“El saber de mis hijos hará mi grandeza”

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Sistemas Hamiltonianos con grupo de simetrías SO(3): aspectos algebraicos, geométricos y computacionales

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Eddel Elí Ojeda Avilés

Director de tesis: Dr. Misael Avendaño Camacho

Hermosillo, Sonora, México, 30 de junio de 2017

SINODALES

Dr. Guillermo Dávila Rascón

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Misael Avendaño Camacho

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Rubén Flores Espinoza

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M. C. Eduardo Velasco Barreras

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M. C. José Crispín Ruíz Pantaleón

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dedicatoria

A mi familia, quienes han estado para mí en cada etapa de mi vida.

Agradecimientos

Nunca he sido bueno para expresarme, y dudo haya suficientes palabras para agradecerle a mi familia, en especial a mis padres, por su constante apoyo, comprensión y cariño, sin ustedes no sería quien soy ni estaría donde estoy.

Quiero agradecer a mi director de tesis Dr. Misael Avendaño Camacho por su guía y por la paciencia y confianza que me ha demostrado a lo largo de la realización de este trabajo.

A mis sinodales: Dr. Guillermo Dávila Rascón, Dr. Rubén Flores Espinoza, M.C. Eduardo Velasco Barreras y M.C. José Crispín Ruíz Pantaleón por sus consejos y por el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis.

Agradezco a mis amigos y compañeros con los cuales pasé buenos momentos, en especial a Ying, Chuy y Luis por aguantarme un semestre de roommate, a Katya por todos los momentos en los que hemos podido pláticar y reir agusto, Ale gracias por ser tan buena conmigo y aguantarme siempre, y Nohemy gracias por tu constante apoyo y tus palabras de aliento a lo largo de la licenciatura.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyarme para la realización de esta tesis como becario del proyecto "Aspectos geométricos y algebraicos del método de promedios cuántico y clásico"(Ref. no. 258302).

Contenido

Introducción

En física, un sistema Hamiltoniano es un sistema conservativo, es decir, un sistema dinámico en el que la energía se conserva, determinado por una función escalar llamada el Hamiltoniano la cual representa la energía del sistema. En este trabajo se estudiarán cierto tipo de sistemas Hamiltonianos llamados sistemas Hamiltonianos SO(3)-invariantes. Para ello, es necesario definir el concepto simetría de un sistema, la cual se define como un difeomorfismo que deja invariante al retrato fase. En particular, el conjunto de simetrías de un sistema tiene estructura de grupo, por lo que es posible estudiar los sistemas Hamiltonianos cuyo grupo de simetrías es SO(3), estos son los sistemas Hamiltonianos SO(3)-invariantes o sistemas Hamiltonianos rotacionalmente invariantes. El objetivo de este trabajo es estudiar algunos sistemas Hamiltonianos que tienen como grupo de simetrías a SO(3).

En el Capítulo 1 presentaremos la teoría básica de grupos y álgebras de Lie, centrandonos en los conceptos de grupo de Lie matricial y álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie matricial, y resultados de estos, con el propósito de introducir al grupo especial ortogonal en $\mathbb{R}^3$ y a su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$.

Más adelante, en la primera parte del Capítulo 2, se presentan los conceptos de representación de un álgebra de Lie y representación de un grupo de Lie en un espacio vectorial, junto con algunas propiedades que estas poseen. En la segunda parte de este capítulo se introduce el concepto de acción de un grupo en un conjunto, junto con conceptos relaciones como el operador de promedio de una acción y los generadores infinitesimales de una acción, los cuales nos serán de utilidad en los capítulos posteriores al estudiar y caracterizár a las funciones, campos y sistemas $\mathfrak{so}(3)$-invariantes.

Posteriormente en el Capítulo 3 procederemos a desarrollar los elementos necesarios para obtener la medida de Haar en SO(3) mediante una parametrización de los elementos de SO(3) en término de los ángulos de Euler.

Durante el Capítulo 4 nos enfocaremos a estudiar las acciones canónica y diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6$ respectivamente, ya que estas son las acciones que consideraremos en el ejemplo de reducción y reconstrucción de soluciones de un sistema Hamiltoniano $\mathfrak{so}(3)$-invariante.

Por último, en el último Capítulo 5 estudiaremos qué es un sistema Hamiltoniano SO(3)-invariante, nos haremos uso de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para dar un método de reducción de un sistema Hamiltoniano rotacionalmente invariante en $\mathbb{R}^6$, junto con un método de recontrucción de soluciones a partir de soluciones del sistema reducido, y realizaremos los cálculos correspondientes para encontrar la solución en un ejemplo de un sistema Hamiltoniano SO(3)-invariante en $\mathbb{R}^6$.

Capítulo 1

Grupos y álgebras de Lie matriciales

El propósito de este capítulo es introducir los conceptos de grupo de Lie matricial y álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie matricial, estudiar algunos conceptos y resultados importantes relacionados a estos, los cuales serán utilizados frecuentemente en los capítulos posteriores, y presentar los ejemplos clásicos de grupos de Lie y sus respectivas álgebras de Lie asociadas, entre los cuales se encuentra el grupo $\mathrm{SO}(3)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$.

Para cumplir con dicho propósito, el desarrollo de este capítulo será el siguiente. Primero se estudiará la teoría general de álgebras de Lie. Posteriormente se introducirá el concepto de grupo de Lie matricial y los ejemplos clásicos de grupos de Lie matriciales. Más adelante se presentará la definición de la exponencial y el logaritmo de una matriz, junto con algunas propiedades de estas funciones, seguido de la definición del álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial, y los ejemplos de las álgebras de Lie asociadas a los ejemplos clásicos de grupos de Lie matriciales presentados previamente.

1.1. Álgebras de Lie

Antes de definir el concepto de grupo de Lie matricial y definir el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie matricial, es conveniente presentar la teoría básica de álgebras de Lie, junto con algunos conceptos importantes relacionados a estas, los cuales pueden consultarse en [1, 2].

1.1.1. Definción de álgebra de Lie

A continuación se presenta una definición de álgebra de Lie, la cual fue tomada de [1].

Definición 1.1.1. *Un álgebra de Lie, es un par* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$*, donde* $\mathfrak{g}$ *es un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{F}$*, junto con una operación binaria* $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*, llamada corchete de Lie, la cual, para cualesquiera* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ *y* $\alpha \in \mathbb{F}$*, cumple las siguientes propiedades:*

(i) *Linealidad:*
$$[X + \alpha Y, Z] = [X, Z] + \alpha[Y, Z].$$

(ii) *Antisimetría:*
$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(iii) *Identidad de Jacobi:*
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

A partir de la propiedad de linealidad y la propiedad de antisimetría se sigue que

$$[X, Y + \alpha Z] = -[Y + \alpha Z, X] = -[Y, X] - \alpha[Z, X] = [X, Y] + \alpha[X, Z],$$

por lo que el corchete de Lie es en realidad una operación bilineal.

En general, se denotará al álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ únicamente como $\mathfrak{g}$ siempre que sea claro cual es la operación definida en $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.1.2. $\mathbb{R}$ *es un álgebra de Lie si se dota con el corchete de Lie trivial:*

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}.$$

En este ejemplo, es claro que el corchete definido en $\mathbb{R}$ *satisface las propiedades de linealiad, antisimetría y la identidad de Jacobi, por lo que en efecto,* $(\mathbb{R}, [\ ,\ ])$ *es un álgebra de Lie.*

Notemos que en el ejemplo anterior, es posible cambiar $\mathbb{R}$ por cualquier otro espacio vectorial $\mathfrak{g}$ y se mantiene que el par $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie. Es decir, cualquier espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es un álgebra con el corchete de Lie trivial. Por otra parte, en estas álgebras se satisface que $[X, Y] = [Y, X] = 0$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$. Las álgebras de Lie con esta propiedad son llamadas álgebras de Lie abelianas, y en general, se dice que dada cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, dos elementos $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ conmutan si y sólo si $[H_1, H_2] = 0$.

Ejemplo 1.1.3. *Sea $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ y el producto usual de matrices. $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ junto con el corchete $[\ ,\ ] : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definido por $[X, Y] = XY - YX$ forma un álgebra de Lie. Para probar que, en efecto, $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie, es necesario demostrar que $[\ ,\ ]$ satisface las propiedades de un corchete de Lie. Para ello, basta ver que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con el producto y suma usual de matrices, es una álgebra asociativa. Esto porque en el Teorema 1.1.5, que aparece a continuación, se demuestra que en toda álgebra asociativa existe una estructura de corchete de Lie natural dada por el conmutador de elementos en el álgebra, definido por (1.1), y el corchete definido en este ejemplo coincide con el conmutador en el álgebra asociativa $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$.*

Definición 1.1.4. *Sea $(V, *)$ un álgebra asociativa. Definamos el corchete $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ por*

$$[X, Y] = X * Y - Y * X \tag{1.1}$$

para cualesquiera $X, Y \in V$. El corchete definido de esta manera es llamado el conmutador de X y Y.

Teorema 1.1.5. *Toda álgebra asociativa $(V, *)$ es un álgebra de Lie con el conmutador como corchete de Lie, definido por (1.1).*

Demostración. Sea $(V, *)$ un álgebra asociativa y sean $X, Y, Z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. A partir de la definición del conmutador, tenemos que

$$\begin{aligned}
[X + \alpha Y, Z] &= (X + \alpha Y) * Z - Z * (X + \alpha Y) \\
&= X * Z + \alpha Y * Z - Z * X - Z * \alpha Y) \\
&= X * Z - Z * X + \alpha(Y * Z - Z * Y) \\
&= [X, Z] + \alpha[Y, Z],
\end{aligned}$$

Así, el conmutador es una operación lineal en V. Además, es claro que

$$[X, Y] = X * Y - Y * X = -(-X * Y + Y * X) = -(Y * X - X * Y) = -[Y, X],$$

por lo que el conmutador es una operación antisimétrica, y utilizando la propiedad de asociatividad del producto en V, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= [X, Y * Z - Z * Y] \\ &= X * (Y * Z - Z * Y) - (Y * Z - Z * Y) * X \\ &= X * (Y * Z) - X * (Z * Y) - (Y * Z) * X + (Z * Y) * X \\ &= (X * Y) * Z - (X * Z) * Y - (Y * Z) * X + (Z * Y) * X.\end{aligned}$$

Por lo anterior, es claro que

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] &= (X * Y) * Z - (X * Z) * Y - (Y * Z) * X \\ &\quad + (Z * Y) * X + (Y * Z) * X - (Y * X) * Z \\ &\quad - (Z * X) * Y + (X * Z) * Y + (Z * X) * Y \\ &\quad - (Z * Y) * X - (X * Y) * Z - (Y * X) * Z \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo cual implica que el conmutador satisface la identidad de Jacobi. Por lo tanto, el conmutador es un corchete de Lie en V, y así, $(V, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie. ∎

Este teorema es de gran utilidad ya que permite construir álgebras de Lie a partir de álgebras asociativas.

Definición 1.1.6. *Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$, de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ cerrado bajo el corchete de Lie, es decir, si $X, Y \in \mathfrak{h}$ entonces $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

De la definición anterior se sigue que si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, en particular, $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie.

Definición 1.1.7. *Una subálgebra $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un ideal en $\mathfrak{g}$ si $[X, H] \in \mathfrak{h}$ $\forall X \in \mathfrak{g}$ y $\forall H \in \mathfrak{h}$.*

Notemos que el espacio total y el espacio nulo siempre son ideales de cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.1.8. *El espacio vectorial de las matrices triangulares superiores de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ es un ideal del álgebra de Lie de matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ con el conmutador como corchete de Lie (Ejemplo 1.1.3).*

Para ver lo anterior, notemos que para cualesquiera dos matrices $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ triangulares superiores, se satisface que $[X,Y] = XY - YX$ es una matriz triangular superior, pues la suma y el producto de matrices triangulares superiores son de nuevo matrices triangulares superiores.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada irreducible si satisface que sus únicos ideales son $\{0\}$ y $\mathfrak{g}$. Un álgebra de Lie se dice ser simple si es irreducible y $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$.

Definición 1.1.9. *El centro de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es el conjunto de todos los $X \in \mathfrak{g}$ tales que $[X,Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{g}$, el cual se denota como $C(\mathfrak{g})$.*

A partir de la definición del centro de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es claro que $C(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$ para cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Esto se debe a que

$$[0,Y] = [0+0,Y] = [0,Y] + [0,Y] \;\Rightarrow\; [0,Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{g},$$

lo que implica que $0 \in C(\mathfrak{g})$, y así $C(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$. Más aún, el centro de $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.1.10. *Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras de Lie, la suma directa de $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ es la suma directa de los espacios vectoriales $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ con la operación:*

$$[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)] = ([X_1,Y_1],[X_2,Y_2])$$

Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son subálgebras de Lie de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se dice que $\mathfrak{g}$ se descompone como suma directa de las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ si $\mathfrak{g}$ es suma directa de $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ como espacios vectoriales y $[X_1, X_2] = 0$ para cualesquiera $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ y $X_2 \in \mathfrak{g}_2$.

1.1.2. Álgebras de Lie clásicas

En esta sección se presentan algunos ejemplos importantes de álgebras de Lie, las cuales son conocidas como álgebras de Lie clásicas, que serán utilizadas en las secciones posteriores de este capítulo. En cada uno de estos ejemplos, V es un espacio vectorial finito dimensional sobre un campo $\mathbb{F}$.

El álgebra general lineal

El espacio de todos los operadores lineales de V, el cual de ahora en adelante denotaremos como $\mathfrak{gl}(V)$, es un álgebra asociativa respecto a la composición de operadores. Por el

Teorema 1.1.4 se tiene que $\mathfrak{gl}(V)$ es un álgebra de Lie con el corchete de Lie dado por el conmutador, es decir, $(\mathfrak{gl}(V), [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie llamada el álgebra general lineal.

A partir de la definición de un subálgebra de Lie, es claro que cualquier subespacio S de $\mathfrak{gl}(V)$ que sea cerrado bajo el conmutador es un álgebra de Lie. En los siguientes ejemplos de álgebras de Lie clásicas se usará este hecho para comprobar que efectivamente cada una es un álgebra de Lie.

El álgebra especial lineal

Antes de hablar del álgebra especial lineal de V es necesario recordar la definición de la traza de un operador lineal en V. Para ello, sea $T \in \mathfrak{gl}(V)$ y sea B una base de V. Se define la traza de T como

$$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}([T]_B)$$

donde $[T]_B$ es la representación matricial de T respecto a la base B. Es bien conocido que el valor de la traza de $[T]_B$ no depende de la base elegida. [1]

Sea $\mathfrak{sl}(V)$ el conjunto de todos los operadores de traza cero en $\mathfrak{gl}(V)$. Sean $T_1, T_2 \in \mathfrak{sl}(V)$ arbitrarios, por propiedades de la traza se tiene que

$$\mathrm{tr}([T_1, T_2]) = \mathrm{tr}(T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1) = \mathrm{tr}(T_1 \circ T_2) - \mathrm{tr}(T_2 \circ T_1) = 0$$

lo que implica que $[T_1, T_2] \in \mathfrak{sl}(V)$ para cualesquiera $T_1, T_2 \in \mathfrak{sl}(V)$, es decir, $\mathfrak{sl}(V)$ es un subconjunto de $\mathfrak{gl}(V)$ cerrado bajo el conmutador. Por lo anterior $(\mathfrak{sl}(V), [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie, llamada el álgebra especial lineal de V.

El álgebra ortogonal

Para definir al álgebra ortogonal de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, es necesario recordar algunos conceptos de operadores usados en álgebra lineal. Un producto interior, es una transformación $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
3. $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$.

Notese que la propiedad 1 establece que el producto interior es simétrico, y por las propiedades 2 y 3 se sigue que

$$\langle u, v + \alpha w\rangle = \langle u, v\rangle + \alpha\langle u, w\rangle,$$

por lo que el producto interior es un operador bilineal.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interior. Dado un operador $T \in \mathfrak{gl}(V)$ se define $T^{\mathfrak{t}} : V \to V$, llamado el operador transpuesto de T, como el operador que satisface la siguiente relación:

$$\langle T(v), w\rangle = \left\langle v, T^{\mathfrak{t}}(w)\right\rangle \tag{1.2}$$

para cualesquiera $v, w \in V$.

