero

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Max Emmanuel Mitre Báez

Director de tesis: Dr. Fernando Luque Vásquez

Hermosillo, Sonora, México 21 de Agosto de 2014

Este trabajo se desarrolló con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) dentro del proyecto "Aproximación, Estimación y Control en Sistemas Estocásticos", con número de referencia CB2010/154612, cuyo director es Dr. Adolfo Minjarez Sosa.

SINODALES

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

Dr. Jésus Adolfo Minjarez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

M. en C. María Teresa Robles Alcaraz
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

Dr. Oscar Vega Amaya
Universidad de Sonora, Hermosillo Sonora.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mi casa de estudios, la cual me ha dado tanto y me ha pedido tan poco. Gracias a la Universidad de Sonora y en particular al Departamente de Matemáticas por su apoyo y las facilidades que me brindó a lo largo de mis estudios.

Agradezco a la persona mas importante de mi vida, Mirna Gpe. Báez Dominguez, mi madre. Gracias por absolutamente todo, por su apoyo incondicional, por todo su esfuerzo para que yo pudiera estudiar sin preocupaciones, por enseñarme la importancia de la responsabilidad y el esfuerzo, por ser un gran ejemplo y mostrarme que cada día se puede ser mejor en todos los ambitos, es una gran mujer. Hay tantas cosas que agradecer y tan pocas palabras para expresar mi agradecimiento, no se donde estaría sin el respaldo y apoyo de mi madre. Gracias Mamá.

Muchas gracias a mi familia; a mi padre Alvaro Reyes, gracias por estar con nosotros, a mis hermanos, Jose Abraham y Mirna del Sol, por ser mi compañia y apoyo tantos años y a mi pequeña sobrina Sofía Belen, por haberme hecho crecer tanto como persona.

Gracias al Dr. Fernando Luque Vásquez, por tantos cursos que me impartió y que me ayudaron a crecer en el ámbito matemático, por buscar un tema que fuera de mi interes para esta tesis, resolver mis dudas e inquietudes y motivarme a seguir estudiando, éste trabajo no pudo haberse realizado sin usted. Pero sobre todo, gracias por su amistad.

Dra. Martha D. Guzmán Partida, gracias por impulsarme a continuar mis estudios fuera, ha sido una muy grata experiencia que creo que no habría podido disfrutar de no ser por esas charlas en mi último semestre como su alumno.

Agradezco a todos aquellos profesores que contribuyeron a mi formación, tanto académica como personal. Gracias por sus clases impartidas, el tiempo dedicado en su preparación, por compartir su experiencias, por su disposición fuera del tiempo de clases, entre otras cosas. Espero no decepcionarlos.

Muchas gracias a todos mis compañeros, una generación grande y muy agradable, compartimos desvelos, sufrimiento y alegría, a todos les deseo exito y seguirnos encontrando.

Por último, gracias a todas las personas que he conocido porque han influido en mi vida de alguna manera y todas esas experiencias me han llevado a ser lo que soy.

Índice general

Introducción

A lo largo de nuestra vida afrontamos situaciones en las que debemos de tomar decisiones. Pueden ser sencillas como escoger el calzado a utilizar o mas complicadas como escoger que carrera se quiere estudiar, no importa cual sea la desición que se esté tomando siempre se piensa en el impacto que tendrá el llevarla a cabo, por mas pequeño que sea dicho impacto. En veces creemos que dicho impacto es nulo y no damos mucha importancia a la desición y otras tantas podemos pasar días meditando algo.

En ocasiones las cosas se complican un poco más cuando no somos la única persona afectada por dichas decisiones. En estos casos pueden existir varias formas de organizar la toma de la desición, puede ser mediante un acuerdo, etc.

Sin embargo hay situaciones en las que competimos contra otras personas, un ejemplo es cuando varias personas aplican a un empleo y en ese caso no creo que se pueda llegar a algún acuerdo con los demas aplicantes. En las situaciones de competencia existen algunas en las que hay dos personas tomando decisiones y lo que una de ellas gane le será quitado al otro, formalmente esto se conoce como juegos de suma cero y será el objeto de estudio de ésta tesis.

Un concepto muy importante de la Teoría de Juegos es el de equilibrio. Una situación de equilibrio es cuando ambos jugadores encontraron una estrategia en la que no les conviene cambiar de acción, pues se arriesgan a perder una ganancia asegurada por lo que prefieren seguir llevando a cabo la misma acción.

El área de las matemáticas que se encarga de estudiar este tipo de situaciones de conflicto ó cooperación es conocida como Teoría de Juegos. En este trabajo nos centraremos en una clase de juegos: aquellos en los que intervienen dos *jugadores* y las decisiones de uno afectan directamente al otro.

Para el estudio de este tipo de juegos se verán los denominados resultados minimax, este tipo de resultados se puede explicar de la siguiente manera. Cuando un jugador toma una cierta desición debe esperar la acción del otro jugador para saber cual será el resultado del juego. Dado esto, antes de escoger su acción puede pensar en los posibles resultados negativos y escoger el menos malo, es decir, tener una cierta seguridad de que no perderá tanto o ver todos los posibles resultados favorables para escoger el que le asegure una ganancia. Por ejemplo, si tuviera que escoger entre un billete de quinientos pesos y un boleto de lotería que probablemente me de un millón de pesos, creo que aseguraría mi ganancia escogiendo el billete.

Uno de los primeros resultados minimax se atribuye a John von Neumann, quien junto con Oskar Morgenstern, es considerado el fundador de la Teoría de Juegos. Su resultado minimax dió pie a que varios matemáticos generalizaran su teorema y desarrollaran aún mas este campo de las matemáticas. Varios de estos resultados se presentan a lo largo de este trabajo.

El principal objetivo de este trabajo es presentar la relación existente entre dichos resultados minimax, todo llevado a cabo de una manera elegante y utilizando elementos básicos de Análisis Matemático y Topología. El trabajo sigue el esquema presentado en [5].

- Capítulo 1. Introduce a la Teoría de Juegos y resultados minimax.

  Primero presenta los conceptos básicos de juegos tal como son juego de suma cero, estrategia, equilibrio, entre otros.

  Se menciona lo que es considerado un resultado minimax y presenta dos resultados importante de este tipo, el de von Neumann y el de Wald, estableciendo después una relación entre ellos.

- Capítulo 2. El propósito de este capítulo es presentar dos resultados minimax más.

  Comienza recordando elementos de topología. Esto se hace para poder hablar de convergencia en la topología producto del espacio de las funciones real valuadas de un conjunto dado.

  Por último se presentan dos resultados minimax, el de Gwinner-Oettli y el de Kassay-Kolumbán.

- Capítulo 3. En este capitulo se presentan resultados minimax que usan fuertemente propiedades de convexidad.

  Comenzamos definiendo varios tipos de convexidad, después se presentan algunos resultados minimax y se relaciona a estos entre si y con los de los capítulos anteriores.

  Al final se encuentra una pequeña sección mostrando un contraejemplo a una afirmación dada en [4].

- Capítulo 4. El objetivo de éste capitulo es cerrar una cadena de equivalencias entre los resultados minimax presentados.

  Primero se presenta el Teorema de Separación Fuerte de Análisis Matemático, posteriormente se enuncian otros dos resultados minimax.

  El capítulo termina cerrando la cadena de equivalencias entre los 11 resultados presentados.

Capítulo 1

Resultados Minimax

1.1. Introducción

En este capítulo presentaremos los elementos necesarios para el estudio de los resultados minimax que usaremos a lo largo de todo el trabajo, los cuales están relacionados con la Teoría de Juegos. Por ejemplo, se introduce el concepto de equilibrio de un juego de suma cero y se muestra su relación con la teoría minimax. Así mismo presentamos un primer resultado, llamado Teorema Minimax de von Neumann y una generalización de éste.

La Teoría de Juegos es el análisis lógico de situaciones de conflicto ó cooperación, las cuales denominaremos *juegos*. Un juego es cualquier situación en la que:

1. Hay al menos dos participantes(jugadores). Un Jugador puede ser un individuo, pero también puede ser una entidad mas general como una empresa, una nación, etc.

2. Cada jugador tiene asignado un conjunto de acciones. En un juego cada jugador elige una acción, la cual puede o no ser conocida por los otros jugadores.

3. Las acciones elegidas por los jugadores determinan un *resultado* del juego.

4. A cada *resultado* del juego se le asocia un cierto *pago*, uno para cada jugador. Estos pagos representan el valor numérico del *resultado* para los diferentes jugadores.

En un juego cada jugador tiene cierto control sobre el resultado, pues su decisión lo afecta; sin embargo también lo hacen las decisiones de los demás jugadores, aquí es donde entra la situación de conflicto o cooperación.

La Teoría de Juegos no se vio como un campo de estudio de las matemáticas hasta que John von Neumann publicó una serie de artículos en 1928 que fueron posteriormente ampliados en su libro *Theory of Games and Economic Behavior* ([1]) escrito conjuntamente con Oskar Morgenstern.

1.2. Juegos de Suma Cero

En este trabajo nos centraremos en un tipo especial de juegos denominados juegos de dos personas con suma cero (o suma nula).

***Definición* 1.1.** *Un juego de suma cero es un sistema*

$$\Gamma(A, B, f)$$

donde A, B son conjuntos no vaciós y f una función

$$f : A \times B \to \mathbb{R}.$$

En esta definición A representa el conjunto de las posibles acciones del jugador 1, mientras que B representa el conjunto de las posibles acciones del jugador 2. La función f es la función de pago.

En esencia, el juego se lleva a cabo de la siguiente manera:

· Los jugadores 1 y 2 eligen las acciones a en A y b en B, respectivamente.

· El jugador 1 recibe $f(a, b)$ del jugador 2.

Un ejemplo sencillo de este tipo de juegos es el juego de *piedra, papel o tijera*. En este juego cada jugador puede escoger una de 3 opciones, escoger la piedra, el papel o la tijera. La acción piedra vence a la opción tijera, tijera vence a papel y papel vence a piedra y en cada turno el ganador recibe un peso del perdedor y en caso de empate nadie paga.

En nuestra definición de juego los conjuntos A y B pueden ser arbitrarios, sin embargo detallaremos un poco mas el caso en que ambos conjuntos son finitos por ser mas ilustrativo y puesto que en el teorema de von Neumann los conjuntos son de ésta naturaleza.

Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Definimos la matriz de pago $P = (p_{ij})_{i,j}$ donde

$$p_{ij} = f(a_i, b_j), \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Un ejemplo es la matriz de pago del juego *piedra, papel o tijera*, con los pagos antes mencionados.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Jugador 2} \\
 & \begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_m \end{array} \\
\text{Jugador 1} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{array} &
\begin{bmatrix}
f(a_1,b_1) & f(a_1,b_2) & \cdots & f(a_1,b_j) & \cdots & f(a_1,b_m) \\
f(a_2,b_1) & f(a_2,b_2) & \cdots & f(a_2,b_j) & \cdots & f(a_2,b_m) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f(a_i,b_1) & f(a_i,b_2) & \cdots & f(a_i,b_j) & \cdots & f(a_i,b_m) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f(a_n,b_1) & f(a_n,b_2) & \cdots & f(a_n,b_j) & \cdots & f(a_n,b_m)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figura 1.1: Matriz de Pago.

	Piedra$_2$	*Papel*$_2$	*Tijera*$_2$
Piedra$_1$	0	-1	1
Papel$_1$	1	0	-1
Tijera$_1$	-1	1	0

Figura 1.2: Matriz del juego *piedra, papel o tijera.*

1.3. Estrategias

La estrategia de un jugador es la manera en que éste selecciona la acción que llevará a cabo durante su “turno” en el juego, estas se clasifican en dos tipos:

1. Pura: El jugador elige su acción de modo determinista.

2. Mixta: El jugador elige su acción de modo aleatorio.

En las estrategias puras, los jugadores simplemente ven sus posibles acciones y seleccionan una de estas. En las estrategias mixtas, el jugador elige su acción mediante un procedimiento aleatorio. Por ejemplo, en una estrategia mixta del jugador 1 cada posible acción $a_i \in A$ tiene asignada una probabilidad μ_i de ser elegida. Entonces podemos representar una estrategia mixta para el jugador 1 por $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, donde $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, $\mu_i \geqslant 0$.

A continuación, tenemos un ejemplo de una estrategia mixta por parte de cada jugador en el juego *piedra, papel o tijera.*

		$\lambda_1 = 0{,}2$ *Piedra*$_2$	$\lambda_2 = 0{,}1$ *Papel*$_2$	$\lambda_3 = 0{,}7$ *Tijera*$_2$
$\mu_1 = 0{,}2$	*Piedra*$_1$	0	-1	1
$\mu_2 = 0{,}5$	*Papel*$_1$	1	0	-1
$\mu_3 = 0{,}3$	*Tijera*$_1$	-1	1	0

Figura 1.3: Estrategias mixtas en *piedra, papel o tijera*.

1.4. Equilibrios

Cuando dos jugadores llevan a cabo el juego, ambos buscarán un buen resultado por lo que intentarán que el resultado de dicho juego les sea favorable, pero, ¿pueden tener cierta seguridad? Podemos acercarnos a la respuesta de dicha interrogante al introducir el concepto de punto de equilibrio (o punto silla).

