UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Funciones maximales y Operadores promedio

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Yingying Wu

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Junio de 2017

SINODALES

Dra. Martha D. Guzmán Partida

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Carolina Espinoza Villalva

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dra. Jessica Y. Santana Bejarano

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Carlos A. Robles Corbala

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

Siempre fue complicado explicarle a los demás qué era lo que estaba estudiando, y más a mi familia, así que principalmente quiero agradecer a mi papá y a mi mamá por confiar en mi decisión y por darme su apoyo a través de toda esta aventura.

A mi directora de tesis Dra. Martha Guzmán, por sus consejos, por su apoyo y por permitirme trabajar con ella. También le agradezco por haber confiado en mí desde mis primeros semestres lo cual me motivó a seguir esforzándome para ser una mejor estudiante.

A mis sinodales: Carolina Espinoza, Carlos Robles y Jessica Santana por el tiempo invertido en la revisión de este trabajo y por los consejos que me han dado.

A los profesores de la licenciatura quienes contribuyeron en mi formación.

A mis compañeros de estudio, con los que pasé horas haciendo tareas de Cálculo, Álgebra Lineal, Teoría de la Medida y Análisis Funcional.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es obtener los clásicos resultados de acotación de la función maximal y el operador promedio de Hardy-Littlewood en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y los espacios de Morrey. Para ello, haremos uso de algunos teoremas de cubrimiento, los cuales nos proporcionarán una familia a lo sumo numerable de cubos o de bolas que logren "cubrir" un conjunto relativamente arbitrario del espacio euclideano. Estas familias pueden presentar alguna restricción que guarda cierta relación con el problema que se desea resolver. Además veremos un resultado fundamental del análisis armónico, a saber, el teorema de diferenciación de Lebesgue.

La notación que emplearemos en esta tesis será estándar. Si B es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro en x, radio r y α es cualquier número positivo, el conjunto αB denotará la bola abierta con centro en x y radio αr; el radio de una bola B será denotado por $radB$. Si A es un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$, $|A|$ denotará la medida de Lebesgue de A. Con frecuencia utilizaremos una letra C para denotar una constante que podría estar variando renglón tras renglón.

En el Capítulo 1 presentaremos los teoremas de cubrimiento de Vitali y de Besicovitch, los cuales son útiles para obtener resultados de diferenciabilidad de funciones.

En el Capítulo 2 con el propósito de presentar algunas aplicaciones de los teoremas de cubrimiento, introducimos la función maximal de Hardy-Littlewood.

Después, con la finalidad de mostrar que esta función es continua en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, presentamos el teorema de interpolación de Marcinkiewicz y concluimos probando la continuidad de una generalización de la función maximal.

En el Capítulo 3 estudiaremos los espacios de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, los cuales constituyen una generalización de los espacios $L^q(\mathbb{R}^n)$, mostraremos que estos espacios son de Banach y probaremos que la función maximal de Hardy-Littlewood es continua en dichos espacios.

En el Capítulo 4 estudiaremos el operador promedio de Hardy-Littlewood, mostraremos que bajo ciertas condiciones en el peso tendremos que este operador es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ y en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. Además determinaremos la norma de este operador en dichos espacios.

En la última parte de esta tesis presentaremos algunas conclusiones personales y un apéndice en el que incluimos la demostración de la desigualdad integral de Minkowski.

Capítulo 1

Teoremas de cubrimiento

El propósito de este primer capítulo es presentar algunos teoremas de cubrimiento en el espacio euclidiano, los cuales utilizaremos para estudiar propiedades de diferenciabilidad de funciones.

Es bien sabido que uno de los teoremas más importantes en las matemáticas es el primer teorema fundamental del cálculo el cual dice que si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y si

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b,$$

entonces F es diferenciable en $[a, b]$ y su derivada está dada por

$$F'(x) = f(x) \qquad a \leq x \leq b.$$

Ahora bien, existe un teorema de Lebesgue que extiende este resultado para el caso cuando f es solamente integrable en el sentido de Lebesgue. Se tiene que F definida como antes, es una función continua, asegura que F es diferenciable casi en todas partes y $F'(x) = f(x)$ para casi toda $x \in [a, b]$. Este resultado, conocido como teorema de diferenciación de Lebesgue puede ser demostrado con la ayuda de un teorema de cubrimiento de Vitali.

Aunque al principio no encontremos una relación entre el teorema de cubrimiento y el teorema de diferenciación de Lebesgue, en el transcurso de los capítulos mostraremos la importancia que tiene.

Los tópicos desarrollados en este primer capítulo fueron tomados de [8] y [11].

1.1. Teorema de cubrimiento de Vitali (versión clásica)

Presentaremos dos versiones del teorema de cubrimiento de Vitali, sin embargo, los enunciados no serán los originales dados por G. Vitali, y además, la demostración de la primera versión que daremos será la desarrollada por S. Banach, que es la que aparece en la mayor parte de los textos de teoría de la medida y puede ser consultada en [11], p. 448.

Teorema 1.1.1. *Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Supóngase que $\mathcal{F}$ es una colección de bolas abiertas con centro en puntos de E, de modo que cada punto de E es el centro de alguna bola en $\mathcal{F}$. Entonces existe una colección a lo más numerable de bolas de $\mathcal{F}$, digamos, $\{B_i\}_i$ tales que:*

1. *$\{B_i\}_i$ es ajena por pares.*
2. *$E \subset \bigcup_i 3B_i$.*

Demostración. Observemos que si el conjunto $\{radB : B \in \mathcal{F}\}$ no está acotado superiormente, hemos terminado, pues como E es acotado, podemos seleccionar una única bola $B \in \mathcal{F}$ con radio suficientemente grande tal que $E \subset B$.

Si $\{radB : B \in \mathcal{F}\}$ está acotado superiormente, procederemos de forma inductiva. Seleccionamos B_1 de forma aleatoria. Supongamos que hemos seleccionado las bolas $B_1, ..., B_k$ con $k \geq 1$.

Definamos

$$d_{k+1} = \sup \left\{ radB : B \in \mathcal{F}, B \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \emptyset \right\}.$$

Si no existen bolas con tal propiedad el proceso de selección termina con B_k; en caso contrario, escogemos $B_{k+1} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\tfrac{1}{2} d_{k+1} < radB_{k+1} \quad \text{y} \quad B_{k+1} \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \emptyset.$$

Por construcción la colección de bolas $\{B_i\}_i$ es ajena por pares.

Para probar la segunda propiedad, tomemos $x \in E$ arbitrario y sea $B \in \mathcal{F}$ una bola con centro en x y radio r. Notemos que debe existir un k tal que $B \cap B_{k+1} \neq \emptyset$, pues en caso contrario, si $B \cap B_{k+1} = \emptyset$ para toda k implicaría que la selección de bolas nunca termina y además se tendría $r \leq d_{k+1}$ para toda k. De aquí que, tendríamos una cantidad infinita numerable de bolas B_{k+1} ajenas cuyos radios satisfacen

$$radB_{k+1} > \frac{1}{2} d_{k+1} \geq \frac{1}{2} r,$$

y por lo tanto

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k+1} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |B_{k+1}| = \infty,$$

lo cual no es posible pues $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k+1}$ es un conjunto acotado. Por lo que la bola B intersecta por lo menos a una bola B_{k+1}.

Sea $k_0 = \min\{k \geq 1 : B \cap B_{k+1} \neq \emptyset\}$, así

$$B \cap \bigcup_{i=1}^{k_0} B_i = \emptyset$$

y además

$$r \leq d_{k_0+1} < 2radB_{k_0+1}.$$

Tomando $y \in B \cap B_{k_0+1}$, si z es el centro de la bola B_{k_0+1} se tiene

$$\begin{aligned} |x-z| &\leq |x-y| + |y-z| \\ &< r + radB_{k_0+1} \\ &< 3radB_{k_0+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in 3B_{k_0+1} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} 3B_k$. ■

Observación 1.1.2. *Con una pequeña modificación en la prueba podemos reemplazar el factor* 3 *que aparece en el teorema previo por* $2+\epsilon$ *para toda* $\epsilon > 0$. *Basta considerar* $B_{k+1} \in \mathcal{F}$ *tal que*

$$\frac{1}{1+\epsilon} d_{k+1} < radB_{k+1}.$$

Sin embargo no podemos asegurar que $E \subset \bigcup_k 2B_k$. Para ello analicemos el siguiente ejemplo para el caso unidimensional.

Ejemplo 1.1.3. *Sea* $E = (-1,1)$. *Para* $x \in E$, *definimos* $r(x) = \frac{1+2|x|}{3}$, *así como* $B_x = (x - r(x), x + r(x))$ *y* $\mathcal{F} = \{B_x : x \in E\}$.

Notemos que $0 \in B_x$ para toda $x \in (-1,1)$, en efecto

a) Si $x = 0$ es claro que $0 \in B_x$.

b) Si $x \in (-1,0)$, entonces $x + r(x) = x + \frac{1-2x}{3} = \frac{x+1}{3} > 0$.

c) Si $x \in (0,1)$, entonces $x - r(x) = x - \frac{1+2x}{3} = \frac{x-1}{3} < 0$.

Como todas las bolas intersectan al 0, consideraremos una sola bola B_x. Veamos que ninguna bola B_x cumple que $(-1,1) \subset 2B_x$.

a) Si $x = 0$. Entonces $B_x = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y claramente $(-1, 1) \not\subset 2B_x$.

b) Si $x \in (-1, 0)$. Tenemos que $x + 2r(x) = x + 2(\frac{1-2x}{3}) = \frac{2-x}{3} < 1$ y por lo tanto $(-1, 1) \not\subset 2B_x$.

c) Si $x \in (0, 1)$. Tenemos que $x - 2r(x) = x - 2(\frac{1+2x}{3}) = \frac{-2-x}{3} > -1$ y por lo tanto $(-1, 1) \not\subset 2B_x$.

1.2. Teorema de cubrimiento de Vitali (versión infinitesimal)

La prueba de esta segunda versión del teorema de cubrimiento de Vitali puede ser consultada en [11], p. 479.

Teorema 1.2.1. *Sea E un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ y supóngase que $\mathcal{F}$ es una familia de bolas cerradas con radio positivo que satisface la siguiente condición (la cual llamaremos condición de Vitali):*

$$\textit{dado } \epsilon > 0 \textit{ y dado } x \in E \textit{ existe } B \in \mathcal{F} \textit{ tal que } x \in B \textit{ y } radB < \epsilon. \tag{1.1}$$

Entonces existe una colección a lo más numerable de bolas de $\mathcal{F}$, digamos, $\{B_i\}_i$ tales que:

1. *$\{B_i\}_i$ es ajena por pares.*
2. *$E \subset \bigcup_i B_i$ excepto por un conjunto de medida cero.*

Demostración. Primero haremos algunas observaciones; resulta suficiente probar para el caso en que E es un conjunto acotado; la razón es que E puede escribirse como la unión de los subconjuntos acotados

$$E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : k < |x| < k+1\}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, ...$$

excepto en un conjunto de medida cero. Así que haremos la demostración para estos conjuntos.

Además, por la condición (1.1), podemos suponer que todas las bolas en $\mathcal{F}$ tienen radio menor que una constante positiva y que cada bola de $\mathcal{F}$ contiene un punto de E.

Ahora procederemos a demostrar el teorema; algo interesante de esta demostración es que sigue un procedimiento de selección similar al del Teorema 1.1.1:

Seleccionamos B_1 de forma aleatoria. Supongamos que hemos seleccionado las bolas $B_1, ..., B_k$ con $k \geq 1$. Si $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ entonces terminamos. En caso contrario la condición de Vitali garantiza la existencia de bolas $B \in \mathcal{F}$ tales que son ajenas al conjunto cerrado $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$.

Definamos

$$d_{k+1} = \sup \left\{ radB : B \in \mathcal{F}, B \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \emptyset \right\}.$$

Tomamos $B_{k+1} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\tfrac{1}{2} d_{k+1} < radB_{k+1} \quad \text{y} \quad B_{k+1} \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \emptyset.$$

Si el proceso termina en algún paso, hemos concluido. Supongamos que el proceso no termina. Por construcción la colección de bolas $\{B_k\}_k$ es ajena por pares así que solo resta probar la segunda propiedad.

Como las bolas B_k son ajenas, tienen radio acotado e intersecan a E, tenemos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |B_k| < \infty$. Así $\lim\limits_{k\to\infty} radB_k = 0$ y por tanto $\lim\limits_{k\to\infty} d_{k+1} = 0$.

Ahora probaremos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} 5B_i.$$

Para esto tomaremos un $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} Bi$ y veremos que necesariamente debe estar contenido en $5B_{k_0}$ para algún $k_0 \geq k$.

Sea $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} Bi$, por la condición (1.1) existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $x \in B$ y $B \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i = \emptyset$. Observemos que no puede pasar $B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$ pues por definición de d_{k+1} se tendría que $d_{k+1} \geq radB$ para toda $k \in \mathbb{N}$, lo que contradice que d_{k+1} tiende a cero.

Sea k_0 el menor entero positivo tal que $B \cap B_{k_0} \neq \emptyset$, notemos que $k_0 \geq k$. Como $B \cap \bigcup_{i=1}^{k_0-1} B_i = \emptyset$, de la definición de d_{k_0} se tiene que $d_{k_0} \geq radB$. Además, de la elección de B_{k_0} tenemos que $radB \leq 2radB_{k_0}$.

De aquí tenemos que si w es el centro de B, w_0 el centro de B_{k_0}, y $y \in B \cap B_{k_0}$, entonces para toda $x \in B$ se tiene

$$\begin{aligned}
|x - w_0| &= |x - w + w - y + y - w_0| \\
&\leq |x - w| + |w - y| + |y - w_0| \\
&< radB + radB + radB_{k_0} \\
&\leq 2radB_{k_0} + 2radB_{k_0} + radB_{k_0} \leq 5radB_{k_0}.
\end{aligned}$$

Así $x \in B \subset 5B_{k_0}$ que era lo que se quería. Como esto se cumple para toda $k \in \mathbb{N}$ se sigue que $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=k}^{\infty} 5B_i$. Entonces por la monotonía de la medida de Lebesgue tenemos que

$$\left| E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right|^* \leq \left| \bigcup_{i=k}^{\infty} 5B_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |5B_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} 5^n |B_i|.$$

Como el lado derecho tiende a cero cuando k tiende a infinito se sigue que $\left|E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right|^* = \left|E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right| = 0$. Y por lo tanto $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ excepto en un conjunto de medida cero. ■

1.3. Teorema de cubrimiento de Besicovitch

El teorema que presentaremos a continuación nos ayudará a probar una versión más general del teorema de diferenciación de Lebesgue, en la cual estarán involucrados unas funciones llamadas "pesos", que son uno de los objetos de los cuales hablaremos con mayor detalle en la segunda mitad del siguiente capítulo. La demostración que presentaremos es la versión formulada en [8], p. 289.