Un operador lineal $T \in \mathfrak{gl}(V)$ es llamado simétrico respecto a $\langle\ ,\ \rangle$ si satisface que $T = T^{\mathfrak{t}}$, y es llamado antisimétrico respecto a $\langle\ ,\ \rangle$ si se cumple que $T = -T^{\mathfrak{t}}$.

Sea $\mathfrak{so}(V)$ el conjunto de todos los operadores en $\mathfrak{gl}(V)$ que son antisimétricos con respecto a $\langle\ ,\ \rangle$, es decir,

$$\mathfrak{so}(V) = \left\{T \in \mathfrak{gl}(V) \mid T^{\mathfrak{t}} = -T\right\}.$$

Por definición, lo anterior es equivalente a definir a $\mathfrak{so}(V)$ como

$$\mathfrak{so}(V) = \{T \in \mathfrak{gl}(V) \mid \langle T(v), w\rangle = -\langle v, T(w)\rangle\ \forall\, v, w \in V\}.$$

Sean $T_1, T_2 \in \mathfrak{so}(V)$ arbitrarios, es claro que

$$\begin{aligned}
\langle [T_1, T_2](v), w\rangle &= \langle (T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1)(v), w\rangle = \langle T_1(T_2(v)), w\rangle - \langle T_2(T_1(v)), w\rangle \\
&= -\langle T_2(v), T_1(w)\rangle + \langle T_1(v), T_2(w)\rangle = \langle v, T_2((T_1(w))\rangle - \langle v, T_1(T_2(w))\rangle \\
&= \langle v, (T_2 \circ T_1 - T_1 \circ T_2)(w)\rangle = \langle v, -[T_1, T_2](w)\rangle \\
&= -\langle v, [T_1, T_2](w)\rangle,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $[T_1, T_2] \in \mathfrak{so}(V)$ para cualesquiera $T_1, T_2 \in \mathfrak{so}(V)$, es decir, $\mathfrak{so}(V)$ es cerrado bajo el conmutador. Por lo tanto, $(\mathfrak{so}(V), [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie, llamada el álgebra ortogonal de V.

El álgebra unitaria

Para introducir ésta álgebra, es necesario definir lo que es un producto hermitiano en un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto hermitiano es una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, tal que para cualesquiera $u, v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ se satisface lo siguiente:

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle}$,
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
3. $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$.

A partir de las propiedades 1 y 2 se tiene que

$$\langle u, \alpha w\rangle = \overline{\alpha}\langle u, w\rangle.$$

Un espacio unitario, es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ con un producto hermitiano $\langle\ ,\ \rangle$ y una norma dada por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio unitario sobre $\mathbb{C}$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto hermitiano, y sea $T \in \mathfrak{gl}(V)$. Se define el operador adjunto de T como el único operador lineal $T^* : V \to V$ tal que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle \tag{1.3}$$

para todo $v \in V$.

Un operador se dice ser hermitiano si $T^* = T$; análogamente, T se dice ser antihermitiano si $T^* = -T$.

Se denota por $\mathfrak{su}(V)$ al conjunto de todos los operadores $T \in \mathfrak{gl}(V)$, que son antihermitianos con respecto a $\langle\ ,\ \rangle$, esto es:

$$\mathfrak{su}(V) = \{T \in \mathfrak{gl}(V) \mid T^* = -T\}\,.$$

Comprobemos que $\mathfrak{su}(V)$ es un álgebra de Lie. Dados $T_1, T_2 \in \mathfrak{su}(V)$ cualesquiera, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle [T_1, T_2](v), w\rangle &= \langle (T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1)(v), w\rangle = \langle T_1(T_2(v)), w\rangle - \langle T_2(T_1(v)), w\rangle \\ &= \langle T_2(v), -T_1(w)\rangle - \langle T_1(v), -T_2(w)\rangle = \langle v, T_2(T_1(w))\rangle - \langle v, T_1(T_2(w))\rangle \\ &= \langle v, -[T_2, T_1](w)\rangle,\end{aligned}$$

por lo que $[T_1, T_2] \in \mathfrak{su}(V)$, es decir, $\mathfrak{su}(V)$ es cerrado bajo el conmutador, por lo que $(\mathfrak{su}(V)[\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie con el conmutador como corchete de Lie, llamada álgebra unitaria.

El álgebra simpléctica

Para definir el álgebra simpléctica es necesario introducir algunos conceptos. Una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{F}$ se dice ser no-degenerada si para todo $v \in V$ tal que $B(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, se tiene que $v = 0$. Es antisimétrica si $B(v, w) = -B(w, v)$ para cualesquiera $v, w \in V$. Un espacio vectorial simpléctico sobre $\mathbb{F}$, con $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, es un par $(V, \{\ ,\ \})$, donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $\{\ ,\ \} : V \times V \to \mathbb{F}$ es una forma bilineal, antisimétrica y no-degenerada. Un operador $T \in \mathfrak{gl}(V)$ es llamado hamiltoniano si satisface lo siguiente:

$$\{T(v), w\} + \{v, T(w)\} = 0,$$

para cualesquiera $v, w \in V$.

$\mathfrak{sp}(V)$ denota al conjunto de todos los operadores hamiltonianos en $\mathfrak{gl}(V)$. Para probar que $\mathfrak{sp}(V)$ es un álgebra de Lie, sean $T_1, T_2 \in \mathfrak{sp}(V)$ cualesquiera. Por definición se tiene que

$$\begin{aligned}
\{[T_1, T_2](v), w\} + \{v, [T_1, T_2](w)\} &= \{(T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1)(v), w\} \\
&\quad + \{v, (T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1)(w)\} \\
&= \{T_1(T_2(v)), w\} - \{T_2(T_1(v)), w\} \\
&\quad + \{v, (T_1(T_2(w))\} - \{v, T_2(T_1(w))\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que $[T_1, T_2] \in \mathfrak{sp}(V)$, y así, $\mathfrak{sp}(V)$ es cerrado bajo el conmutador. Por lo tanto, $(\mathfrak{sp}(V), [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie, llamada álgebra simpléctica.

Notemos que las álgebras de Lie clásicas mencionadas en ésta parte de la sección se pueden representar como álgebras de Lie matriciales, tomando la representación matricial de cada operador en el álgebra respecto a una base fija de V.

1.1.3. Homomorfismos de álgebras de Lie

En esta parte se presenta la definición de homomorfismo entre álgebras de Lie, así como sus propiedades.

Definición 1.1.11. *Sean* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ *y* $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{h}})$ *álgebras de Lie. Una función lineal* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *es llamada un homomorfismo de álgebras de Lie si* $\phi([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{h}}$ *para cualesquiera* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

En adición a la definición anterior, llamaremos isomorfismo de álgebras de Lie a un homomorfismo de álgebras de Lie que es inyectivo y suprayectivo.

Por otra parte, un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]) \to (\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ es llamado un endomorfismo de $\mathfrak{g}$. Si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo, entonces es llamado un automorfismo de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.1.12. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie real o compleja de dimensión finita, y sean* $X_1, X_2, ..., X_n$ *elementos básicos de* $\mathfrak{g}$ *como espacio vectorial. Entonces las únicas constantes* c_{jkl} *tales que* $[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^{n} c_{jkl} X_l$ *son llamadas las constantes de estructura de* $\mathfrak{g}$.

A partir de la definición se puede ver que las constantes de estructura satisfacen las siguientes relaciones

$$c_{jkl} + c_{kjl} = 0$$

y

$$\sum_{l=1}^{n} (c_{jkl} c_{ilm} + c_{kil} c_{jlm} + c_{ijl} c_{klm}) = 0.$$

Lo anterior se verifica, a partir de la propiedad antisimétrica de la operción, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 0 &= [X_j, X_k] + [X_k, X_l] \\ &= \sum_{l=1}^{n} c_{jkl} X_l + \sum_{l=1}^{n} c_{kjl} X_l \\ &= \sum_{l=1}^{n} (c_{jkl} + c_{kjl}) X_l, \end{aligned}$$

lo que implica $c_{jkl} + c_{kjl} = 0$ debido a la independencia lineal de la base $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. La segunda igualdad se da a partir de la identidad de Jacobi como se sigue

$$\begin{aligned}
0 &= [X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] \\
&= \left[X_i, \sum_{l=1}^{n} c_{jkl} X_l\right] + \left[X_j, \sum_{l=1}^{n} c_{kil} X_l\right] + \left[X_k, \sum_{l=1}^{n} c_{ijl} X_l\right] \\
&= \sum_{l=1}^{n} (c_{jkl}[X_i, X_l] + c_{kil}[X_j, X_l] + c_{ijl}[X_k, X_l]) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(c_{jkl} \sum_{m=1}^{n} c_{ilm} X_m + c_{kil} \sum_{m=1}^{n} c_{jlm} X_m + c_{ijl} \sum_{m=1}^{n} c_{klm} X_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (c_{jkl} c_{ilm} + c_{kil} c_{jlm} + c_{ijl} c_{klm}) X_m,
\end{aligned}$$

de lo cual se obtiene que $\sum_{l=1}^{n}(c_{jkl}c_{ilm} + c_{kil}c_{jlm} + c_{ijl}c_{klm}) = 0$.

La relevancia de las constantes de estructura de un álgebra de Lie, es que mediante su análisis es posible determinar si existe un isomorfismo entre dos álgebras de Lie, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.13. *Sean* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ *y* $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{h}})$ *dos álgebras de Lie de dimensión* n *sobre un campo* $\mathbb{F}$. *Entonces* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{h}$ *son isomorfos si y sólo si existe una base* $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ *para* $\mathfrak{g}$ *y una base* $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ *para* $\mathfrak{h}$ *tales que*

$$c_{jkl}^{\mathfrak{g}} = c_{jkl}^{\mathfrak{h}}$$

para $1 \leq i, j, k \leq n$.

Demostración. Si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ y se tiene una base $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ de $\mathfrak{g}$, entonces tomando

$$Y_i = \phi(X_i)$$

para $1 \leq i \leq n$, se tiene que $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de $\mathfrak{h}$, que satisface lo siguiente

$$\sum_{l=1}^{n} c_{jkl}^{\mathfrak{h}} Y_l = [Y_j, Y_k]_{\mathfrak{h}} = [\phi(X_j), \phi(X_k)]_{\mathfrak{h}} = \phi\left([X_j, X_k]_{\mathfrak{g}}\right) = \sum_{l=1}^{n} c_{jkl}^{\mathfrak{g}} X_l,$$

para cada $1 \leq i, j, k \leq n$. Por lo tanto $c_{jkl}^{\mathfrak{g}} = c_{jkl}^{\mathfrak{h}}$ para $1 \leq i, j, k \leq n$.

Ahora bien, si $c_{jkl}^{\mathfrak{g}} = c_{jkl}^{\mathfrak{h}}$ para $1 \leq i, j, k \leq n$, donde $c_{jkl}^{\mathfrak{g}}$ y $c_{jkl}^{\mathfrak{h}}$ son las constantes de estructura obtenidas con las bases $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Definiendo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ como $\phi(X_i) = Y_i$ para $1 \leq i \leq n$, se tiene que ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie, esto es porque dados $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$ existen $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}, \{\beta_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{F}$ tales que

$Z_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ y $Z_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i$. Solo resta probar que ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Por cálculo directo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi\left([Z_1, Z_2]_{\mathfrak{g}}\right) &= \phi\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \left[X_j, X_k\right]_{\mathfrak{g}}\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \phi \left[X_j, X_k\right]_{\mathfrak{g}} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \phi \left(\sum_{l=1}^n c_{jkl}^{\mathfrak{g}} X_l\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \sum_{l=1}^n c_{jkl}^{\mathfrak{g}} \phi\left(X_l\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \sum_{l=1}^n c_{jkl}^{\mathfrak{h}} Y_l = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \left[Y_j, Y_k\right]_{\mathfrak{h}} \\
&= \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j Y_j, \sum_{k=1}^n \beta_k Y_k\right]_{\mathfrak{h}} = \left[\phi(Z_1), \phi(Z_2)\right]_{\mathfrak{h}}
\end{aligned}$$

para cualesquiera $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfos. ■

1.2. Grupos de Lie matriciales

En la siguiente sección se presentará la definición general de un grupo de Lie matricial, ejemplos de grupos de Lie matriciales, junto con algunos conceptos y resultados importantes.

1.2.1. Definición de un grupo de Lie matricial

Antes de introducir el concepto de grupo de Lie matricial, vamos a recordar la definición de un espacio métrico, la cual está dada de la siguiente manera.

Definición 1.2.1. *Un espacio métrico es un conjunto M junto con una función* $\mathrm{d} : M \times M \to \mathbb{R}$ *llamada métrica, la cual, para cualesquiera $x, y, z \in M$, satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$.

(ii) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(iii) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.

(iv) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

De ahora en adelante, se utilizará la notación $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ para referirse al espacio de todas las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$. Procederemos a definir una métrica en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, para lo cual utilizaremos la norma de Hilbert-Schmidt para matrices definida como se sigue.

Definición 1.2.2. *Para cada $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se define la norma de Hilbert-Schmidt de X como se sigue*

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|X_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notemos que la norma de Hilbert-Schmidt de una matriz X se puede calcular como $\|X\| = (\mathrm{tr}(X^2))^{\frac{1}{2}}$.

Proposición 1.2.3. *La norma de Hilbert-Schmidt satisface las siguientes desigualdades:*

(i) $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$,

(ii) $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$,

para cualesquiera $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Demostración.

(i) Sean $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, por la desigualdad del triángulo de la norma en $\mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|X+Y\| &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(X+Y)_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|X_{ij}+Y_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(|X_{ij}|^2+|Y_{ij}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(X)_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(Y)_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|X\| + \|Y\|.\end{aligned}$$

(ii) Para cualesquiera $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|XY\| &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(XY)_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\left(\sum_{k=1}^{n}X_{ik}Y_{kj}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\left(\sum_{k=1}^{n}X_{ik}\right)\right|^2\left|\left(\sum_{k=1}^{n}Y_{kj}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|X_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|Y_{kj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|X\|\|Y\|,\end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ■

A partir de la proposición anterior, es claro que podemos definir una métrica en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mediante la norma de Hilbert-Schmidt de la siguiente manera,

$$\mathrm{d}(X,Y) = \|X - Y\|$$

para cualesquiera $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Ahora, recordemos la definición de una topología en un conjunto M, la cual está dada de la siguiente manera.

Definición 1.2.4. *Sea M un conjunto arbitrario. Una topología sobre M es una familia τ de subconjuntos de M con las siguientes propiedades*

(i) $\emptyset \in \tau$, $M \in \tau$.

(ii) *Si* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \tau$, *entonces* $\cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \in \tau$.

(iii) *Si* $\{X_i\}_{i=1}^{n} \subset \tau$, *entonces* $\cap_{i=1}^{n} X_i \in \tau$.

(M, τ) se llama un espacio topológico, y cada elemento de τ es llamado abierto en M. Se dice que un conjunto es cerrado en M si su complemento es un abierto en M.

Podemos definir la topología métrica en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mediante la métrica inducida por la norma de Hilbert-Schmidt (ver [18]). De ahora en adelante, al hablar de conjuntos abiertos o cerrados, continuidad de funciones, y cualquier otra propiedad topológica en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, lo haremos en base a esta topología.

Definición 1.2.5. *El grupo general lineal sobre $\mathbb{R}$, denotado $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, es el grupo de matrices invertibles de $n\times n$ con entradas en $\mathbb{R}$. El grupo general lineal sobre $\mathbb{C}$, denotado por $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, es el grupo de matrices invertibles de $n\times n$ con entradas en $\mathbb{C}$.*

Notemos que tanto $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ como $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ son grupos con respecto al producto usual de matrices, teniendo como elemento neutro a la matriz identidad.