***Definición* 1.2.** *Sea $\Gamma(A, B, f)$ un juego de suma cero. Se dice que un punto $(a^*, b^*) \in A \times B$ es un equilibrio para el juego si*

$$f(a^*, b^*) \geqslant f(a, b^*) \quad \forall a \in A,$$
$$f(a^*, b^*) \leqslant f(a^*, b) \quad \forall b \in B.$$

Entonces, si el jugador 1 elige una acción distinta de a^* y el jugador 2 elige la acción b^*, entonces el pago para el jugador 1 será menor o igual al pago cuando elige a^*. Lo mismo ocurre si el jugador 2 elige una acción distinta de b^* pero el jugador 1 elige la acción a^*.

Dado esto, se puede decir que los jugadores aseguran cierta ganancia (o una menor pérdida) si mantienen la estrategia en el punto de equilibrio del juego.

Por ejemplo, considere un juego cuya matriz de pago es la siguiente,

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jugador 2} \\ & & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \text{Jugador 1} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

tiene un punto de equilibrio en el par (a_2, b_2), pues se tiene que

$$f(a_2, b_2) > f(a_1, b_2) = f(a_3, b_2),$$
$$f(a_2, b_2) < f(a_2, b_1) < f(a_2, b_3).$$

Cuando un juego de suma cero con conjuntos de acciones finitas tiene un punto de equilibrio, entonces de la Definición 1.2 se sigue lo siguiente:

$$f(a^*, b^*) \geqslant \max_{a_i \in A} f(a_i, b^*) \geqslant \min_{b_j \in B} \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j),$$

y además tenemos que

$$f(a^*, b^*) \leqslant \min_{b_j \in B} f(a^*, b_j) \leqslant \max_{a_i \in A} \min_{b_j \in B} f(a_i, b_j),$$

y por lo tanto,

$$\min_{b_j \in B} \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j) \leqslant \max_{a_i \in A} \min_{b_j \in B} f(a_i, b_j).$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
f(a_i, b_j) &\leqslant \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j) \qquad \forall a_i \in A,\, b_j \in B,\\
\Rightarrow \min_{b_j \in B} f(a_i, b_j) &\leqslant \min_{b_j \in B} \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j) \qquad \forall a_i \in A,\\
\Rightarrow \max_{a_i \in A} \min_{b_j \in B} f(a_i, b_j) &\leqslant \min_{b_j \in B} \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j),
\end{aligned}$$

y por lo anterior podemos concluir que

$$\max_{a_i \in A} \min_{b_j \in B} f(a_i, b_j) = \min_{b_j \in B} \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j).$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

***Teorema* 1.3.** *En un juego de suma cero $\Gamma(A, B, f)$ tal que A, B son finitos, $(a^*, b^*) \in A \times B$ es un equilibrio si y sólo si*

$$f(a^*, b^*) = \max_{a_i \in A} \min_{b_j \in B} f(a_i, b_j) = \min_{b_j \in B} \max_{a_i \in A} f(a_i, b_j).$$

En general para un juego de suma cero, no necesariamente existe un equilibrio en las estrategias puras. Por ejemplo, para el juego *piedra, papel o tijera* (Figura 1.2) no existe un par que cumpla con la Definición 1.2.

Por otro lado, un juego puede tener más de un punto de equilibrio. El siguiente resultado muestra que la combinación de ellos es también un punto de equilibrio.

***Teorema* 1.4.** *Sean (a_1^*, b_1^*), (a_2^*, b_2^*) dos puntos de equilibrio arbitrarios en un juego de suma cero. Entonces:*

1. $f(a_1^*, b_1^*) = f(a_2^*, b_2^*)$,

2. (a_1^*, b_2^*), (a_2^*, b_1^*) *también son puntos de equilibrio.*

Demostración: De la definición de punto de equilibrio tenemos que para todo $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que

$$f(a, b_1^*) \leqslant f(a_1^*, b_1^*) \leqslant f(a_1^*, b) \tag{1.4.1}$$

$$f(a, b_2^*) \leqslant f(a_2^*, b_2^*) \leqslant f(a_2^*, b) \tag{1.4.2}$$

Si se toma $a = a_2^*$ en la parte izquierda de (1.4.1) y $b = b_2^*$ en el lado derecho de la misma, $a = a_1^*$ en la parte izquierda de (1.4.2) y $b = b_1^*$ en la parte derecha de ésta se obtiene que

$$f(a_2^*, b_1^*) \leqslant f(a_1^*, b_1^*) \leqslant f(a_1^*, b_2^*) \leqslant f(a_2^*, b_2^*) \leqslant f(a_2^*, b_1^*).$$

De lo cual se sigue que:

$$f(a_2^*, b_1^*) = f(a_1^*, b_1^*) = f(a_1^*, b_2^*) = f(a_2^*, b_2^*). \tag{1.4.3}$$

Para la segunda parte, tomemos el punto (a_1^*, b_2^*). De (1.4.1)-(1.4.3) se tiene que

$$f(a, b_1^*) \leqslant f(a_1^*, b_1^*) = f(a_1^*, b_2^*) = f(a_2^*, b_2^*) \leqslant f(a_2^*, b),$$

para todo $a \in A$, $b \in B$. La demostración es análoga para (a_2^*, b_1^*). ■

Note que si el juego posee varios puntos de equilibrio, entonces el valor del juego es el mismo en todos esos puntos.

1.5. Teorema Minimax de von Neumann

En ésta sección presentamos el resultado minimax básico debido a von Neumann.

Dados dos conjuntos no vacíos A, B y $f :\to \mathbb{R}$ alguna función, un resultado minimax es un teorema en el que se establecen condiciones que nos permiten asegurar que

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} f(a, b) = \min_{b \in B} \max_{a \in A} f(a, b). \tag{1.5.1}$$

En caso de que el mínimo/máximo no se alcance, éste puede ser sustituido por ínfimo/supremo en la expresión (1.5.1).

Introducimos la siguiente notación: $\mathscr{P}_F(A)$ es la familia de medidas de probabilidad con soporte finito sobre el conjunto A y δ_a representa la medida de probabilidad concentrada en el punto a, es decir,

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & si \quad a \in B \\ 0 & si \quad a \notin B. \end{cases}$$

De lo anterior tenemos que si $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ entonces existe un conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

y

$$\lambda(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}(\cdot).$$

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ entonces cada medida de probabilidad $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ es de la forma

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{a_i} \ \ con \ \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

En este caso $\mathscr{P}_F(A)$ se puede identificar con el simplejo unitario de $\mathbb{R}^m$, i.e.,

$$\mathscr{P}_F(A) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geqslant 0, \ \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}.$$

$\mathscr{P}_2(A)$ denota el conjunto de medidas de probabilidad concentradas en dos puntos, así $\lambda \in \mathscr{P}_2(A)$ si y sólo si

$$\lambda(\cdot) = \lambda_1 \delta_{a_1}(\cdot) + (1 - \lambda_1)\delta_{a_2}(\cdot), \tag{1.5.2}$$

donde a_1 y a_2 son elementos de A y λ_1 está en el intervalo $(0,1)$. Por último, para cada $\alpha \in (0,1)$ denotamos por $\mathscr{P}_{2,\alpha}(A)$ al conjunto de medidas de probabilidad concentradas en dos puntos de A tomando $\lambda_1 = \alpha$ en (1.5.2).

De lo anterior se sigue inmediatamente que

$$\mathscr{P}_{2,\alpha}(A) \subset \mathscr{P}_2(A) \subset \mathscr{P}_F(A).$$

En un juego de suma cero, en el que A es el conjunto de acciones del jugador 1, cualquier elemento de $\mathscr{P}_F(A)$ representa una estrategia mixta para el jugador 1. Análogamente, un elemento en $\mathscr{P}_F(B)$ representa una estrategia mixta para el jugador 2.

Anteriormente consideramos una función de pago f definida en el conjunto $A \times B$ tal que $f(a,b)$ es el pago que el jugador 1 recibe del jugador 2 cuando el primero elige la acción a y el segundo la acción b, es decir, cuando los jugadores usan estrategias puras. Para considerar el caso en el que los jugadores usan estrategias mixtas debemos extender la función de pago f al producto cartesiano de los conjuntos $\mathscr{P}_F(A)$ y $\mathscr{P}_F(B)$.

***Definición* 1.5.** *Sean A, B dos conjuntos no vacíos y $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Definimos la función de pago $f_e : \mathscr{P}_F(A) \times \mathscr{P}_F(B) \to \mathbb{R}$ por:*

$$f_e(\lambda, \mu) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j f(a_i, b_j). \tag{1.5.3}$$

En un juego de suma cero $\Gamma(A,B,f)$, $f_e(\lambda,\mu)$ representa el pago esperado que el jugador 1 recibe del jugador 2 cuando el primero usa la estrategia λ y el segundo μ.

En la siguiente definición se extiende el concepto de equilibrio en un juego de suma cero a la clase de estrategias mixtas.

***Definición* 1.6.** *Sea* $\Gamma(A, Bf)$ *un juego de suma cero con* A *y* B *conjuntos finitos. El par* $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathscr{P}_F(A) \times \mathscr{P}_F(B)$ *es punto de equilibrio si se cumple que*

$$\begin{aligned} f_e(\lambda^*, \mu^*) &\geqslant f_e(\lambda, \mu^*) \qquad \forall \lambda \in \mathscr{P}_F(A), \\ f_e(\lambda^*, \mu^*) &\leqslant f_e(\lambda^*, \mu) \qquad \forall \mu \in \mathscr{P}_F(B). \end{aligned}$$

Ahora se enuncia el Teorema Minimax de John von Neumann. Este es considerado como la piedra angular de la teoría de juegos.

***Teorema* 1.7 (*John von Neumann*).** *Sean* A *y* B *conjuntos finitos no vacíos y* $f : A \times B \to \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) = \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu),$$

donde f_e *es la función definida en (1.5.3).*

Para mostrar este resultado utilizaremos un teorema básico de geometría. Recordemos que un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es **convexo** si, para cualesquiera dos puntos $x, y \in K$ el segmento que conecta ambos puntos,

$$\{\alpha x + (1 - \alpha) y \in \mathbb{R}^d : \alpha \in [0, 1]\},$$

está contenido en K.

***Teorema* 1.8 (*Teorema del hiperplano separador*).** *Supóngase que* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *es cerrado y convexo. Si* $0 \notin K$*, entonces existen* $z \in \mathbb{R}^d$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$0 < c < z \cdot v$$

para todo $v \in K$*.*

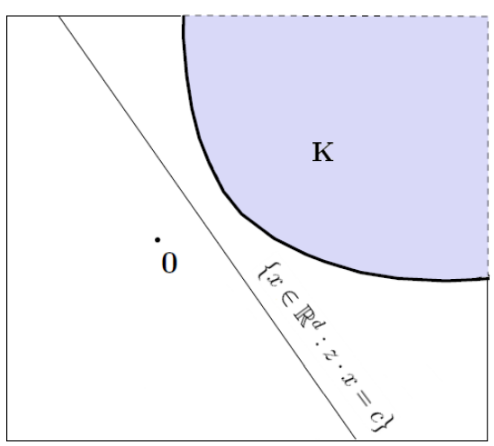

Figura 1.4: Hiperplano $z \cdot x = c$ separando a K y cero.

Demostración: Sea $R > 0$ tal que $B_R(0) \cap K \neq \varnothing$. La norma $(x \mapsto \|x\|)$ es una función continua en $\mathbb{R}^d$ y el conjunto

$$K \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leqslant R\}$$

es cerrado y acotado (compacto). Entonces la función norma alcanza su ínfimo en un punto de K, es decir, existe $z \in K$ tal que

$$\|z\| = \inf_{v \in K} \|v\|.$$

Sea $v \in K$, como K es convexo, para cualquier $\alpha \in (0,1)$ se tiene que $\alpha v + (1-\alpha)z \in K$ y dado que z tiene la mínima norma en K,

$$\|z\|^2 \leqslant \|\alpha v + (1-\alpha)z\|^2.$$

Recordando que la norma euclidiana es tal que $\|x\|^2 = x \cdot x$, podemos escribir lo anterior como

$$z \cdot z \leqslant (\alpha v + (1-\alpha)z) \cdot (\alpha v + (1-\alpha)z)$$

ó

$$z \cdot z \leqslant \alpha^2 v \cdot v + (1-\alpha)^2 z \cdot z + 2\alpha(1-\alpha) v \cdot z,$$

con lo cual se obtiene

$$\alpha^2(2z \cdot v - v \cdot v - z \cdot z) \leqslant 2\alpha(v \cdot z - z \cdot z),$$

y por lo tanto,

$$\alpha(2z \cdot v - v \cdot v - z \cdot z) \leqslant 2(v \cdot z - z \cdot z).$$

Puesto que esto último se cumple para cualquier $\alpha \in (0,1)$, haciendo $\alpha \to 0$ obtenemos

$$0 \leqslant v \cdot z - z \cdot z,$$

lo cual implica

$$\|z\|^2 \leqslant v \cdot z = z \cdot v.$$

Tomando $c = \dfrac{1}{2}\|z\|^2$, se obtiene que $0 < c < z \cdot v$ para cualquier $v \in K$. ■

También nos será de utilidad el siguiente lema.