Teorema 1.3.1. *Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in E$, sea Q_x un cubo abierto con centro x y lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces, existe una colección a lo más numerable de puntos $\{x_i\}_i$ de E tales que:*

1. $E \subset \bigcup\limits_i Q_{x_i}$.
2. *Para casi toda $y \in \mathbb{R}^n$ se cumple*

$$\sum_i \chi_{Q_{x_i}}(y) \leq 24^n.$$

Demostración. Sea $s_0 = \sup\{\ell(Q_x) : x \in E\}$, donde $\ell(Q_x)$ denota la longitud del lado del cubo Q_x. Si $s_0 = \infty$ terminamos, pues entonces existe un $x_0 \in E$ tal que $\ell(Q_{x_0}) > 4L$ donde $E \subset [-L, L]^n$ y por tanto se concluye el teorema.

Supongamos que $s_0 < \infty$. Seleccionamos $x_1 \in E$ tal que $\frac{1}{2}s_0 < \ell(Q_{x_1})$. Definamos

$$E_1 = E \setminus Q_{x_1} \quad \text{y} \quad s_1 = \sup\{\ell(Q_x) : x \in E_1\}.$$

Tomamos $x_2 \in E_1$ tal que $\frac{1}{2}s_1 < \ell(Q_{x_2})$. Siguiendo este proceso de forma inductiva tenemos que para $k \in \mathbb{N}$ se define

$$E_k = E \setminus \textstyle\bigcup_{i=1}^k Q_{x_i}, \quad s_k = \sup\{\ell(Q_x) : x \in E_k\}$$

y seleccionamos $x_{k+1} \in E_k$ tal que $\frac{1}{2}s_k < \ell(Q_{x_{k+1}})$. Continuamos el proceso hasta encontrar un entero positivo m tal que E_m sea vacío, pues eso indicaría que hemos cubierto a E en el paso $m-1$. Si tal entero no existe, continuamos el proceso indefinidamente.

Afirmamos que para toda $i \neq j$ se tiene $\frac{1}{3}Q_{x_i} \cap \frac{1}{3}Q_{x_j} = \emptyset$. En efecto, sea $i > j$. Tenemos que $x_i \in E_{i-1} = E \setminus (Q_{x_1} \cup ... \cup Q_{x_j} \cup ... \cup Q_{x_{i-1}})$, por lo cual $x_i \notin Q_j$. Además, como $x_i \in E_{i-1} \subseteq E_{j-1}$ se sigue que

$$\ell(Q_{x_i}) \leq s_{j-1} \leq 2\ell(Q_{xj}). \tag{1.2}$$

Ahora por el teorema de Pitágoras, sabemos que el cuadrado de la diagonal de un cubo en $\mathbb{R}^n$ es igual a n-veces el cuadrado de su lado. Si denotamos con d la diagonal del cubo, tenemos que

$$d(\frac{1}{3}Q_x) = \sqrt{n}\ell(\frac{1}{3}Q_x) = \frac{\sqrt{n}}{3}\ell(Q_x).$$

De aquí que, si $y \in \frac{1}{3}Q_{x_i} \cap \frac{1}{3}Q_{x_j}$

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| &\leq |x_i - y| + |y - x_j| \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{3}\ell(Q_{x_i}) + \frac{\sqrt{n}}{3}\ell(Q_{x_j}) \\ &\leq \frac{2\sqrt{n}}{3}\ell(Q_{x_j}) + \frac{\sqrt{n}}{3}\ell(Q_{x_j}) \\ &= \sqrt{n}\ell(Q_{x_j}), \end{aligned}$$

lo cual implica que $x_i \in Q_{x_j}$, que es una contradicción. Por lo tanto se tiene que $\frac{1}{3}Q_{x_i} \cap \frac{1}{3}Q_{x_j} = \emptyset$ para $i \neq j$.

Procederemos a probar la propiedad 1. Si existe el entero positivo m tal que E_m es vacío terminamos, pues $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} Q_{x_i}$. Si tal entero no existe, entonces tenemos un número infinito de cubos Q_{x_i}. Como los cubos $\frac{1}{3}Q_{x_i}$ son ajenos por pares y tienen centros en un conjunto acotado, se sigue que la sucesión $\{\ell(Q_{x_i})\}_{i=1}^{\infty}$

converge a cero. Veamos que necesariamente $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{x_i}$. Supongamos que existe $y \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{x_i}$ entonces $y \in E_i$ para $i = 1, 2, ...,$ y $\ell(Q_y) \leq s_i$ para toda i. Además, como $s_i \leq 2\ell(Q_{x_{i+1}})$ y la sucesión de longitudes converge a cero se sigue que $\ell(Q_y) = 0$, lo que implica que el cubo Q_y es vacío, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{x_i}$.

Finalmente mostraremos la propiedad 2. Para esto, consideremos los n hiperplanos H_i que son paralelos a los hiperplanos coordenados y pasan a través del punto y. Así, podemos escribir $\mathbb{R}^n$ como la unión de los 2^n octantes abiertos O_r y los n hiperplanos H_i que tienen medida de Lebesgue cero.

Observemos que si $y \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{x_i}$, hemos concluido. En otro caso, afirmamos que cada octante O_r tiene una cantidad finita de puntos x_j. En efecto, fijemos un octante O_r y tomemos $x_{k_0} \in E \cap O_r$ tal que $Q_{x_{k_0}}$ contiene a y y la distancia de x_{k_0} a y es la mayor posible; tal x_{k_0} debe existir, sea $D = \{x_k : y \in Q_{x_k}\}$ y tomemos $M = \sup\limits_{x_k \in D} |y - x_k|$, el cual es acotado. Si D es finito entonces el supremo se alcanza y terminamos. Si no, como $\ell(Q_{x_i})$ tiende a cero se sigue que la sucesión $|y - x_i|$ tiende a cero ya que $y \in Q_{x_i}$. Así para $\epsilon = M$ existe un k_0 mínimo tal que $|y - x_k| < M$ para toda $k > k_0$; luego $|y - x_k| = M$ si $1 \leq k \leq k_0$.

Si x_j es otro punto en $E \cap O_r$ tal que Q_{x_j} contiene a y, se sigue que $\ell(Q_{x_{k_0}}) \geq \ell(Q_{x_j})$, lo que implica que $x_j \in Q_{x_{k_0}}$. Luego por una observación previa $j < k_0$, por consiguiente $\frac{1}{2}\ell(Q_{x_{k_0}}) < \ell(Q_{x_j})$. Así todos los cubos Q_{x_j} con centro en $E \cap O_r$ que contienen al punto y tienen lados comparables con la del cubo $Q_{x_{k_0}}$.

Con un argumento geométrico se tiene que existe una cantidad finita de cubos Q_{x_j} de lados entre α y 2α que contienen al punto y y tal que $\frac{1}{3}Q_{x_j}$ son ajenos por pares. En efecto, sea $\alpha = \frac{1}{2}\ell(Q_{x_{k_0}})$ y sea $\{Q_{x_r}\}_{r \in I}$ los cubos con la propiedad deseada.

Así tenemos que

$$\frac{\alpha^n}{3^n}|I| \leq \sum_{r\in I} |\frac{1}{3}Q_{x_r}| = \left|\bigcup_{r\in I} \frac{1}{3}Q_{x_r}\right| \leq \left|\bigcup_{r\in I} Q_{x_r}\right| \leq (4\alpha)^n,$$

donde la última desigualdad se tiene ya que como todos los cubos Q_{x_r} contienen al punto y y tienen lados a lo más 2α, entonces deben estar contenidos en un cubo de lado 4α centrado en y.

Esta observación muestra que $|I| \leq 12^n$ y como hay 2^n octantes O_r en $\mathbb{R}^n$, concluimos que

$$\sum_i \chi_{Q_{x_i}}(y) \leq 24^n.$$

■

Capítulo 2

Funciones maximales y el teorema de diferenciación de Lebesgue

En el capítulo anterior mencionamos que los teoremas de cubrimiento son útiles para estudiar problemas de diferenciabilidad de funciones, por lo que parte de este segundo capítulo estará dedicado a presentar algunos resultados en particular, como lo es el teorema de diferenciación de Lebesgue y el teorema de Sard.

Con el propósito de demostrar el teorema de diferenciación de Lebesgue, dedicaremos la primera sección de este capítulo a introducir cierto tipo de funciones maximales, las cuales a través del análisis de sus propiedades de continuidad, nos facilitarán la prueba de este teorema. Posteriormente presentaremos un criterio muy útil para mostrar la continuidad de operadores sublineales.

Por último presentaremos una versión generalizada de la función maximal, lo cual nos permitirá obtener un teorema de diferenciación de Lebesgue más general.

Para el desarrollo de este capítulo, nos hemos basado en [2], [6], [8] y [11].

2.1. Función maximal de Hardy-Littlewood

En esta primera sección vamos a definir la función maximal de Hardy-Littlewood; presentaremos tres variantes, las cuales pueden ser consultadas en [2], p. 30.

Antes de dar la definición de la función maximal, vamos a recordar las definiciones de espacio local y función semicontinua inferiormente.

Definición 2.1.1. Para $1 \leq p < \infty$, se define el espacio local $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles tales que, para todo K compacto en $\mathbb{R}^n$:

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Definición 2.1.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ una función. Diremos que f es semicontinua inferiormente si el conjunto

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$$

es abierto, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

A continuación vamos a definir la función maximal de Hardy-Littlewood. Esta función fue introducida en 1930 por G. Hardy y J. Littlewood para $n = 1$ y en 1939 por N. Wiener para n arbitraria.

Definición 2.1.3. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definimos la función maximal de Hardy-Littlewood de f como la función Mf en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$Mf(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde Q denota un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados y el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x. También definimos la versión centrada en bolas dada por

$$M^c f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Observación 2.1.4. *Como las medidas de un cubo y una bola son comparables, existen constantes c_n y C_n que sólo dependen de n, tales que*

$$c_n M^c f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M^c f(x).$$

Demostración. Sea Q un cubo tal que $x \in Q$. Notemos que $Q \subset B(x, d_Q)$, donde d_Q denota la diagonal del cubo Q. Recordemos que por el teorema de Pitágoras $d_Q^2 = n\ell_Q^2$, con ℓ_Q la longitud de lado del cubo Q, entonces $\frac{1}{\sqrt{n}} d_Q = \ell_Q$. Así, por definición de la medida de Lebesgue

$$|Q| = \ell_Q^n = (\tfrac{1}{\sqrt{n}})^n d_Q^n \quad \text{ y } \quad |B(x, d_Q)| = c_n d_Q^n.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy &= \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n d_Q^n} \int_Q |f(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n d_Q^n} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n d_Q^n} \frac{c_n}{c_n} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)|dy \\
&= \frac{c_n}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n} \frac{1}{c_n d_Q^n} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)|dy \\
&= \frac{c_n}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n} \frac{1}{|B(x,d_Q)|} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{c_n}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n} M^c f(x).
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo cubo Q que contenga a x entonces también para el supremo, por lo que $Mf(x) \leq C_n M^c f(x)$, con $C_n = \frac{c_n}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n}$, que es una de las desigualdades que queríamos probar.

Por otro lado, notemos que la bola $B(x, d_Q)$ está contenido en un cubo Q_x con $\ell(Q_x) = 2d_Q$. Así, por la definición de la medida de Lebesgue

$$|Q_x| = \ell^n_{Q_x} = (2d_Q)^n.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x,d_Q)|}\int_{B(x,d_Q)} |f(y)|dy &= \frac{1}{c_n d_Q^n}\int_{B(x,d_Q)} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{c_n d_Q^n}\int_{Q_x} |f(y)|dy \\
&= \frac{1}{c_n d_Q^n}\frac{2^n}{2^n}\int_{Q_x} |f(y)|dy \\
&= \frac{2^n}{c_n}\frac{1}{2^n d_Q^n}\int_{Q_x} |f(y)|dy \\
&= \frac{2^n}{c_n}\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{2^n}{c_n} Mf(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $c_n' M^c f(x) \leq Mf(x)$, con $c_n' = \frac{c_n}{2^n}$. ■

Con base en lo anterior, las funciones Mf y $M^c f$ se pueden intercambiar y usaremos cualquiera de ellas cuando sea conveniente.

Notemos que se obtiene el mismo valor de $Mf(x)$ si en la Definición 2.1.3 solamente tomamos cubos tales que x sea punto interior.

Proposición 2.1.5. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, sea*

$$M'f(x) := \sup_{x\in P} \frac{1}{|P|}\int_P |f(y)|dy$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos P tales que x es punto interior de P. Entonces $M'f(x) = Mf(x)$.

Demostración. Es claro que $M'f(x) \leq Mf(x)$ pues el conjunto de cubos P está contenido en el conjunto de cubos Q.

Para probar la otra desigualdad, tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ y sea Q un cubo que contiene a x, no necesariamente en su interior. Sea $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de cubos tales que $Q \subsetneq P_k$ para cada k y $\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k = Q$. Así tenemos que x es punto interior de cada P_k; además por el lema de Fatou

$$\int_Q |f(y)|dy \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{P_k} |f(y)|dy$$

y como $\lim_{k\to\infty} |P_k| = |Q|$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy &\leq \left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|P_k|}\right)\left(\liminf_{k\to\infty}\int_{P_k}|f(y)|dy\right)\\ &= \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{|P_k|}\int_{P_k}|f(y)|dy\\ &\leq M'f(x).\end{aligned}$$

Esto pasa para todo cubo Q que contiene a x, por lo que también para el supremo, así $Mf(x) \leq M'f(x)$ y por lo tanto $Mf(x) = M'f(x)$. ∎

Enseguida presentaremos, en forma de observaciones, algunas propiedades de la función maximal.

Observación 2.1.6. *La función maximal Mf es una función medible.*

Demostración. En efecto, es Borel medible. Para esto, probaremos que es semicontinua inferiormente.

Sea $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Si $x \in E_\lambda$, por la definición de la función maximal, existe un cubo P tal que x es punto interior de P y además cumple que

$$\frac{1}{|P|}\int_P |f(y)|dy > \lambda.$$

Como x es punto interior de P se tiene que existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset P$ y como $P \subset E_\lambda$, tenemos que $B(x,r) \subset E_\lambda$. Por lo tanto E_λ es abierto. ∎

Para la siguiente propiedad necesitamos recordar cómo cambiar la integración de coordenadas cartesianas a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.7. *Si f es Borel medible en $\mathbb{R}^n$ y $f \geq 0$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\sigma)r^{n-1}d\sigma dr,$$

donde S^{n-1} denota la esfera unitaria $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Demostración. Ver [4], p. 78.