Definición 1.2.6. *Sea $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se dice que $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a una matriz X si cada entrada de X_m converge a la entrada correspondiente de X. Es decir, $X_m \to X$ si $(X_m)_{ij} \to (X)_{ij}$ cuando $m \to \infty$ para toda $1 \leq i, j \leq n$.*

Ejemplo 1.2.7. *Sea $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices en $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ donde X_m está dada de la siguiente forma*

$$X_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso como $(X_m)_{11} = (X_m)_{22} = 1\ \forall m \in \mathbb{N}$, $(X_m)_{12} = -\frac{1}{m} \to 0$ cuando $m \to \infty$ y $(X_m)_{21} = \frac{1}{m} \to 0$ cuando $m \to \infty$, se tiene que

$$X_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \textit{cuando} \quad m \to \infty.$$

Se define un subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ como cualquier subconjunto G de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que la matriz identidad está en G, y para $X, Y \in G$ cualesquiera, se tiene que $XY \in G$ y $X^{-1} \in G$.

A continuación se presenta la definición de un grupo de Lie matricial, la cual fue tomada de [2].

Definición 1.2.8. *Un grupo de Lie matricial es un subgrupo G de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ con la propiedad de que si $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión cualquiera en G y $X_m \to X$ entonces $X \in G$ o X no es invertible.*

Nota. *Se sigue de la definición anterior que un subgrupo G de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie si y sólo si G es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Esta equivalencia será utilizada más adelante como criterio para verificar que ciertos ejemplos de grupos son en realidad grupos de Lie matriciales.*

La Definición 1.2.4 sólo tiene sentido para grupos de matrices. La noción general de grupos de Lie se reduce a la Definición 1.2.4 justo para el caso matricial. La definición general de grupo de Lie puede ser consultada en [3, 4].

1.2.2. Los grupos de Lie clásicos

A continuación se presentan algunos ejemplos importantes de grupos de Lie, los cuales son conocidos como grupos de Lie clásicos.

El grupo general lineal y el grupo especial lineal

La definición del grupo general lineal se sigue de la Definición 1.2.5. Es claro que $\mathrm{GL(n,\mathbb{C})}$ es un subgrupo de sí mismo, ya que para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ entonces X^{-1} y

XY son matrices invertibles, es decir, $XY, X^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Además, dada una sucesión $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $X_m \to X$, es claro que X es una matriz invertible por lo que $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, o bien, X no es invertible, por lo que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es un grupo de Lie matricial.

El grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se puede pensar como un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Si $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es una sucesión que satisface que $X_m \to X$, como $(X_m)_{ij} \in \mathbb{R}$ para toda $1 \leq i, j \leq n$ y $(X_m)_{ij} \to X_{ij}$, entonces $X_{ij} \in \mathbb{R}$. Así $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o X no es invertible. Por lo tanto $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie matricial.

Se define al grupo especial lineal de V sobre $\mathbb{F}$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, como

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \mid \det(X) = 1\}.$$

Como $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ son grupos de Lie matriciales, para ver que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ y $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ también son grupos de Lie matriciales únicamente es necesario probar que si $X, Y \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$, entonces $\det(X^{-1}) = 1$ y $\det(XY) = 1$, pues ya se tiene que $XY, X^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Ahora bien, como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para cualesquiera $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se tiene que $\det(XY) = \det(X)\det(Y) = 1$ y como $\det(I) = 1$ también se tiene que $\det(I) = \det(XX^{-1}) = \det(X)\det(X^{-1}) = \det(X^{-1})$. Por todo lo anterior, $XY, X^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$, y así, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Sea $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tal que $X_m \to X$, entonces X no es invertible o bien $\det(X) = 1$, esto es porque $\det(X_m) = 1$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y $\det : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ es una función continua. Por lo tanto, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ y $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ son grupos de Lie matriciales.

El grupo unitario y el grupo especial unitario

Una matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se dice ser unitaria si los vectores columna de X son ortonormales con respecto al producto hermitiano en $\mathbb{C}^n$, es decir

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{X}_{ki} X_{kj} = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} de la delta de Kronecker, la cual esta dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Lo anterior equivale a decir que X es una matriz unitaria si

$$\sum_{k=1}^{n}(X^*)_{ik}X_{kj} = \delta_{ij},$$

donde X^* es la matriz adjunta de X definida como $X^* = \overline{X}^T$, donde $\overline{X}^T$ es la transpuesta de $\overline{X}$ y $\left(\overline{X}\right)_{ij} = \overline{X}_{ij}$ para toda $i, j = 1, 2, \ldots n$.

Por lo tanto, X es una matriz unitaria si y sólo si $X^*X = I$. Lo anterior implica que toda matriz unitaria X es una matriz invertible con $X^* = X^{-1}$.

Se define al grupo unitario $\mathrm{U}(n)$ como el conjunto de todas las matrices unitarias $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$:

$$\mathrm{U}(n) = \left\{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = X^{-1}\right\}.$$

A partir de la definición de X^* se tiene que $(XY)^* = Y^*X^*$ para cualesquiera $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, ya que

$$(XY)^* = \overline{XY}^T = \overline{Y}^T\overline{X}^T = Y^*X^*.$$

Por lo tanto, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{U}(n)$, se tiene que $XY, X^{-1} \in \mathrm{U}(n)$, esto es porque $\left(X^{-1}\right)^* = (X^*)^* = X$, por lo que $\left(X^{-1}\right)^* = \left(X^{-1}\right)^{-1}$, además se tiene que

$$(XY)^* XY = Y^*X^*XY = I,$$

lo cual implica que $(XY)^* = (XY)^{-1}$. Por lo anterior, $\mathrm{U}(n)$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Sea $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{U}(n)$ tal que $X_m \to X$. Si X es invertible, entonces es posible definir $S : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ como $S(X) = \overline{X}^T$. Luego, es claro que S es una función continua pues es la composición de funciones continuas. Por lo anterior, $\{S(X_m)\}_{m\in\mathbb{N}} = \left\{\overline{X}_m^T\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $S(X) = \overline{X}^T$, lo que implica que $\overline{X}^T X = X^*X = I$, pues $\overline{X_m}^T X_m = X_m^* X_m = I$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $X \in \mathrm{U}(n)$ o X no es invertible.

Se define al grupo especial unitario $\mathrm{SU}(n)$ como el conjunto de todas las matrices unitarias $X \in \mathrm{U}(n)$ con determinante 1, es decir,

$$\mathrm{SU}(n) = \{X \in \mathrm{U}(n) \mid \det(X) = 1\}.$$

De la demostración de que $\mathrm{U}(n)$ es un grupo de Lie matricial y la demostración de que si $\det(X) = 1$, $\det(Y) = 1$ y que $\{Z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ se satisface que $Z_m \to Z$ con $\det(Z_m) = 1$, se tiene que $\det(X^{-1}) = 1$, $\det(XY) = 1$ y $\det(Z) = 1$, que se realizó para demostrar que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie matricial, se sigue que $\mathrm{SU}(n)$ también es un grupo de Lie matricial.

El grupo ortogonal y el grupo especial ortogonal

Para definir al grupo ortogonal primero recordemos la definición de una matriz ortogonal. Se dice que $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal si los vectores columna de X son ortonormales, lo que implica que X es una matriz unitaria sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, si X es una matriz ortogonal es claro que $X^* = X^{\mathrm{t}}$. Por lo anterior, X es una matriz ortogonal si es una matriz invertible que satisface que $X^{\mathrm{t}} = X^{-1}$.

Se define al grupo ortogonal como el conjunto de todas las matrices ortogonales, es decir,

$$\mathrm{O}(n) = \left\{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{t}} = X^{-1}\right\}.$$

Dados $X, Y \in \mathrm{O}(n)$ es claro que $X, Y \in \mathrm{U}(n)$, por lo que $XY, X^{-1} \in \mathrm{U}(n)$, y como $(X)_{ij}, (Y)_{ij} \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i, j \leq n$ entonces $(XY)_{ij}, (X^{-1})_{ij} \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i, j \leq n$, por lo tanto $XY, X^{-1} \in \mathrm{O}(n)$, y así $\mathrm{O}(n)$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Además, dada una sucesión $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{O}(n)$ tal que $X_m \to X$, se tiene que $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{U}(n)$ por lo que $X \in \mathrm{U}(n)$, y como $(X_m)_{ij} \to X_{ij}$ y $(X_m)_{ij} \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i, j \leq n$, entonces $X_{ij} \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Por lo tanto, $X \in \mathrm{O}(n)$, lo cual implica que $\mathrm{O}(n)$ es un grupo de Lie matricial.

Se define al grupo especial ortogonal como el conjunto de todas las matrices $X \in \mathrm{O}(n)$ con $\det(X) = 1$, es decir,

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathrm{O}(n) \mid \det(X) = 1\}.$$

La demostración de que $\mathrm{SO}(n)$ es un grupo de Lie matricial se sigue de la demostración de que $\mathrm{O}(n)$ es un grupo de Lie matricial y de la demostración de que si $\det(X) = 1$, $\det(Y) = 1$ y que $\{Z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ se satisface que $Z_m \to Z$ con $\det(Z_m) = 1$, se tiene que $\det(X^{-1}) = 1$, $\det(XY) = 1$ y $\det(Z) = 1$, que se realizó para demostrar que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie matricial. Por lo tanto, $\mathrm{SO}(n)$ es un grupo de Lie matricial.

El grupo simpléctico

Sea $\{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^{2n}}$ la forma bilineal antisimétrica no-degenerada en $\mathbb{R}^{2n}$ definida por

$$\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}_{\mathbb{R}^{2n}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i)\,.$$

Consideremos la matriz $J \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

donde $0, I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se puede probar que

$$\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle \mathbf{x}, J\mathbf{y}\rangle \tag{1.4}$$

para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Sea $Z \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ una matriz que preserva la forma bilineal $\{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^{2n}}$, esto es,

$$\{Z\mathbf{x}, Z\mathbf{y}\}_{\mathbb{R}^{2n}} = \{\mathbf{x},\mathbf{y}\}_{\mathbb{R}^{2n}}$$

para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$. De la relación (1.4) se sigue que

$$\langle Z\mathbf{x}, JZ\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, J\mathbf{y}\rangle,$$

por lo que

$$\langle \mathbf{x}, Z^{\mathrm{t}} JZ\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, J\mathbf{y}\rangle.$$

Como lo anterior se satisface para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$ y el producto interior es no-degenerado, se tiene que

$$Z^{\mathrm{t}} JZ = J. \tag{1.5}$$

Por tanto, Z es invertible, lo que implica que $Z \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$. Recíprocamente, se puede probar que toda matriz $Z \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ que satisface (1.5) preserva la forma simpléctica $\{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^{2n}}$.

El conjunto de matrices $Z \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ que preservan la forma simpléctica $\{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^{2n}}$ forman un subgrupo de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, llamado grupo simpléctico, se define por

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \left\{ Z \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \mid Z^{-1} = -JZ^{\mathrm{t}}J \right\}.$$

Probaremos que $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Lie matricial, para ello sean $X, Y \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ arbitrarios, se tiene que $X^{-1} = -JX^{\mathrm{t}}J$ y $Y^{-1} = -JY^{\mathrm{t}}J$, por lo que

$$\left(X^{-1}\right)^{-1} = -\left(JX^{\mathrm{t}}J\right)^{-1} = -J^{-1}\left(X^{\mathrm{t}}\right)^{-1}J^{-1} = -J\left(X^{-1}\right)^{t}J,$$

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1} = -JY^{\mathrm{t}}J\left(-JX^{\mathrm{t}}J\right) = -JY^{\mathrm{t}}X^{\mathrm{t}}J = -J(XY)^{\mathrm{t}}J,$$

lo que implica que $XY, X^{-1} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, y así $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$.

Sea $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ una sucesión tal que $X_m \to X$. Es claro que X es invertible y $(X_m)^{-1} = -J\left(X_m\right)^{\mathrm{t}}J$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $X^{-1} = -JX^{\mathrm{t}}J$. Por lo tanto, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Lie matricial.

Es posible definir una forma simpléctica en $\mathbb{C}^{2n}$ de forma similar a como se definió $\{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^{2n}}$ en $\mathbb{R}^{2n}$, mediante la transformación $\{\ ,\ \}_{\mathbb{C}^{2n}}$ dada por

$$\{\mathbf{z},\mathbf{w}\}_{\mathbb{C}^{2n}} = (\mathbf{z}, J\mathbf{w})$$

para cualesquiera $\mathbf{z},\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{2n}$, donde

$$(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{2n} z_i\overline{w_i}.$$

El conjunto de todas las matrices $Z \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ que preservan la forma $\{\ ,\ \}_{\mathbb{C}^{2n}}$ es llamado el grupo simpléctico complejo. Mediante un análisis similar al realizado con las matrices en $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ y $\{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^{2n}}$ se concluye que las matrices $Z \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ que preservan la forma $\{\ ,\ \}_{\mathbb{C}^{2n}}$ satisfacen que -$JZ^{\mathrm{t}}J = Z^{-1}$, por lo que

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{Z \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) \mid Z^{-1} = -JZ^{\mathrm{t}}J\right\}.$$

De la misma manera que se demostró que $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Lie matricial se demuestra que $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ también es un grupo de Lie matricial.

1.2.3. Propiedades topológicas de los grupos de Lie matriciales

En esta parte se presentan algunas propiedades topológicas importantes para grupos de Lie matriciales.

Definición 1.2.9. *Un grupo de Lie matricial G se dice ser compacto si es compacto en el sentido topológico usual como subconjunto de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.*

Como $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2}$ (ver Definición 1.2.14), por el teorema de Heine-Borel se tiene que un grupo de Lie matricial G es compacto si y sólo si es un conjunto cerrado en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que si $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de matrices en G, entonces $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a una matriz $X \in G$, y además existe una constante $K > 0$ tal que $|(X)_{ij}| < K$ para toda $1 \leq i, j \leq n$.

Ejemplo 1.2.10. *El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ es un grupo de Lie matricial compacto.*

Para ver que $\mathrm{O}(n)$ es un grupo de Lie matricial compacto, consideremos la sucesión $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{O}(n)$ tal que $X_m \to X$ cuando $m \to \infty$. Es claro que la sucesión $\{(X_m)^{\mathrm{t}}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{O}(n)$, y además $(X_m)^{\mathrm{t}} \to X^{\mathrm{t}}$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto,

$$XX^{\mathrm{t}} = \lim_{m\to\infty} X_m (X_m)^{\mathrm{t}} = \lim_{m\to\infty} X_m (X_m)^{-1} = \lim_{m\to\infty} I = I,$$

análogamente, $X^{\mathrm{t}}X = I$, por lo que $X^{-1} = X^{\mathrm{t}}$ y así $X \in \mathrm{O}(n)$. Esto implica que $\mathrm{O}(n)$ es un subconjunto cerrado de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Por otra parte, como $X \in \mathrm{O}(n)$ entonces $XX^{\mathrm{t}} = I$. De esto se sigue que $(XX^{\mathrm{t}})_{ii} = (I)_{ii} = 1$, lo cual implica que

$$1 = \left(XX^{\mathrm{t}}\right)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \left(X^{\mathrm{t}}\right)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (X_{ij})^2 \geq (X_{ij})^2 .$$

Por lo tanto, $|X_{ij}| \leq 1$ para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$, y así, $\mathrm{O}(n)$ es un grupo de Lie matricial compacto.

Del ejemplo anterior, y tomando en cuenta que el determinante de matrices es una función continua (ver Ejemplo 1.2.15), se sigue que $\mathrm{SO}(n)$ también es un grupo de Lie matricial compacto.

Definición 1.2.11. *Un grupo de Lie matricial G se dice ser conexo por trayectorias, si para cualesquira $X_1, X_2 \in G$ existe una función continua $\gamma(t) : [a, b] \to G$ tal que $\gamma(a) = X_1$ y $\gamma(b) = X_2$.*

En general diremos que un grupo de Lie matricial es conexo si es conexo por trayectorias.