***Lema* 1.9.** *Sean X y Y subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Si $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ entonces*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y) \leqslant \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} g(x,y).$$

Demostración: Sea $(x', y') \in X \times Y$ fijo, arbitrario. Es claro que

$$\inf_{y \in Y} g(x', y) \leqslant g(x', y')$$

y

$$g(x', y') \leqslant \sup_{x \in X} g(x, y'),$$

por lo que

$$\inf_{y\in Y} g(x',y) \leqslant \sup_{x\in X} g(x,y').$$

Como la desigualdad se cumple para cualquier $x' \in X$, tomando supremo sobre X en el lado izquierdo se obtiene

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y) \leqslant \sup_{x\in X} g(x,y').$$

De modo similar, como la desigualdad anterior se cumple para cualquier $y' \in Y$, tomando ínfimo sobre Y en el lado derecho se obtiene

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y) \leqslant \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} g(x,y^{)}.$$

Además, si la función g es continua y los subconjuntos son compactos el supremo e ínfimo se alcanzan y se cambian por máximo y mínimo respectivamente. ∎

Para la prueba del Teorema de von Neumann es conveniente que observemos lo siguiente:

Dado que A y B son conjuntos finitos, podemos identificar $\mathscr{P}_F(A)$ con el simplejo de $\mathbb{R}^n$ (Δ_n) y a $\mathscr{P}_F(B)$ con el simplejo de $\mathbb{R}^m$ (Δ_m). Entonces si $P = (f(i,j))_{n\times m}$ es la matriz de pago del juego, la función de pago f_e se puede escribir como

$$f_e(\lambda,\mu) = \lambda^T P\mu \quad \textit{con} \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \Delta_n, \mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m) \in \Delta_m.$$

Utilizando éstas herramientas podemos demostrar el Teorema Minimax de von Neumann (1928).

Demostración del Teorema de von Neumann. Primeramente, notemos que si A es finito entonces $\mathscr{P}_F(A)$ (ó Δ_n) es compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y similarmente para $\mathscr{P}_F(B)$. Además f_e es continua en ambas coordenadas.

Entonces, por el Lema 1.9 se obtiene que

$$\max_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu) \leqslant \min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\max_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu). \tag{1.5.4}$$

Para mostrar que se cumple la igualdad, supóngase que en (1.5.4) se cumple la desigualdad estricta. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu) < \alpha < \min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\max_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu),$$

ó equivalentemente,

$$\max_{\lambda\in\Delta_n}\min_{\mu\in\Delta_m} \lambda^T P\mu < \alpha < \min_{\mu\in\Delta_m}\max_{\lambda\in\Delta_n} \lambda^T P\mu. \tag{1.5.5}$$

Defínase un nuevo juego con la matriz de pago $\hat{P}$ tal que $\hat{f}(i,j) = f(i,j) - \alpha$. Para este juego, de (1.5.5) se tiene que

$$\max_{\lambda\in\Delta_n}\min_{\mu\in\Delta_m} \lambda^T \hat{P}\mu < 0 < \min_{\mu\in\Delta_m}\max_{\lambda\in\Delta_n} \lambda^T \hat{P}\mu. \tag{1.5.6}$$

Para $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, se dice que v domina a w si $v_j \geqslant w_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Nótese que al multiplicar la matriz de pago $\hat{P}$ y la estrategia mixta $\mu \in \Delta_m$ del jugador 2 se obtiene un vector $\hat{P}\mu \in \mathbb{R}^n$. Sea K el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ que dominan a algún vector $\hat{P}\mu$, es decir,

$$K = \{\hat{P}\mu + v : \mu \in \Delta_m,\, v \in \mathbb{R}^n,\, v_j \geqslant 0 \; j = 1, \ldots, n\}.$$

El conjunto K es cerrado y convexo, lo que se sigue directamente del hecho que Δ_m es cerrado y convexo. Además, K no contiene al vector $\mathbf{0}$, pues si suponemos que el vector cero está en K, entonces existe alguna estrategia $\mu \in \Delta_m$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ con $v_j \geqslant 0$, tal que

$$\hat{P}\mu + v = \mathbf{0},$$

lo que significa que $\hat{P}\mu \leqslant \mathbf{0}$ (es decir, todas las entradas del vector son menores o iguales a cero) lo que implica

$$\lambda^T \hat{P}\mu \leqslant 0 \qquad \forall \lambda \in \Delta_n,$$

lo cual contradice la desigualdad del lado derecho de (1.5.6).

Entonces, K cumple las hipótesis del Teorema 1.8 por lo que existe $z \in \mathbb{R}^n$ y $c > 0$ tal que $0 < c < z \cdot w$ para todo $w \in K$. Es decir,

$$z \cdot (\hat{P}\mu + v) > c > 0 \quad \forall \mu \in \Delta_m,\, v \geqslant \mathbf{0}. \tag{1.5.7}$$

Además, si $z_j < 0$ para algún $j = 1, \ldots, n$, entonces podemos escoger $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$z \cdot \hat{P}\mu + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i \leqslant 0, \tag{1.5.8}$$

(tomando $v_i = 0$ para $i \neq j$ y v_j tan grande como sea necesario), lo que contradice (1.5.7). Por lo tanto $z \geqslant \mathbf{0}$.

Como (1.5.7) se cumple para cualquier $v \geqslant \mathbf{0}$ lo hace en particular para $v \equiv \mathbf{0}$. También se tiene, por (1.5.7), que no todos los z_i pueden ser ceros. Por lo anterior $s = \sum_{i=1}^n z_i$ es estrictamente positivo, así $\lambda = z/s \in \Delta_n$ es tal que

$$\lambda^T \hat{P}\mu > \frac{c}{s} > 0 \qquad \forall \mu \in \Delta_m.$$

Esto significa que existe una estrategia del jugador 1 tal que el pago esperado del juego es positivo sin importar la estrategia del jugador 2, lo cual contradice la desigualdad del lado izquierdo de (1.5.6). Por lo tanto, no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que (1.5.5) se cumpla, por lo que

$$\max_{\lambda \in \Delta_n} \min_{\mu \in \Delta_m} \lambda^T P \mu \geqslant \min_{\mu \in \Delta_m} \max_{\lambda \in \Delta_n} \lambda^T P \mu,$$

que es equivalente a

$$\max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) \geqslant \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu) \qquad \blacksquare$$

Utilizando este resultado podemos demostrar el siguiente teorema.

***Teorema* 1.10.** *Si A y B son conjuntos finitos y $\Gamma(A, B, f_e)$ es un juego de suma cero, entonces existe un equilibrio $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathscr{P}_F(A) \times \mathscr{P}_F(B)$ para el juego Γ.*

Demostración: $f_e : \mathscr{P}_F(A) \times \mathscr{P}_F(B) \to \mathbb{R}$ es continua. Consideremos la función $g(\lambda) := \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu)$ y veamos que es semicontinua superiormente.

Sea $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\{\lambda \in \mathscr{P}_F(A) : g(\lambda) \geqslant r\} &= \{\lambda \in \mathscr{P}_F(A) : \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) \geqslant r\} \\ &= \{\lambda \in \mathscr{P}_F(A) : f_e(\lambda, \mu) \geqslant r \ \forall \mu \in \mathscr{P}_F(B)\} \\ &= \cap_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \{\lambda \in \mathscr{P}_F(A) : f_e(\lambda, \mu) \geqslant r\}.\end{aligned}$$

Dado que para cada $\mu \in \mathscr{P}_F(B)$ la función $\lambda \mapsto f_e(\lambda, \mu)$ es continua, cada uno de los conjuntos de la intersección es cerrado, por lo tanto

$$\{\lambda \in \mathscr{P}_F(A) : g(\lambda) \geqslant r\},$$

es un conjunto cerrado, lo cual implica que la función g es semicontinua superiormente.

Como $\mathscr{P}_F(A)$ es compacto, entonces g alcanza el máximo en dicho conjunto, es decir, existe $\lambda^* \in \mathscr{P}_F(A)$ tal que

$$g(\lambda^*) = \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} g(\lambda) = \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu).$$

Análogamente, la función $h(\mu) := \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu)$ es semicontinua inferiormente y $\mathscr{P}_F(B)$ es compacto por lo que existe $\mu^* \in \mathscr{P}_F(B)$ tal que h alcanza su mínimo, es decir,

$$h(\mu^*) = \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} h(\mu) = \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) &= \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda^*, \mu) \\ &\leqslant f(\lambda^*, \mu^*) \\ &\leqslant \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu^*) \\ &= \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \text{máx}\, \lambda \in \mathscr{P}_F(A) f_e(\lambda, \mu).\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 1.7 se obtiene que

$$\min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda^*, \mu) = f(\lambda^*, \mu^*) = \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu^*),$$

con lo cual se cumple,

$$f_e(\lambda^*, \mu^*) = \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda^*, \mu) \leqslant f_e(\lambda^*, \mu) \quad \forall \mu \in \mathscr{P}_F(B),$$

y

$$f_e(\lambda^*,\mu^*) = \max_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu^*) \geqslant f_e(\lambda,\mu^*) \quad \forall\lambda\in\mathscr{P}_F(A).$$

Por lo tanto, (λ^*,μ^*) es un punto de equilibrio. ■

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 1.7, fue demostrado por Abraham Wald en [14].

***Teorema* 1.11** (A. Wald)**.** *Si A es un conjunto arbitrario no-vacío y B es un conjunto finito no-vacío, entonces*

$$\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu) = \min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu).$$

Para un conjunto Y arbitrario, denotamos por $\langle Y\rangle$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos de Y, es decir

$$\langle Y\rangle = \{I\subseteq Y : I \text{ } es \text{ } finito\}.$$

En la demostracióndel Teorema de Wald utilizaremos el siguiente lema:

***Lema* 1.12.** *Si el conjunto X es compacto y la función $h: X\times Y\to\mathbb{R}$ es semicontinua superiormente en X para todo $y\in Y$, entonces* $\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} h(x,y)$ *está bien definido y*

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} h(x,y) = \inf_{Y_0\in\langle Y\rangle}\max_{x\in X}\min_{y\in Y_0} h(x,y). \tag{1.5.9}$$

Demostración: Dado que para cualquier $y\in Y$ la función $h(\cdot,y)$ es semicontinua superiormente en X se obtiene que la función

$$p(x) := \inf_{y\in Y} h(x,y)$$

es semicontinua superiormente en X; y dado que el conjunto X es compacto la función p alcanza su máximo en X. Por lo anterior, se tiene que $\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} h(x,y)$ está bien definido. Para demostrar la igualdad en (1.5.9) probemos que

$$\alpha := \max_{x\in X} p(x) \geqslant \inf_{Y_0\in\langle Y\rangle}\max_{x\in X}\min_{y\in Y_0} h(x,y) =: \beta.$$

La demostración de la desigualdad $\alpha\leqslant\beta$ se sigue del hecho que

$$\alpha \leqslant \max_{x\in X}\min_{y\in Y_0} h(x,y)$$

para todo $Y_0\in\langle Y\rangle$.
Supongamos que $\alpha<\beta$, entonces existe $\gamma\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha<\gamma<\beta$ lo cual implica, por la definición de α, que

$$\bigcap_{y\in Y}\{x\in X : h(x,y)\geqslant\gamma\} = \varnothing.$$

Dado que h es semicontinua superiormente en X se tiene que el conjunto

$$A_y := \{x \in X : h(x,y) \geqslant \gamma\}$$

es cerrado para cada $y \in Y$ y puesto que X es compacto, se obtiene que A_y es compacto para cada $y \in Y$. Por tanto se tiene que la familia de conjuntos $\{A_y\}_{y \in Y}$ no tiene la propiedad de intersección finita, es decir, existe algún $Y_0 \in \langle Y \rangle$ tal que

$$\bigcap_{y \in Y_0} A_y = \varnothing,$$

lo cual implica que

$$\min_{y \in Y_0} h(x,y) < \gamma \qquad \forall x \in X.$$

Por lo tanto

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y_0} h(x,y) < \gamma < \beta,$$

lo que contradice la definición de β. Concluimos entonces que $\alpha \geqslant \beta$. ■

En la demostración del Teorema de Wald usaremos el hecho de que para cada $\mu \in \mathscr{P}_F(B)$ y $A_0 \subseteq A$,

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A_0)} f_e(\lambda, \mu) = \sup_{a \in A_0} f_e(\delta_a, \mu). \tag{1.5.10}$$

Para demostrar (1.5.10) fijamos $\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \delta_{b_j} \in \mathscr{P}_F(B)$ y escribimos

$$\alpha := \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A_0)} f_e(\lambda, \mu).$$

Puesto que para $a \in A_0$, $\delta_a \in \mathscr{P}_F(A_0)$ se obtiene inmediatamente que

$$\alpha \geqslant \sup_{a \in A_0} f_e(\delta_a, \mu).$$

Por otro lado, para $\lambda = \lambda_1 \delta_{a_1} + \ldots + \lambda_n \delta_{a_n} \in \mathscr{P}_F(A_0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_e(\lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j f(a_i, b_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_e(\delta_{a_i}, \mu) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup_{a \in A_0} f_e(\delta_a, \mu) = \sup_{a \in A_0} f_e(\delta_a, \mu), \end{aligned}$$

por lo que $\alpha \leqslant \sup_{a \in A_0} f_e(\delta_a, \mu)$.