Observación 2.1.8. *La función maximal de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ no necesariamente está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. De hecho, si $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f = 0$.*

Demostración. Veamos, si $a > 0$ y $|x| > a$, entonces

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|dy \\ &\geq \frac{1}{|B(0,2|x|)|} \int_{B(0,a)} |f(y)|dy \\ &= \frac{c}{|x|^n} \int_{B(0,a)} |f(y)|dy. \end{aligned}$$

Afirmamos que $|x|^{-n}$ no es integrable. En efecto, sea $f(x) = |x|^{-n}$, si fuera integrable, utilizando el Teorema 2.1.7 tendríamos que

$$\begin{aligned} \infty > \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n}dy \geq \int_{|x|>1} |x|^{-n}dy &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\sigma)r^{n-1}d\sigma dr \\ &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} r^{-n}r^{n-1}d\sigma dr = \int_1^\infty \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma\right)\frac{dr}{r} \\ &= |S^{n-1}|\int_1^\infty \frac{dr}{r} = |S^{n-1}| \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dr}{r} \\ &= |S^{n-1}| \lim_{t\to\infty} \ln r\Big|_1^t = |S^{n-1}|\infty = \infty, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Como $|x|^{-n}$ no es integrable para $|x| > a$, se sigue que $\int_{B(0,a)} |f(y)|dy = 0$ y como a es arbitrario, concluimos que $f = 0$. ■

Observación 2.1.9. *La función maximal de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ no necesariamente está en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para mostrarlo veamos el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.1.10. *Para $n = 1$. La función*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln^2 x} & si\ 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

está en $L^1(\mathbb{R})$ pero $Mf(x)$ no está en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Demostración. Primero probaremos que la función que definimos está en $L^1(\mathbb{R})$. Sabemos que

$$1 - \tfrac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad \text{o bien,} \quad 1 - x \leq -\ln x \leq \tfrac{1}{x} - 1$$

la cual es una desigualdad conocida del logaritmo. Se sigue que si $0 < x < 1$ entonces $(1 - x)^2 \leq (-\ln x)^2 \leq (\frac{1}{x} - 1)^2$, luego, como $x > 0$, tenemos que $x(1 - x)^2 \leq x(-\ln x)^2 \leq x(\frac{1}{x} - 1)^2$, así $0 < \frac{1}{x(-\ln x)^2} \leq \frac{1}{x(1-x)^2}$. Como la función solo toma valores en $0 < x < \frac{1}{2}$, tenemos que

$$0 < \frac{1}{x(\ln^2 x)} \leq \frac{1}{x(1-x)^2} \leq \frac{1}{x/4}.$$

Queremos encontrar $\alpha \in (0, 1)$ y $c > 0$ tal que $\frac{x}{4} > cx^\alpha$ para $0 < x < \frac{1}{2}$, pues de este modo tendríamos

$$0 < \frac{1}{x\ln^2 x} \leq \frac{1}{x/4} \leq \frac{1}{cx^\alpha},$$

y además

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x} \leq \frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\alpha}dx = \frac{1}{c}\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c(1-\alpha)}\frac{1}{2^{1-\alpha}} < \infty,$$

por lo cual f sería integrable.

Notemos que para $0 < x < \frac{1}{2}$, tenemos $\frac{x}{4} > cx^{\alpha}$, si y sólo si $x > 4cx^{\alpha}$, si y sólo si $x - 4cx^{\alpha} > 0$, si y sólo si $x^{\alpha}(x^{1-\alpha} - 4c) > 0$, si y sólo si

$$x^{\alpha} > 0 \ y \ x^{1-\alpha} - 4c > 0 \qquad \text{ó} \qquad x^{\alpha} < 0 \ y \ x^{1-\alpha} - 4c < 0.$$

El segundo caso no puede ocurrir pues $x^{\alpha} < 0$ no es posible ya que $x \in (0, \frac{1}{2})$ y $\alpha \in (0,1)$. Así que necesariamente $x^{\alpha} > 0$ y $x^{1-\alpha} - 4c > 0$, lo cual equivale a $x > 0$ y $x > (4c)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Como queremos que $0 < x < \frac{1}{2}$, debemos asegurar que $(4c)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \frac{1}{2}$, pero $(4c)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \frac{1}{2}$, si y sólo si $\log_{4c}(4c)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \log_{4c}\frac{1}{2}$, si y sólo si $\frac{1}{1-\alpha} < \log_{4c}\frac{1}{2}$, si y sólo si $\alpha < 1 - \frac{1}{\log_{4c}\frac{1}{2}}$.

Entonces basta asegurar que $0 < 1 - \frac{1}{\log_{4c}\frac{1}{2}} < 1$, o bien, $\log_{4c}\frac{1}{2} > 1$. Si elegimos $0 < c < \frac{1}{8}$ tendremos lo que queremos. De aquí que, si $0 < x < \frac{1}{2}$, tomando $r = x$ en la definición de $Mf(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} Mf(x) \geq \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)dy > \frac{1}{2x}\int_0^{x} f(y)dy \\ &= \frac{1}{2x}\int_0^{x} \frac{dy}{y\ln^2 y} \\ &= \frac{1}{2x}\left[\frac{-1}{\ln y}\right]\Bigg|_0^x \\ &= \frac{-1}{2x\ln x}. \end{aligned}$$

Pero $\frac{-1}{2x\ln x}$ no es integrable cerca de $x = 0$. Veamos, recordando las desigualdades para el logaritmo, teníamos $x(1-x) \leq -x(\ln x) < x(\frac{1}{x} - 1)$.

De aquí que $\frac{-1}{x\ln x} > \frac{1}{x(\frac{1}{x}-1)}$, o bien, $\frac{-1}{x\ln x} > \frac{1}{1-x}$. Y como $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \infty$, se sigue que $\int_0^1 \frac{-1}{x\ln x}dx = \infty$. Por lo tanto $Mf(x)$ no es integrable cerca de $x = 0$. $\blacksquare$

Para comprender la importancia de estas observaciones, notemos que toda función $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisface la desigualdad de Chebyshev, esto es

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}| \leq \frac{\|g\|_1}{t}, \quad 0 < t < \infty.$$

Sin embargo, la implicación de regreso, no es verdadera, es decir, si g es una función tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}| \geq \frac{C}{t}, \quad 0 < t < \infty,$$

no necesariamente $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para esto, observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.11. *Sea $g(x) = |x|^{-n}$ y sea $t > 0$, entonces*

$$\begin{aligned}
|E_t| &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-n} \geq t\}| \\
&= |\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq t^{\frac{1}{n}}\}| \\
&= (t^{\frac{1}{n}})^n = t,
\end{aligned}$$

pero por la Observación 1.1.8 sabemos que g no es integrable.

Un caso similar ocurre con la función maximal de Hardy-Littlewood. Esta propiedad de la función maximal es de gran importancia y es lo que nos ayudará a probar el teorema de diferenciación de Lebesgue.

Teorema 2.1.12 (Teorema de Hardy-Littlewood)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{3^n}{t}\|f\|_1, \quad 0 < t < \infty.$$

Demostración. Sea $E = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$ y sea $x \in E$. Así $Mf(x) > t$, y de la definición de la función maximal existe $0 < r < \infty$, que depende de x, tal que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy > t$$

o bien, para toda $x \in E$ existe una bola B con centro en x tal que

$$|B(x,r)| < \frac{1}{t} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy. \tag{2.1}$$

Supongamos que $E \neq \emptyset$ pues de otro modo el resultado es trivial. Queremos aplicar el teorema de cubrimiento de Vitali pero nos falta la hipótesis de que E sea acotado, por lo cual consideraremos $k \in \mathbb{N}$, fijo y $E \cap B(0,k)$ en vez de E. Una vez que estimemos, utilizaremos propiedades de la medida de Lebesgue y obtendremos lo deseado.

Sea $\mathcal{F}$ una colección de bolas abiertas B^k con centro en $E \cap B(0,k)$ y que satisfacen (2.1). Si $E \cap B(0,k) \neq \emptyset$, por el teorema de cubrimiento de Vitali 1.1.1 existen bolas $B_1^k, B_2^k, ... \in \mathcal{F}$ tales que

(1) $B_i^k \cap B_j^k = \emptyset$, si $i \neq j$,

(2) $E \cap B(0,k) \subset \bigcup_i 3B_i^k$.

Por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} |E \cap B(0,k)| \leq \sum_i |3B_i^k| &= \sum_i 3^n |B_i^k| \\ &\leq \sum_i 3^n \frac{1}{t} \int_{B_i^k} |f(y)|dy \\ &= \frac{3^n}{t} \int_{\bigcup_i B_i^k} |f(y)|dy \\ &\leq \frac{3^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy = \frac{3^n}{t} \|f\|_1, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se obtiene por (2), la igualdad por el hecho de que $|3B| = 3^n|B|$, la segunda desigualdad por (2.1) y la segunda igualdad por (1).

Como $E = \bigcup_k E \cap B(0,k)$ y la sucesión de conjuntos $\{E \cap B(0,k)\}_k$ es creciente, tenemos que $|E| = \lim_{k\to\infty} |E \cap B(0,k)|$ y por lo tanto $|E| \leq \frac{3^n}{t}\|f\|_1$ que era lo que queríamos. ■

2.2. Teorema de diferenciación de Lebesgue

Una desigualdad como la que probamos en el Teorema 2.1.12 también se conoce como desigualdad de tipo débil (1,1); para ver la definición formal, véase la quinta sección de este capítulo. Estamos listos para probar el teorema principal del cual hemos estado hablando desde el inicio de esta tesis.

Teorema 2.2.1 (Teorema de diferenciación de Lebesgue)**.** *Supongamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

En particular, se sigue que para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x).$$

Demostración. Notemos que la segunda conclusión se tiene de manera inmediata de la primera pues

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x) \right| &= \left| \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x))dy \right| \\
&\leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto sólo nos ocuparemos de demostrar el primer resultado.

Observemos que este teorema es de carácter local, pues dado $N \in \mathbb{N}$, si $|x| \leq N$ y $r \leq 1$, los valores de $\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy$ dependen solamente de las y tales que $|y| \leq N+1$. Así podemos suponer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, es conveniente considerar una versión local de la función maximal de Hardy-Littlewood, la cual llamaremos f^*, definida por

$$f^*(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy.$$

Para probar nuestro resultado principal, vamos a enunciar algunas propiedades de la función f^* y los usaremos para demostrar que $f^* = 0$ casi en todas partes y así concluir el teorema.

I) $f^* \geq 0$.
   Es claro por la definición.

II) $(f+g)^* \leq f^* + g^*$.
   Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} &|f(y) + g(y) - f(x) - g(x)|dy \\ &\leq \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy + \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|dy.\end{aligned}$$

   Ahora dividiendo entre $|B(x,r)|$ y usando el hecho de que el límite superior de la suma es menor o igual a la suma de los límites superiores, se tiene lo deseado.

III) Si g es continua en x, entonces $g^*(x) = 0$.
   Esta propiedad se debe al teorema fundamental del cálculo. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(y)-g(x)| \leq \epsilon$ para toda $y \in B(x,\delta)$. Así, si $0 < r \leq \delta$ se tiene

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|dy \leq \epsilon.$$

IV) Si g es continua en $\mathbb{R}^n$ entonces $(f-g)^* = f^*$.

Se sigue de las propiedades II) y III):

$$(f-g)^* \leq f^* + (-g)^* = f^*.$$

$$f^* = (f-g+g)^* \leq (f-g)^* + g^* = (f-g)^*.$$

V) $f^* \leq Mf + |f|$.

Esta es una estimación:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy \\
&\qquad\qquad \leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} (|f(y)|+|f(x)|)dy \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + |f(x)| \\
&\qquad\qquad \leq Mf(x) + |f(x)|.
\end{aligned}$$

VI) Se tiene la siguiente desigualdad con la medida exterior de Lebesgue:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\}|^* \leq \tfrac{2(3^n+1)}{t}\|f\|_1, \text{ con } 0 < t < \infty.$$

Esta es una consecuencia del teorema de Hardy-Littlewood y la desigualdad de Chebyshev. Por la propiedad V tenemos que si $f^*(x) > t$, entonces $Mf(x) > \frac{t}{2}$ o $|f(x)| > \frac{t}{2}$. Pues en caso contrario tendríamos que

$$t < f^*(x) \leq Mf(x) + |f(x)| \leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t,$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto

$$\begin{aligned}
|\{x : f^*(x) > t\}|^* &\leq |\{x : Mf(x) > \frac{t}{2}\}| + |\{x : |f(x)| > \frac{t}{2}\}| \\
&\leq \frac{3^n}{t/2}\|f\|_1 + \frac{1}{t/2}\|f\|_1 \\
&= \frac{2(3^n+1)}{t}\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Finalmente probaremos el teorema principal. Sea $\epsilon > 0$, como $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_1 \leq \epsilon$. Así por las propiedades IV) y VI), tenemos que para $0 < t < \infty$:

$$\begin{aligned}
|\{x : f^*(x) > t\}|^* &= |\{x : (f-g)^*(x) > t\}|^* \\
&\leq \frac{2(3^n+1)}{t}\|f - g\|_1 \\
&\leq \frac{2(3^n+1)}{t}\epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se sigue que $|\{x : f^*(x) > t\}|^* = 0$, por lo cual el conjunto $\{x : f^*(x) > t\}$ es nulo y por tanto Lebesgue medible.
En particular los conjuntos $\{x : f^*(x) > \frac{1}{k}\}$ son nulos para toda $k \in \mathbb{N}$. Así $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x : f^*(x) > \frac{1}{k}\} = \{x : f^*(x) > 0\}$ es nulo. Esto implica que $f^*(x) \leq 0$ casi en todas partes pero por la propiedad I) tenemos $f^* = 0$ casi en todas partes, lo que concluye el teorema. ■

2.3. Conjunto de Lebesgue de una función

Recordemos que al iniciar la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue probamos que el primer resultado implicaba el segundo, en esta sección vamos probar que la implicación de regreso no es verdadera.

Definición 2.3.1. Supongamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces diremos que x es un punto en el conjunto de Lebesgue de f si existe un número A tal que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - A| dy = 0.$$

Comenzaremos haciendo algunas observaciones. Primero, notemos que no existe más de un número A que cumpla la condición. Esto se sigue de la segunda parte del teorema de diferenciación de Lebesgue, pues

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy = A.$$

Por lo tanto A es único y el límite de la izquierda existe.

Segundo, si x pertenece al conjunto de Lebesgue de f esto es independiente del valor de $f(x)$. En efecto, f no necesita estar definida en el punto x. Más aún, si $f = g$ casi en todas partes, entonces el conjunto de Lebesgue de f es igual al conjunto de Lebesgue de g. Por tanto el conjunto de Lebesgue está bien definido para cada elemento de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Tercero, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces casi todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ pertenecen al conjunto de Lebesgue de f. Más aún, si f es un representante particular de la clase de equivalencia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces para casi toda x, el número A es justo $f(x)$. Así f puede ser modificada en los conjuntos de medida cero de tal manera que toda x que esté en el conjunto de Lebesgue de f satisfaga

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Para ilustrar mejor lo que queremos probar, vamos a presentar un ejemplo para el caso unidimensional.

Ejemplo 2.3.2. *Sea H la función de Heaviside:*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0, \\ \frac{1}{2} & si\ x = 0, \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

Mostraremos que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} H(y)dy$$

y que 0 no está en el conjunto de Lebesgue de H.

Demostración. Haremos la prueba para cada caso.