En la práctica, para probar que un grupo de Lie matricial G es conexo es suficiente demostrar que para cualquier matriz $X \in G$ existe una trayectoria que conecta a X con la matriz identidad $I \in G$. Esto es porque si para cualquier matriz $X \in G$ existe una trayectoria que conecta a X con la matriz identidad $I \in G$, entonces para cualesquiera $X_1, X_2 \in G$, sin peŕdida de generalidad, existen $\gamma_1(t) : [0,1] \to G$ y $\gamma_2(t) : [0,1] \to G$ tales que $\gamma_1(0) = X_1$, $\gamma_1(1) = I$, $\gamma_2(0) = X_2$ y $\gamma(1) = I$, entonces la curva $\gamma_3(t) : [0,1] \to G$ definida por $\gamma_3(t) = \gamma_2(t) + (I - X_2)(1-t) + (X_2 - I)t$ satisface que $\gamma_3(0) = I$ y $\gamma_3(1) = X_2$. Así, existe $\gamma : [0,1] \to G$ tal que $\gamma(0) = X_1$ y $\gamma(1) = X_2$, y por tanto, G es conexo.

Ejemplo 1.2.12. *El grupo general lineal* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *es un grupo de Lie matricial conexo.*

Toda matriz $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *es similar a su forma de Jordan, la cual es una matriz triangular superior* B*, tal que* $A = CBC^{-1}$ *con*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

con $\lambda_i \neq 0$ *para todo* $i = 1, \dots, n$*, pues* $\det(A) = \det(B) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$*. Luego, existe* $\gamma : [0,2] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *dada por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} C \begin{pmatrix} \lambda_1 & (1-t)b_{12} & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} & si\ 0 \leq t < 1, \\ C \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(t) \end{pmatrix} C^{-1} & si\ 1 \leq t \leq 2. \end{cases},$$

donde

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_i + 1}{2} + \frac{\lambda_i - 1}{2} \mathrm{e}^{i(t-1)\pi} \text{ si } \lambda_\mathrm{i} \in \mathbb{R}^-, \\ \lambda_i + (t-1)(1-\lambda_i) \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, n$*. Si* $\lambda_i \in \mathbb{R}$*, el hecho de que* $f_i(t) = 0$ *implica que* $t = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} + 1 > 2$ *para* $\lambda_i \geq 0$ *ó* $t \in \mathbb{C}$ *si* $\lambda_i < 0$*. Por otro lado, si* $\lambda_i \in \mathbb{C}$ *entonces* $t \in \mathbb{C}$*. Por lo tanto, y tomando en cuenta que* $\gamma(0) = X$ *y* $\gamma(1) = I$*, entonces* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *es conexo.*

1.2.4. Homomorfismos de grupos de Lie

En esta parte se presenta la definición y ejemplos de homomorfismos de grupos de Lie.

Primero recordemos la definición de un homomorfismo de grupos.

Definición 1.2.13. *Sean $(G_1, \cdot)$ y $(G_2, *)$ dos grupos. Se dice que $\varphi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos si $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ para cualesquiera $x, y \in G_1$.*

A partir de la definición anterior podemos definir qué es un homomorfismo de grupos de Lie como se muestra a continuación

Definición 1.2.14. *Sean G_1 y G_2 grupos de Lie matriciales. Una función $\Phi : G_1 \to G_2$ es llamada un homomorfismo de grupos de Lie si satisface que Φ es un homomorfismo de grupos y Φ es una función continua.*

En adición a la definición anterior, si Φ es un homomorfismo de grupos de Lie inyectivo y suprayectivo, tal que Φ^{-1} es también una función continua, entonces Φ es llamado un isomorfismo de grupos de Lie.

Ejemplo 1.2.15. *El determinante es un homomorfismo de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *en* $\mathbb{C}$.

Para ver que el determinante es un homomorfismo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *en* $\mathbb{C}$*, tomemos a cada elemento en* $\mathbb{C}$ *como una matriz de* 1×1*. Es necesario probar que* $\det\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *es un homomorfismo de grupos, para ello, sean* $X, Y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*, por propiedades del determinante se tiene que*

$$\det(XY) = \det(X)\det(Y)$$

lo que implica que el determinante es un homomorfismo de grupos.

Ahora bien, para ver que el determinante de matrices es una función continua, usaremos la fórmula de Leibniz para calcular el determinante de una matriz, la cual nos dice que

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)},$$

con S_n *el grupo de permutaciones de* $\{1, \ldots, n\}$.

Por lo anterior, dado $\varepsilon > 0$*, tomemos*

$$m = \max_{1 \le i,j \le n} \{|X_{ij}|\},$$

de esta forma, si $\|X - Y\| \leq \delta$, *entonces* $|Y_{ij}| \leq m + \delta$ *para todo* $1 \leq i, j \leq n$. *Así, para cualquier valor de* $\delta < 1$ *se tiene que* $|X_{ij}|, |Y_{ij}| \leq m+1$ *para todo* $1 \leq i, j \leq n$, *de lo cual se sigue que*

$$\begin{aligned}
|\det(X) - \det(Y)| &= \left| \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} Y_{i\sigma(i)} \right| \\
&= \left| \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} - \prod_{i=1}^{n} Y_{i\sigma(i)} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\sigma \in S_n} \left| \prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} - \prod_{i=1}^{n} Y_{i\sigma(i)} \right| \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \left| X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \ldots X_{n\sigma(n)} - Y_{1\sigma(1)} Y_{2\sigma(2)} \ldots Y_{n\sigma(n)} \right| \\
&\leq \sum_{\sigma \in S_n} |(X_{1\sigma(1)} - Y_{1\sigma(1)}) X_{2\sigma(2)} \ldots X_{n\sigma(n)} + \\
&\qquad Y_{1\sigma(1)} (X_{2\sigma(2)} - Y_{2\sigma(2)}) \ldots X_{n\sigma(n)} + \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad Y_{1\sigma(1)} Y_{2\sigma(2)} \ldots (X_{n\sigma(n)} - Y_{n\sigma(n)})| \\
&\leq \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} (m+1)^{n-1} \delta = \sum_{\sigma \in S_n} n(m+1)^{n-1} \delta \leq n! n (m+1)^{n-1} \delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\delta = \text{mín} \left\{ \dfrac{\varepsilon}{2n!n(m+1)^{n-1}}, 1 \right\}$ *se tiene que* $|\det(X) - \det(Y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ *si* $\|X - Y\| < \delta$. *Así, el determinante de matrices es una función continua.*

Proposición 1.2.16. *Sean* G_1, G_2 *y* G_3 *grupos de Lie matriciales,* $\Phi : G_1 \to G_2$ *y* $\Psi : G_2 \to G_3$ *homomorfismos de grupos de Lie. Entonces* $\Lambda : G_1 \to G_3$ *dado por* $\Lambda = \Psi \circ \Phi$ *es un homomofismo de grupos de Lie.*

Demostración. Sean $X, Y \in G_1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Lambda(XY) &= (\Psi \circ \Phi)(XY) = \Psi(\Phi(XY)) = \Psi(\Phi(X)\Phi(Y)) \\
&= \Psi(\Phi(X))\Psi(\Phi(Y)) = (\Psi \circ \Phi)(X)(\Psi \circ \Phi)(Y) \\
&= \Lambda(X)\Lambda(Y),
\end{aligned}$$

por lo que Λ es un homomorfismo de grupos. Además, como Φ y Ψ son funciones continuas, se tiene Λ es continua, pues es composición de funciones continuas. Por lo tanto Λ es un homomorfismo de grupos de Lie. ∎

1.3. Exponencial y logaritmo de una matriz

En esta sección se presenta la definición general de la exponencial de una matriz, la definición del logaritmo de una matriz para cuando este exista, y algunas propiedades que surgen de estos conceptos.

1.3.1. Exponencial de una matriz

Definición 1.3.1. *Sea $X \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, se define la exponencial de X, denotada por e^X, como*

$$\mathrm{e}^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Otra manera de denotar la exponencial de una matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ es $\exp(X)$.

Proposición 1.3.2. *$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ converge para toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, y e^X es una función continua en X.*

Demostración. Sea $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. A partir de la Definición 1.2.2 y la Proposición 1.2.3 se sigue que

$$\left\|X^k\right\| \leq \|X\|^k$$

para toda $k \geq 1$, por lo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{X^k}{k!}\right\| \leq \|I\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{\|X\|} < \infty,$$

lo que implica que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ converge absolutamente. Además, $\frac{X^k}{k!}$ es una función continua de X, por lo que por la prueba M de Weierstras, se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ converge para toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Para ver que e^X es una función continua en X, notemos que X^k es una función continua en X para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo que las sumas parciales $\sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!}$ son funciones continuas en X para toda $m \in \mathbb{R}$. Además, por la prueba M de Weierstrass, se tiene que e^X converge uniformemente en cualquier conjunto $\{X \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \|X\| \leq R\}$, por lo que e^X es una función continua en X para toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. ■

Las propiedades básicas de la matriz exponencial se presentan en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *La función* $\exp : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *posee las siguientes propiedades:*

(i) $\mathrm{e}^0 = I$.

(ii) $\left(\mathrm{e}^X\right)^* = \mathrm{e}^{X^*}$.

(iii) Si $XY = YX$ *entonces* $\mathrm{e}^{X+Y} = \mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^Y\mathrm{e}^X$.

(iv) Para toda matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, e^X *es una matriz invertible, y* $\left(\mathrm{e}^X\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$.

(v) $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)X} = \mathrm{e}^{\alpha X}\mathrm{e}^{\beta X}$.

(vi) Si $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *entonces* $\mathrm{e}^{CXC^{-1}} = C\mathrm{e}^X C^{-1}$, *para toda matriz* $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Demostración.

(i) Considerando $X^0 = I \ \forall X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se obtiene

$$\mathrm{e}^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = I.$$

(ii) Para toda matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se sigue

$$\left(\mathrm{e}^X\right)^* = \overline{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right)}^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{(X^k)}^T}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\overline{X}^T\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^*)^k}{k!} = \mathrm{e}^{X^*}.$$

(iii) Si $XY = YX$ se tiene que

$$(X+Y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^k Y^{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Y^k X^{k-j}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{X+Y} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i Y^{k-i}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{X^i}{i!} \frac{Y^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X)^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Y)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y,
\end{aligned}$$

análogamente $\mathrm{e}^{X+Y} = \mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y$.

(iv) Como $X(-X) = (-X)X = -X^2$, del inciso anterior se sigue que

$$I = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{X-X} = \mathrm{e}^X \mathrm{e}^{-X} = \mathrm{e}^{-X} \mathrm{e}^X$$

por lo que e^X es invertible y $\left(\mathrm{e}^X\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$.

(v) Como $\alpha X(\beta X) = \beta X(\alpha X) = \alpha\beta X^2$, por el inciso (iii) se tiene que $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)X} = \mathrm{e}^{\alpha X+\beta X} = \mathrm{e}^{\alpha X}\mathrm{e}^{\beta X}$.

(vi) Sea $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, entonces

$$\mathrm{e}^{CXC^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(CXC^{-1}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{CX^kC^{-1}}{k!} = C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right)C^{-1} = C\mathrm{e}^X C^{-1}$$

para toda $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. ■

Proposición 1.3.4. *Si $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces e^{tX} es una curva suave en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tX} = X\mathrm{e}^{tX},$$

en particular

$$\left.\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tX}\right|_{t=0} = X.$$

Demostración. Sea $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, como

$$\left(\mathrm{e}^{tX}\right)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((tX)_{ij}\right)^k}{k!}$$

es posible calcular la derivada de e^{tX} mediante la derivada término a término en su serie de potencias, por lo que

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tX} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1}X^k}{(k-1)!} = X\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1}X^{k-1}}{(k-1)!} = X\mathrm{e}^{tX}.$$

Además, evaluando en $t = 0$ es claro que

$$\left.\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tX}\right|_{t=0} = X,$$

para toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. ■

1.3.2. Logaritmo de una matriz

A continuación veremos como está definida la función logaritmo para matrices. Es importante señalar que la función logaritmo no está bien definida para todas las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, por lo que procederemos a estudiar el conjunto de matrices para el cual si está bien definido.

Lema 1.3.5. *La función*

$$\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(z-1)^k}{k} \tag{1.6}$$

está bien definida y es holomorfa en el círculo de radio 1 con centro en $z = 1$*. Además, para toda* z *tal que* $|z-1| < 1$ *se tiene que*

$$\mathrm{e}^{\log(z)} = z,$$

y para toda z *con* $|z| < \log(2)$ *se cumple que* $|\mathrm{e}^z - 1| < 1$ *y*

$$\log(\mathrm{e}^z) = z.$$

Demostración. La función logaritmo para números reales satisface que

$$\frac{d}{dx} \log(1-x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| < 1$. Integrando término a término y tomando en cuenta que $\log(1) = 0$ obtenemos la siguiente relación

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Así, tomando $y = 1 - x$ obtenemos que

$$\log(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(y-1)^n}{n}. \tag{1.7}$$

La serie (1.7) tiene radio de convergencia igual a 1 y define una función holomorfa en $\{y \in \mathbb{R} \mid |y-1| < 1\}$, la cual coincide con el logaritmo usual para $y \in (0,2)$. Ahora bien, $\mathrm{e}^{\log(y)} = y$ para $y \in (0,2)$ y como ambos lados en la igualdad anterior son funciones holomorfas, esta relación se preserva para el conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid |y-1| < 1\}$.

Por otra parte, notemos que si $|w| < \log(2)$, entonces

$$|e^w - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w|^n}{n!} = e^{|w|} - 1 < 1.$$

Por lo tanto, $\log(e^w)$ está bien definido para todo w con $|w| < \log(2)$. Como $\log(e^w) = w$ para los valores de w tales que $|w| < \log(2)$, del hecho de ser una función holomorfa se sigue que para todos los complejos z tales que $|z| < \log(2)$ se satisface $\log(e^z) = z$. ■

Definición 1.3.6. *Sea $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se define el logaritmo de X como*

$$\log(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(X-I)^k}{k},$$

siempre que esta serie converja.

Teorema 1.3.7. *La función*

$$\log(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(X-I)^k}{k}$$

está bien definida, y es continua en el conjunto de matrices de $n\times n$ tales que $\|X - I\| < 1$. Además, para toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $\|X - I\| < 1$ se satisface que

$$e^{\log(X)} = X,$$

y para toda $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\|X\| < \log(2)$ se cumple que $\|e^X - I\| < 1$ y

$$\log\left(e^X\right) = X.$$

Demostración. Supongamos que $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ satisface que $\|X - I\| < 1$. Si X es una matriz diagonalizable, denotemos a sus eigenvalores como $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Así, podemos expresar a la matriz X como CDC^{-1} para alguna matriz C invertible, y con D la matriz diagonal que tiene a los eigenvalores de X en la diagonal, por lo que

$$(X-I)^k = C \begin{pmatrix} (\lambda_1 - 1)^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - 1)^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (\lambda_n - 1)^k \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Como $\|X - I\| < 1$, cada eigenvalor λ_i de X satisface que $|\lambda_i - 1| < 1$. Así, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(X-I)^k}{k} = C\begin{pmatrix} \log(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \log(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \log(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1},$$

y del Lema 1.3.5 se sigue que

$$\mathrm{e}^{\log(X)} = C\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\log(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\log(\lambda_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\log(\lambda_n)} \end{pmatrix} C^{-1} = X.$$

Si X no es diagonalizable, podemos dar una sucesión de matrices diagonalizables $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a X y usar el hecho de que el logaritmo y la exponencial son funciones continuas. Así, $\mathrm{e}^{\log(X)} = X$ para toda matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ siempre que $\|X - I\| < 1$. ■

Proposición 1.3.8. *Existe una constante c tal que para todas las matrices $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\|X\| < \frac{1}{2}$, se satisface que*

$$\|\log(I + X) - X\| \leq c\|X\|^2.$$

Demostración. Sea $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $\|X\| < \frac{1}{2}$. Notemos que

$$\log(I + X) - X = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{X^k}{k} = X^2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{X^{k-2}}{k}.$$

Como $\|X\| < \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\|\log(I + X) - X\| \leq \|X\|^2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\frac{1}{2})^{k-2}}{k},$$

por lo que la constante c que satisface la proposición es $c = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\frac{1}{2})^{k-2}}{k}$. ■

A partir de la proposición anterior, podemos decir que $\log(I + X) = X + O(\|X\|^2)$.