Nota: De modo análogo se demuestra que para cualquier $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ y conjunto $B_0 \subseteq B$

$$\inf_{\mu \in \mathscr{P}_F(B_0)} f_e(\lambda, \mu) = \inf_{b \in B_0} f_e(\lambda, \delta_b). \tag{1.5.11}$$

Con esto podemos demostrar el teorema de Wald a partir del teorema de von Neumann.

Demostración del Teorema de Wald. Sea

$$\alpha := \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu),$$

entonces, para cada $J \in \langle A \rangle$,

$$\alpha \geqslant \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu),$$

por lo tanto

$$\alpha \geqslant \sup_{J \in \langle A \rangle} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu).$$

Por otro lado, de la definición de supremo se tiene que para $\epsilon > 0$ fijo, existe un $\lambda_\epsilon \in \mathscr{P}_F(A)$ tal que

$$\alpha \geqslant \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda_\epsilon, \mu) > \alpha - \epsilon.$$

Entonces existe algún $J_\epsilon \in \langle A \rangle$ tal que $\lambda_\epsilon \in \mathscr{P}_F(J_\epsilon)$ y por lo tanto

$$\max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J_\epsilon)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) > \alpha - \epsilon,$$

y

$$\sup_{J \in \langle A \rangle} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) > \alpha - \epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario tenemos

$$\sup_{J \in \langle A \rangle} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu) \geqslant \alpha,$$

y por lo tanto

$$\alpha = \sup_{J \in \langle A \rangle} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda, \mu). \tag{1.5.12}$$

Dado que los conjuntos B y J son finitos, podemos aplicar el teorema minimax de von Neumann en (1.5.12) lo cual implica, utilizando también la relación (1.5.10), que

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{J \in \langle A \rangle} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(J)} f_e(\lambda, \mu) \\ &= \sup_{J \in \langle A \rangle} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{a \in J} f_e(\delta_a, \mu) \\ &= - \inf_{J \in \langle A \rangle} \max_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{a \in J} \left(-f_e(\delta_a, \mu) \right). \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

También dado que el conjunto B es finito se tiene que el conjunto $\mathscr{P}_F(B)$ es compacto y para $a \in A$ la función $\mu \mapsto f_e(\delta_a, \mu)$ es continua en $\mathscr{P}_F(B)$. Entonces podemos aplicar el Lema 1.12 en (1.5.13) tomando X como $\mathscr{P}_F(B)$, Y como A y $h(x,y)$ como $-f_e(\delta_a,\mu)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha &= -\max_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \inf_{a\in A} \left(-f_e(\delta_a,\mu)\right)\\ &= \min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu).\end{aligned}$$

Finalmente se aplica (1.5.10) tomando A_0 como A y se tiene

$$\alpha = \min_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu). \qquad \blacksquare$$

Con esto se ha demostrado el Teorema de Wald a partir del Teorema de von Neumann y resultados básicos de Análisis Matemático.

Capítulo 2

Teorema de Gwinner-Oettli

2.1. Introducción

En este capítulo se demuestran dos resultados minimax. El primero, Teorema de Gwinner-Oettli ([6]), técnicamente no es un teorema minimax y aparentemente no tiene relación con los otros resultados minimax. Sin embargo mostraremos que en los hechos sí existe una fuerte relación. Concluimos el capítulo presentando el Teorema de Kassay-Kolumbán ([10]), el cual resulta ser una consecuencia del Teorema de Gwinner-Oettli.
Debido a que el teorema de Gwinner.Oettli presenta condiciones topológicas un tanto diferentes a los otros resultados minimax, recordemos algunos elementos te topología, en especial acerca de la topología producto.

Una sucesión en un conjunto X es una función que va de $\mathbb{N}$ en el conjunto X. Una red es una generalización de lo que es una sucesión en la cual se puede tomar un conjunto de índices mas general que el de los naturales, sin embargo no puede escogerse cualquier conjunto para indexar, el conjunto debe tener una cierta propiedad llamada dirección.

Una ***dirección*** ($\geqslant$) en un conjunto I es una relación binaria, reflexiva, transitiva y con la propiedad de que cada par de elementos tiene una cota superior, es decir, si $i, j \in I$ entonces existe un $k \in I$ tal que $k \geqslant i$ y $k \geqslant j$. Un ***conjunto dirigido*** es cualquier conjunto que este dotado de una dirección. Una ***red*** en un conjunto X es una función $x : I \to X$ en donde I es un conjunto dirigido. Cuando se considere la red $x(\cdot)$ simplemente lo denotaremos por $\{x_i\}$. Nótese que cualquier sucesión es una red y que cualquier conjunto dirigido bajo la función identidad es también una red. Además, del mismo modo que analizamos la convergencia de sucesiones en espacios topológicos también se puede analizar la convergencia de una red.

Una red $\{x_i\}$ en un espacio topológico (X, τ) ***converge*** a un punto $x \in X$ si eventualmente la red se encuentra en cualquier vecindad de x, es decir, si para cada vecindad V de x existe un índice i_0 (que depende de V) tal que $x_i \in V$ si $i \geqslant i_0$.

***Proposición* 2.1** ([1], pág. 30)**.** *En un espacio topológico X, un punto x pertenece a la cerradura de un conjunto A si y sólo si x es el límite de una red en A.*

Ahora pasaremos a los detalles de la topología producto.

Dada una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ el ***producto cartesiano*** de dicha familia está dado por

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i \quad \forall i \in I\}.$$

A un elemento x del producto cartesiano lo denotaremos como $(x_i)_{i\in I}$ o simplemente como (x_i).

Para cada elemento $j \in I$ se define la ***proyección*** $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ por,

$$p_j(x) = x_j.$$

Si se tiene una familia de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ entonces se define la ***topología producto*** τ como la topología generada por la familia de proyecciones $\{p_i\}_{i\in I}$, es decir, la topología mas débil en el producto cartesiano que hace continuas a las proyecciones.
Una ***subbase*** de la topología producto consiste en los conjuntos de la forma

$$p_j^{-1}(V_j) = \prod_{i\in I} V_i, \tag{2.1.1}$$

con $V_i = X_i$ para $i \neq j$ y V_j en τ_j. Por lo anterior se tiene que una ***base*** para la topología τ se compone de elementos de la forma

$$V = \prod_{i\in I} V_i, \tag{2.1.2}$$

en donde V_i pertenece a τ_i y $V_i = X_i$ excepto para un número finito de elementos de I.

Para un conjunto no vacío Y, $\mathbb{R}^Y$ es el espacio de las funciones de valores reales de Y, es decir

$$\mathbb{R}^Y = \{u \mid u : Y \to \mathbb{R}\},$$

y está dotado con la topología producto τ.

2.2. Resultados Minimax

***Definición* 2.2.** *Para A en $\mathbb{R}^m$, la envolvente convexa de A, denotada por $co(A)$, es*

$$co(A) := \{x \in \mathbb{R}^m \ : \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i, \ n \in \mathbb{N}, \ x^i \in A, \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Para enunciar el siguiente resultado minimax es necesario introducir los siguientes conjuntos:
Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Definimos los conjuntos:

$$C := \{v \in \mathbb{R}^B : \exists a \in A \; tal \; que \; f(a,b) \geqslant v(b) \; \forall b \in B\}, \tag{2.2.1}$$

y

$$D := \{u \in \mathbb{R}^A : \exists b \in B \; tal \; que \; f(a,b) \leqslant u(a) \; \forall a \in A\}. \tag{2.2.2}$$

Denotamos por $co(C)$ y $co(D)$ a las ***envolventes convexas*** de los conjuntos C y D respectivamente, mientras que $cl(co(C))$ es la cerradura del conjunto $co(C)$ en la topología producto τ.

Teorema* 2.3** (Gwinner-Oettli***)**.** *Sean A y B conjuntos no vacíos, $f : A \times B \to \mathbb{R}$ y C, D como en (2.2.1) y (2.2.2) respectivamente. Entonces*

$$\operatorname*{ínf}_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a) = \sup_{v \in cl(co(C))} \operatorname*{ínf}_{b \in B} v(b).$$

Antes de continuar con la demostración de este teorema se verá la relación que tiene con los otros resultados. Si bien a primera vista los conjuntos C y D pueden parecer extraños hay que observar lo siguiente.

Primero nótese que de la definición del conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^A$ se tiene que para cualquier $\mu \in \mathscr{P}_F(B)$, la función $u \in \mathbb{R}^A$ dada por $u(a) := f_e(\delta_a, \mu)$ pertenece a $co(D)$ por lo que

$$\operatorname*{ínf}_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a) \leqslant \operatorname*{ínf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu). \tag{2.2.3}$$

Además, para $u \in co(D)$ existen funciones $u_j \in D$ y constantes $\alpha_j \geqslant 0$, con $1 \leqslant j \leqslant m$, tales que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j, \qquad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1.$$

Entonces, existe $b_j \in B$ tal que $f(a, b_j) \leqslant u_j(a)$ para todo a en A. Tomando $\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{b_j} \in \mathscr{P}_F(B)$, se obtiene que $u(a) \geqslant f_e(\delta_a, \mu)$ para cada a en A. Esto implica que

$$\operatorname*{ínf}_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a) \geqslant \operatorname*{ínf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu), \tag{2.2.4}$$

y por (2.2.3) y (2.2.4) se tiene que

$$\operatorname*{ínf}_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a) = \operatorname*{ínf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu).$$

De (1.5.10) se concluye que

$$\operatorname*{ínf}_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a) = \operatorname*{ínf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu). \tag{2.2.5}$$

También, por la definición del conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^B$ se tiene que para cualquier $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$, la función $v \in \mathbb{R}^B$ dada por $v(b) := f_e(\lambda, \delta_b)$ pertenece a $co(C)$, por lo que

$$\sup_{v\in co(C)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} v(b) \geqslant \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} f_e(\lambda,\delta_b) \tag{2.2.6}$$

Siguiendo el esquema que se utilizó para demostrsar la desigualdad (2.2.4) se obtiene que

$$\sup_{v\in co(C)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} v(b) \leqslant \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} f_e(\lambda,\delta_b) \tag{2.2.7}$$

Por lo tanto, usando (2.2.6), (2.2.7) y después (1.5.10), llegamos a que

$$\sup_{v\in co(C)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} v(b) = \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} \operatorname*{ínf}_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu). \tag{2.2.8}$$

Por último, de (2.2.5) y (2.2.8) obtenemos,

$$\begin{aligned}\sup_{v\in co(C)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} v(b) &= \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} \operatorname*{ínf}_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu)\\ &\leqslant \operatorname*{ínf}_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu) = \operatorname*{ínf}_{u\in co(D)} \sup_{a\in A} u(a)\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Las expresiones de los extremos de la desigualdad (2.2.9) son muy parecidas a las que se enuncian en el Teorema de Gwinner-Oettli, las expresiones que se encuentran en la parte central son las usuales para los resultados minimax, por lo que una utilidad del resultado de Gwinner-Oettli es investigar bajo que condiciones se cumple la igualdad en (2.2.9). Por ejemplo, si el conjunto $co(C)$ es cerrado entonces

$$\operatorname*{ínf}_{u\in co(D)} \sup_{a\in A} u(a) = \sup_{v\in co(C)} \operatorname*{ínf}_{b\in B} v(b).$$

En la demostración del Teorema de Gwinner-Oettli se utilizan los siguientes lemas:

***Lema* 2.4.** *Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A\times B \to \mathbb{R}$. Si el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^A$ es como en (2.2.2) entonces*

$$\begin{aligned}\operatorname*{ínf}_{u\in co(D)} \sup_{a\in A} u(a) &= \operatorname*{ínf}_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu)\\ &= \operatorname*{ínf}_{I\in\langle B\rangle} \operatorname*{mín}_{\mu\in\mathscr{P}_F(I)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu).\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Demostración: La primer igualdad se demostró en (2.2.5).