Sea $x > 0$, observemos que podemos tomar un radio r suficientemente pequeño tal que $(x - r, x + r) \subset (0, \infty)$, así

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} H(y)dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} y\Big|_{x-r}^{x+r} = 1 = H(x).$$

Análogamente, si $x < 0$, podemos encontrar un radio r suficientemente pequeño tal que $(x - r, x + r) \subset (-\infty, 0)$, por lo cual

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} H(y)dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 0dy = 0 = H(x).$$

Ahora si $x = 0$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} H(y)dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \left[\int_{-r}^{0} 0dy + \int_{0}^{r} 1dy \right] = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} y\Big|_{0}^{r} = \frac{1}{2} = H(x).$$

Finalmente probaremos que 0 no está en el conjunto de Lebesgue de H. Supongamos que existe A tal que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|H(y)-A|dy=0,$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\left[\int_{-r}^{0}|0-A|dy+\int_{0}^{r}|1-A|dy\right]&=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}[|A|r+|1-A|r]\\&=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2}[|A|+|1-A|]=0,\end{aligned}$$

lo cual implica que $|A|+|1-A|=0$, que no es posible y por tanto 0 no está en el conjunto de Lebesgue de H.

El uso de bolas no ha sido crucial en los resultados probados anteriormente; pudimos haber utilizado cubos. Más aún, pudimos haber utilizado algo más general.

Definición 2.3.3. Una sucesión de conjuntos medibles $E_1, E_2, ...$ converge regularmente a x si existe una constante $c > 0$ y una sucesión de números positivos $r_1, r_2, ...$ tal que

a) $E_k \subset B(x, r_k)$,

b) $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$,

c) $|B(x, r_k)| \leq c|E_k|$.

Teorema 2.3.4. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que x está en el conjunto de Lebesgue de f. Si $E_1, E_2, ...$ converge regularmente a x, entonces*

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}f(y)dy.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k} f(y)dy - f(x)\right| &\leq \frac{1}{|E_k|}\int_{E_k} |f(y)-f(x)|dy \\ &\leq \frac{c}{|B(x,r_k)|}\int_{B(x,r_k)} |f(y)-f(x)|dy,\end{aligned}$$

y por el teorema de diferenciación de Lebesgue, la parte derecha tiende a cero cuando k tiende a infinito. ■

2.4. Teorema de Sard

Como una aplicación del teorema de cubrimiento de Vitali 1.2.1, presentamos el teorema de Sard. Para ello necesitamos probar algunos resultados previos y el teorema de Sard surgirá como un corolario inmediato.

Definición 2.4.1. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\Phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Diremos que Φ es diferenciable en el punto x de su dominio si existe T una matriz $n \times n$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y - x| \leq \delta$ entonces

$$|\Phi(y) - \Phi(x) - T(x-y)| \leq \epsilon|y-x|.$$

En tal caso, escribiremos $T = \Phi'(x)$ y también denotaremos $J(x) = det\Phi'(x)$.

Lema 2.4.2. *Sea Φ diferenciable en x y $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < r < \delta$*

$$|\Phi(B(x,r))|^* \leq (|J(x)| + \epsilon)|B(x,r)|.$$

Demostración. La prueba se hace en dos casos, dependiendo de si la matriz $T = \Phi'(x)$ es o no invertible. Como la medida de Lebesgue es invariante bajo traslación, podemos asumir que $x = 0$ y $\Phi(0) = 0$.

Por la existencia de la derivada, tenemos que para cada $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| \leq \delta$ entonces

$$|\Phi(y) - Ty| \leq \epsilon_1 |y|.$$

a) T no es invertible. En este caso $J(0) = 0$. Los vectores Ty deben estar contenidos en un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con dimensión menor a n. Escogemos una constante c tal que $|Ty| \leq c|y|$ para toda $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces para $y \in B(0, r)$ tenemos $|Ty| \leq cr$. Así, si $r \leq \delta$, se tiene que todos los vectores en $\Phi(B(0, r))$ están a una distancia $\epsilon_1 r$ de una bola en un subespacio $(n-1)$-dimensional M, con radio cr.

   Podemos calcular la medida de tal conjunto pero una cota será suficiente. La región está contenida en un rectángulo en el cual $n - 1$ lados tienen medida $2(cr + \epsilon_1 r)$ y el otro lado $2\epsilon_1 r$. Por lo cual

$$|\Phi(B(0, r))|^* \leq 2^n (c + \epsilon_1)^{n-1} \epsilon_1 r^n$$

   que es menor que $\epsilon |B(0, r)|$ si ϵ_1 es suficientemente pequeña.

b) T es invertible. En este caso existe la matriz inversa T^{-1}. Escogemos una constante c tal que $|T^{-1} z| \leq c|z|$ para toda $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$|T^{-1}\Phi(y) - y| \leq c\epsilon_1 |y|, \text{ si } |y| \leq \delta.$$

   De aquí tenemos que

$$|T^{-1}\Phi(y)| \leq (1 + c\epsilon_1)|y|, \text{ si } |y| \leq \delta.$$

   Esto implica que para $0 < r \leq \delta$

$$T^{-1}\Phi(B(0, r)) \subset B(0, (1 + c\epsilon_1)r).$$

   Y así por la monotonía de la medida de Lebesgue

$$|T^{-1}\Phi(B(0,r)|^* \leq |B(0,(1+c\epsilon_1)r)| = (1+c\epsilon_1)^n|B(0,r)|.$$

Aplicando un teorema que dice que si T es una matriz de $n \times n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$|TA|^* = |detT||A|^* \quad \text{y} \quad |TA|_* = |detT||A|_*,$$

(ver [11], p. 76), tenemos

$$\begin{aligned}|\Phi(B(x,r))|^* &= |detT||T^{-1}\Phi(B(0,r))|^* \\ &\leq |detT|(1+c\epsilon_1)^n|B(0,r)|.\end{aligned}$$

Finalmente, tomando ϵ_1 suficientemente pequeño

$$|detT|(1+c\epsilon_1)^n \leq |detT| + \epsilon.$$

■

Teorema 2.4.3. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Supóngase que Φ es diferenciable en cada punto del conjunto $E \subset \Omega$ y también que existe una constante positiva M tal que $|J(x)| \leq M$ para cada $x \in E$, donde J es el jacobiano de Φ en E. Entonces*

$$|\Phi(E)|^* \leq M|E|^*.$$

Demostración. Observemos que podemos suponer que E es acotado:
Sea $E_k = E \cap B(0,k)$ y supongamos que $|\Phi(E_k)|^* \leq M|E_k|^*$. Como $E_k \subset E$, usando la monotonía de la medida exterior, tenemos $|E_k|^* \leq |E|^*$.

Ahora, como $\Phi(E)$ es la unión creciente, $\Phi(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Phi(E_k)$, se sigue que $|\Phi(E)|^* = \lim\limits_{k\to\infty}|\Phi(E_k)|^*$. Por tanto

$$|\Phi(E)|^* = \lim_{k\to\infty}|\Phi(E_k)|^* \leq M\lim_{k\to\infty}|E_k|^* \leq M|E|^*.$$

Por lo tanto podemos asumir que E es acotado.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un abierto G tal que $E \subset G \subset \Omega$ y $|G| \leq |E|^* + \epsilon$. Por el Lema anterior, para cada $x \in E$ existe una $\delta(x) > 0$ tal que para $0 < r < \delta(x)$ la bola $B(x, r) \subset G$ y $|\Phi(B(x, r))|^* \leq (M + \epsilon)|B(x, r)|$.

Las bolas $B(x, r)$ con $x \in E$ y $0 < r < \frac{\delta(x)}{5}$ forman una colección de bolas $\mathcal{F}$ que satisfacen la condición de Vitali. Así por la versión infinitesimal del teorema de cubrimiento de Vitali tenemos que existen $B_1, B_2, ...,$ bolas disjuntas, en $\mathcal{F}$ tal que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ excepto por un conjunto de medida cero.

Más aún, la prueba asegura que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} 5B_i.$$

De aquí que, aplicando propiedades de la medida exterior

$$\begin{aligned} |\Phi(E)|^* &\leq \sum_{i=1}^{k-1} |\Phi(B_i)|^* + \sum_{i=k}^{\infty} |5B_i|^* \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} (M + \epsilon)|B_i| + \sum_{i=k}^{\infty} (M + \epsilon)|5B_i| \\ &= (M + \epsilon) \sum_{i=1}^{k-1} |B_i| + (M + \epsilon) \sum_{i=k}^{\infty} 5^n |B_i|. \end{aligned}$$

Las bolas B_i son disjuntas y están contenidas en G, así $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \leq |G|$, haciendo k tender a infinito obtenemos que

$$|\Phi(E)|^* \leq (M + \epsilon)|G| < (M + \epsilon)(|E|^* + \epsilon).$$

Como ϵ es arbitrario, queda demostrado el teorema. ■

Corolario 2.4.4 (Teorema de Sard)**.** *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Supóngase que Φ es diferenciable en cada punto del* *conjunto $E \subset \Omega$ y que $J(x) = 0$ para cada $x \in E$. Entonces $\Phi(E)$ es un conjunto de medida cero.*

Demostración. Este es un caso particular del teorema anterior en donde $M = 0$. Aplicando el resultado anterior tenemos que

$$|\Phi(E)|^* \leq 0|E|^* = 0.$$

Por lo tanto $|\Phi(E)| = 0$, que equivale a decir que el conjunto de valores críticos de Φ es un conjunto con medida cero. ■

2.5. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz

Uno de los problemas comunes en análisis puede ser planteado, aunque no de forma muy precisa, de la siguiente manera: dado un operador T definido en un espacio L^p y suponiendo conocidas ciertas propiedades de T como operador en L^p y L^q con $q > p$, ¿cómo se puede deducir información sobre propiedades de T como operador en L^s, para $p < s < q$?

Con base a esta problemática, surgen los conocidos teoremas de interpolación. Hasta ahora hemos probado que la función maximal de Hardy-Littlewood no es continua para $p = 1$, si pudiéramos probar algo similar para $q > 1$, ¿existirá algún teorema de interpolación que nos brinde información sobre algunas propiedades para $1 < p < q$?.

La respuesta es afirmativa, y una propiedad que logramos conseguir es la continuidad de la función maximal para L^p con $1 < p < \infty$, pero antes de presentar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, daremos algunas definiciones necesarias.

Definición 2.5.1. Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Se llama función de distribución de f asociada a μ a la función a_f : $(0, \infty) \to [0, \infty]$ dada por

$$a_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

Proposición 2.5.2. *Sea $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función diferenciable, creciente tal que $\phi(0) = 0$. Entonces*

$$\int_X \phi(|f(x)|)d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

Demostración. Notemos que el lado izquierdo de la igualdad se puede escribir como

$$\int_X \phi(|f(x)|)d\mu = \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda \right) d\mu.$$

Como $\phi'(\lambda)$ es una función integrable, aplicando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración tenemos

$$\begin{aligned}
\int_X \int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda d\mu &= \int_X \left(\int_0^\infty \phi'(\lambda)\chi_{[0,|f(x)|)}(\lambda)d\lambda \right) d\mu \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \left(\int_X \chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(\lambda)d\mu \right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda)\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda,
\end{aligned}$$

de donde la segunda igualdad sale de lo siguiente: para $\lambda > 0$, $\chi_{[0,|f(x)|)}(\lambda) = 1$, si y sólo si $\lambda < |f(x)|$, si y sólo si $x \in |f|^{-1}(\lambda, \infty)$, si y sólo si $\chi_{\{y \in X:|f(y)|>\lambda\}}(x) = 1$. Y por tanto se tiene lo que queríamos. ∎

Corolario 2.5.3. *Si $\phi(\lambda) = \lambda^p$, con $p \geq 1$ entonces*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda)d\lambda.$$

Este último corolario nos será muy útil para demostrar el teorema de interpolación.

Definición 2.5.4. Un operador T de un espacio Y de funciones medibles a un espacio de funciones medibles se llama sublineal si

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|,$$

$$|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in Y$.

Definición 2.5.5. Sea (Y, μ) un espacio de medida. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $T : L^p(d\mu) \longrightarrow M$ un operador sublineal, donde M denota la clase de funciones medibles en Y.

1. Diremos que T es de tipo débil (p, q), $1 \leq p < \infty$, si existe $c > 0$ (que puede depender de n o de p) tal que para toda $f \in L^p(d\mu)$ se tiene

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq (\frac{c}{t}\|f\|_p)^q, \quad t > 0.$$

2. Diremos que T es de tipo débil (p, ∞) si T es un operador continuo (acotado) de $L^p(d\mu)$ a $L^\infty(d\mu)$.

3. Diremos que T es de tipo fuerte (p, q) si T es acotado de $L^p(d\mu)$ a $L^q(d\mu)$.

Notemos que si el operador T es de tipo fuerte (p, q) entonces es de tipo débil (p, q), pues por la desigualdad de Chebyshev se tiene que

$$t\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\})^{\frac{1}{q}} \leq \|Tf\|_q \leq c\|f\|_p,$$

o bien,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq (\frac{c}{t}\|f\|_p)^q.$$

Teorema 2.5.6 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz)**.** *Sean* $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ *y sea* T *un operador sublineal definido en* $L^{p_1}(d\mu) + L^{p_2}(d\mu)$*, que además es de tipo débil* (p_1, p_1) *y de tipo débil* (p_2, p_2)*. Entonces* T *es de tipo fuerte* (p, p) *para toda* $p_1 < p < p_2$*.*

Demostración. Dado $f \in L^p(d\mu)$ con $p_1 < p < p_2$, definamos para cada $t > 0$

$$f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|>ct\}}$$

$$f_2 = f\chi_{\{x:|f(x)|\leq ct\}}$$

donde $c > 0$ es una constante que escogeremos después, de manera conveniente. Notemos que $f_1 \in L^{p_1}(d\mu)$ puesto que como $p_1 - p < 0$ tenemos

$$\int_X |f_1|^{p_1} d\mu = \int_X |f_1|^p |f_1|^{p_1-p} d\mu \leq (ct)^{p_1-p} \int_X |f_1|^p d\mu < \infty$$

donde la desigualdad se obtiene porque como $|f(x)| > ct$, entonces $|f(x)|^{p_1-p} \leq (ct)^{p_1-p}$. Análogamente $f_2 \in L^{p_2}(d\mu)$ pues como $p_2 - p > 0$ se tiene que

$$\int_X |f_2|^{p_2} d\mu = \int_X |f_2|^p |f_2|^{p_2-p} d\mu \leq (ct)^{p_2-p} \int_X |f_2|^p d\mu < \infty.$$

Ahora, como T es sublineal y $f = f_1 + f_2$ tenemos

$$|Tf| = |T(f_1 + f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2|,$$

por lo que

$$\mu(\{x : |Tf(x)| > t\}) \leq \mu(\{x : |Tf_1(x)| > \frac{t}{2}\}) + \mu(\{x : |Tf_2(x)| > \frac{t}{2}\}),$$

o bien, en términos de la función de distribución

$$a_{Tf}(t) \leq a_{Tf_1}\left(\frac{t}{2}\right) + a_{Tf_2}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{2.2}$$

Por hipótesis T es de tipo débil (p_1, p_1) y (p_2, p_2) así, para $i = 1, 2$ se tiene:

$$a_{Tf_i}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_i}{t}\|f_i\|_{p_i}\right)^{p_i}. \tag{2.3}$$

Aplicando el Corolario 2.5.3, el teorema de Fubini, (2.2) y (2.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty t^{p-1}a_{Tf}(t)dt \\
&\leq p\int_0^\infty t^{p-1}a_{Tf_1}\left(\frac{t}{2}\right)dt + p\int_0^\infty t^{p-1}a_{Tf_2}\left(\frac{t}{2}\right)dt \\
&\leq p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\frac{2A_1}{t}\|f_1\|_{p_1}\right)^{p_1}dt + p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\frac{2A_2}{t}\|f_2\|_{p_2}\right)^{p_2}dt \\
&= p\int_0^\infty t^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\left(\int_{\{x:|f(x)|>ct\}}|f(x)|^{p_1}d\mu\right)dt \\
&\qquad + p\int_0^\infty t^{p-1-p_2}(2A_2)^{p_2}\left(\int_{\{x:|f(x)|\leq ct\}}|f(x)|^{p_2}d\mu\right)dt \\
&= 2^{p_1}A_1^{p_1}p\int_X\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} t^{p-1-p_1}dt\right)|f(x)|^{p_1}d\mu \\
&\qquad + 2^{p_2}A_2^{p_2}p\int_X\left(\int_{\frac{|f(x)|}{c}}^\infty t^{p-1-p_2}dt\right)|f(x)|^{p_2}d\mu \\
&= \frac{2^{p_1}A_1^{p_1}p}{(p-p_1)c^{p-p_1}}\int_X |f(x)|^{p-p_1}|f(x)|^{p_1}d\mu \\
&\qquad + \frac{2^{p_2}A_2^{p_2}p}{(p_2-p)c^{p-p_2}}\int_X |f(x)|^{p-p_2}|f(x)|^{p_2}d\mu \\
&= \left(\frac{p2^{p_1}}{p-p_1}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} + \frac{p2^{p_2}}{p_2-p}\frac{A_2^{p_2}}{c^{p-p_2}}\right)\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Esto establece el teorema excepto para el caso $p_2 = \infty$. Notemos que no se ha elegido la constante c así que pudimos haber tomado $c = 1$.