1.3.3. Otras propiedades de la exponencial de una matriz

Teorema 1.3.9 (Fórmula del Producto de Lie). *Para cualesquiera* $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *se tiene que*

$$\mathrm{e}^{X+Y} = \lim_{m\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}}\right)^m .$$

Demostración. Sean $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. De la definición de la exponencial de una matriz, se sigue

$$\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{X}{m}\right)^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{Y}{m}\right)^k}{k!} = I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{1.8}$$

por lo que $\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}} \to I$ cuando $m \to \infty$. Notemos que $\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}}$ satisface que $\|\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}} - I\| < 1$ para m suficientemente grande, de lo cual, por la Proposición 1.3.8, se sigue que

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}}\right) &= \log\left(I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) \\
&= I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\left\|\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \frac{1}{m^2}\right\|^2\right) \\
&= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).
\end{aligned}$$

Así, se tiene

$$\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}} = \exp\left(\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right),$$

lo cual implica

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \exp\left(X + Y + O\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Por lo tanto, como la exponencial es una función continua,

$$\lim_{m\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{X}{m}}\mathrm{e}^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \mathrm{e}^{X+Y}$$

para cualesquiera $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. ∎

Teorema 1.3.10. *Toda matriz invertible de* $n \times n$ *puede expresarse como* e^X *para alguna matriz* $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Teorema 1.3.11. *Para cualquier matriz* $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *se tiene que* $\det\left(\mathrm{e}^X\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}$.

Demostración. Si X es diagonalizable con eigenvalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces existe $Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $X = Y\Lambda Y^{-1}$, donde $(\Lambda)_{ij} = \lambda_i$ si $i = j$ y $(\Lambda)_{ij} = 0$ en otro caso. Por lo anterior, se tiene que

$$\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(Y\Lambda Y^{-1}) = \mathrm{tr}(\Lambda Y^{-1}Y) = \mathrm{tr}(\Lambda) = \lambda_1 + ... + \lambda_n,$$

y del inciso (vi) de la Proposición 1.3.3, $\mathrm{e}^X = Y\mathrm{e}^{\Lambda}Y^{-1}$ se sigue que

$$\det(\mathrm{e}^X) = \det(Y\mathrm{e}^{\Lambda}Y^{-1}) = \det(\mathrm{e}^{\Lambda}) = \mathrm{e}^{\lambda_1}\cdots\mathrm{e}^{\lambda_n} = \mathrm{e}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}.$$

Si X no es diagonalizable, podemos dar una sucesión de matrices diagonalizables $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_n \to X$ cuando $n \to \infty$, y usar que la exponencial es una función continua. ■

Definición 1.3.12. *Una función diferenciable* $\eta : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *es llamada un subgrupo uniparamétrico de* $GL(n : \mathbb{C})$ *si satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\eta(0) = I$.

(ii) $\eta(t + s) = \eta(t)\eta(s)$ *para cualesquiera* $t, s \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.3.13. *Si* η *es un subgrupo uniparamétrico de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*, entonces existe una única matriz* $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *tal que* $\eta(t) = e^{tX}$.

Demostración. Tomemos $X = \dot{\eta}(0)$. Probaremos que $\eta(t)$ es solución del sistema $\dot{\gamma}(t, I) = \dot{\eta}(0)\gamma(t, I)$, $\gamma(0, I) = I$. Para ello, consideremos $t = f(s) = \tau + s$ con τ fijo, entonces $f(0) = \tau$, $\eta(s)\eta(\tau) = \eta(s)\eta(t)$ y $\eta(t) = \eta(f(s))$, por lo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\eta}(f(s)) = \dot{\eta}(\tau + s) = \dot{\eta}(s)\eta(\tau)$$

para toda $s \in \mathbb{R}$, en particular para $s = 0$, lo cual deja el sistema $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\eta}(0)\eta(t)$ y $\eta(0) = I$, y por el Teorema de Existencia y Unicidad tenemos que $\eta(t) = e^{t\dot{\eta}(0)} = e^{tX}$. ■

1.4. El álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial

En esta sección se presentará el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada a un grupo de Lie matricial G. Para esto, primero se definirá a $\mathfrak{g}$ como un conjunto de matrices que satisfacen cierta propiedad dada en terminos de G, y depués se procederá a probar que $\mathfrak{g}$ tiene estructura de álgebra de Lie bajo el conmutador de matrices.

1.4.1. Definición del álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial

Definición 1.4.1. *Sea G un grupo de Lie matricial. El álgebra de Lie G, denotada por $\mathfrak{g}$, es el conjunto de matrices definido por*

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{e}^{tX} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 1.4.2. *Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial G. Para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$, $A \in G$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$.

(ii) $\alpha X \in \mathfrak{g}$.

(iii) $X + Y \in \mathfrak{g}$.

(iv) $XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Demostración.

(i) Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial G. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces para cualquier matriz $A \in G$, por el inciso (vi) de la Proposición 1.3.3 se tiene que $\mathrm{e}^{t\left(AXA^{-1}\right)} = \mathrm{e}^{A(tX)A^{-1}} = A\mathrm{e}^{tX}A^{-1} \in G$ para toda $t \in \mathbb{R}$, por lo que $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$.

(ii) Para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{e}^{t(\alpha X)} = \mathrm{e}^{(t\alpha)X} \in G$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, pues $X \in \mathfrak{g}$ y $t\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) A partir de la fórmula del producto de Lie se tiene que

$$\mathrm{e}^{t(X+Y)} = \mathrm{e}^{tX+tY} = \lim_{m\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{tX}{m}}\mathrm{e}^{\frac{tY}{m}}\right)^m.$$

Como $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\left(\mathrm{e}^{\frac{tX}{m}}\mathrm{e}^{\frac{tY}{m}}\right)^m \in G$ para toda $m \in \mathbb{R}$, y como G es un grupo cerrado, entonces $\lim_{m\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{tX}{m}}\mathrm{e}^{\frac{tY}{m}}\right)^m \in G$. Así, $\mathrm{e}^{t(X+Y)} \in G$ para toda $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $X + Y \in \mathfrak{g}$.

(iv) De la Proposición 1.3.4 se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX}\right)\Big|_{t=0} = \left[\left(\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tX}\right)Y\mathrm{e}^{-tX} + \mathrm{e}^{tX}\left(\frac{d}{dt}Y\mathrm{e}^{-tX}\right)\right]\Big|_{t=0} = XY - YX.$$

Como $X \in \mathfrak{g}$, del inciso (iv) de la Proposición 1.3.3, se sigue que $\mathrm{e}^{tX}, \mathrm{e}^{-tX} \in G$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Así, por (i) se tiene que $\mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX} \in \mathfrak{g}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Además, por (*ii*) y (*iii*) se tiene que $\mathfrak{g}$ es un subespacio real de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, de lo cual se sigue que $\mathfrak{g}$ es un subconjunto cerrado de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, por lo que

$$\begin{aligned} XY - YX &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{tX} Y \mathrm{e}^{-tX}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(0+h)X} Y \mathrm{e}^{-(0+h)X} - \mathrm{e}^{0X} Y \mathrm{e}^{-0X}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{hX} Y \mathrm{e}^{-hX} - Y}{h}. \end{aligned}$$

Esto es $XY - YX \in \mathfrak{g}$, pues $\dfrac{\mathrm{e}^{hX} Y \mathrm{e}^{-hX} - Y}{h} \in \mathfrak{g}$ para toda $h \in \mathbb{R}^+$. ■

Del teorema anterior se sigue que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie matricial G es un álgebra de Lie bajo el conmutador de matrices, pues el teorema implica que $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$. Finalmente, como $\mathfrak{g}$ es un álgebra asociativa respecto al producto usual de matrices, por el Teorema 1.1.5 se tiene que $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie.

Proposición 1.4.3. *Si G es un grupo de Lie conmutativo, entonces su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces $\mathrm{e}^{tX}, \mathrm{e}^{sY} \in G$ para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$. Si $[\ ,\ ]$ denota al conmutador, se tiene que $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie que satisface

$$\begin{aligned} [X, Y] = XY - YX &= X\left(\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{sY}\Big|_{s=0}\right) - \left(\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{sY}\Big|_{s=0}\right)X \\ &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{tX}\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{sY}\Big|_{s=0}\mathrm{e}^{-tX}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{-tX}\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{sY}\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{sY}\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie abeliana. ■

1.4.2. Álgebras de Lie de grupos de Lie clásicos

En esta parte se presentan la álgebras de Lie de los grupos de Lie clásicos vistos es la subsección 1.2.2.

El álgebra de Lie del grupo general lineal

El álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, es todo $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, ya que dado

$X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se satisface que $tX \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, además por el inciso (iv) de la Proposición 1.3.3. se tiene que $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para toda matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Así, $M_{n\times n}(\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, y como por definición del álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial se tiene que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se sigue que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

El álgebra de Lie del grupo especial lineal

El álgebra de Lie de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, denotada por $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, consiste de todas las matrices complejas de $n \times n$ de traza cero, esto es

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Para comprobar lo anterior, sea Z una matriz arbitraria de traza cero, entonces $\mathrm{tr}(tZ) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y por el Teorema 1.3.11 se tiene que $\det(\mathrm{e}^{tZ}) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tZ)} = \mathrm{e}^0 = 1$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\} \subseteq \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Por otro lado, dada $Z \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ arbitraria, se tiene que $\mathrm{e}^{tZ} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\mathrm{tr}(Z) = \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{t(\mathrm{tr}(Z))}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tZ)}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\det\left(\mathrm{e}^{tZ}\right)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}1\bigg|_{t=0} = 0.$$

Así, $Z \in \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ para toda matriz $Z \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, se prueba que el álgebra de Lie de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

El álgebra de Lie del grupo unitario

El álgebra de Lie de $\mathrm{U}(n)$ se denota por $\mathfrak{u}(n)$ y está formada por el conjunto de todas las matrices complejas X de $n \times n$ tales $X^* = -X$, donde $X^* = \overline{X}^{\mathrm{t}}$. Esto es porque dada una matriz $Z \in \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$ arbitraria, por los incisos (ii) y (iv) de la Proposición 1.3.3, se satisface que

$$\left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^* = \mathrm{e}^{tZ^*} = \left(\mathrm{e}^{-tZ}\right) = \left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^{-1} \ \forall t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \mathrm{e}^{tZ} \in U(n) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Así, $\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* = -X\} \subseteq \mathfrak{u}(n)$.

Por otra parte, si $Z \in \mathfrak{u}(n)$ entonces $\mathrm{e}^{tZ} \in \mathrm{U}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que $\left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^* = \left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^{-1}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, y por los incisos (ii) y (iv) de la Proposición 1.3.3 eso implica que

$$e^{tZ^*} = e^{-tZ} \ \forall t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt} e^{tZ^*}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{-tZ}\bigg|_{t=0} \ \Rightarrow \ Z^* = -Z.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = X^{-1}\}$.

El álgebra de Lie del grupo especial unitario

El álgebra de Lie de $\mathrm{SU}(n)$, denotada por $\mathfrak{su}(n)$, es el conjunto de todas las matrices complejas X en $\mathfrak{u}(n)$ de traza cero. Primero, tomemos $Z \in \mathfrak{su}(n)$, entonces $e^{tZ} \in \mathrm{SU}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $e^{tZ} \in U(n)$ y $\det\left(e^{tZ}\right) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Recordemos que $e^{tZ} \in \mathrm{U}(n)$ si $Z^* = -Z$. Como $\det\left(e^{tZ}\right) = 1$ entonces $\mathrm{tr}(Z) = 0$, $\det\left(e^{tZ}\right) = e^{\mathrm{tr(Z)}}$. De ésta manera se obtiene que $\mathfrak{su}(n) \subseteq \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

Por otro lado, si $Z \in \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ es claro que $e^{tZ} \in \mathrm{U}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues en $Z \in \mathfrak{u}(n)$, y $\det\left(e^{tZ}\right) = e^{\mathrm{tr(Z)}} = e^0 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo que $Z \in \mathfrak{su}(n)$, de lo cual se sigue $\{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\} \subseteq \mathfrak{su}(n)$, y así, $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$.

El álgebra de Lie del grupo ortogonal

El álgebra de Lie de $\mathrm{O}(n)$, denotada como $\mathfrak{so}(n)$, es el conjunto de matrices reales anti-simétricas de $n \times n$, es decir, es el conjunto de matrices reales de $n \times n$ que satisfacen que $X^T = -X$. Esto es porque si $Z \in \{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{t}} = -X\}$, en particular $Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ por lo que $X^* = \overline{X}^{\mathrm{t}} = X^{\mathrm{t}}$, y por los incisos (ii) y (iv) de la Proposición 1.3.3 se tiene que

$$\left(e^{tZ}\right)^{\mathrm{t}} = \left(e^{tZ^{\mathrm{t}}}\right) = e^{-tZ} = \left(e^{tZ}\right)^{-1} \ \forall t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ e^{tZ} \in \mathrm{O}(n) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo anterior, se tiene que $\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{t}} = -X\} \subseteq \mathfrak{so}(n)$.

Por otra parte, si $Z \in \mathfrak{so}(n)$ entonces $e^{tZ} \in \mathrm{O}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que $\left(e^{tZ}\right)^{\mathrm{t}} = -e^{tZ}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y por el inciso (ii) de la Proposición 1.3.3 eso implica que

$$e^{tZ^{\mathrm{t}}} = -e^{tZ} \ \forall t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt} e^{tZ^{\mathrm{t}}}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(-e^{tZ}\right)\bigg|_{t=0} \ \Rightarrow \ Z^{\mathrm{t}} = -Z.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{t}} = -X\}$.

El álgebra de Lie del grupo especial ortogonal

El álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(n)$ es la misma que el álgebra de Lie de $\mathrm{O}(n)$. Lo anterior se sigue de que si Z está en el álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(n)$ entonces $e^{tZ} \in \mathrm{SO}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $e^{tZ} \in \mathrm{O}(n)$ y $\det\left(e^{Z}\right) = 1$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Recordemos que $e^{tZ} \in \mathrm{O}(n)$ si $\left(e^{tZ}\right)^{\mathrm{t}} = -e^{tZ}$. La condición $\det\left(e^{Z}\right) = 1$ implica que $\mathrm{tr}(Z) = 0$, pero esta condición es redundante, pues en el caso real $Z^{\mathsf{t}} = -Z$ implica que $\operatorname{tr}(Z) = 0$. Recíprocamente, si Z es una matriz antisimétrica, entonces $\operatorname{tr}(Z) = 0$, lo cual implica que $\mathrm{e}^{tZ} \in \mathrm{SO}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

El álgebra de Lie del grupo simpléctico

El álgebra de Lie de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, denotada como $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, es el conjunto de todas las matrices $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ tales que $X = JX^{\mathsf{t}}J$. Esto es porque dada una matriz cualquiera $Z \in \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X = JX^{\mathsf{t}}J\}$, por los incisos (ii) y (iv) de la Proposición 1.3.5 y como $J^{-1} = -J$, se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned}
-J\left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^{\mathsf{t}} J &= -J\mathrm{e}^{tZ^{\mathsf{t}}}J = -J\mathrm{e}^{t\,J^{-1}ZJ^{-1}}J = -J\mathrm{e}^{t\,JZJ}J = -J\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tJZJ)^k}{k!}\right)J \\
&= -J\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}J(tZ)^kJ}{k!}\right)J = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-tZ)^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{-tZ} = \left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

por lo que $\mathrm{e}^{tZ} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, $\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X = JX^{\mathsf{t}}J\} \subseteq \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$.