Para la segunda igualdad nótese que para cada $I \in \langle B\rangle$ la función $\mu \mapsto f_e(\delta_a,\mu)$ es continua en $\mathscr{P}_F(I)$ para cada $a \in A$ y la función $\mu \mapsto \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu)$ es semicontinua inferiormente en $\mathscr{P}_F(I)$, por lo que $\operatorname*{mín}_{\mu\in\mathscr{P}_F(I)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu)$ está bien definido. Es sencillo ver que

$$\beta := \operatorname*{ínf}_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu) \leqslant \operatorname*{ínf}_{I\in\langle B\rangle} \operatorname*{mín}_{\mu\in\mathscr{P}_F(I)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu).$$

Por otro lado, por la definición de β se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe algún $\mu_0 \in \mathscr{P}_F(B)$ tal que

$$\beta \leqslant \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu_0) < \beta + \epsilon,$$

por lo que también existe algún $I_0 \in \langle B \rangle$ tal que $\mu_0 \in \mathscr{P}_F(I_0)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\min_{\mu \in \mathscr{P}_F(I_0)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu) < \beta + \epsilon \\ \Rightarrow &\inf_{I \in \langle B \rangle} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(I)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu) < \beta + \epsilon. \end{aligned}$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario se obtiene que

$$\beta \geqslant \inf_{I \in \langle B \rangle} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(I)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu),$$

lo cual comprueba la segunda igualdad en (2.2.10). ■

***Lema* 2.5.** *Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Si el conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^B$ está dado como en (2.2.1) entonces*

$$\begin{aligned} \sup_{v \in cl(co(C))} \inf_{b \in B} v(b) &= \inf_{I \in \langle B \rangle} \sup_{v \in co(C)} \min_{b \in I} v(b) \\ &= \inf_{I \in \langle B \rangle} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{b \in I} f_e(\lambda, \delta_b). \end{aligned}$$

Demostración: Para mostrar la primer igualdad fijemos I en $\langle B \rangle$ y definamos la función $h_I : \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}$ por

$$h_I := \min_{b \in I} v(b).$$

Recordemos, usando (2.1.1) y (2.1.2), que una base de vecindades para $w_0 \in \mathbb{R}^B$ en la topología producto τ está dada por los conjuntos

$$W(J, \epsilon, w_0) := \{w \in \mathbb{R}^B \, : \, |w(b) - w_0(b)| < \epsilon \ \forall b \in J, \ J \in \langle B \rangle, \ \epsilon > 0\}. \tag{2.2.11}$$

La función h_I es continua en cada $v \in \mathbb{R}^B$, pues para $\epsilon > 0$ y $v' \in W(I, \epsilon, v)$ existen b_1, b_2 en I tales que

$$\begin{aligned} h_I(v) &= \min_{b \in I} v(b) = v(b_1), \\ h_I(v') &= \min_{b \in I} v(b) = v'(b_2). \end{aligned}$$

Entonces

$$h_I(v) - h_I(v') = v(b_1) - v'(b_2) \leqslant v(b_2) - v'(b_2) < \epsilon$$

y

$$h_I(v') - h_I(v) = v'(b_2) - v(b_1) \leqslant v'(b_1) - v(b_1) < \epsilon,$$

lo cual implica que

$$|h_I(v) - h_I(v')| < \epsilon.$$

Por la continuidad de h_I se tiene que

$$\sup_{v\in cl(co(C))} h_I(v) = \sup_{v\in co(C)} h_I(v).$$

Entonces tomando $\alpha := \sup_{v\in cl(co(C))} \text{ínf}_{b\in B} v(b)$ se obtiene que

$$\alpha \leqslant \text{ínf}_{I\in\langle B\rangle} \sup_{v\in cl(co(C))} h_I(v) = \text{ínf}_{I\in\langle B\rangle} \sup_{v\in co(C)} h_I(v). \tag{2.2.12}$$

Para mostrar que se cumple la igualdad supongamos que

$$\alpha < \text{ínf}_{I\in\langle B\rangle} \sup_{v\in co(C)} \text{mín}_{b\in I} v(b).$$

Entonces existe algún $\epsilon > 0$ tal que para cada $I \in \langle B\rangle$ podemos encontrar un $v_I \in co(C)$ tal que

$$\text{mín}_{b\in I} v_I(b) > \alpha + \epsilon. \tag{2.2.13}$$

Dado que v_I está en $co(C)$ entonces existen constantes positivas α_{Ij} y funciones v_{Ij} $(1 \leqslant j \leqslant m_I = \#(I)\,)$ en C tales que

$$v_I = \sum_{j=1}^{m_I} \alpha_{Ij} v_{Ij} \qquad y \qquad \sum_{j=1}^{m_I} \alpha_{Ij} = 1. \tag{2.2.14}$$

Ahora, sea $w_I : B \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$w_I := \text{mín}\{\underline{\alpha+\epsilon}, v_I\},$$

en donde $\underline{\alpha+\epsilon}$ es la función constante en $\mathbb{R}^B$ que es igual a $\alpha+\epsilon$ en todos los puntos de B. Por la definición de w_I es obvio que la función $\gamma_I : B \to \mathbb{R}$, dada por

$$\gamma_I := v_I - w_I, \tag{2.2.15}$$

es no negativa. Por lo tanto, de la definición del conjunto C y el hecho de que v_{Ij} está en C se tiene que la función $v_{Ij} - \gamma_I$ pertenece a C para $j = 1, \ldots, m_I$. Aplicando (2.2.14) y (2.2.15) se tiene entonces que

$$w_I = v_I - \gamma_I = \sum_{j=1}^{m_I} \alpha_{Ij}(v_{Ij} - \gamma_I) \tag{2.2.16}$$

pertenece a $co(C)$. El conjunto $\{I : I \in \langle B\rangle\}$ es un conjunto dirigido con orden parcial $\subseteq$, por lo que consideramos la red $\{w_I : I \in \langle B\rangle\} \subseteq co(C)$. Para ver que la red converge a $\underline{\alpha+\epsilon}$ basta con ver que para cada elemento W de la base de vecindades de $\underline{\alpha+\epsilon}$ (ver (2.2.11)) existe algún I_0 que pertenece a $\langle B\rangle$ tal que, para cada $J \supseteq I_0$, w_J pertenece a W.

Sea $\delta > 0$, $I_0 \in \langle B\rangle$ y $W := W(I_0, \delta, \underline{\alpha+\epsilon})$. Entonces para $J \in \langle B\rangle$, tal que $I_0 \subseteq J$, se tiene por (2.2.13) que

$$v_J(b) > \alpha + \epsilon \qquad \forall\, b \in I_0,$$

por lo que w_J pertenece a $W(I_0, \delta, \underline{\alpha + \epsilon})$. De aquí, la red $\{w_I : I \in \langle B \rangle\}$ converge a $\underline{\alpha + \epsilon}$ en la topología producto τ. Por lo tanto $\underline{\alpha + \epsilon}$ pertenece a $cl(co(C))$, lo cual implica que

$$\alpha = \sup_{v \in cl(co(C))} \inf_{b \in B} v(b) \geqslant \alpha + \epsilon,$$

con lo que llegamos a una contradicción, es decir se tiene la primer igualdad. La segunda igualdad se prueba de manera similar a la primer igualdad del Lema 2.4. ∎

Con esto se tiene la herramienta necesaria para demostrar el Teorema 2.3.

Demostración del Teorema de Gwinner-Oettli.
Sea $\varphi := \inf_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a)$. Entonces por el Lema 2.4 y (1.5.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi &= \inf_{I \in \langle B \rangle} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(I)} \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu) \\ &= \inf_{I \in \langle B \rangle} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(I)} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu). \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Dado que cada elemento de $\langle B \rangle$ es un conjunto finito se aplica el teorema minimax de Wald, lo cual muestra que

$$\begin{aligned} \varphi &= \inf_{I \in \langle B \rangle} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(I)} f_e(\lambda, \mu) \\ &= \inf_{I \in \langle B \rangle} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{b \in I} f_e(\lambda, \delta_b). \end{aligned}$$

Por último se utiliza el Lema 2.5 para obtener que

$$\varphi = \sup_{v \in cl(co(C))} \inf_{b \in B} v(b),$$

lo cual demuestra el teorema de Gwinner-Oettli. ∎

Para introducir el siguiente resultado minimax, el teorema de Kassay-Kolumbán, es necesario definir la siguiente clase de funciones.

***Definición* 2.6.** *Una función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es débilmente cóncava en A si para cada $I \in \langle B \rangle$ se tiene que*

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{b \in I} f_e(\lambda, \delta_b) \leqslant \sup_{a \in A} \min_{b \in I} f(a, b).$$

Dado que $\delta_a \in \mathscr{P}_F(A)$ se puede obtener que f es débilmente cóncava en A si y sólo si para cada $I \in \langle B \rangle$ se tiene que

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{b \in I} f_e(\lambda, \delta_b) = \sup_{a \in A} \min_{b \in I} f(a, b).$$

Teorema 2.7 (***Kassay- Kolumbán***). *Si A es un subconjunto compacto no vacío de un espacio topológico, B es un conjunto arbitrario no vacío y la función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es débilmente cóncava en A y semicontinua superiormente en A para cada $b \in B$, entonces*

$$\operatorname*{\acute{i}nf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \operatorname*{m\acute{a}x}_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu) = \operatorname*{m\acute{a}x}_{a \in A} \operatorname*{\acute{i}nf}_{b \in B} f(a, b).$$

Se pudiera creer que este no es un resultado minimax, pues los ínfimos se toman sobre diferentes conjuntos (B y $\mathscr{P}_F(B)$), sin embargo es fácil ver que para cada $a \in A$ ocurre que

$$\operatorname*{\acute{i}nf}_{b \in B} f(a, b) = \operatorname*{\acute{i}nf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\delta_a, \mu),$$

por lo que el Teorema 2.7 se puede reformular utilizando la siguiente igualdad

$$\operatorname*{\acute{i}nf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \operatorname*{m\acute{a}x}_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu) = \operatorname*{m\acute{a}x}_{a \in A} \operatorname*{\acute{i}nf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\delta_a, \mu).$$

Ahora se demuestra el último resultado minimax de éste capítulo, el Teorema 2.7.

Demostración del Teorema de Kassay-Kolumbán.
Sea $\psi := \operatorname{\acute{i}nf}_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \operatorname{m\acute{a}x}_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu)$. Entonces por el Lema 2.4 y el Teorema 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{u \in co(D)} \sup_{a \in A} u(a) \\ &= \sup_{v \in cl(co(C))} \operatorname*{\acute{i}nf}_{b \in B} v(b). \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Aplicando el Lema 2.5 en (2.2.18) y dado que la función f es debilmente cóncava en A se tiene que

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{I \in \langle B \rangle} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \operatorname*{m\acute{i}n}_{b \in I} f_e(\lambda, \delta_b) \\ &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{I \in \langle B \rangle} \sup_{a \in A} \operatorname*{m\acute{i}n}_{b \in I} f(a, b). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Como f es semicontinua superiormente en A para cada $b \in B$ y A es compacto, entonces f alcanza su máximo. Aplicando este hecho y el Lema 1.12 a (2.2.19) se tiene que

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{I \in \langle B \rangle} \operatorname*{m\acute{a}x}_{a \in A} \operatorname*{m\acute{i}n}_{b \in I} f(a, b) \\ &= \operatorname*{m\acute{a}x}_{a \in A} \operatorname*{\acute{i}nf}_{b \in B} f(a, b) \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Con lo cual se prueba el resultado deseado. ■

En este capítulo se demostró el resultado de Gwinner-Oettli utilizando el Teorema de Wald del capítulo anterior y después se demostró el Teorema de Kassay-Kolumbán usando el resultado de Gwinner-Oettli. Como en el Capítulo 1, se puede ver que las demostraciones solamente utilizan resultados básicos de Análisis Matemático.

Capítulo 3

Convexidad y Teoremas Minimax

3.1. Introducción

Entre las generalizaciones del Teorema Minimax de von Neumann existen varios resultados en los que las propiedades de concavidad/convexidad de la función juega el papel principal. En este capítulo nos enfocaremos a analizar dichos resultados.

Primero, se definen los tipos de concavidad/convexidad utilizados, así como las relaciones entre ellos. Después se demuestran algunos resultados minimax, y en la última sección del capítulo se hace una observación a [4], proporcionando un contra-ejemplo a una afirmación de dicho artículo.

3.2. Tipos de Convexidades

Recordemos que una función g que es real valuada y tiene como dominio un subconjunto convexo de un espacio vectorial, digamos C, es **cóncava** si para cualquier par de elementos x, y de C y cualquier α en el intervalo $[0,1]$ se cumple que

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y).$$

En otras palabras, si tomamos la imagen de una combinación convexa de elementos del conjunto su valor es mayor al de la combinación convexa de las imágenes de estos elementos.

También recordemos que una función h es **convexa** si $-h$ es cóncava. Claramente en este caso la desigualdad es la opuesta a la de la concavidad, por lo que la combinación convexa de las imágenes es mayor a la imagen de la combinación convexa de elementos.

Un ejemplo de función cóncava, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es la dada por $f(x) = -x^2$.

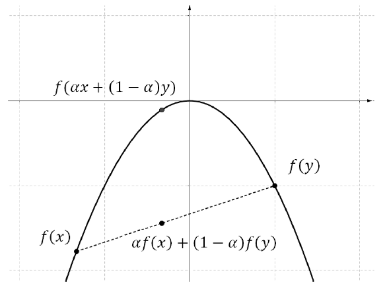

Figura 3.1: $f(x) = -x^2$.

Un ejemplo de función convexa es la dada por $f(x) = x^2$.

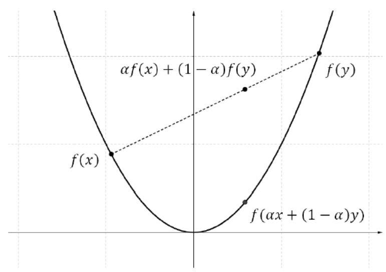

Figura 3.2: $f(x) = x^2$.

Si la función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es cóncava en A para cualquier $b \in B$ y además es convexa en B para cualquier $a \in A$ entonces se dice que es cóncava-convexa.

Un ejemplo de ésto es la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(a,b) = b^2 - a^2$.

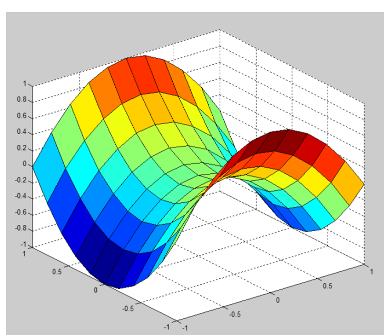

Figura 3.3: $g(a,b) = b^2 - a^2$.