Para el caso faltante, elegimos $c = \frac{1}{2A_2}$, donde A_2 es la constante para la cual se tiene $\|Tg\|_\infty \leq A_2\|g\|_\infty$ para toda $g \in L^\infty$. Observando que $f_2 \in L^\infty$ y que $\|Tf_2\|_\infty \leq A_2\|f_2\|_\infty$ tenemos que

$$a_{Tf_2}\left(\frac{t}{2}\right) = \mu\left(\left\{x : |Tf_2(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) = \mu(\{x : |f_2(x)| > ct\}) = 0,$$

pues si $\mu(B) = \mu(\{x : |Tf_2(x)| > \frac{t}{2}\}) > 0$, entonces para casi toda $x \in B$

$$\frac{t}{2} < |Tf_2(x)| \leq \|Tf_2\|_\infty \leq A_2\|f_2\|_\infty,$$

así $\frac{t}{2A_2} < \|f_2\|_\infty$ lo cual es imposible por definición de f_2.

Ahora utilizando el teorema de Fubini y (2.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty t^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\left(\int_{\{x:|f(x)|>ct\}} |f(x)|^{p_1} d\mu\right) dt \\
&= p(2A_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} t^{p-1-p_1} dt\right) d\mu \\
&= \frac{p}{p-p_1}(2A_1)^{p_1}\frac{1}{c^{p-p1}}\int_X |f(x)|^p d\mu \\
&= \frac{p}{p-p_1}(2A_1)^{p_1}(2A_2)^{p-p1}\|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

que era lo que queríamos. ■

2.6. Continuidad de la función maximal en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$

Como ya mencionamos en la sección anterior, el teorema de interpolación de Marcinkiewicz 2.5.6 nos proporciona un criterio muy útil para demostrar la continuidad de la función maximal de Hardy-Littlewood en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.6.1. *La función maximal de Hardy-Littlewood es continua en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p < \infty$.*

Demostración. Probamos en la primera sección de este capítulo que la función maximal de Hardy-Littlewood es tipo débil $(1, 1)$.

Por otro lado, si $f \in L^\infty$ entonces $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ casi en todas partes. Por lo que

$$\begin{aligned}|M^c f(x)| &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \|f\|_\infty dy \\ &= \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Como esto se tiene para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se sigue que $\|M^c f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Ahora, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz 1.5.6 concluimos que la función maximal de Hardy-Littlewood es de tipo fuerte (p,p) para $1 < p < \infty$ y por lo tanto continua en $L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

2.7. Función maximal de Hardy-Littlewood con peso w

Con la intención de presentar una versión más general del teorema de diferenciación de Lebesgue vamos a mostrar una versión generalizada de la función maximal definida al inicio de este capítulo.

Definición 2.7.1. Dado un espacio de medida, un peso w es una función medible y localmente integrable que toma valores en $[0, \infty]$.

Definición 2.7.2. Para $1 \leq p < \infty$:

1. Se define como $L^p(w)$ a la familia de funciones Lebesgue medibles definidas en $\mathbb{R}^n$ tales que
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx < \infty.$$

2. Se define como $L^p_{loc}(w)$ a la familia de clases de equivalencia de funciones Lebesgue medibles tales que

$$\int_K |f(x)|^p w(x)dx < \infty,$$

para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

Teorema 2.7.3. *La medida $d\mu(x) = w(x)dx$ es una medida de Borel regular. En consecuencia las funciones continuas con soporte compacto $C_c(\mathbb{R}^n)$ son densas en $L^p(w)$.*

Demostración. Sea $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y denotemos $w(E) = \int_E w(x)dx$, con E un conjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$.

Primero probaremos que la medida es regular exterior. Por la regularidad de la medida de Lebesgue para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un abierto $G_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $E \subset G_k$ y $\mu(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$ para toda k. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $G_{k+1} \subset G_k$ (basta considerar $G_1, G_1 \cap G_2, G_1 \cap G_2 \cap G_3, ...$). Así $E \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ y por lo monotonía de la medida de Lebesgue, se tiene que

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E) \leq \mu(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}.$$

Como esto se tiene para toda $j \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E) = 0$.

1. Supongamos que $w(E) < \infty$, en este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $w(G_1) < \infty$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} w(E) = \int_E w(x)dx = \int_{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(G_k \cap E)} w(x)dx = w(\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k \cap E)) \\ = \lim_{k\to\infty} w(G_k \cap E) = \lim_{k\to\infty} w(G_k), \end{aligned}$$

lo cual muestra que $w(E) = \text{ínf}\{w(G) : E \subset G, G \textit{ abierto}\}$ pues hemos encontrado una sucesión $\{G_k\}$ de abiertos con $E \subset G_k$ y tales que $\lim_{k\to\infty} w(G_k) = w(E)$.

2. Si $w(E) = \infty$, cualquier abierto G tal que $E \subset G$ satisface $w(G) = \infty$ y el resultado se tiene trivialmente.

Ahora probaremos que es regular interior. Por la regularidad de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, para E podemos encontrar una sucesión de cerrados $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, con $F_k \subset F_{k+1} \subset E$ (basta considerar $F_1, F_1 \cup F_2, F_1 \cup F_2 \cup F_3, ...$), tal que $\mu(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

1. Si E es acotado, entonces $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ son compactos. Además

$$\mu(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E \setminus F_k) \leq \mu(E \setminus F_j) < \frac{1}{j}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$, así $\mu(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = 0$.

Por lo cual

$$\begin{aligned} w(E) = \int_E w(x)dx &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} w(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{F_k} w(x)dx = \lim_{k\to\infty} w(F_k). \end{aligned}$$

lo cual muestra que $w(E) = \sup\{w(K) : K \subset E, K \textit{ compacto}\}$ pues hemos encontrado una sucesión $\{F_k\}$ de compactos con $F_k \subset E$ y tales que $\lim_{k\to\infty} w(F_k) = w(E)$.

2. Si E es cualquier subconjunto Lebesgue medible, descomponemos $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ donde

$$E_0 = \{x \in E : |x| < 1\},$$
$$E_k = \{x \in E : 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\} \textit{ con } k \geq 1.$$

Así la colección $\{E_k\}$ es ajena por pares y cada conjunto de la colección es acotado. De aquí que, por (a), dado $\epsilon > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un compacto $K_\epsilon^{(k)}$ tal que $K_\epsilon^{(k)} \subset E_k$ y

$$w(E_k) - \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \leq w(K_\epsilon^{(k)}) \leq w(E_k).$$

a) Si $w(E) < \infty$ entonces como

$$\infty > w(E) = \sum_{k=0}^{\infty} w(E_k),$$

podemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N+1}^{\infty} w(E_k) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $K = \bigcup_{k=0}^{N} K_\epsilon^{(k)}$, entonces K es compacto, además $K \subset E$ pues cada $K_\epsilon^k \subset E$ y

$$\begin{aligned} w(E) - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{k=0}^{\infty} w(E_k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} w(E_k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} w(E_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} w(K_\epsilon^{(k)}) + \sum_{k=0}^{N} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \\ &\leq w(K) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \\ &= w(K) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Entonces $w(E) - \epsilon < w(K)$, así $w(E) = \sup\{w(K) : K \subset E, K compacto\}$.

b) Si $w(E) = \infty$, se procede de manera análoga, tomando en consideración que $\sum_{k=0}^{\infty} w(E_k) = \infty$.

■

Definición 2.7.4. Sea w un peso y $f \in L^1_{loc}(w)$. La función maximal generalizada de Hardy-Littlewood de f en el espacio $L^1_{loc}(w)$ es la función $M^c_w f$ definida por

$$M^c_w f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{w(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y)|w(y)dy$$

donde $Q(x,r)$ es el cubo con centro en x, longitud de lado $2r$ con lados paralelos a los ejes coordenados y

$$w(Q(x,r)) = \int_{Q(x,r)} w(y)dy.$$

Así como con la versión normal de la función maximal, nos interesa conocer si la función maximal generalizada es medible o si es continua en L^p para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 2.7.5. *Sea $f \in L^1(w)$. Entonces $M^c_w f$ es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Sea $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Por el Teorema de convergencia dominada tenemos que si $x_n \to x_0$ entonces

$$w(Q(x_n,r)) \to w(Q(x_0,r))$$

y también que

$$\int_{Q(x_n,r)} |f(y)|w(y)dy \to \int_{Q(x_0,r)} |f(y)|w(y)dy,$$

lo cual implica la continuidad de la función

$$x \to \frac{1}{w(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y)|w(y)dy.$$

Y como $M^c_w f$ es el supremo de funciones continuas, obtenemos que $M^c_w f$ es semicontinua inferiormente. ∎

Teorema 2.7.6. *La función maximal generalizada es de tipo débil* $(1,1)$*,* (∞,∞) *y tipo fuerte* (p,p)*, para* $1 < p < \infty$*.*

Demostración. Con un argumento similar al que dimos para la función maximal sin peso, tenemos que la función maximal generalizada es de tipo débil (∞, ∞).

Ahora, para probar que es tipo débil $(1,1)$, sea $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_w^c f(x) > \lambda\}$. Si K es cualquier subconjunto compacto de E_λ, dado $x \in K$ elegimos un cubo Q_x centrado en x tal que

$$\frac{1}{w(Q_x)} \int_{Q_x} |f(y)|w(y)dy > \lambda,$$

o bien,

$$\frac{1}{\lambda} \int_{Q_x} |f(y)|w(y)dy > w(Q_x).$$

Aplicando el teorema de cubrimiento de Besicovitch 1.3.1, existe una colección a lo más numerable de cubos $\{Q_{x_j}\}_j$ de $\{Q_x\}_{x \in K}$ tales que

$$K \subset \bigcup_j Q_{x_j}$$

y para casi toda $y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_j \chi_{Q_{x_j}}(y) \leq 24^n.$$

Por lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} w(K) &\leq w\big(\bigcup_j Q_{x_j}\big) \leq \sum_j w(Q_{x_j}) \\ &\leq \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{Q_{x_j}} |f(y)|w(y)dy \\ &\leq \frac{24^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|w(y)dy = \frac{24^n}{\lambda} \|f\|_{L^1(w)}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos los subconjuntos compactos de E_λ y usando la regularidad de $w(x)dx$, obtenemos que la función maximal generalizada es de tipo débil $(1,1)$.

Finalmente, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz 2.5.6 concluimos que la función maximal generalizada es de tipo fuerte (p,p), con $1 < p < \infty$, lo que implica la continuidad en $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$. ■

2.8. Teorema de diferenciación de Lebesgue con peso w

Para finalizar este capítulo mostraremos la versión generalizada del teorema de diferenciación de Lebesgue.

Teorema 2.8.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mu)$ y $d\mu(x) = w(x)dx$, entonces para μ-casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)| w(y) dy = 0.$$

Demostración. La demostración de este teorema sigue la misma idea del teorema de diferenciación sin peso.

Puesto que el resultado es de tipo local, podemos suponer que $f \in L^1(\mu)$. Consideraremos una versión local de la función maximal de Hardy-Littlewood generalizada:

$$f^*_w(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mu(Q(x,r)} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)| w(y) dy.$$

Observemos que

I) Es claro que $f^*_w \geq 0$ por definición.

II) $(f_w + g_w)^* \leq f_w^* + g_w^*$.

Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\int_{Q(x,r)} |f(y) + g(y) - f(x) - g(x)|w(y)dy$$
$$\leq \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|w(y)dy + \int_{Q(x,r)} |g(y) - g(x)|w(y)dy.$$

Ahora dividiendo entre $\mu(Q(x,r))$ y usando el hecho de que el límite superior de la suma es menor o igual a la suma de los límites superiores, se tiene lo deseado.

III) Si g es continua en x, entonces $g_w^*(x) = 0$.

Esta propiedad se debe al teorema fundamental del cálculo. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(x)| \leq \epsilon$ para toda $y \in B(x,\delta)$. Así, si $0 < r \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |g(y) - g(x)|w(y)dy \leq \epsilon.$$

IV) Si g es continua en $\mathbb{R}^n$ entonces $(f_w - g_w)^* = f_w^*$.

Se sigue de las propiedades II) y III):

$$(f_w - g_w)^* \leq f_w^* + (-g_w)^* = f_w^*.$$

$$f_w^* = (f_w - g_w + g_w)^* \leq (f_w - g_w)^* + g_w^* = (f_w - g_w)^*.$$

V) $f_w^* \leq M_w^c f + |f|$.