Por otra parte, sea $Z \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ arbitraria, entonces $\mathrm{e}^{tZ} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual, por los incisos (ii) y (iv) de la Proposición 1.3.3, implica que

$$\left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^{-1} = -J\left(\mathrm{e}^{tZ}\right)^{\mathsf{t}} J \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-tZ} = -J\mathrm{e}^{tZ^{\mathsf{t}}}J,$$

y como

$$-J\mathrm{e}^{tZ^{\mathsf{t}}}J = -J\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tZ^{\mathsf{t}})^k}{k!}\right)J = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-J\,(tZ^{\mathsf{t}})^k\,J}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(t\,(-JZ^{\mathsf{t}}J)\right)^k}{k!} = \mathrm{e}^{t\left(-JZ^{\mathsf{t}}J\right)},$$

entonces

$$\mathrm{e}^{-tZ} = \mathrm{e}^{t\left(-JZ^{\mathsf{t}}J\right)} \;\Rightarrow\; \left.\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{-tZ}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{t\left(-JZ^{\mathsf{t}}J\right)}\right|_{t=0} \;\Rightarrow\; -Z = -JZ^{\mathsf{t}}J \;\Rightarrow\; Z = JZ^{\mathsf{t}}J.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X = JX^{\mathsf{t}}J\}$.

1.4.3. Homomorfismos y álgebras de Lie de grupos de Lie

Teorema 1.4.4. *Sean G y H grupos de Lie matriciales, con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie. Dado un homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$ existe una única* *transformación lineal* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *tal que*

$$\Phi\left(\mathrm{e}^{X}\right) = \mathrm{e}^{\phi(X)}$$

para toda $X \in \mathfrak{g}$. *Además* ϕ *satisface que*

(i) $\phi\left(AXA^{-1}\right) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$ *para toda* $X \in \mathfrak{g}$, $A \in G$.

(ii) $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ *para cualesquiera* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(iii) $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\Big|_{t=0}$ *para toda* $X \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Como Φ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces Φ es una función continua, entonces $\Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$ es una función continua con respecto al tiempo, ya que es una composición de funciones continuas. Además, $\Phi(\mathrm{e}^{tX})$ satisface que si $t = 0$ entonces $\Phi(\mathrm{e}^{0X}) = \Phi(I) = I$ y como Φ es un homomorfismo de grupos de Lie también tenemos que $\Phi\left(\mathrm{e}^{(t+s)X}\right) = \Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sX}\right) = \Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\Phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)$. Así, $\Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$ es un subgrupo uniparamétrico de H para cualquier matriz $X \in \mathfrak{g}$. Entonces, por el Teorema 1.3.13, se tiene que existe una única matriz Y tal que

$$\Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{tY}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Definamos $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ dada por $\phi(X) = Y$ para toda matriz $X \in \mathfrak{g}$. Notemos que tomando $t = 1$ se tiene que

$$\Phi\left(\mathrm{e}^{X}\right) = \mathrm{e}^{Y} = \mathrm{e}^{\phi(X)},$$

para toda matriz $X \in \mathfrak{g}$. Así, por la unicidad en el Teorema 1.3.13, se tiene que $\phi(X) = Y$ es la única transformación lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que

$$\Phi\left(\mathrm{e}^{X}\right) = \mathrm{e}^{\phi(X)}$$

para toda $X \in \mathfrak{g}$.

Para ver que ϕ es una transformación lineal, notemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathrm{e}^{\phi(tX)} = \Phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{t\phi(X)},$$

por lo que $\phi(tX) = t\phi(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, haciendo uso de la Fórmula del Producto de Lie tenemos que

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= e^{\phi(t(X+Y))} = \Phi\left(e^{t(X+Y)}\right) = \Phi\left(\lim_{m\to\infty}\left(e^{t\frac{X}{m}}e^{t\frac{Y}{m}}\right)^m\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\Phi\left(e^{t\frac{X}{m}}\right)\Phi\left(e^{t\frac{Y}{m}}\right)\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(e^{t\frac{\phi(X)}{m}}e^{t\frac{\phi(Y)}{m}}\right)^m \\ &= e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}. \end{aligned}$$

De lo cual, derivando respecto a t y evaluando en $t = 0$ se sigue que

$$\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$. Así, ϕ es una transformación lineal.

(*i*) Sea $A \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} e^{t\phi(AXA^{-1})} &= e^{A(tX)A^{-1}} = \Phi\left(e^{A(tX)A^{-1}}\right) = \Phi\left(Ae^{tX}A^{-1}\right) \\ &= \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A^{-1}) = \Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A^{-1}). \end{aligned}$$

Así, derivando y evaluando en $t = 0$ tenemos que

$$\phi\left(AXA^{-1}\right) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$$

para cualesquiera $X \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$.

(*ii*) Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ arbitrarias. Por cálculo directo, tenemos

$$\begin{aligned} \phi([X,Y]) &= \phi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\Big|_{t=0}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi\left(e^{tX}\right)\phi(Y)\Phi\left(e^{-tX}\right)\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}\right)\Big|_{t=0} \\ &= [\phi(X), \phi(Y)]. \end{aligned}$$

(*iii*) Como $\Phi\left(e^{tX}\right) = e^{t\phi(X)}$, se tiene que $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi\left(e^{tX}\right)\big|_{t=0}$ para toda $X \in \mathfrak{g}$. ∎

Del inciso (*ii*) de la proposición anterior, se sigue que la transformación ϕ es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Proposición 1.4.5. *Sean G, H y K grupos de Lie matriciales y $\Phi : H \to K$ y $\Psi : G \to H$ homomosfirmos de grupos de Lie. Sea $\Lambda : G \to K$ dada por $\Lambda = \Phi \circ \Psi$ y sean ϕ, ψ y λ*

las transformaciones lineales asociadas a Φ, Ψ *y* Λ *respectivamente, dadas por el teorema anterior. Se tiene que*

$$\lambda = \phi \circ \psi.$$

Demostración. Para cualquier matriz $X \in \mathfrak{g}$, con $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, se tiene que

$$\Lambda\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = (\Phi \circ \Psi)\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \Phi\left(\Psi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \Phi\left(\mathrm{e}^{t\,\psi(X)}\right) = \mathrm{e}^{t\,\phi(\psi(x))} = \mathrm{e}^{t\,(\phi\circ\psi)(X)},$$

por lo que, $\lambda(X) = (\phi \circ \psi)(X)$ para toda $X \in \mathfrak{g}$. ■

Capítulo 2

Teoría de representaciones y acciones de grupos

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar la teoría necesaria para definir el operador de promedio de una acción de un grupo de Lie G en conjunto X. Para ello, primero se introducirán los conceptos de representaciones de álgebras y grupos de Lie, el concepto de acción de un grupo en un conjunto y se estudiarán algunas propiedades que estos poseen. Posteriormente, definiremos la medida de Haar sobre un grupo de Lie compacto G, y haciendo uso de esta, definiremos el operador de promedio de una acción de G en conjunto X.

2.1. Teoría de representaciones

En la teoría de álgebras y grupos de Lie existen una herramientas que nos permiten relacionar a cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ de cualquier espacio vectorial V, y a cada grupo de Lie G con el grupo $GL(V)$. Estas herramientas son llamadas representaciones de álgebras y grupos de Lie.

2.1.1. Representaciones de álgebras

Antes de definir el concepto de representación de un álgebra de Lie, recordemos que dado un espacio vectorial V el conjunto de operadores lineales de V tiene estructura de álgebra de Lie con el conmutador como corchete de Lie, y se denota por $\mathfrak{gl}(V)$.

Definición 2.1.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja y sea V un espacio vectorial finito dimensional. Una representación compleja de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie real, una representación real de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, donde V es un espacio vectorial dimensionalmente finito sobre $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.1.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, con $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Entonces $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, dada por $\pi(X) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}$, es una representación de $\mathfrak{g}$ en V.*

Probemos que π es un homomorfismo de álgebras de Lie. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$, entonces se tiene que

$$(\pi([X,Y]_{\mathfrak{g}}))(v) = 0 = [0,0]_{\mathfrak{gl}(V)} = [(\pi(X))(v), (\pi(Y))(v)]_{\mathfrak{gl}(V)},$$

por lo que π es un homomorfismo. Así, π es una representación de $\mathfrak{g}$ en V.

Ejemplo 2.1.3. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, se define el operador adjunto de X $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por*

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y].$$

La correspondencia $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}_X$, es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$ llamada la representación adjunta.

Para probar que ad es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Por la identidad de Jacobi se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= [[X,Y],Z] = -[Z,[X,Y]] = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] \\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,-[X,Z]] = [X, \mathrm{ad}_Y(Z)] - [Y, \mathrm{ad}_X(Z)] \\ &= (\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X)(Z) = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Así, $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$, por lo que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Por lo tanto, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$.

Definición 2.1.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja, V un espacio vectorial y $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Se dice que π es fiel si es un homomorfismo inyectivo.*

Definición 2.1.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie matricial, π una representación de $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V y σ una representación de $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial W. La función lineal $\phi : V \to W$ es llamada una función entrelazante de representaciones si*

$$\phi((\pi(X))(v)) = (\sigma(X))(\phi(v))$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ y para todo $v \in V$. Si además ϕ es invertible, entonces ϕ es un isomorfismo de representaciones.

2.1.2. Representaciones de grupos

Sea V un espacio vectorial real ó complejo finito dimensional. Recordemos que el grupo de las transformaciones lineales invertibles de V en sí mismo se denota como $\mathrm{GL}(V)$. Por resultados de álgebra lineal, sabemos que fijada una base $\mathcal{B}$ del espacio vectorial V, toda transformación lineal $T \in \mathrm{GL}(V)$ tiene una única matriz asociada $[T]_{\mathcal{B}}$. De esta forma podemos pensar a $\mathrm{GL}(V)$ como $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, donde $n = \dim(V)$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definición 2.1.6. *Sea G un grupo de Lie matricial complejo. Una representación compleja dimensionalmente finita de G en V es un homomorfismo de grupos de Lie $\Pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde V es un espacio vectorial dimensionalmente finito sobre $\mathbb{C}$. Una representación real dimensionalmente finita de G en V es un homomorfismo de grupos de Lie $\Pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, con V un espacio vectorial dimensionalmente finito sobre $\mathbb{R}$.*

Si Π es un homomorfismo inyectivo, entonces se dice que Π es una representación fiel.

Ejemplo 2.1.7. *Sea G un grupo de Lie matricial, y $A \in G$, se define el operador adjunto de A $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por $\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$. La correspondencia $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathrm{Ad}(A) = \mathrm{Ad}_A$ es una representación de G en $\mathfrak{g}$ llamada la representación adjunta.*

Para probar que Ad es una representación de G en $\mathfrak{g}$, es necesario probar que Ad es un homomorfismo de grupos de Lie de G y $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, para lo cual, sean $A, B \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$ arbitrarios, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{AB}(X) &= (AB)X(AB)^{-1} = (AB)X(B^{-1}A^{-1}) = A(BXB^{-1})A^{-1} \\ &= A(\mathrm{Ad}_B(X))A^{-1} = \mathrm{Ad}_A(\mathrm{Ad}_B(X)) = (\mathrm{Ad}_A \circ \mathrm{Ad}_B)(X)\end{aligned}$$

para toda $X \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ad}_{AB} = \mathrm{Ad}_A \circ \mathrm{Ad}_B$, para cualesquiera $A, B \in G$. Así, Ad es un homomorfismo de grupos.

Definición 2.1.8. *Sea Π una representación real o compleja dimensionalmente finita de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V. Un subespacio W de V es llamado invariante si $(\Pi(A))(w) \in W$ $\forall w \in W$, $\forall A \in G$. Un subespacio invariante W es llamada no trivial si $W \neq \{0\}$ y $W \neq V$. Una representación que no tiene supespacios invariantes no triviales es llamada irreducible.*

Definición 2.1.9. *Sea G un grupo de Lie matricial, Π una representación de G en el espacio vectorial V y Σ una representación de G en el espacio vectorial W. La función lineal $\Phi : V \to W$ es llamada una función entrelazante de representaciones si*

$$\Phi\left((\Pi(A))(v)\right) = (\Sigma(A))(\Phi(v))$$

para todo $A \in G$ y para todo $v \in V$. Si además Φ es invertible, entonces Φ es un isomorfismo de representaciones.

Toda representación de un grupo de Lie G en V induce una representación de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en V. El siguiente resultado muestra como se define dicha representación y sus propiedades.

Proposición 2.1.10. *Sea $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial G, y sean Π una representación real o compleja dimensionalmente finita de G en un espacio vectorial V. Entonces existe una única representación π de $\mathfrak{g}$ en V tal que*

$$\Pi\left(\mathrm{e}^{X}\right) = \mathrm{e}^{\pi(X)}$$

para toda $X \in \mathfrak{g}$. La representación π puede calcularse de la siguiente manera:

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\bigg|_{t=0},$$

y satisface que

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$$

para toda $X \in \mathfrak{g}$ y para toda $A \in G$.

Demostración. Por definición de una representación de grupos, tenemos que Π es un homomorfismo de grupos de Lie de G en $\mathrm{GL}(V)$. Así, la demostración se sigue del Teorema 1.4.4 el cual garantiza que existe un único homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, es decir, una única representación real o compleja finita dimensional π de G en V que satisface la proposición. ∎

Definición 2.1.11. *Sea V un espacio vectorial finito dimensional con un producto interior, y G un grupo de Lie matricial. Una representación de G en V $\Pi : G \to GL(V)$ es llamada unitaria si $\Pi(A)$ es un operador unitario en V para toda $A \in G$.*

2.2. Acciones de grupos

En esta sección estudiaremos la teoría necesaria de acciones de grupos para definir el operador de promedio y los generadores infinitesimales de una acción. Lo anterior es de nuestro interés porque un grupo de Lie tiene estructura de grupo, por lo que podemos considerar las acciones de grupos de Lie, en particular de SO(3) sobre ciertos conjuntos y determinar el operador de SO(3)-promedio.

2.2.1. Definiciones básicas

A continuación se presenta la definición de la acción de un grupo sobre un conjunto, la cual puede encontrarse en algunos textos como acción izquierda de un grupo sobre un conjunto.

Definición 2.2.1. *Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una función $\Phi : G \times X \to X$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\Phi(e, x) = x \ \forall x \in X$.
2. $\Phi\left(g, \Phi(h, x)\right) = \Phi(gh, x) \ \forall g, h \in G,\ \forall x \in X$.

Sea Φ una acción de un grupo G en un conjunto X, y sea g un elemento fijo de G, entonces la acción de g en x suele denotarse como $\Phi(g, x) = g \cdot x = \Phi_g(x)$ para todo x en X. Notemos que para cada $g \in G$, la función $\Phi_g : X \to X$ es una biyección del conjunto X en sí mismo, es decir, $\Phi_g \in S(X)$, donde $S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ } \textit{es una biyección}\}$. $S(X)$ es llamado el grupo de permutaciones del conjunto X. Efectivamente, $S(X)$ tiene estructura de grupo respecto a la composición de funciones y tomando como elemento neutro a la función identidad. De esta forma, se puede pensar una acción $\Phi : G \times X \to X$ como un homomorfismo de grupos

$$
\begin{aligned}
G &\to S(X), \\
g &\to \Phi_g.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Ejemplo 2.2.2. *La función $L : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $L(A, \mathbf{x}) = L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ es un vector columna en $\mathbb{C}^n$, es una acción de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^n$.*

Para ver que L es una acción de grupo notemos que

$$L_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. *Además, dadas dos matrices* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *se tiene que*

$$L_A(L_B(\mathbf{x})) = L_A(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x} = L_{AB}(\mathbf{x}).$$

Por lo tanto, L *es una acción de* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *en* $\mathbb{C}^n$.

Notemos que a partir de la Definición 2.1.1 y la Definición 2.2.1 se sigue que una representación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V se puede expresar como una acción de $\mathfrak{g}$ en V, viendo a $\mathfrak{g}$ como un grupo abeliano con respecto a la suma de vectores.

De igual manera, a partir de la Definición 2.1.6 y la Definición 2.2.1 se sigue que una representación de un grupo de Lie matricial G en un espacio vectorial V se puede expresar como una acción de G en V. En caso de que V tenga alguna estructura adicional (topológica, métrica, diferenciable, etc.) se distinguen ciertas clases de acciones que preservan la estructura del conjunto V. Por ser de importancia para el trabajo, presentamos la definición de acciones continuas.