Estas definiciones son muy limitadas, pues solo pueden aplicarse a funciones que tienen como dominio a subconjuntos de espacio vectoriales. Existen generalizaciones a estos conceptos, algunas de las cuales se presentan a continuación.

Definición* 3.1.** *Sean A y B conjuntos no vacíos. La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es* ***Ky Fan cóncava *en A si para cada $a_1, a_2 \in A$ y $\lambda \in [0,1]$ existe algún $a_0 \in A$ tal que*

$$\lambda f(a_1, b) + (1 - \lambda) f(a_2, b) \leqslant f(a_0, b) \quad \forall b \in B.$$

La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es ***Ky Fan convexa*** *en B si para cada $b_1, b_2 \in B$ y $\mu \in [0,1]$ existe algún $b_0 \in B$ tal que*

$$\mu f(a, b_1) + (1 - \mu) f(a, b_2) \geqslant f(a, b_0) \quad \forall a \in A.$$

La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es Ky Fan cóncava-convexa, en el producto cartesiano $A \times B$, si f es Ky Fan cóncava en A y Ky Fan convexa en B.

Si bien las definiciones anteriores están dadas para elementos de $\mathscr{P}_2(A)$ y $\mathscr{P}_2(B)$ se puede probar, utilizando inducción, que dichas definiciones son equivalentes a las que se obtienen utilizando $\mathscr{P}_F(A)$ y $\mathscr{P}_F(B)$ respectivamente.

Este tipo de funciones tiene un interpretación muy importante en la teoría de juegos pues cuando f es Ky Fan cóncava en A significa que para cualquier estrategia mixta del jugador 1 existe una estrategia pura tal que el resultado del juego es mayor, por lo tanto más conveniente para él. Por otro lado, si f es Ky Fan convexa en B quiere decir que para cualquier estrategia mixta del jugador 2 hay una estrategia pura en la que el valor del juego sea menor, por lo que será mas conveniente para el segundo jugador.

Es obvio que ambos tipos de concavidad(convexidad) definidos anteriormente son diferentes, sin embargo podemos establecer una relación entre ellos.

***Teorema* 3.2.** *Sean A, B subconjuntos de un espacio vectorial. Si $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es cóncava-convexa entonces f es Ky Fan cóncava-convexa.*

Demostración: Sea

$$a_0 = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2,$$

y

$$b_0 = \mu b_1 + (1 - \mu) b_2.$$

Entonces $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ por lo que cumplen con la condición de Ky Fan concavidad y convexidad respectivamente. ∎

Sin embargo el enunciado recíproco no es verdadero, como lo muestra el siguiente ejemplo.

La función $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(a,b) = a^2 - b^2$ es Ky Fan cóncava-convexa pero no es cóncava-convexa.

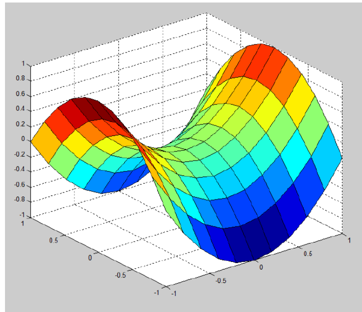

Figura 3.4: $f(a,b) = a^2 - b^2$.

Además de estas clases de funciones podemos definir una clase de funciones más general que también nos resultará útil.

Definición* 3.3.** *Sean A, B conjuntos no vacíos. La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es* ***casi cóncava *en A si para cada $\epsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ y $a_1, a_2 \in A$ existe algún $a_0 \in A$ que satisface*

$$\lambda f(a_1,b) + (1-\lambda) f(a_2,b) \leqslant f(a_0,b) + \epsilon \quad \forall b \in B.$$

La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es ***casi convexa*** *en B si para cada $\epsilon > 0$, $\mu \in (0,1)$ y $b_1, b_2 \in B$ existe algún $b_0 \in B$ que satisface*

$$\mu f(a,b_1) + (1-\mu) f(a,b_2) \geqslant f(a,b_0) - \epsilon \quad \forall a \in A.$$

Por último, la función f es ***casi cóncava-casi convexa*** *en $A \times B$ si f es casi cóncava en A y casi-convexa en B.*

Esta definición está dada sobre los conjuntos $\mathscr{P}_2(A)$ y $\mathscr{P}_2(B)$ sin embargo, nuevamente, la definición es equivalente a la dada utilizando los conjuntos $\mathscr{P}_F(A)$ y $\mathscr{P}_F(B)$, lo cual se muestra utilizando el principio de inducción.

De nuevo es importante notar las relaciones entre este nuevo tipo de concavidad(convexidad) y los presentados anteriormente, de este modo puede ser que la nueva definición parezca menos extraña. De las definiciones de Ky Fan cóncava-convexa y casi cóncava-casi convexa podemos obtener el siguiente resultado.

***Teorema* 3.4.** *Si $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es Ky Fan cóncava-convexa entonces f es casi cóncava-casi convexa.*

Demostración: Dado que la función es Ky Fan cóncava en A se tiene que para $\lambda \in \mathscr{P}_2(A)$ existe $a_0 \in A$ tal que

$$\lambda f(a_1,b) + (1-\lambda) f(a_2,b) \leqslant f(a_0,b) \quad \forall b \in B.$$

Entonces, si $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\lambda f(a_1,b) + (1-\lambda) f(a_2,b) \leqslant f(a_0,b) + \epsilon \quad \forall b \in B,$$

por lo que la función es casi cóncava en A. La prueba para ver que también es casi convexa es análoga. ■

De nuevo, el enunciado recíproco de éste teorema no es verdadero, sin embargo esta vez no es tan sencillo proporcionar un contraejemplo.

La siguiente es una función que es casi convexa en B pero no es Ky Fan convexa en B.
Sean A y B los siguientes conjuntos

$$A := \{1, 2\}, \qquad B := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s + t = 0, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

y sea $f : A \times B \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(1,(s,t)) = s, \qquad f(2,(s,t)) = t.$$

Sean $\mu = 1/2$, $s_1 = t_2 = \sqrt{2}$ y $t_1 = s_2 = -\sqrt{2}$, con lo que $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in B$ y además,

$$\frac{1}{2}f(1,(s_1,t_1)) + \frac{1}{2}f(1,(s_2,t_2)) = 0,$$
$$\frac{1}{2}f(2,(s_1,t_1)) + \frac{1}{2}f(2,(s_2,t_2)) = 0.$$

Por otro lado, sea $(s,t) \in B$ arbitrario, entonces

$$f(1,(s,t)) = s,$$
$$f(2,(s,t)) = t.$$

Dado que $s + t = 0$ tenemos ue $s > 0$ o $t > 0$, por lo que no existe un $(s,t) \in B$ tal que

$$0 = \frac{1}{2}f(a,(s_1,t_1)) + \frac{1}{2}f(a,(s_2,t_2)) \geqslant f(a,(s,t)) \quad \forall a \in A.$$

Por lo tanto, f no es Ky Fan convexa en B.

Sin embargo la función sí es casi convexa en B.
Si $\mu \in (0,1)$ y $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in B$, $\epsilon > 0$, y se toman

$$s_\mu = \mu s_1 + (1-\mu)s_2, \quad t_\mu = \mu t_1 + (1-\mu)t_2,$$

entonces

$$\mu f(1,(s_1,t_1)) + (1-\mu)f(1,(s_2,t_2)) = s_\mu,$$
$$\mu f(2,(s_1,t_1)) + (1-\mu)f(2,(s_2,t_2)) = t_\mu.$$

Existe algún $s_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $s_\mu < s_0 < s_\mu + \epsilon$, con lo cual $s_\mu > s_0 - \epsilon$, y dado que $s_\mu = -t_\mu$ se tiene que $t_0 < t_\mu < t_\mu + \epsilon$ por lo que $t_\mu > t_0 - \epsilon$ y entonces

$$\mu f(1,(s_1,t_1)) + (1-\mu)f(1,(s_2,t_2)) = s_\mu > s_0 - \epsilon = f(1,(s_0,t_0)) - \epsilon,$$
$$\mu f(2,(s_1,t_1)) + (1-\mu)f(2,(s_2,t_2)) = t_\mu > t_0 - \epsilon = f(2,(s_0,t_0)) - \epsilon.$$

Por lo tanto f es casi convexa en B. ■

3.3. Resultados Minimax

Ahora tenemos las herramientas necesarias para analizar mas resultados minimax. El siguiente teorema fue presentado en 1977 por Neumann(no confundir con von Neumann) y en 1986 Jeyakumar proporcionó otra prueba del mismo.

***Teorema* 3.5 (*Neumann-Jeyakumar*).** *Si A es un subconjunto compacto no vacío de un espacio topológico, B es un conjunto arbitrario no vacío y $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es casi cóncava-casi convexa en $A \times B$ y semicontinua superiormente en A para cada $b \in B$, entonces*

$$\max_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b).$$

Demostración: Primero se verá que cualquier función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ casi cóncava en A es también débilmente cóncava en A. Por ser f casi cóncava, utilizando la definición con $\mathscr{P}_F(A)$, tenemos que para cada $\epsilon > 0$ y $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ existe $a_0 \in A$ tal que

$$f_e(\lambda, \delta_b) \leqslant f(a_0, b) + \epsilon \quad \forall b \in B. \tag{3.3.1}$$

Esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ existe $a_n \in A$ tal que

$$f_e(\lambda, \delta_b) \leqslant f(a_n, b) + n^{-1} \quad \forall b \in B,$$

por lo que para cada $I \in \langle B \rangle$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\min_{b\in I} f_e(\lambda, \delta_b) \leqslant \min_{b\in I} f(a_n, b) + n^{-1} \leqslant \sup_{a\in A} \min_{b\in I} f(a,b) + n^{-1}.$$

Por lo tanto $\min_{b\in I} f_e(\lambda, \delta_b) \leqslant \sup_{a\in A} \min_{b\in I} f(a,b)$ y dado que $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ es arbitrario se tiene que f es débilmente cóncava en A. Aplicando el teorema minimax de Kassay-Kolumbán obtenemos

$$\max_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \max_{a\in A} f_e(\delta_a, \mu). \tag{3.3.2}$$

Como también f es casi convexa en B se obtiene, de modo análogo al de la primera parte de la prueba, que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu \in \mathscr{P}_F(B)$ existe algún $b_n \in B$ que satisface

$$f_e(\delta_a, \mu) \geqslant f(a, b_n) - n^{-1} \quad \forall a \in A,$$

por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu \in \mathscr{P}_F(B)$ se tiene que

$$\max_{a\in A} f_e(\delta_a, \mu) \geqslant \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b) - n^{-1}.$$

Esto muestra que

$$\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \max_{a\in A} f_e(\delta_a, \mu) \geqslant \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b),$$

y por (3.3.2) llegamos a que

$$\max_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) \geqslant \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b).$$

La otra desigualdad es obvia, por lo que se demuestra el resultado deseado. ∎

Uno de los resultados minimax mas importantes es el Teorema de Ky Fan, publicado en la revista *Proceedings of the National Academy of Sciences* en 1953 ([3]), el cual se presenta a continuación.

***Teorema* 3.6 (*Ky Fan*).** *Si A es un subconjunto compacto no-vacío de un espacio topológico, B es un conjunto arbitrario no-vacío y $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es Ky Fan cóncava-convexa en $A \times B$ y semicontinua superiormente en A para cada $b \in B$, entonces*

$$\max_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b).$$

Es importante notar que las condiciones topológicas de los conjuntos y la semicontinuidad superior de la función f en A son las mismas en el Teorema de Neumann-Jeyakumar y en el Teorema de Ky Fan, por lo que es sencillo demostrar el Teorema 3.6.

Demostración del Teorema de Ky Fan: Puesto que f es Ky Fan cóncava-convexa, por el Teorema 3.4 se tiene que f es casi cóncava-casi convexa, por lo que podemos aplicar el resultado de Neumann-Jeyakumar, por lo que la igualdad

$$\max_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b),$$

se cumple. ∎

El siguiente resultado minimax es el Teorema de Peck-Dulmage. Este teorema fue publicado en 1957 ([11]) y al parecer los autores no conocían el resultado de Ky Fan, por lo que ignoraban que éste es mas general. Sin embargo ellos concluyeron el teorema de manera independiente de Ky Fan.

***Teorema* 3.7 (*Peck-Dulmage*).** *Si A es un subconjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio vectorial topológico, B es un subconjunto convexo y no vacío de un espacio vectorial y la función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es cóncava-convexa en $A \times B$ y semicontinua superiormente en A para cada $b \in B$ entonces*

$$\max_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b).$$

Demostración: Puesto que la función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es cóncava-convexa, por el Teorema 3.1 se tiene que f es también Ky Fan cóncava-convexa y además es semicontinua superiormente en A, por lo que podemos aplicar el teorema minimax de Ky Fan para obtener la igualdad deseada. ∎

En 1952 H. Kneser probó, en un artículo de dos páginas, un resultado minimax bastante general utilizando herramientas elementales y el resultado de que cualquier función semicontinua superiormente sobre un conjunto compacto alcanza su máximo. Dicho resultado se presenta a continuación.