Esta es una estimación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)} & |f(y)-f(x)|w(y)dy \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)} (|f(y)|+|f(x)|)w(y)dy \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)} |f(y)|w(y)dy + |f(x)| \\ &\leq M_w^c f(x) + |f(x)|.\end{aligned}$$

VI) Se tiene la siguiente desigualdad con el peso:

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n : f_w^*(x)>t\}) \leq \tfrac{2(24^n+1)}{t}\|f\|_{L^1(w)}, \text{ con } 0<t<\infty.$$

Esta es una consecuencia que se obtiene de la prueba de que la función maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil $(1,1)$ usando el teorema de cubrimiento de Besicovitch 1.3.1 y de la desigualdad de Chebyshev. Por la propiedad V tenemos que si $f_w^*(x)>t$, entonces $M_w^c f(x) > \frac{t}{2}$ o $|f(x)|>\frac{t}{2}$, pues en caso contrario tendríamos que

$$t < f_w^*(x) \leq M_w^c f(x) + |f(x)| \leq \frac{t}{2}+\frac{t}{2} = t,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto

$$\begin{aligned} w(\{x: f_w^*(x)>t\}) &\leq w(\{x: M_w^c f(x) > \frac{t}{2}\}) + w(\{x: |f(x)|>\frac{t}{2}\}) \\ &\leq \frac{24^n}{t/2}\|f\|_{L^1(w)} + \frac{1}{t/2}\|f\|_{L^1(w)} \\ &= \frac{2(24^n+1)}{t}\|f\|_{L^1(w)}.\end{aligned}$$

Finalmente, sea $\epsilon>0$, como la medida $w(x)dx$ es regular, tenemos que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(w)$, así existe una función $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f-g\|_{L^1(w)}\leq\epsilon$.

Aplicando IV) y VI) tenemos que

$$\begin{aligned} w(\{x : f_w^*(x) > t\}) &= w(\{x : (f_w - g_w)^*(x) > t\}) \\ &\leq \frac{2(24^n + 1)}{t} \|f - g\|_{L^1(w)} \leq \frac{2(24^n + 1)}{t} \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario se sigue que $w(\{x : f_w^*(x) > t\}) = 0$ para toda $t > 0$. En particular el conjunto $\{x : f_w^*(x) > \frac{1}{k}\}$ es nulo para toda $k \in \mathbb{N}$. De aquí

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f_w^*(x) > \frac{1}{k}\} = \{x : f_w^*(x) > 0\}$$

es nulo, por lo cual $f_w^* \leq 0$ casi en todas partes. Pero de I) tenemos que $f_w^* \geq 0$, por lo tanto $f_w^* = 0$ μ casi en todas partes. ■

Capítulo 3

Espacios de Morrey

El concepto de lo que hoy se conoce como espacio de Morrey fue introducido en 1938 por el matemático norteamericano Charles B. Morrey Jr. como parte de su estudio sobre el comportamiento local de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden.

En la primera sección de este capítulo probaremos que el espacio de Morrey es un espacio de Banach, y la segunda sección tendrá como objetivo probar la continuidad de la función maximal de Hardy-Littlewood en estos espacios.

Los tópicos desarrollados en este capítulo fueron tomados de [1], [7] y [9].

3.1. Definición y propiedades

Definición 3.1.1. Sea $1 \leq q < \infty$ y $\lambda \geq -\frac{1}{q}$. El espacio de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se define como

$$L^{q,\lambda} := \{f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} \left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}} \int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{1/q}.$$

Notemos que en la definición anterior pudimos haber considerado cubos en vez de bolas ya que la medida de Lebesgue de ambos son comparables.

Observación 3.1.2. *Notemos que para ciertos valores de λ, el espacio de Morrey no es más que el espacio L^q.*

a) Si $\lambda = -\frac{1}{q}$ tenemos que $L^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n)$.

b) Si $\lambda = 0$ tenemos que $L^{q,0}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Si $\lambda > 0$ tenemos que $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) = 0$.

Demostración.

a) Si $\lambda = -\frac{1}{q}$, de la definición de la norma se tiene que

$$\|f\|_{L^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} \left[\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

por lo que es claro que todo elemento de $L^q(\mathbb{R}^n)$ está en $L^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n)$. Recíprocamente, si $f \in L^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n)$, tomando una sucesión de radios $\{r_i\}_i$ tal que $r_i \to \infty$, se tiene que para cada r_i

$$\left[\int_{B(a,r_i)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

por lo que aplicando el teorema de convergencia dominada se concluye que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

b) Si $\lambda = 0$, de la definición de la norma se tiene

$$\|f\|_{L^{q,0}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} \left[\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

así aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue 2.2.1 tenemos que $|f(x)| \leq \|f\|_{L^{q,0}(\mathbb{R}^n)}$ casi en todas partes, por lo cual $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Recíprocamente, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} &\leq \left[\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} \|f\|_\infty^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_\infty < \infty,\end{aligned}$$

por lo tanto $f \in L^{q,0}(\mathbb{R}^n)$.

c) Si $\lambda > 0$, necesariamente $f = 0$. Supongamos que $\lambda > 0$ y $f \neq 0$, tendríamos que

$$\left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{r^\lambda}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

tomando el límite cuando $r \to 0$ en el lado derecho y aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue 2.2.1, obtendremos que

$$\infty > \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^\lambda}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^\lambda} f(a),$$

lo cual no ocurre si $f \neq 0$. Por tanto $f = 0$.

En vista de las observaciónes antes mencionadas y con el propósito de no repetir los espacios $L^q(\mathbb{R}^n)$ sólo consideraremos el caso en donde $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$.

Teorema 3.1.3. *El espacio de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach para $1 \leq q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$.*

Demostración. Sea $(f_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Así, dado $\epsilon > 0$ exite $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, k > N$ se tiene

$$\|f_j - f_k\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \epsilon,$$

esto es, para toda $a \in \mathbb{R}^n$, para toda $r > 0$ y para todo $j, k \geq N$

$$\left[\frac{1}{|B(a,r)^{1+\lambda q}|}\int_{B(a,r)}|f_j(x)-f_k(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f_j - f_k\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \epsilon. \tag{3.1}$$

En particular si $a = 0$ tenemos que para toda $r > 0$, si $j, k > N$

$$\left[\frac{1}{|B(0,r)^{1+\lambda q}|}\int_{B(0,r)}|f_j(x)-f_k(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} < \epsilon.$$

De aquí que, para toda $r > 0$ y toda $j, k > N$

$$\left[\int_{B(0,r)}|f_j(x)-f_k(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} < \epsilon c_n r^{n(\frac{1}{q}+\lambda)}.$$

Así, para cada $r > 0$, $\left(f_j\big|_{B(0,r)}\right)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^q(B(0,r))$ y como este espacio es completo, existe una función, que denotaremos por $f^{B(0,r)}$, en $L^q(B(0,r))$ tal que $f_j\big|_{B(0,r)}$ converge a $f^{B(0,r)}$ en $L^q(B(0,r))$.

Ahora consideremos una sucesión creciente en $(0,\infty)$, digamos $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que r_j tiende a infinito y definimos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f^{B(0,r_j)}(x)$ si $x \in B(0,r_j)$. Veamos que f está bien definida:

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $k > j$ donde $x \in B(0,r_j) \subset B(0,r_k)$. Tenemos que

$$f_m\big|_{B(0,r_j)} \text{ converge a } f^{B(0,r_j)} \text{ en } L^q(B(0,r_j)), \text{ y}$$

$$f_m\big|_{B(0,r_k)} \text{ converge a } f^{B(0,r_k)} \text{ en } L^q(B(0,r_k)).$$

Y puesto que $f_m\big|_{B(0,r_j)} = \left(f_m\big|_{B(0,r_k)}\right)\big|_{B(0,r_j)}$, se sigue por la unicidad del límite en $L^q(B(0,r_j))$ que $f^{B(0,r_j)} = f^{B(0,r_k)}\big|_{B(0,r_j)}$ casi en todas partes.

Ahora, sólo nos falta demostrar que f_j converge a f en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Supongamos que $r < r_i$ para $i \in \mathbb{N}$, tal que $B(a,r) \subset B(a,r_i)$. Como $f_j\big|_{B(a,r)}$ converge a f en $L^q(B(a,r))$, existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $\left(f_j\big|_{B(a,r)}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que f_{n_j} converge a f casi en todas partes en $B(a,r)$.

Así tenemos que para $k \in \mathbb{N}$ fija

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}} \int_{B(a,r)} |f_j(x) - f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad = \left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}} \int_{B(a,r)} \liminf_{k\to\infty} |f_j(x) - f_{n_k}(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \leq \liminf_{k\to\infty} \left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}} \int_{B(a,r)} |f_j(x) - f_{n_k}(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \leq \epsilon
\end{aligned}$$

siempre que k, j sean suficientemente grandes para que se cumpla (3.1). Por lo que

$$\|f_j - f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n} \leq \epsilon, \text{ si } j \text{ es suficientemente grande.}$$

Por lo tanto $f_j - f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, y como $f_j \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se sigue que $f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y f_j converge a f en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ que era lo que queríamos probar. ■

3.2. Continuidad de la función maximal de Hardy-Littlewood en los espacios de Morrey

El resultado principal que queremos probar en esta sección es que la función maximal de Hardy-Littlewood está acotada en los espacios de Morrey, para demostrar este resultado será necesario introducir los cubos diádicos y los cubos de Calderón-Zygmund. Además aprovecharemos para dar una versión alternativa a la demostración de la desigualdad débil $(1,1)$ de la función maximal.

Definición 3.2.1. Para $k \in \mathbb{Z}$, sea $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$, es decir, el conjunto formado por los números $\mathbb{Z}^n$ dilatados por un factor de 2^{-k} y sea D_k el conjunto de cubos de longitud de lados 2^{-k} y cuyos vértices están en Λ_k. Los cubos diádicos son los cubos pertenecientes a $D = \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} D_k$.

Diremos que dos cubos Q y Q' no se traslapan si la intersección de sus interiores es vacía.

Observación 3.2.2. *Antes de continuar, es conveniente que hagamos algunas observaciones.*

1. *Si $Q, Q' \in D$ y $|Q'| \leq |Q|$, entonces $Q' \subset Q$, ó Q y Q' no se traslapan.*

2. *Si $Q \in D_k$, entonces D es la unión de 2^n cubos que no se traslapan pertenecientes a D_{k+1}.*

3. *Si tenemos una sucesión estrictamente creciente de $\{Q_j\}_j$ entonces $|Q_j|$ tiende a infinito. Además, cuando la sucesión de cubos es creciente y sus medidas están uniformemente acotadas, entonces existe un índice k_0 tal que $Q_j \subset Q_{k_0}$ para toda $j < k_0$ y $Q_j = Q_{k_0}$ si $j \geq k_0$.*

Proposición 3.2.3. *Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, existe una familia de cubos $\{Q_j\}_j$ tales que:*

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|dx \leq 2^n t.$$

Demostración. Denotaremos por C_t a la familia de cubos $Q \in D$ que satisfacen la condición

$$t < \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |f(x)|dx \tag{3.2}$$

y son maximales entre los cubos que la satisfacen.

Con base en las observaciones anteriores, notemos que cada cubo $Q \in D$ que satisface (3.2) está contenido en algún cubo $Q' \in C_t$, pues la condición (3.2) nos da una cota superior para la medida de Q, la cual es $|Q| < t^{-1}\|f\|_1$.

Por definición, los cubos en C_t no se traslapan; también por la maximalidad de los cubos tenemos que si $Q \in D_k$ está en C_t y Q' está en D_{k-1} y contiene a Q, entonces

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|dx \leq t.$$

Por otro lado, de la observación también tenemos que $|Q'| = 2^n|Q|$, por lo cual,

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)|dx = \frac{2^n}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|dx \leq 2^n t,$$

y por lo tanto concluimos la proposición. ■

Definición 3.2.4. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$. Los cubos de Calderón-Zygmund de f correspondientes a t, es la colección $C_t = \{Q_j\}$ de cubos diádicos maximales para los cuales el promedio de $|f|$ es mayor a t.

Haciendo uso de la Proposición 3.2.3 vamos a probar nuevamente que la función maximal de Hardy-Littlewood, que presentamos en el capítulo 2, es de tipo débil $(1, 1)$.

Teorema 3.2.5. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces para cada $t > 0$, el conjunto*

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \subset \bigcup_j 3Q_j,$$

donde los Q_j son cubos tales que satisfacen

$$\frac{1}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|dx \leq \frac{t}{2^n},$$

y por lo cual se tiene que

$$|E_t| \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx.$$

Demostración. Usaremos la versión de la función maximal $M'f(x)$ en donde sólo consideramos cubos tales que x es punto interior.

Sea $x \in E_t$. Por definición existe un cubo P que contiene a x en su interior y satisface

$$t < \frac{1}{|P|}\int_P |f(y)|dy.$$

Como los números 2^{-k}, con $k \in \mathbb{Z}$ forman una partición de $\mathbb{R}$, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-(k+1)n} < |P| \leq 2^{-kn}$. Luego, existe a lo más un punto de Λ_k en el interior de P. Así, existe un cubo D_k y a lo más 2^n de ellos, que intersectan el interior de P. De aquí que, existe un cubo $Q \in D_k$ que se traslapa con P y satisface

$$\int_{P\cap Q} |f(y)|dy > \frac{t|P|}{2^n}.$$

Puesto que $|P| \leq |Q| < |2P| = 2^n|P|$, se sigue que

$$\int_{P\cap Q} |f(y)|dy > \frac{t|Q|}{4^n},$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy > \frac{1}{|Q|}\int_{P\cap Q} > \frac{t}{4^n}.$$

Así obtenemos que $Q \subset Q_j \in C_{4^{-n}t}$ para alguna j. Por la Proposición 3.2.3 tenemos que los cubos $\{Q_j\}$ satisfacen

$$\frac{t}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq \frac{t}{2^n}.$$

Además, como P y Q se traslapan y $|P| < |Q|$ se sigue que $P \subset 3Q \subset 3Q_j$ por lo que $E_t \subset \bigcup_j 3Q_j$.

Esto nos lleva a que

$$
\begin{aligned}
|E_t| \leq \left|\bigcup_j 3Q_j\right| \leq \sum_j |3Q_j| = 3^n \sum_j |Q_j| \\
&\leq \frac{3^n 4^n}{t} \sum_j \int_{Q_j} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{c}{t}\|f\|_1.
\end{aligned}
$$

que era lo que se quería. ■

La siguiente desigualdad fue probada por C. Fefferman y E. Stein y será utilizada para demostrar la continuidad de la función maximal en los espacios de Morrey.

Proposición 3.2.6. *Sea ϕ una función medible y no negativa y sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^q \phi(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q M\phi(x)dx. \tag{3.3}$$

Demostración. El procedimiento para probar (3.3) será a través del teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Primero, probaremos lo siguiente:

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'f(x)>t\}} \phi(x)dx \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|M\phi(x)dx.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$, pues como f es medible, podemos descomponer a $f(x)$ en

$$f^+(x) := \sup\{f(x), 0\} \quad y \quad f^-(x) := \sup\{-f(x), 0\}$$

donde cada una es no negativa. Luego, existe una sucesión $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ de funciones integrables tales que convergen a f de manera creciente casi en todas partes.

Notemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > t\} = \bigcup_j \{x \in \mathbb{R}^n : M'f_j(x) > t\}.$$

En efecto, como $f_j \leq f$ casi en todas partes, entonces $M'f_j(x) \leq M'f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que si $M'f_j(x) > t$ entonces $M'f(x) > t$. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^n$ satisface que $M'f(x) > t$, entonces existe un cubo Q tal que $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy > t$; dado que las f_j convergen a f casi en todas partes y de manera creciente, se sigue que $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_j(y)|dy$ converge a $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy$, por lo cual existe un k tal que $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_k(y)|dy > t$, y así $M'f_k(x) > t$.