Definición 2.2.3. *Si* G *es un grupo topológico y* X *es un espacio topológico, una acción de* G *en* X, $\Phi : G \times X \to X$ *es continua si* Φ *es continua.*

Definición 2.2.4. *Si* Φ *es una acción de* G *en* X, *la órbita de* x *es el conjunto definido por*

$$\mathrm{Orb}(x) = \{\Phi_g(x) \mid g \in G\}.$$

De la definición anterior se sigue que $y \in \mathrm{Orb}(x)$ si y sólo si $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$, esto es porque $y \in \mathrm{Orb}(x)$ si y sólo si existe $g_1 \in G$ tal que $\Phi_{g_1}(x) = y$, por lo que $\Phi_{g_2}(y) = \Phi_{g_2}(\Phi_{g_1}(x)) = \Phi_{g_2 g_1}(x) \in \mathrm{Orb}(x)$ para todo $\Phi_{g_2}(y) \in \mathrm{Orb}(y)$, lo cual implica que $\mathrm{Orb}(y) \subseteq \mathrm{Orb}(x)$. Además, como $\Phi_{g_1}(x) = y$ entonces $x = \Phi_{g_1}^{-1}(y) = \Phi_{g_1^{-1}}(y) \in \mathrm{Orb}(y)$, y por lo anterior esto implica que $\mathrm{Orb}(x) \subseteq \mathrm{Orb}(y)$. Así, si $y \in \mathrm{Orb}(x)$ entonces $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$. Por otra parte, si $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$ es claro que $y = \Phi_e(y) \in \mathrm{Orb}(x)$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{Orb}(x)$ si y sólo si $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$.

A partir de la observación anterior, es claro que dados dos elementos $x, y \in X$ y una acción Φ de G en X, se tiene que $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$ o $\mathrm{Orb}(x) \cap \mathrm{Orb}(y) = \emptyset$. Esto implica que podemos establecer una relación de equivalencia en X, tal que $x \sim y$ si pertenecen a una misma orbita, es decir, si $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$. Esta relación de equivalencia induce una partición $X/G = X/\sim$, cuyos elementos son las orbitas de la acción.

Definición 2.2.5. *Sea G un grupo, X un espacio topológico y $\pi : X \to X/G$ tal que $\pi(x) = \mathrm{Orb}(x)$. El espacio X/G dotado con la topología cociente es llamado el espacio de orbitas de X o espacio cociente.*

Definición 2.2.6. *Una acción se dice ser transitiva si para cada $x_1, x_2 \in X$ existe un $g \in G$ tal que $\Phi_g(x_1) = x_2$.*

La definición anterior es equivalente a decir que una acción es transitiva si $Orb(x) = X$ para cualquier $x \in X$.

Definición 2.2.7. *Una acción $\Phi : G \times X \to X$ se dice ser fiel o efectiva si $\Phi_g = \mathrm{id}_X$ implica que $g = e$.*

Notemos que una acción es fiel si y sólo si el homomorfismo (2.1) es inyectivo.

Definición 2.2.8. *Para cada $x \in X$, el grupo de isotropía de G en x se define como*

$$G_x = \{g \in G \mid \Phi_g(x) = x\}.$$

De la definición anterior, es claro que G_x es un subgrupo de G para todo $x \in X$.

Proposición 2.2.9. *Si Φ es una acción continua, entonces G_x es cerrado.*

Demostración. Sea $\Phi : G \times X \to X$ una acción continua. A partir de Φ, se puede definir $\widehat{\Phi} : G \times X \to X \times X$ tal que $\widehat{\Phi}(g, x) = (x, \Phi_g(x))$. Si Φ es continua entonces $\widehat{\Phi}$ es continua, por lo que $\widehat{\Phi}^{-1}\{(X, X)\}$ es cerrado, además

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}^{-1}\{(X, X)\} &= \left\{(g, x) \mid \widehat{\Phi}(g, x) = (X, X)\right\} \\
&= \{(g, x) \mid (x, \Phi_g(x)) = (X, X)\} \\
&= \{g \mid \Phi_g(x) = X\} \times X \\
&= G_x \times X,
\end{aligned}$$

lo que implica que $G_x \times X$ es un cerrado en $G \times X$. Por lo tanto, G_x es cerrado. ∎

Definición 2.2.10. *Una acción se se dice ser libre si la acción no tiene puntos fijos, es decir, si $\Phi_g(x) = x$ implica que $g = e$.*

La definición anterior es equivalente a decir que una acción es libre si y sólo si $G_x = e$ para toda $x \in X$.

A continuación se presenta la definición de acciones suaves, dada para el caso de acciones de grupos de Lie matriciales sobre $\mathbb{R}^n$. Esta noción se puede formular de más general, pero esto implica introducir la noción de variedades diferenciables, lo cual no es de interés en este trabajo. El lector interesado puede consultar [3] y [9].

Definición 2.2.11. *Sea G un grupo de Lie matricial. Una acción Φ de G en $\mathbb{R}^n$ se dice ser suave si para cada $X \in G$ se tiene que $\Phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.*

Una equivalencia de la definición anterior es pedir que exista una acción continua $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\Phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función suave para todo $X \in G$. Recordemos que una función se dice ser suave en $\mathbb{R}^n$ si es infinitamente diferenciable (ver Apéndice A).

A partir de la definición del Pull-back de una acción para funciones suaves en $\mathbb{R}^n$, vista en el Apéndice A, es posible definir cuando una función f es G-invariante como se muestra a continuación.

Definición 2.2.12. *Sea G un grupo de Lie matricial y $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una acción suave. Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice ser G-invariante si $\left(\Phi_g^* f\right)(\mathbf{x}) = f(\Phi_g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$ para cualesquiera $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $g \in G$.*

Lo anterior equivale a decir que función suave f en $\mathbb{R}^n$ es G-invariante si y sólo si f es constante a lo largo de las órbitas de la acción ya que $\left(\Phi_g^* f\right)(\mathbf{x}) = f(\Phi_g(\mathbf{x}))$, por lo que f en $\mathbb{R}^n$ es G-invariante si y sólo $f(\Phi_g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$. De manera similar es posible definir un campo vectorial G-invariante mediante el Pull-back de una acción para campos vectoriales definido en el Apéndice A, como se ve en la siguiente definición.

Definición 2.2.13. *Sea G un grupo de Lie matricial y $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una acción suave. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se dice ser G-invariante si $\left(\Phi_g^* X\right)(\mathbf{x}) = D_{\Phi_g(\mathbf{x})}\Phi_g^{-1}(X(\Phi_g(\mathbf{x}))) = X(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y todo $g \in G$.*

2.2.2. Operador de promedio de una acción

En el contexto general de acciones suaves de grupos de Lie en variedades diferenciables, y en el caso de que G sea un grupo de Lie compacto, es posible construir objetos G-invariantes (por ejemplo funciones o campos) mediante el operador de G-promedio. Este operador se define haciendo uso de la medida de Haar en G, la cual es una n-forma bi-invariante en G tal que

$$\int_G dG = 1.$$

Por lo que el operador de promedio para un tensor R se define como

$$\langle R\rangle_G = \int_G \Phi_g^* R dG.$$

Se puede probar que el G-promedio de un tensor R es un tensor G-invariante, más aún el operador de G-promedio es un operador de proyección [13].

En algunos casos particulares es posible obtener el G-promedio de un tensor particular mediante cálculos explícitos. Esto se logra haciendo uso de una parametrización de G que cubra a G casi en todas partes, es decir, que cubra a todo G menos un subconjunto de G de medida cero, en los casos donde sea posible encontrar tal parametrización.

Vamos a ilustrar este hecho en los siguientes ejemplos.

1. Consideremos el grupo $\mathbb{S}^1$. Notemos que podemos identificar a $\mathbb{S}^1$ con el subconjunto $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cong SU(1)$ de $\mathbb{C}$.

   Definamos $\varphi : \mathbb{R}/2\pi \to \mathbb{S}^1$ como $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$ se tiene que

   $$\varphi(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2),$$

   por lo que φ es un homomorfismo de grupos.

   Sea $\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$\Phi(\theta, (x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

   Para cada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definamos el $\mathbb{S}^1$-promedio de f como

   $$\langle f\rangle_{S^1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\Phi_\theta(x)\right) d\theta$$

2. Sea $\mathbb{T}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_i| = 1,\ i = 1, 2\}$. Definamos $\varphi : \mathbb{R}/2 \times \mathbb{R}/2 \to \Pi^2$ como

   $$\varphi(\theta_1, \theta_2) = \left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right)$$

Sea Φ una acción de $\mathbb{T}^2$ en $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\Phi((\theta_1,\theta_2),(x_1,x_2,x_3,x_4)) = \begin{pmatrix} x_1cos(\theta_1) - x_2sen(\theta_1) \\ x_1sen(\theta_1) + x_2cos(\theta_1) \\ x_3cos(\theta_2) - x_4sen(\theta_2) \\ x_3sen(\theta_2) + x_4cos(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cualquier $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ definimos

$$\langle f\rangle_{\Pi^2}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi((\theta_1,\theta_2),(x_1,x_2,x_3,x_4)))d\theta_1 d\theta_2$$

2.2.3. Generadores infinitesimales de una acción

En esta parte se introduce el concepto de generador infinitesimal de una acción de un grupo de Lie matricial en $\mathbb{R}^n$, el cual permite asociar un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ a cada acción suave. Este concepto es de nuestro interés porque en los capítulos posteriores estudiaremos acciones de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6$ cuyos generadores infinitesimales resultarán ser campos Hamiltonianos.

Definición 2.2.14. *Sea G un grupo de Lie matricial y $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suave. A cada $\xi \in \mathfrak{g}$, con $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, se le puede asociar un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, definido por*

$$\xi_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\Phi\left(e^{t\xi},\mathbf{x}\right)\Big|_{t=0}. \tag{2.2}$$

El campo $\xi_{\mathbb{R}^n}$ es llamado un generador infinitesimal de la acción.

A partir de la definición anterior se puede probar que la función ϕ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G en $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, definida por $\phi(\xi) = \xi_{\mathbb{R}^n}$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, es un homomorfismo de álgebras de Lie. Para ver lo anterior, consideremos una acción $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suave, con G un grupo de Lie matricial y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Φ : puede interpretarse como un homomorfismo de grupos, como se vió en la Sección 2.2.1, por lo que Φ es un homomorfismo de grupos de grupos de Lie que a cada $g \in G$ la asocia con el difeomorfismo $\Phi_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Además, como $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial, de la Proposición 2.1.10 se sigue que existe una única representación de álgebras de Lie ϕ entre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G y el álgebra de campos vectoriales $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definida de la siguiente manera:

$$\phi(\xi) = \xi_{\mathbb{R}^n},$$

donde $\xi_{\mathbb{R}^n}$ está dado por (2.2).

Como resultado de la observación anterior, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.15. *Sea G un grupo de Lie matricial, $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una acción suave y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Para cualesquiera $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ se tiene que*

$$[\xi, \eta]_{\mathbb{R}^n} = [\xi_{\mathbb{R}^n}, \eta_{\mathbb{R}^n}].$$

Demostración. Sea G un grupo de Lie matricial y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Dada una acción suave $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ arbitrarios, como $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\phi(\xi) = \xi_{\mathbb{R}^n}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie, por definición se tiene que

$$\phi([\xi, \eta]) = [\phi(\xi), \phi(\eta)].$$

Así,

$$[\xi, \eta]_{\mathbb{R}^n} = [\xi_{\mathbb{R}^n}, \eta_{\mathbb{R}^n}]$$

para cualesquiera $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. ■

Capítulo 3

El grupo especial ortogonal en $\mathbb{R}^3$

Este capítulo está dedicado a estudiar las propiedades del grupo especial ortogonal en $\mathbb{R}^3$. En el Capítulo 1 se vió que SO(3) es un grupo de Lie matricial compacto. Nuestro propósito aquí es desarrollar los elementos necesarios para obtener la medida de Haar en SO(3), con la cual definiremos el operador de SO(3)-promedio en el siguiente capítulo.

3.1. El grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$

En esta sección nos enfocaremos en dar una parametrización para las matrices en SO(3). Para ello, primero definiremos el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$, y a partir de dicha definición, veremos que el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ es en realidad SO(3). Posteriormente, definiremos los ángulos de Euler de una rotación g en $\mathbb{R}^3$. Por último, daremos la parametrización de la matriz asociada a g en SO(3), en término de los ángulos de Euler.

3.1.1. Definición del grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$

Sea G el conjunto de todas las rotaciones en $\mathbb{R}^3$. Es claro que G tiene estructura de grupo, pues G tiene un elemento identidad el cual está dado como la rotación de cero grados, y la inversa de una rotación g es la rotación que regresa a todo el espacio a su posición inicial. Además, para cualesquiera dos rotaciones $g, h \in G$ se define su producto gh mediante la aplicación de la rotación h seguida de la rotación g, lo que implica que G actúa en $\mathbb{R}^3$.

A partir de la Definición 2.2.8 se sigue que G_0 es un grupo, el cual consta de todas las rotaciones que dejan fijo al vector cero. G_0 es llamado el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$.

3.1.2. Descripción de rotaciones mediante matrices ortogonales

A continuación probaremos que toda rotación en G_0 puede representarse por medio de una matriz en SO(3). Para ello, consideremos una rotación $g \in G_0$. Denotemos por $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ a los vectores obtenidos al aplicar g a los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Es claro que los vectores $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ están determinados por sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas, pues $\mathbf{g}_i = (g_{1i}, g_{2i}, g_{3i})$ para $i = 1, 2, 3$, donde g_{ji} es la proyección de $\mathbf{g}_i$ en el j-ésimo eje de coordenadas. Por lo anterior, dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tenemos que $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, por lo que el vector obtenido al aplicar la rotación g a $\mathbf{x}$ es

$$
\begin{aligned}
g \cdot \mathbf{x} &= g \cdot (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1\mathbf{g}_1 + x_2\mathbf{g}_2 + x_3\mathbf{g}_3 \\
&= x_1(g_{11}\mathbf{e}_1 + g_{21}\mathbf{e}_2 + g_{31}\mathbf{e}_3) + x_2(g_{12}\mathbf{e}_1 + g_{22}\mathbf{e}_2 + g_{32}\mathbf{e}_3) + x_3(g_{13}\mathbf{e}_1 + g_{23}\mathbf{e}_2 + g_{33}\mathbf{e}_3) \\
&= (x_1g_{11} + x_2g_{12} + x_3g_{13})\mathbf{e}_1 + (x_1g_{21} + x_2g_{22} + x_3g_{23})\mathbf{e}_2 + (x_1g_{31} + x_2g_{32} + x_3g_{33})\mathbf{e}_3 \\
&= ((x_1g_{11} + x_2g_{12} + x_3g_{13}), (x_1g_{21} + x_2g_{22} + x_3g_{23}), (x_1g_{31} + x_2g_{32} + x_3g_{33})) \\
&= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así, la rotación g queda determinada por la matriz

$$
\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.1}
$$

Por lo que de ahora en adelante, al hablar de $g \in G_0$ nos referiremos a la matriz (3.1), la cual llamaremos matriz de la rotación g. Notemos que la matriz (3.1) es la representación matricial de la transformación g con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

De lo anterior, se sigue que el producto de dos rotaciones gh queda determinado como el producto de sus matrices.

Los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ pueden ser transformados en los vectores $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ por medio de una rotación si y sólo si se satisface que $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ son ortogonales, $|\mathbf{e}_i| = |\mathbf{g}_i|$ para $i = 1, 2, 3$, y $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ tiene la misma orientación que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. Es decir,

$$
\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle = \sum_{k=1}^{3} g_{ki}g_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}
$$

para $i, j = 1, 2, 3$, lo cual implica que $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ son vectores ortonormales. Más aún, de lo anterior de sigue que la matriz (3.1) de la rotación g tiene que ser una matriz ortogonal, pues los vectores columna de dicha matriz coinciden con los vectores $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$.

Por otra parte, es claro que $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, lo que implica que $\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1$ pues $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2$ y $\mathbf{g}_3$ tiene la misma orientación que $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ y $|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{e}_1|$. Por lo tanto,

$$\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \rangle = \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle = 1.$$

Así, la matriz de la rotación g es una matriz ortogonal con determinante igual a 1, es decir, la matriz de la rotación g es un elemento de $\mathrm{SO}(3)$ para toda rotación $g \in G_0$.