Teorema* 3.8** (Kneser***)**.** *Si A es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio vectorial topológico, B es un subconjunto no vacío y convexo de un espacio vectorial y la función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es afín en ambas variables y semicontinua superiormente en A para cada $b \in B$ entonces*

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a,b) = \inf_{b \in B} \max_{a \in A} f(a,b).$$

Demostración: Dado que f es una función afín se tiene que existe x^* lineal en $A \times B$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a,b) = x^*(a,b) + c.$$

De lo anterior se deduce que para $\lambda \in \mathscr{P}_F(A)$ y $\mu \in \mathscr{P}_F(B)$,

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, b) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i, b)$$

y

$$f(a, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f(a, b_j),$$

lo que implica que la función es cóncava-convexa en $A \times B$. Aplicando el Teorema de Peck-Dulmage se obtiene que

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a,b) = \inf_{b \in B} \max_{a \in A} f(a,b). \qquad \blacksquare$$

3.4. Köning concavidad-convexidad

Esta sección se dedicará, especialmente, a un tipo de convexidad que captó nuestra atención por una característica extraña con respecto a los tipos de convexidades ya presentados. Primero se define otro tipo de concavidad/convexidad.

***Definición* 3.9.** *Sean A, B conjunos no vacíos. La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es llamada **Köning cóncava** en A si existe algún $\lambda \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ existe algún $a_0 \in A$ que satisface*

$$\lambda f(a_1, b) + (1-\lambda) f(a_2, b) \leqslant f(a_0, b) \quad \forall b \in B.$$

*La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es **Köning convexa** en B si existe algún $\mu \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $b_1, b_2 \in B$ exsite algún $b_0 \in B$ que satisface*

$$\mu f(a, b_1) + (1-\mu) f(a, b_2) \geqslant f(a, b_0) \quad \forall a \in A.$$

La función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es llamada Köning cóncava-convexa si f es Köning cóncava en A y Köning convexa en B.

La primer singularidad de esta concavidad es que está definida sobre elementos de $\mathscr{P}_{2,\lambda}(A)$, para $0 < \lambda < 1$ y no es equivalente a definirla sobre el conjunto $\mathscr{P}_F(A)$.

Del mismo modo en que en la Sección 3.2 se establecieron relaciones entre las diferentes concavidades/convexidades, podemos relacionar la Köning concavidad/Köning convexidad con las anteriores. Es sencillo probar que si una función es cóncava/convexa o Ky Fan cóncava/Ky Fan convexa entonces la función es Köning cóncava/Köning convexa. Estos hechos se desprenden directamente de las definiciones.

En [4] se afirma que una función Köning cóncava/Köning convexa es casi cóncava/casi convexa y con base en esto se demuestra un Teorema Minimax en [5]. Sin embargo se encontró el siguiente contraejemplo.

La función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $f(a, b) = ab$ es Köning convexa en $\mathbb{Q}$ pero no es casi convexa en $\mathbb{Q}$.
Primero, notemos que

$$\begin{aligned} f_e(\delta_a, \mu) &= \mu f(a, b_1) + (1 - \mu) f(a, b_2) \\ &= \mu a b_1 + (1 - \mu) a b_2 \\ &= a[\mu b_1 + (1 - \mu) b_2]. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Si se toma $\mu \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ y $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ entonces $b_0 = \mu b_1 + (1 - \mu) b_2$ pertenece a $\mathbb{Q}$ por lo que existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que para cualquier $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ existe un $b_0 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$f_e(\delta_a, \mu) \geqslant f(a, b_0),$$

por lo que la función es Köning convexa.

Sin embargo, la función no es casi convexa. Supongamos que si lo es y sea $\epsilon > 0$ fijo, $\mu_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ y $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $b_1 \neq b_2$. Entonces para

$$\mu = \mu_0 b_1 + (1 - \mu_0) b_2 \in \mathscr{P}_2(B),$$

existe un $b_0 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$f_e(\delta_a, \mu) \geqslant f(a, b_0) - \epsilon \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$a[\mu_0 b_1 + (1 - \mu_0) b_2] - a b_0 \geqslant -\epsilon \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Como $\mu_0 b_1 + (1 - \mu_0) b_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $b_0 \in \mathbb{Q}$ su diferencia es distinta de cero, digamos k, entonces

$$ak \geqslant -\epsilon \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

lo cual es falso, pues para algunos valores de a ocurre que $ak < -\epsilon$. Por lo tanto la función no es casi convexa.

El ejemplo anterior muestra que la demostración del Lema 2.3 en [4] no es correcta. Dicho lema afirma que si la función $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es Köning convexa en B entonces es casi convexa en B.

Capítulo 4

Separación Fuerte y Teoremas Minimax

4.1. Introducción

En este último capítulo se demuestran tres resultados. El primero es un resultado del análisis, el Teorema de Separación Fuerte, el segundo es el Teorema minimax de Ville y por último el Teorema minimax de Kakutani.

Si bien el Teorema de Separación Fuerte no es un resultado minimax, es importante pues nos permite realizar una conexión entre el Teorema de Kneser del capítulo anterior y el resultado minimax de Ville.

Al final del capítulo se muestra que existe una conexión entre el resultado minimax de Kakutani y el Teorema Minimax de von Neumann.

4.2. Resultados Minimax

Primero se muestra el siguiente resultado utilizando el Teorema Minimax de Kneser del capítulo anterior.

Teorema* 4.1** (Teorema de Separación Fuerte***)**.** *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío, cerrado y convexo, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío, compacto y convexo, y además la intersección de estos conjuntos es vacía, entonces existe $s_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\sup\{s_0 \cdot a : a \in A\} < \inf\{s_0 \cdot b : b \in B\}.$$

Demostración: Primero demostraremos que el conjunto $H := A - B$ es cerrado y convexo. Para probar que es cerrado, sea h un punto arbitrario en $\overline{H}$. Entonces existe una sucesión $\{h_n\}$ en H tal que $h_n \to h$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = a_n - b_n,$$

con $a_n \in A$ y $b_n \in B$. Como B es compacto, exsite unan subsucesión $\{b_{n_k}\}$ de $\{b_n\}$ que es convergente en B. Además se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (h_{n_k} + b_{n_k}) = b + h = a,$$

con $a \in A$ puesto que el conjunto A es cerrado. Por lo tanto

$$h = a - b \in H$$

lo que implica que H es cerrado. La demostración de la convexidad de H es inmediata. Por otra parte tenemos las siguientes equivalencias,

$$\begin{aligned} \exists s_0 \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tal que} \quad & \sup\{s_0 \cdot a : a \in A\} < \text{ínf}\{s_0 \cdot b : b \in B\} \\ \Leftrightarrow \quad & \sup\{s_0 \cdot a : a \in A\} - \text{ínf}\{s_0 \cdot b : b \in B\} < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sup\{s_0 \cdot a - s_0 \cdot b : a \in A, b \in B\} < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sup\{s_0 \cdot x : x \in H\} < 0. \end{aligned}$$

Por lo que es suficiente probar que existe $s_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sup\{s_0 \cdot x : x \in H\} < 0. \tag{4.2.1}$$

Para probar la desigualdad (4.2.1) supóngase que

$$\sigma_H(s) := \sup\{s \cdot x : x \in H\} \geqslant 0$$

para todo $s \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : cl(B_1) \times H \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(s,h) := s \cdot h,$$

donde B_1 es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $cl(B_1)$ su cerradura.

Entonces f es lineal en ambas variables(afín) y continua(en particular, semicontinua superiormente) en $cl(B_1)$ para todo $h \in H$. Dado que el conjunto $cl(B_1)$ es compacto y convexo y el conjunto H es convexo y cerrado pordemos aplicar el Teorema minimax de Kneser a f, con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{h\in H} \min_{s\in cl(B_1)} s \cdot h &= - \inf_{h\in H} \max_{s\in cl(B_1)} (-s \cdot h) \\ &= - \max_{s\in cl(B_1)} \inf_{h\in H} (-s \cdot h) \\ &= \min_{s\in cl(B_1)} \sup_{h\in H} s \cdot h \\ &\geqslant \inf_{s\in cl(B_1)} \sigma_H(s) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Por otro lado tenemos que A y B son ajenos, lo que implica que $0 \notin H$, por lo que para cada $h \in H$ se tiene que $-h/\|h\|$ está bien definido y además pertenece a $cl(B_1)$. Esto quiere decir que para cada $h \in H$ se tiene que

$$\min_{s\in cl(B_1)} s \cdot h \leqslant -\frac{h \cdot h}{\|h\|} = -\|h\|.$$

Como H es cerrado y $0 \notin H$ entonces $\inf_{h\in H} \|h\| > 0$. De lo anterior se obtiene que

$$\sup_{h\in H} \min_{s\in cl(B_1)} s \cdot h \leqslant \sup_{h\in H}(-\|h\|) = - \inf_{h\in H} \|h\| < 0,$$

lo cual contradice (4.2.2), por lo tanto debe existir algún $s_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma_H(s_0) < 0$. ∎

Nota: El Teorema del hiperplano separador, del Capítulo 1, es un caso particular de este resultado en donde $\{0\}$ es el conjunto compacto B. También es importante observar que para demostrar el Teorema 1.8 no se utilizó ningún resultado minimax, contrario a lo ocurrido en la demostración anterior.

En el año 1938 J. Ville publicó un teorema que generalizó al teorema minimax de John von Neumann. En la demostración del Teorema de Ville se utilizarán los siguientes resultados.

***Teorema* 4.2 (*Teorema de Caratheodory*).** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $x \in co(A)$ entonces existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$ y $x_0, \ldots, x_n \in A$ tal que*

$$x = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j.$$

Es decir, x puede escribirse como combinación lineal de no mas de $n+1$ elementos de A.

***Lema* 4.3.** *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto entonces $co(A)$ es compacto.*

Demostración: Sea (x_m) una sucesión en $co(A)$. Por el Teorema de Caratheodory

$$x_m = \lambda_0^m x_0^m + \ldots + \lambda_n^m x_n^m,$$

con $\lambda_j^m \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^n \lambda_j^m = 1$ y $x_j^m \in A$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por la compacidad de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ y la compacidad de A en $\mathbb{R}^n$ existe una subsucesión $(x_{(m,0)})$ de (x_m) tal que

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_0^{(m,0)} = \lambda_0, \qquad \lim_{m\to\infty} x_0^{(m,0)} = x_0,$$

con $\lambda_0 \in [0,1]$ y $x_0 \in A$.

Usando el mismo argumento de compacidad, existe una subsucesión $(x_{(m,1)})$ de $(x_{(m,0)})$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_1^{(m,1)} = \lambda_1, \qquad \lim_{m\to\infty} x_1^{(m,1)} = x_1,$$

con $\lambda_1 \in [0,1]$ y $x_1 \in A$.

Repitiendo el proceso $n-1$ veces mas obtenemos una subsucesión $(x_{(m,n)})$ de (x_m), constantes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ y $x_0, \ldots, x_n \in A$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_j^{(m,n)} = \lambda_j, \qquad \lim_{m\to\infty} x_j^{(m,n)} = x_j.$$

Sea $x = \lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m,n)} = x \in \mathbb{R}^n,$$

además
$$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j=\sum_{j=0}^{n}[\lim_{m\to\infty}\lambda_j^{(m,n)}]=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^{(m,n)}=1.$$

Entonces $x\in co(A)$, por lo tanto $co(A)$ es compacto. ∎

A continuación se demuestra el resultado minimax de Ville.