De esta forma, si cada f_j satisface que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'f_j(x)>t\}} \phi(x)dx \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|M\phi(x)dx.$$

tendríamos que

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'(x)>t\}} \phi(x)dx &= \lim_{j\to\infty}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'f_j(x)>t\}} \phi(x)dx \\ &\leq \frac{c}{t}\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|M\phi(x)dx \\ &= \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|M\phi(x)dx\end{aligned}$$

por lo cual podemos asumir que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Sea $t > 0$, por el Teorema 3.2.5 obtenemos una colección de cubos que no se traslapan $\{Q_j\}_j$ tales que

$$\frac{t}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx \leq \frac{t}{2^n},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > t\} \subset \bigcup_j 3Q_j.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'f(x)>t\}} \phi(x)dx &\leq \int_{\cup_j 3Q_j} \phi(x)dx \\
&\leq \sum_j \int_{3Q_j} \phi(x)dx \\
&= \sum_j \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x)|3Q_j|dx \\
&\leq \sum_j \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x)\left(\frac{3^n4^n}{t}\int_{Q_j} f(y)dy\right)dx \\
&= \frac{3^n4^n}{t}\sum_j \int_{Q_j} f(y)\left(\frac{1}{|3Q_j|}\int_{3Q_j}\phi(x)dx\right)dy.
\end{aligned}$$

Si $y \in Q_j$ entonces $y \in 3Q_j$, en consecuencia

$$M\phi(y) \geq \frac{1}{|3Q_j|}\int_{3Q_j}\phi(x)dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'f(x)>t\}} \phi(x)dx &\leq \frac{3^n4^n}{t}\sum_j \int_{Q_j} f(y)\left(\frac{1}{|3Q_j|}\int_{3Q_j}\phi(x)dx\right)dy \\
&\leq \frac{3^n4^n}{t}\sum_j \int_{Q_j} f(y)M\phi(y)dy \\
&\leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)M\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar.

Consideremos los espacios $L^p(M\phi(x)dx)$ y $L^p(\phi(x)dx)$, $1 \leq p \leq \infty$. Lo que hemos probado es lo siguiente:

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > t\}) \leq \frac{c}{t}\|f\|_{L^1(M\phi(x)dx)}$$

donde $d\mu(x) = \phi(x)dx$, es decir, M es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a las medidas $M\phi(x)dx$ (en el dominio) y $\phi(x)dx$ (en el contradominio).

Pero también, M es de tipo débil o fuerte (∞, ∞) con respecto a estas medidas, para esto, veamos por casos:

a) Si $M\phi(x) = 0$ para algún x, entonces $\phi(x) = 0$ casi en todas partes (respecto a la medida de Lebesgue) y así

$$L^\infty(\phi(x)dx) = L^\infty(M\phi(x)dx) = 0,$$

y concluimos.

b) Si $M\phi(x) > 0$ para toda x. Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha > \|f\|_{L^\infty(M\phi(x)dx)}$, por lo cual $M\phi(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha\}) = 0$, o bien $\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\geq\alpha\}} M\phi(x)dx = 0$. Como $M\phi > 0$ estrictamente, se sigue que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha\}| = 0$, lo cual implica que $|f(x)| \leq \alpha$ casi en todas partes (respecto a la medida de Lebesgue) y entonces

$$Mf(x) \leq \alpha. \tag{3.4}$$

Afirmamos que necesariamente $\|Mf\|_{L^\infty(\phi(x)dx)} \leq \alpha$, pues de no ser así tendríamos la existencia de un conjunto A de medida positiva respecto a $(\phi(x)dx)$ tal que $Mf(x) > \alpha$ para toda $x \in A$, donde $\int_A \phi(x)dx > 0$, lo que implica que $|A| > 0$ y así $Mf(x) > \alpha$ para toda $x \in A$, lo cual contradice (3.4).

Hasta aquí hemos probado que para cualquier $\alpha > 0$ tal que $\alpha > \|f\|_{L^\infty(M\phi(x)dx)}$ se tiene

$$\|Mf\|_{L^\infty(\phi(x)dx)} \leq \alpha. \tag{3.5}$$

Ahora tomemos una sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+$ decreciente tal que $\alpha_n > \|f\|_{L^\infty(M\phi(x)dx)}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_n \to \|f\|_{L^\infty(M\phi(x)dx)}$. Por (3.5) tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\|Mf\|_{L^\infty(\phi(x)dx)} \leq \alpha_n,$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\|Mf\|_{L^\infty(\phi(x)dx)} \leq \|f\|_{L^\infty(M\phi(x)dx)}.$$

Como ya hemos probado que es de tipo débil $(1,1)$ y tipo débil (∞,∞), aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz 2.5.6 concluimos (3.3). ■

Finalmente vamos probar la continuidad de la función maximal en los espacios de Morrey.

Teorema 3.2.7. *Sea* $1 < q < \infty$ *y* $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. *Entonces la función maximal* Mf *es acotada en* $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi = \chi_{B(a,r)}$.

De la Proposición 3.2.6 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B(a,r)} [Mf(x)]^q dx &= \int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^q \phi(x) dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q M\phi(x) dx \\ &= c \int_{B(a,2r)} |f(x)|^q M\phi(x) dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} c \int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |f(x)|^q M\phi(x) dx.\end{aligned}$$

Ahora, trataremos de acotar ambas integrales por separado. Recordemos que la versión con cubos y la versión con bolas de la función maximal son comparables por lo cual, para esta prueba, utilizaremos la versión con bolas.

Notemos que

$$\begin{aligned}M\phi(x) &= \sup_{\rho>0} \frac{1}{|B(x,\rho)|} \int_{B(x,\rho)} \chi_{B(a,r)}(y) dy \\ &\leq \sup_{\rho>0} \frac{|B(a,r) \cap B(x,\rho)|}{|B(x,\rho)|} \leq 1,\end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$, en particular, para $x \in B(a, 2r)$, por lo que esta cota nos servirá para la primera integral.

Por otro lado, notemos que para que las bolas $B(a, r)$ y $B(x, \rho)$ se intersecten cuando $2^k r \leq |x - a| < 2^{k+1} r$ necesitamos que $\rho > (2^{k+1} - 1)r$, por lo cual, para estas x tendremos que

$$\begin{aligned} M\phi(x) &\leq \sup_{\rho > (2^{k+1}-1)r} \frac{|B(a,r) \cap B(x,\rho)|}{|B(x,\rho)|} \\ &\leq \sup_{\rho > (2^{k+1}-1)r} \frac{|B(a,r)|}{|B(x,\rho)|} \\ &\leq \frac{c_n r^n}{c_n (2^{k+1} - 1)^n r^n} \\ &\leq \frac{r^n}{(|x-a| - r)^n}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene ya que como $|x - a| < 2^{k+1} r$ se sigue que $(|x - a| - r)^n < (2^{k+1} r - r)^n$.

Sustituyendo estas desigualdades en la integral principal tenemos

$$\begin{aligned} \int_{B(a,r)} [Mf(x)]^q dx \leq c &\int_{B(a,2r)} |f(x)|^q dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} c \int_{B(a,2^{k+1}r) \setminus B(a,2^k r)} |f(x)|^q \frac{r^n}{(|x-a| - r)^n} dx. \end{aligned}$$

Ahora, observemos que en la primera integral hace falta el factor $|B(a, 2r)|^{1+\lambda q}$ para poder acotarlo por la norma $\|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ y para la segunda integral, hace falta el factor $|B(a, 2^{k+1} r)|^{1+\lambda q}$. Luego, puesto que $2^k r \leq |x - a|$, tenemos que $2^k r - r \leq |x - a| - r$; además para $k \in \mathbb{N}$ se tiene $2^{k-1} \geq 2^k - 1$ por lo cual $\frac{1}{|x-a|-r} < \frac{1}{(2^k-1)r} \leq \frac{1}{(2^{k-1})r}$.

Sustituyendo nuevamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(a,r)} [Mf(x)]^q dx \leq c|B(a,2r)|^{1+\lambda q} \|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{(2^{k-1})^n} |B(a,2^{k+1}r)|^{1+\lambda q} \|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
= \|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \Bigg[c r^{n(1+\lambda q)} \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{2^{kn-n}} 2^{(k+1)n(1+\lambda q)} r^{n(1+\lambda q)} \Bigg] \\
\leq c\|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} r^{n(1+\lambda q)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn} 2^{kn(1+\lambda q)} 2^n 2^{n(1+\lambda q)} \right] \\
\leq c\|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} r^{n(1+\lambda q)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn\lambda q} \right] \\
\leq c\|f\|^q_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} |B(a,r)|^{1+\lambda q},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene debido a que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn\lambda q}$ converge porque $\lambda q < 0$ y además la constante c depende de n, de λ y de q.

Por último, dividiendo ambos lados por el factor $|B(a,r)|^{1+\lambda q}$, se tiene que

$$\left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}} \int_{B(a,r)} [Mf(x)]^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq c\|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

y por lo tanto, Mf es acotado en $\|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ para $1 < q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. ■

Capítulo 4

Operador de Hardy

En este capítulo estudiaremos una generalización con peso del operador de Hardy-Littlewood y mostraremos que bajo ciertas condiciones en el peso, estos operadores resultan ser acotados en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ y los espacios de Morrey.

El desarrollo que presentaremos en este capítulo está basado en material que puede ser consultado en [1], [5], [9], [12] y [13].

4.1. Versión original del operador de Hardy y continuidad en L^p

El operador promedio de Hardy con peso fue introducido en 1984 por Carton-Lebrun y Fosset. En esta primera sección nos centraremos principalmente en la versión original del operador de Hardy y mostraremos que este operador es continuo en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

Definición 4.1.1. Sea $\psi : [0,1] \longrightarrow (0,\infty]$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles, definimos el promedio de Hardy-Littlewood de f con peso ψ como la función

$$U_\psi f(x) := \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt.$$

Nos interesa clasificar las funciones ψ para las cuales el operador U_ψ es acotado en L^p para $1 \leq p \leq \infty$.

La función U_ψ tiene una relación cercana al operador maximal de Hardy-Littlewood, ya que si $\psi \equiv 1$ y $n \equiv 1$, U_ψ se reduce al clásico promedio de Hardy-Littlewood

$$Uf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy,$$

para $x \neq 0$ y en el cual hemos hecho el cambio de variable $y = tx$.

En 1920, Hardy logró probar la siguiente desigualdad para el operador clásico:

Teorema 4.1.2. *Dada $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible, para $1 < p < \infty$, se cumple que*

$$\left[\int_0^\infty |Uf(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\left[\int_0^\infty |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1}$$

donde $Uf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$, $x \neq 0$. Además la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible.

Demostración. Por el momento, sólo probaremos la desigualdad (4.1); que la constante es la mejor posible será una consecuencia de lo que probaremos posteriormente en este capítulo.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(y) \geq 0$ para toda $y \in \mathbb{R}^+$, pues f es una función medible. Para evitar trivialidades supongamos que $f \neq 0$.

Sea $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos

$$f_n = \min\{f, n\} \quad y \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

Elegimos Y_0 suficientemente grande tal que las funciones f, f_n, F_n no sean nulas en $(0, Y)$ si $Y > Y_0$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^p dx &= \int_0^Y F_n^p(x) \frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{p-1} x^{1-p}\right] dx \\
&= \frac{-1}{p-1} \int_0^Y F_n^p(x) \frac{d}{dx}(x^{1-p}) dx \\
&= \frac{-x^{1-p} F_n^p(x)}{p-1}\bigg|_0^Y + \frac{p}{p-1} \int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^{p-1} f_n(x) dx \\
&\leq \frac{p}{p-1} \int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^{p-1} f_n(x) dx,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene ya que como F_n es continua, entonces es Riemann integrable y podemos hacer integración por partes. Luego, la última desigualdad sale del hecho de que

$$\frac{-Y^{1-p} F_n^p(Y)}{p-1} < 0,$$

y por el teorema de diferenciación de Lebesgue 2.2.1, si $x \to 0^+$

$$x\left[\frac{F_n(x)}{x}\right]^p = x\left[\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t) dt\right]^p \longrightarrow 0[f_n(0)]^p = 0.$$

Ahora, si p' es el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^p dx &\leq \left[\frac{p}{p-1}\right]\left[\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^{(p-1)p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^Y f_n^p(x) dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{p}{p-1}\right]\left[\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^{p} dx\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^Y f_n^p(x) dx\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Dado que $\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^p dx$ es positivo y finito, se sigue que

$$\left[\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^p dx\right]^{1-\frac{1}{p'}} \leq \frac{p}{p-1}\left[\int_0^Y f_n^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Como f_n converge a f de manera de creciente, F_n converge a F de manera creciente, $f_n \geq 0$ y $F_n \geq 0$ se sigue del teorema de convergencia monótona que

$$\int_0^Y f_n^p(x)dx \longrightarrow \int_0^Y f^p(x)dx,$$

y

$$\int_0^Y \left(\frac{F_n(x)}{x}\right)^p dx \longrightarrow \int_0^Y \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx,$$

cuando $n \to \infty$, por lo cual, tenemos que

$$\left[\int_0^Y \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\left[\int_0^Y f^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Por último, haciendo $Y \to \infty$ y aplicando nuevamente el teorema de convergencia monótona concluimos que

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\left[\int_0^\infty f^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

que era lo que queríamos probar. ■

4.2. Generalizaciones del operador de Hardy y continuidad en L^p

En la sección anterior probamos la continuidad en $L^p(\mathbb{R}^+)$ del promedio clásico de Hardy-Littlewood. En esta sección probaremos que los operadores promedio de Hardy generalizados también actúan continuamente en los espacios $\mathbb{R}^n$.

Comenzaremos presentando la desigualdad integral de Minkowski que será necesaria para probar los teoremas siguientes, la demostración de esta desigualdad se dejará en el Apéndice y también puede ser consultada en [8], p. 194.

Teorema 4.2.1 (Desigualdad Integral de Minkowski)**.** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espacios de medida* σ*-finitos y* $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función medible respecto a la* σ*-álgebra producto* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*.*

a) Si $f \geq 0$ *y* $1 \leq p < \infty$*, entonces*

$$\left[\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y). \tag{4.2}$$

b) Si $1 \leq p \leq \infty$*,* $f(\cdot, y) \in L^p(d\mu)$ *para casi toda* y *y la función* $y \to \|f(\cdot, y)\|_p$ *está en* $L^1(d\nu)$*, entonces* $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ *para casi toda* x*, la función* $x \to \int f(x,y)d\nu(y)$ *está en* $L^p(\mu)$ *y*

$$\left\|\int f(\cdot, y)d\nu(y)\right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y). \tag{4.3}$$

Demostración. Ver Apéndice A.