***Teorema* 4.4 (*Ville*).** *Si A y B son conjuntos no vacíos y compactos en espacios métricos y la función $f:A\times B\to\mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu)=\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu).$$

Demostración: Por la primera parte del Lema 1.9 se tiene que

$$\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu)\geqslant\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu),$$

por lo que basta probar la desigualdad opuesta. Además por (1.5.10) es suficiente probar que
$$\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu)\leqslant\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\inf_{b\in B} f_e(\lambda,\delta_b).$$

Sea $\beta:=\sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)}\inf_{b\in B} f_e(\lambda,\delta_b)$ y supóngase

$$\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}\sup_{a\in A}>\beta.$$

Entonces $\sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu)>\beta$ para todo μ en $\mathscr{P}_F(B)$, por lo que existe algún $\gamma>0$ tal que
$$\sup_{a\in A} f_e(\delta_a,\mu)\geqslant\beta+\gamma\quad\forall\mu\in\mathscr{P}_F(B).$$

Por otra parte, dado que los conjuntos A y B son compactos y la función f es continua en $A\times B$ se tiene que la función f es uniformemente continua en $A\times B$, lo cual implica que existe algún $\delta>0$ tal que

$$\sup_{b\in B}|f(a_1,b)-f(a_2,b)|<\frac{\gamma}{2}$$

para a_1,a_2 en A tales que $\rho(a_1,a_2)<\delta$, donde ρ es la métrica en A y por lo tanto para μ en $\mathscr{P}_F(B)$ se tiene que

$$|f_e(\delta_{a_1},\mu)-f_e(\delta_{a_2},\mu)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mu_i|f(a_1,b_j)-f(a_2,b_j)|<\frac{\gamma}{2},$$

y dado que $\mu\in\mathscr{P}_F(B)$ es arbitrario, se tiene que

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)}|f_e(\delta_{a_1},\mu)-f_e(\delta_{a_2},\mu)|<\frac{\gamma}{2},\tag{4.2.3}$$

para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ tales que $\rho(a_1, a_2) < \delta$. Si $B_r(a)$ denota la bola abierta de radio $r > 0$ centrada en a entonces

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_\delta(a),$$

por lo que se tiene una cubierta abierta de A. Por la ocmpacidad de A debe existir un conjuntos finito $\{a_1, \ldots, a_p\} \subseteq A$ tal que $A \subseteq \cup_{k=1}^{p} B_\delta(a_k)$. Dado $a \in A$ entonces $a \in B_\delta(a_k)$ para algún k, utilizando esto y (4.2.3) se obtiene que

$$f_e(\delta_{a_k}, \mu) > f_e(\delta_a, \mu) - \frac{\gamma}{2} \quad \forall \mu \in \mathscr{P}_F(B), \tag{4.2.4}$$

(a_k depende de $a \in A$), y utilizando (4.2.3) y (4.2.4) se obtiene que para $a \in A$,

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant p} f_e(\delta_{a_k}, \mu) \geqslant \sup_{a \in A} f_e(\delta_a, \mu) - \frac{\gamma}{2} \geqslant \beta + \frac{\gamma}{2} \quad \forall \mu \in \mathscr{P}_F(B). \tag{4.2.5}$$

Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^p$ dado por

$$S := \{(f(a_1, b), \ldots, f(a_p, b)) : b \in B\}.$$

Puesto que f es continua y B es compacto se obtiene que S es compacto, y por el Lema 4.3 se tiene que la envolvente convexa de S es también compacta. Sea $(z_1, \ldots, z_p) \in co(S)$, entonces

$$\begin{aligned}(z_1, \ldots, z_p) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i (f(a_1, b_i), \ldots, f(a_p, b_i)) \\ &= (f_e(\delta_{a_1}, \mu), \ldots, f(\delta_{a_p}, \mu)),\end{aligned}$$

y por (4.2.5) se obtiene que $\max_{1 \leqslant k \leqslant p} z_k \geqslant \beta + \dfrac{\gamma}{2}$.

Sea $V := \{(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{R}^p : \max_{1 \leqslant k \leqslant p} z_k \leqslant \beta + \frac{\gamma}{4}\}$. Por lo anterior se tiene que la intersección del conjunto convexo y compacto $co(S)$ con el conjunto convexo y cerrado V es vacía. Usando el Teorema de Separación fuerte se tiene que existe un $s_0 \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$\sup_{v \in V} (s_0 \cdot v) < \inf_{z \in co(S)} (s_0 \cdot z) < \infty. \tag{4.2.6}$$

Ahora mostramos que dicho $s_0 = (s_1, \ldots, s_p)$ es tal que $s_i \geqslant 0$ para $1 \leqslant i \leqslant p$. Supóngase que no, que existe algún $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $s_j < 0$. Entonces si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos

$$v_n = (\beta, \ldots, \beta, -n, \beta, \ldots, \beta),$$

donde $-n$ esta en la posición j-ésima, entonces para todo $n > -\beta$ se tiene que $v_n \in V$, por lo que obtenemos

$$s_0 \cdot v_n = \beta(s_1 + \ldots + s_{j-1} + s_{j+1} + \ldots + s_p) + s_j(-n).$$

Haciendo n tender a infinito se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (s_0 \cdot v_n) = \infty,$$

lo cual contradice (4.2.6). Por lo tanto $s_i \geqslant 0$ para $i \in \{1, \dots, p\}$.
Tambiénocurre que si s_0 es el punto que cumple que

$$\sup_{v\in V}(s_0 \cdot v) < \inf_{z\in co(S)} (s_0 \cdot z), \tag{4.2.7}$$

entonces si $k > 0$ se tiene que el producto escalar ks_0 también cumple con (4.2.7).

Por lo tanto, debe existir un vector $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \geqslant \mathbf{0}$ con $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ y tal que

$$\sup_{v\in V}[(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \cdot v] < \inf_{b\in B}[(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \cdot (f(a_1, b), \dots, f(a_p, b))].$$

Como $(\beta + \frac{\gamma}{4}, \dots, \beta + \frac{\gamma}{4}) \in V$, para $\lambda_0 := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \delta_{a_i}$, se tiene que

$$\beta + \frac{\gamma}{4} < \inf_{b\in B} f_e(\lambda_0, \delta_b),$$

lo cual contradice la definición de β, puesto que se tendría que

$$\beta + \frac{\gamma}{4} < \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} \inf_{b\in B} f_e(\lambda, \delta_b) = \beta.$$

Por lo tanto

$$\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a, \mu) \leqslant \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} \inf_{b\in B} f_e(\lambda, \delta_b),$$

con lo que se concluye la demostración. ∎

El siguiente resultado minimax fue probado por Kakutani en 1941, utilizando su generalización del teorema de punto fijo de Brouwer.

Teorema* 4.5** (Kakutani***)**.** *Si A y B son conjuntos no vacíos, compactos y convexos en espacios lineales normados y la función $f : A\times B \to \mathbb{R}$ es continua y $a \mapsto f(a,b)$ es cóncava en A para cada $b \in B$ y $b \mapsto f(a,b)$ es convexa en B para cada $a \in A$, entonces*

$$\max_{a\in A} \min_{b\in B} f(a,b) = \min_{b\in B} \max_{a\in A} f(a,b).$$

Demostración: Para cada $a \in A$ la función $b \mapsto f(a,b)$ es convexa en el conjunto compacto y convexo B. Entonces para cualquier $\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \delta_{b_j}$ en $\mathscr{P}_F(B)$ se tiene que

$$\sup_{a\in A} f_e(\delta_a, \mu) \geqslant \sup_{a\in A} f(a, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j) \geqslant \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} f(a,b).$$

Lo anterior y la relación (1.5.10) implican que

$$\inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{\lambda\in\mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda, \mu) = \inf_{\mu\in\mathscr{P}_F(B)} \sup_{a\in A} f_e(\delta_a, \mu) \geqslant \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} f(a,b). \tag{4.2.8}$$

De modo análogo se tiene que dado que la función $a \mapsto f(a,b)$ es cóncava en el conjunto convexo y compacto A para cada $b \in B$ se cumple que

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \inf_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu) = \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \inf_{b \in B} f(\lambda, \delta_b) \leqslant \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a,b). \tag{4.2.9}$$

Aplicando el Teorema de Ville se tiene que

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \inf_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu) = \inf_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \sup_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu),$$

lo cual en conjunto con (4.2.8) y (4.2.9) deja como resultado que

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a,b) \geqslant \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} f((a,b),$$

y la desigualdad opuesta siempre se cumple. Además, dado que la función es continua en $A \times B$ se obtiene que

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} f(a,b) = \min_{b \in B} \max_{a \in A} f(a,b), \tag{4.2.10}$$

con lo que el Teorema de Kakutani queda demostrado. ∎

En el Capítulo 1 se demostró el Teorema Minimax de von Neumann y se mostró un resultado minimax a partir de éste, el cual se utilizó para demostrar otro resultado minimax y se procedió de ese modo sucesivamente hasta llegar al Teorema Minimax de Kakutani. Finalmente observemos que el Teorema de von Neumann es un corolario del Teorema de Kakutani.

Si A y B son finitos, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, se tiene que $\mathscr{P}_F(A) \equiv \Delta_n$ y $\mathscr{P}_F(B) \equiv \Delta_m$ son conjuntos compactos y convexos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Además se tiene que la función

$$h(\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j f(a_i, b_j)$$

es continua en $\Delta_n \times \Delta_m$ y lineal en ambas variables, por lo que es cóncava en A y convexa en B. Aplicando el Teorema de Kakutani a h se obtiene que

$$\max_{\lambda \in \Delta_n} \min_{\mu \in \Delta_m} h(\lambda,\mu) = \min_{\mu \in \Delta_m} \max_{\lambda \in \Delta_n} h(\lambda,\mu),$$

lo cual es equivalente a

$$\max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} f_e(\lambda,\mu) = \min_{\mu \in \mathscr{P}_F(B)} \max_{\lambda \in \mathscr{P}_F(A)} f_e(\lambda,\mu).$$

Conclusiones

Recordemos lo hecho a lo largo de este trabajo. En el primer capítulo se presentaron las definiciones necesarias de Teoría de Juegos y dos resultados minimax, siendo uno de ellos el Teorema minimax de von Neumann que fue demostrado utilizando conceptos y resultados básicos de Análisis Matemático. Al final del primer capítulo se vio una relación entre los dos resultados minimax presentados. En el segundo capítulo se presentaron elementos de topologá necesarios y un par de resultados minimax más, uno de los cuales no lucía como un resultado de este tipo. Al final de este capítulo se mostró que ambos resultados estaban ligados a los del primer capítulo. El tercer capítulo presenta distintos tipos de convexidades para funciones, en general estos son importantes en problemas de optimización y en especial en problemas minimax, y se observó la relación entre estos tipos de convexidad. Se terminó el capítulo mostrando la relación de los resultados minimax presentados con los de secciones anteriores. Por último, en el cuarto capítulo se presenta un resultado del análisis, el Teorema de Separación Fuerte y este es utilizado como una especie de puente entre el Teorema de Kneser y el de Ville. Al final del capítulo se mostró el Teorema Minimax de von Neumann utilizando el resultado minimax de Kakutani.

Los cuatro capítulos de esta tesis son para observar la siguiente relación entre los once resultados presentados:

$$\begin{aligned} von\ Neumann \Rightarrow Wald \Rightarrow Gwinner - Oettli \Rightarrow Kassay - Kolumb\acute{a}n \\ \Rightarrow Neumann - Jeyakumar \Rightarrow Ky\ Fan \Rightarrow Peck - Dulmage \\ \Rightarrow Kneser \Rightarrow Separaci\acute{o}n\ Fuerte \Rightarrow de\ Ville \Rightarrow Kakutani \\ \Rightarrow von\ Neumann. \end{aligned}$$

Se creía que la mayoría de estos resultados minimax eran una generalización del resultado de von Neumann, sin embargo hemos concluido que todos son equivalentes. Esto contribuye a reflexionar que distintas áreas de las matemáticas pueden tener relaciones interesantes, como en éste caso son Teoría de Juego y Análisis Matemático.

Apéndice A

Semicontinuidad Superior

A lo largo de éste trabajo se utilizo el hecho de que ciertas funciones son semicontinuas, éste apéndice presenta las definiciones y resultados utilizados.

Dado un conjunto X, coloquialmente se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente en x si los valores de la función son menores o cercanos a $f(x)$ en una vecindad de x. A continuación se presenta la definición.

Definición **A.1.** *Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente en X si,*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x_0 \in X,$$

cuando $f(x_0) > -\infty$, y si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

cuando $f(x_0) = -\infty$.

Definición **A.2.** *Una función f es semicontinua inferiormente si $-f$ es semicontinua superiormente.*

A continuación se presentan enunciados equivalentes a A.1.

Proposición **A.3.** *Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$, los siguientes resultados son equivalentes:*

1. *f es semicontinua superiormente en $x \in X$.*
2. *Si $f(x_0) > -\infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geqslant f(x) - \epsilon$ cuando $|x_0 - x| < \delta$, y si $f(x_0) = -\infty$ entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*
3. *El conjunto $\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ es cerrado para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Por último, uno de los resultados mas utilizados es el siguiente.

Teorema **A.4.** *Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}$. Si f es semicontinua superiormente entonces f alcanza su máximo en K. Análogamente, si f es semicontinua inferiormente entonces f alcanza su mínimo en K.*

Estos resultados se pueden consultar en [1] y [2].

Bibliografía

[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis*. 3era. Ed., Springer Verlag, Heidelberg/New York, 1999.

[2] K. C. Border. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press, California, 1985.

[3] K. Fan. Minimax theorems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **39**:págs. 42–47, 1953.

[4] J. B. G. Frenk and G. Kassay. Minimax results and finite dimensional separation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **113**(2):págs 409–421, 2002.

[5] J. B. G. Frenk, G. Kassay, and J. Kolumbán. On equivalent results in minimax theory. *European Journal of Operational Research*, **157**:págs. 46–58, 2004.

[6] J. Gwinner and W. Oettli. Theorems of the alternative and duality for inf-sup problems. *Mathematics of Operations Research*, **19**:págs. 238–256, 1994.

[7] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. vol. 1, Springer Verlag, Berlín, 1993.

[8] V. Jeyakumar. A generalization of a minimax theorem of fan via a theorem of the alternative. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **48**(3):págs. 525–533, 1986.

[9] S. Kakutani. A generalization of brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, **8**:págs. 457–459, 1941.

[10] G. Kassay and J. Kolumbán. On a generalized sup-inf problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **91**:págs. 651–670, 1996.

[11] J. E. L. Peck and A. L. Dulmage. Games on a compact set. *Canadian Journal of Mathematics*, **9**:págs. 450–458, 1957.

[12] Y. Peres. *Game Theory*. Alive, www.stat.berkeley.edu/sly/gtlect.pdf, 2013.

[13] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[14] A. Wald. Generalization of a theorem by von neumann concerning zero-sum two person games. *Annals of Mathematics*, **46**(2):págs. 281–286, 1945.