A continuación presentaremos el siguiente teorema, el cual nos da una condición necesaria y suficiente para que el operador U_ψ sea acotado en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2.2. *Sea* $\psi : [0,1] \longrightarrow [0, \infty)$ *una función medible y sea* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces* $U_\psi : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ *existe como operador acotado, si y sólo si*

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt < \infty. \tag{4.4}$$

Además, cuando (4.4) *se satisface, la norma del operador* U_ψ *en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *está dada por*

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt. \tag{4.5}$$

Demostración. Observemos que para $p = \infty$,

$$U_\psi f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt \leq \int_0^1 \|f\|_{L^\infty}\psi(t)dt < \infty,$$

por lo cual

$$\|U_\psi f\|_{L^\infty} \leq c\|f\|_{L^\infty},$$

donde $c = \int_0^1 \psi(t)dt$. Ahora, sólo nos falta probar el resultado para $1 \leq p < \infty$.

($\Rightarrow$) Supongamos que U_ψ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, así existe una constante $c > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|U_\psi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.6}$$

Enseguida, definamos para $1 > \epsilon > 0$ la función

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Notemos que $f_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pues aplicando un cambio de coordenadas para integrar, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{|x|>1} |x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon}dx \\ &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} d\sigma r^{-n-p\epsilon} r^{n-1}dr \\ &= |S^{n-1}| \int_1^\infty r^{-p\epsilon-1}dr \\ &= |S^{n-1}| \frac{r^{-\rho\epsilon}}{-p\epsilon}\bigg|_1^\infty \\ &= \frac{|S^{n-1}|}{p\epsilon} < \infty. \end{aligned}$$

Luego, el operador promedio de esta función está dado por

$$\begin{aligned} U_\psi f_\epsilon(x) &= \int_0^1 f_\epsilon(tx)\psi(t)dt \\ &= \int_0^1 |tx|^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\chi_{|tx|>1}\psi(t)dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon} \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\psi(t)dt & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Como (4.6) se tiene para toda función en $L^p(\mathbb{R}^n)$, en particular, se cumple para f_ϵ, por lo que, si tomamos $\delta = \epsilon^{-1} > 1$ tenemos

$$\begin{aligned} c^p\|f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\geq \|U_\psi f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{|x|>1} \left[|x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon} \int_{\frac{1}{|x|}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\psi(t)dt\right]^p dx \\ &\geq \int_{|x|>\delta} \left[|x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon} \int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\psi(t)dt\right]^p dx \\ &= \left[\int_{|x|>\delta} |x|^{-n-p\epsilon}dx\right]\left[\int_{\frac{1}{\delta}}^1 t^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\psi(t)dt\right]^p, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde la última desigualdad se obtiene ya que si $|x| > \delta$ entonces $\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta}$, y la última igualdad por el teorema de Fubini.

Ahora, haremos algunas observaciones para ambas integrales, notemos que haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{\delta}$ en la primera integral, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\delta} |x|^{-n-p\epsilon}dx &= \int_{|u|>1} \delta^{-n-p\epsilon}|u|^{-n-p\epsilon}\delta^n du \\ &= \int_{|u|>1} \delta^{-p\epsilon}|u|^{-n-p\epsilon}du \\ &= \delta^{-p\epsilon}\|f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Luego, observemos que para la segunda integral, dado que $\frac{1}{\delta} < t < 1$, por la elección de ϵ se sigue que $t^{-\epsilon} > 1$ y así

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} t^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\psi(t)dt \geq \int_{\frac{1}{\delta}}^{1} t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt. \tag{4.9}$$

Sustituyendo (4.8) y (4.9) en (4.7) tenemos que

$$c^p\|f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \|f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left[\delta^{-\epsilon}\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt\right]^p;$$

puesto que todos los factores son positivos, esto a su vez implica que

$$c\delta^\epsilon \geq \int_{\frac{1}{\delta}}^{1} t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt,$$

esto es, en términos de ϵ

$$c\epsilon^{-\epsilon} \geq \int_{\epsilon}^{1} t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt. \tag{4.10}$$

Afirmamos que $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^\epsilon = 1$. En efecto, pues $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^\epsilon = 1$, si y sólo si $\lim_{\epsilon\to 0}\ln\epsilon^\epsilon = 0$, si y sólo si $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\ln\epsilon = 0$, pero ya sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} -(-x\ln x) = -\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln x}{-1/x}\right] = -\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0,$$

en donde para la tercera igualdad hemos aplicado L'Hôpital.

Finalmente, tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ en (4.10) obtenemos que

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}}\psi(t)dt \leq c.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumple la condición (4.4). Aplicando la desigualdad integral de Minkowski 4.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\|U_\psi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(tx)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \psi(t)dt \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt < \infty, \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde en la última igualdad hemos hecho el cambio de variable $y = tx$, y por lo tanto U_ψ transforma continuamente de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Faltar probar que efectivamente, la norma del operador está dado por (4.5). Notemos que en (4.11) hemos probado que

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt,$$

por lo que nos falta probar la otra desigualdad. Supongamos que se tiene la desigualdad estricta, así existe una constante $k > 0$ tal que

$$\|U_\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq k < \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt. \tag{4.12}$$

En particular, para la función f_ϵ tendríamos que

$$k^p \|f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \|U_\psi f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \|f_\epsilon\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left[\epsilon^\epsilon \int_\epsilon^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt \right]^p,$$

lo cual implica que

$$k \geq \epsilon^\epsilon \int_\epsilon^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt.$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$, se tiene que

$$k \geq \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \psi(t)dt,$$

lo que contradice (4.12), por lo tanto se cumple (4.5). ■

Recordemos que quedó pendiente probar que la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible en la desigualdad de Hardy. Aplicando (4.5) tenemos que para $n = 1$ y $\psi \equiv 1$

$$\|U\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} = \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} dt = \left.\frac{t^{-\frac{1}{p}+1}}{-\frac{1}{p}+1}\right|_0^1 = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1},$$

lo cual demuestra lo que queríamos.

4.3. Continuidad del operador de Hardy en espacios de Morrey

En esta última sección probaremos la continuidad del operador promedio de Hardy en los espacios de Morrey. Además encontraremos condiciones necesarias y suficientes en el peso para que el operador de Hardy sea continuo en estos espacios.

Teorema 4.3.1. *Sea $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ una función medible y sean $1 < q < \infty$ y $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. Entonces U_ψ es un operador acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si*

$$\int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt < \infty. \tag{4.13}$$

Además

$$\|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)\to L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt. \tag{4.14}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que U_ψ es un operador acotado en $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos la función $f_0(x) = |x|^{n\lambda}$, para $x \in \mathbb{R}^n$. Observemos que $f_0 \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, para esto veamos los siguientes casos:

I) Si $2r < |a|$ entonces cuando $|x-a| < r$ tendremos que

$$2r - r < |a| - r = |a - x + x| - r \le |a - x| + |x| - r < r + |x| - r = |x|,$$

esto es $|x| > r$, así para $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} |x|^{n\lambda q}dx &\le \frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} r^{n\lambda q}dx\\ &= \frac{1}{c_n r^{n+n\lambda q}} r^{n\lambda q} c_n r^n = 1.\end{aligned}$$

II) Si $|a| < 2r$ entonces $B(a,r) \subset B(0,3r)$ (ya que si $|x-a| < r$ entonces $|x| \le |x-a| + |a| < r + 2r = 3r$), y por consiguiente

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} |x|^{n\lambda q}dx &\le \frac{1}{|B(0,3r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} |x|^{n\lambda q}dx\\ &= \frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_0^{3r}\left(\int_{S^{n-1}} d\sigma\right) r^{n\lambda q} r^{n-1} dr\\ &= \frac{|S^{n-1}|}{c_n r^n r^{n\lambda q}} \frac{3^{n(1+\lambda q)} r^{n(1+\lambda q)}}{n(1+\lambda q)}\\ &= \frac{|S^{n-1}| 3^{n(1+\lambda q)}}{n c_n (1+\lambda q)} < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_0 \in L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}U_\psi f_0(x) &= \int_0^1 f_0(tx)\psi(t)dt\\ &= \int_0^1 |tx|^{n\lambda}\psi(t)dt\\ &= |x|^{n\lambda}\int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt\\ &= f_0(x)\int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt,\end{aligned}$$

esto implica que

$$\|U_\psi f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt,$$

y así $\int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt < \infty$. Además se concluye que

$$\begin{aligned}\|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)\to L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &\geq \frac{\|U_\psi f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|f_0\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \\ &= \int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt. \end{aligned} \tag{4.15}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumple (4.13). Utilizando la desigualdad integral de Minkowski 4.2.1 tenemos

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} |U_\psi f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} \left|\int_0^1 f(tx)\psi(t)dt\right|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} \left(\int_0^1 |f(tx)|\psi(t)dt\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{|B(a,r)|^{\frac{1}{q}+\lambda}}\left[\int_{B(a,r)} \left(\int_0^1 |f(tx)|\psi(t)dt\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{|B(a,r)|^{\frac{1}{q}+\lambda}}\int_0^1 \left[\int_{B(a,r)} |f(tx)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{|B(a,r)|^{1+\lambda q}}\int_{B(a,r)} |f(tx)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{|B(ta,tr)|^{1+\lambda q}}\int_{B(ta,tr)} |f(y)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} t^{n\lambda}\psi(t)dt \\
&\leq \|f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt < \infty,
\end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad hemos hecho el cambio de variable $y = tx$, y el factor $t^{n\lambda}$ se necesita para compensar la medida de Lebesgue de la bola $|B(ta,tr)|^{1+\lambda q}$. Así U_ψ transforma continuamente $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo y además tenemos que la norma del operador

$$\|U_\psi\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)\to L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^1 t^{n\lambda}\psi(t)dt. \tag{4.16}$$

Por último, de (4.15) y (4.16) se concluye que la norma del operador está dada por (4.14). ■

Conclusiones

Empezamos esta tesis presentando teoremas de cubrimiento que posteriormente nos ayudaron a probar desigualdades de tipo débil para la función maximal de Hardy-Littlewood. Con esta función probamos el teorema de diferenciación de Lebesgue, el cual es un resultado clásico del análisis armónico.

Posteriormente exhibimos el teorema de interpolación de Marcinkiewicz que nos proporcionó un criterio muy útil para probar la continuidad de la función maximal de Hardy-Littlewood tanto en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ como en los espacios $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Para estudiar mejor los espacios de Morrey introducimos los cubos de Calderón-Zygmund que nos permitieron probar de otra manera la desigualdad débil de la función maximal. Para finalizar estudiamos el operador promedio de Hardy, el cual para el caso unidimensional, guarda una relación cercana al operador maximal de Hardy-Littlewood. Además logramos encontrar condiciones necesarias y suficientes para asegurar el acotamiento del operador de Hardy en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Actualmente, en el área del Análisis Armónico el estudio de los operadores promedio es una línea muy activa. Uno de los trabajos que se está realizando es sobre variantes del operador de Hardy, en donde se busca encontrar las condiciones para las cuales, tales variantes sean continuas en algunos espacios de interés.

Apéndice A

Desigualdad Integral de Minkowski

Teorema A.0.2 (Desigualdad Integral de Minkowski)**.** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espacios de medida* σ*-finitos y* $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función medible respecto a la* σ*-álgebra producto* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*.*

a) Si $f \geq 0$ *y* $1 \leq p < \infty$*, entonces*

$$\left[\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y). \tag{A.1}$$

b) Si $1 \leq p \leq \infty$*,* $f(\cdot, y) \in L^p(d\mu)$ *para casi toda* y *y la función* $y \to \|f(\cdot, y)\|_p$ *está en* $L^1(d\nu)$*, entonces* $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ *para casi toda* x*, la función* $x \to \int f(x,y)d\nu(y)$ *está en* $L^p(\mu)$ *y*

$$\left\|\int f(\cdot, y)d\nu(y)\right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y). \tag{A.2}$$

Demostración. La prueba que daremos aquí fue tomada de [11], p. 194.

a) Si $p = 1$, el resultado no es más que el teorema de Tonelli. Si $1 < p < \infty$, sea q el exponente conjugado de p entonces por el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned}\int |\int f(x,y)d\nu(y)|^p d\mu(x) &= \int |\int f(x,y)d\nu(y)|^{p-1}|\int f(x,y)d\nu(y)|d\mu(x) \\ &= \int |\int f(x,z)d\nu(z)|^{p-1}|\int f(x,y)d\nu(y)|d\mu(x) \\ &\leq \int |\int f(x,z)d\nu(z)|^{p-1}\int |f(x,y)|d\nu(y)d\mu(x) \\ &= \int [\int |f(x,y)|\cdot|\int f(x,z)d\nu(z)|^{p-1}d\mu(x)]d\nu(y) \\ &\leq \int [\int |f(x,y)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{p}}[|\int f(x,z)d\nu(z)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{q}}d\nu(y),\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int f(x,y)d\nu(y)|^p d\mu(x) \leq \int [\int |f(x,y)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{p}}d\nu(y) \\ [\int |\int f(x,y)d\nu(y)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Ahora, si $[\int |\int f(x,y)d\nu(y)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{q}} = 0$, la desigualdad se obtiene de manera trivial. Luego, si $[\int |\int f(x,y)d\nu(y)|^p d\mu(x)]^{\frac{1}{q}} < \infty$, dividiendo en ambos lados por este factor, se sigue que

$$\left[\int \left|\int f(x,y)d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left|\int f(x,y)^p d\mu(x)\right|^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

b) Si $p = \infty$ la desigualdad se obtiene por consecuencia de la monotonía de la integral. Si $p < \infty$ entonces (A.2) se sigue de a) (considerando $|f|$ en lugar de

f) y aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\left\| \int f(\cdot,y)d\nu(y) \right\|_p &= \left[\int \left(\left| \int f(\cdot,y)d\nu(y) \right| \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int \left(\int |f(\cdot,y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int \left(\int |f(\cdot,y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \\
&= \int \|f(\cdot,y)\|_p d\nu(y).
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] F. Chiarenza and M. Frasca. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, 7:273–279, 1987.

[2] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*, volume 29. American Mathematical Society, 2001.

[3] C. Fefferman and E. Stein. Some maximal inequalities. *American Journal of Mathematics*, 93:107–115, 1971.

[4] G. B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 1999.

[5] Z. Fu and S. Lu. Weighted Hardy operators and commutators on Morrey spaces. *Frontiers of Mathematics in China*, 5:531–539, 2010.

[6] J. García Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.* Elsevier Science, 1985.

[7] A. de J. Gómez Jurado. *Desigualdades con pesos para la función maximal de Hardy-Littlewood.* Tesis de Maestría, Universidad de Sonora, 2012.

[8] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis*, volume 250. Springer, 2009.

[9] M. Guzmán Partida. Teoremas de cubrimiento y promedios. *Lecturas matemáticas*, 36(2):123–134, 2015.

[10] M. Guzmán Partida. *Notas del curso "Una introducción a la teoría de pesos A_p"*. Escuela de Análisis, Colima, 2016.

[11] F. Jones. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett, 2001.

[12] J. E. Littlewood G. Hardy and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1999.

[13] J. Xiao. L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262:660–666, 2001.