Ahora bien, $\mathrm{SO}(3)$ es el conjunto de matrices que preservan el producto interior en $\mathbb{R}^3$, es decir, para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ y para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$ se satisface que

$$\begin{aligned} \langle R\mathbf{x}, R\mathbf{y} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + R_{13}x_3 \\ R_{21}x_1 + R_{22}x_2 + R_{23}x_3 \\ R_{31}x_1 + R_{32}x_2 + R_{33}x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_{11}y_1 + R_{12}y_2 + R_{13}y_3 \\ R_{21}y_1 + R_{22}y_2 + R_{23}y_3 \\ R_{31}y_1 + R_{32}y_2 + R_{33}y_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (R_{11}^2 + R_{21}^2 + R_{31}^2)x_1y_1 + (R_{11}R_{12} + R_{21}R_{22} + R_{31}R_{32})(x_1y_2 + x_2y_1) + \\ &\quad (R_{12}^2 + R_{22}^2 + R_{32}^2)x_2y_2 + (R_{12}R_{13} + R_{22}R_{23} + R_{32}R_{33})(x_2y_3 + x_3y_2) + \\ &\quad (R_{13}^2 + R_{23}^2 + R_{33}^2)x_3y_3 + (R_{11}R_{13} + R_{21}R_{23} + R_{31}R_{33})(x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que $\langle Re_i, Re_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ para todo $i = 1, 2, 3$, y como $Re_i \times Re_j = R(e_i \times e_j)$ para $i, j = 1, 2, 3$, es claro que la acción de multiplicación por la izquierda por una matriz de $\mathrm{SO}(3)$ en $\mathbb{R}^3$ es una isometría lineal que preserva orientación y deja fijo al origen en $\mathbb{R}^3$, es decir, para cada $R \in \mathrm{SO}(3)$ la acción que se obtiene al multiplicar por la izquierda por la matriz R es una rotación en G_0.

De esto se sigue que $\mathrm{SO}(3)$ es el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$.

3.1.3. Ángulos de Euler

Nuestro objetivo en esta parte, es estudiar cómo los ángulos de Euler caracterizan a las rotaciones en $\mathbb{R}^3$, con el propósito de dar una parametrización para los elementos del grupo especial ortogonal en $\mathbb{R}^3$, que nos permita construir la medida de Haar en SO(3).

Por los resultados obtenidos en la parte anterior de esta sección, sabemos que toda rotación puede expresarse mediande una matriz ortogonal con determinante 1, por lo que ahora veremos como son entradas g_{ij} de la matriz de g. Para ello, buscaremos una parametrización de g_{ij} mediante los ángulos de Euler para $i, j = 1, 2, 3$.

Para definir los ángulos de Euler, sea g una rotación en G_0 arbitraria. Tomemos Ox, Oy y Oz como los ejes coordenados en el espacio $\mathbb{R}^3$. Sean Ox', Oy' y Oz' las imagenes de los ejes Ox, Oy y Oz bajo la rotación g respectivamente. Además, sea Ol la recta de intersección de los planos xOy y $x'Oy'$, a la cual le asignaremos una dirección tal que vista en esta dirección, el ángulo con el cual la rotación que manda a Oz en Oz' es menor o igual que π si se mide en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. Esta condición determina la dirección de Ol de manera única, excepto si $Oz = Oz'$ o si el ángulo con el cual la rotación que manda a Oz en Oz' es igual que π.

Ahora bien, sean ϕ_1 el ángulo entre el eje Ox y la recta Ol, ϕ_2 el ángulo entre la recta Ol y el eje Ox' y θ el ángulo entre los ejes Oz y Oz', como se ve en la Figura 3.1. Por último, sean g_{ϕ_1} y g_{ϕ_2} rotaciones en G_0 alrededor del eje Oz con ángulos ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, y $g_\theta \in G_0$ una rotación alrededor del eje Ox con ángulo θ.

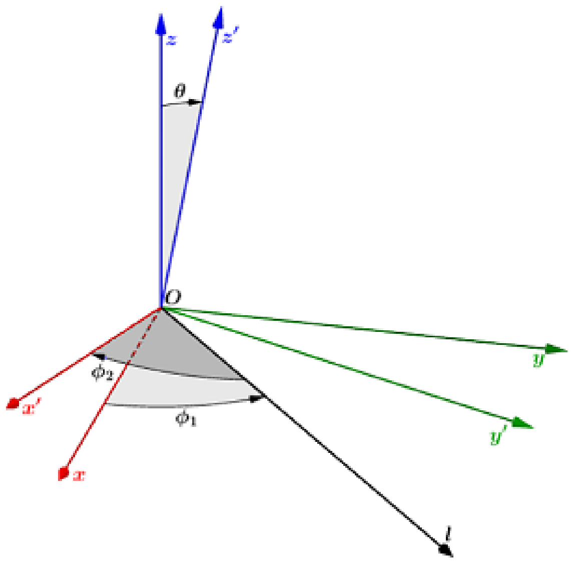

FIGURA 3.1: Ángulos de Euler

La rotación g puede representarse como el producto de las rotaciones g_{ϕ_1}, g_θ y g_{ϕ_2}. Para probar la afirmación anterior, consideremos las rotaciones $g'_\theta, g'_{\phi_2} \in G_0$ alrededor del eje Ol y la recta Oz' con ángulos θ y ϕ_2 respectivamente, es decir, g'_θ es la rotación que transforma al eje Oz en el eje Oz' y deja fija a la recta Ol, mientras que g'_{ϕ_2} es la rotación que asocia a la recta Ol con el eje Ox' y deja fijo al vector Oz'. Notemos que el eje Ox es transformado en la recta Ol y el eje Oz queda fijo al aplicar g_{ϕ_1}, además la imagen del eje Oz bajo g'_θ es Oz', mientras que la recta Ol es invariante bajo g'_θ, y g'_{ϕ_2} asocia a la recta Ol con el eje Ox' y fija al eje Oz', así, al aplicar la rotación $g'_{\phi_2}g'_\theta g_{\phi_1}$ a los ejes Ox y Oz se obtienen Ox' y Oz' respectivamente. Además, como toda rotación asocia elementos ortogonales en elementos ortogonales preservando la orientación, tenemos que la imagen del eje Oy bajo $g'_{\phi_2}g'_\theta g_{\phi_1}$ es el eje Oy', por lo que, $g = g'_{\phi_2}g'_\theta g_{\phi_1}$.

Ahora bien, veamos que $g'_\theta = g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_1}^{-1}$. Para ello, notemos que bajo $g_{\phi_1}^{-1}$ la recta Ol es transformada en el eje Ox y el eje Oz queda fijo, g_θ transforma al eje Oz en el eje Oz' y deja fijo al eje Ox, y la imagen de los ejes Ox y Oz' bajo g_{ϕ_1} es la recta Ol y el eje Oz' respectivamente, así al aplicar $g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_1}^{-1}$ al eje Oz se obtiene el eje Oz', mientras que Ol es invariante bajo $g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_1}^{-1}$, lo cual implica que $g'_\theta = g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_1}^{-1}$.

Además, $g'_{\phi_2} = (g'_\theta g_{\phi_1})\, g_{\phi_2}\, (g'_\theta g_{\phi_1})^{-1}$ pues $(g'_\theta)^{-1}$ transforma al eje Oz' en el eje Oz y deja fija a la recta Ol, $g_{\phi_1}^{-1}$ le asocia a la recta Ol el eje Ox y deja invariante al eje Oz, g_{ϕ_2} aplicada al eje Ox genera al eje Ox'', el cual forma un ángulo de $\phi_1 + \phi_2$ con la recta Ol, y al aplicar g_{ϕ_2} al eje Oz se obtiene Oz, la imagen del eje Ox'' bajo g_{ϕ_1} es el eje Ox''' el cual forma un ángulo de ϕ_2 con la recta Ol, y la imagen del eje Oz es él mismo, y de aplicar g'_θ a los ejes Oz y Ox''' resultan los ejes Oz' y Ox' respectivamente, esto último es por el hecho de que g'_θ al ser una rotación preserva ángulos y orientaciones, y el ángulo entre Ol y Ox''' es igual al ángulo entre Ol y Ox', el ángulo entre Oz y Oz' es igual al ángulo entre O''' y Oz, y por la orientación de Ox' y Ox''' respecto a Oz' y Ol y respecto a Oz y Ol es la misma, esto implica que g'_θ transforma a Ox''' en Ox'. Así, $(g'_\theta g_{\phi_1})\, g_{\phi_2}\, (g'_\theta g_{\phi_1})^{-1} = g'_\theta g_{\phi_1} g_{\phi_2} g_{\phi_1}^{-1} (g'_\theta)^{-1}$ le asocia a la recta Ol el eje Ox' y al eje Oz' lo asocia consigo mismo, lo cual implica que $g'_{\phi_2} = (g'_\theta g_{\phi_1})\, g_{\phi_2}\, (g'_\theta g_{\phi_1})^{-1}$. Por lo tanto, $g = g'_{\phi_2} g'_\theta g_{\phi_1} = (g'_\theta g_{\phi_1})\, g_{\phi_2}\, (g'_\theta g_{\phi_1})^{-1} g'_\theta g_{\phi_1} = g'_\theta g_{\phi_1} g_{\phi_2} = g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_1}^{-1} g_{\phi_1} g_{\phi_2} = g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_2}$.

De lo anterior, se sigue que los ángulos θ, ϕ_1 y ϕ_2 que aparecen en la descripción anterior, son parametros independientes determinados por la rotación g. Estos parametros son llamados los ángulos de Euler, y que por como están definidos, satisfacen que $0 < \theta < \pi$, $0 \le \phi_1 \le 2\pi$ y $0 \le \phi_2 \le 2\pi$. Además, diferentes valores para θ, ϕ_1 y ϕ_2 corresponden a diferentes rotaciones en G_0. A partir de las definiciones de g_{ϕ_1}, g_θ y g_{ϕ_2} se sigue que las matrices que representan dichas rotaciones son

$$g_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad g_{\phi_1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) & -\mathrm{sen}(\phi_1) & 0 \\ \mathrm{sen}(\phi_1) & \cos(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_{\phi_2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) & -\mathrm{sen}(\phi_2) & 0 \\ \mathrm{sen}(\phi_2) & \cos(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la rotación g es igual a aplicar las rotaciones g_{ϕ_2}, g_θ y g_{ϕ_1} sucesivamente, entonces la parametrización de g la multiplicación de g_{ϕ_1}, g_θ y g_{ϕ_2}, por lo que

$$g = g_{\phi_1} g_\theta g_{\phi_2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) & -\cos(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) - \cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) & \mathrm{sen}(\phi_1)\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) + \cos(\theta)\cos(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) & -\mathrm{sen}(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) + \cos(\theta)\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) & -\cos(\phi_1)\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi_2)\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\phi_2)\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

A partir de la parametrización anterior y del hecho de que $g(\theta, \phi_1, \phi_2) \in \mathrm{SO}(3)$ se sigue que la rotación inversa de g esta dada como $g(\theta, \pi - \phi_2, \pi - \phi_1)$, pues sustituyendo θ, ϕ_1 y ϕ_2 por θ, $\pi - \phi_2$ y $\pi - \phi_1$ en (3.2) obtenemos que $g(\theta, \pi - \phi_2, \pi - \phi_1) = g(\theta, \phi_1, \phi_2)^T = g(\theta, \phi_1, \phi_2)^{-1}$.

3.2. El álgebra de Lie de SO(3)

El grupo de rotaciones de $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ se identifica con el grupo SO(3). A partir de los ejemplos 1.2.10 y 1.2.12, se puede probar que el grupo SO(3) es una grupo de Lie compacto y conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3 : \mathbb{R}) \mid X + X^{\mathfrak{t}} = 0\}$. Por lo tanto, $X \in \mathfrak{so}(3)$ si y sólo si X es una matriz real antisimétrica, esto es, $\langle X\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}, X\mathbf{y}\rangle = 0$ para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ tiene como corchete de Lie al conmutador definido por (1.1).

Sea $\{E_1, E_2, E_3\}$ una base de $\mathfrak{so}(3)$, dada por

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Las relaciones de conmutación de los elementos de la base son:

$$[E_1, E_2] = E_3, \ [E_2, E_3] = E_1, \ [E_3, E_1] = E_2.$$

Estas relaciones se pueden reescribir como

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} E_k,$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \ \textit{si} \ i \neq j \neq k, \\ 0 \ \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

En $\mathfrak{so}(3)$ existe un producto interior $k : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}$, llamado la forma de Killing, el cual esta dado por

$$k(X, Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) \tag{3.4}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$.

Proposición 3.2.1. *La forma de Killing (3.4) tiene las siguientes propiedades:*

(i) *k es definida positiva.*

(ii) *Para cualesquira $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$ se tiene que $k(\mathrm{Ad}_R(X), \mathrm{Ad}_R(Y)) = k(X, Y)$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$, esto es, k es Ad_R-invariante para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$.*

(iii) *Para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{so}(3)$ se tiene que $k([Z, X], Y) + k(X, [Z, Y]) = 0$.*

Demostración.

(i) Sea $X \in \mathfrak{so}(3)$, entonces existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $X = \sum_{i=1}^{3} x_i E_i$, por lo que

$$k(X, X) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0.$$

Además, es claro que $k(X,X)=0$ si y sólo si $X=0$.

(ii) Para cualesquiera $R\in \mathrm{SO}(3)$ y $X,Y\in\mathfrak{so}(3)$, por propiedades de la traza se tiene que

$$\begin{aligned} k\left(\mathrm{Ad}_R(X),\mathrm{Ad}_R(Y)\right) &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(RXYR^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(R^{-1}RXY\right)\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(XY\right)=k(X,Y). \end{aligned}$$

Así, k es Ad_R-invariante para toda matriz $R\in\mathrm{SO}(3)$.

(iii) Notemos que para cualquier $R\in\mathrm{SO}(3)$ y cualesquiera $X,Y\in\mathfrak{so}(3)$ se tiene que

$$k(\mathrm{Ad}_R(X),Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(RXR^{-1}Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XR^{-1}YR) = k(X,\mathrm{Ad}_{R^{-1}}(Y)),$$

por lo que

$$\begin{aligned} k\left(\mathrm{Ad}_{e^{tZ}}(X),\mathrm{Ad}_{e^{tZ}}(Y)\right) &= k\left(X,\mathrm{Ad}_{(e^{tZ})^{-1}}(\mathrm{Ad}_{e^{tZ}}(Y))\right)\\ &= k\left(X,\mathrm{Ad}_{(e^{tZ})^{-1}e^{tZ}}(Y)\right)\\ &= k(X,Y) \end{aligned}$$

Además, para cualquier matriz $X\in\mathfrak{so}(3)$ se sigue que

$$\left.\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{e^{tZ}}(X)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}e^{tZ}Xe^{-tZ}\right|_{t=0} = ZX-XZ=[Z,X].$$

Por lo anterior, sabemos que

$$\left.\frac{d}{dt}k\left(\mathrm{Ad}_{e^{tZ}}(X),\mathrm{Ad}_{e^{tZ}}(Y)\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}k(X,Y)\right|_{t=0},$$

así,

$$k([Z,X],Y)+k(X,[Z,Y])=0$$

Para cualesquiera $X,Y,Z\in\mathfrak{so}(3)$. ■

Como k es un producto interior en $\mathfrak{so}(3)$, del inciso (i) de la proposición anterior se sigue que k es una métrica en $\mathfrak{so}(3)$.

Definición 3.2.2. *Definamos la transformación lineal* $i:\mathfrak{so}(3)\to\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$i(X)=(x_1,x_2,x_3), \tag{3.5}$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Proposición 3.2.3. *La transformación i definida por (3.5) tiene las siguientes propiedades:*

(i) i es una isometría de $(\mathfrak{so}(3), k)$ en $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$.

(ii) i es un isomorphismo del álgebra de Lie $(\mathfrak{so}(3), [\ ,\ ])$ con el álgebra de Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$.

(iii) $i(Ad_R(X)) = \Phi_R(i(X))$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$.

Demostración.

(i) Sean $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$, con $X = \sum_{i=0}^{3} x_i E_i$ y $Y = \sum_{i=0}^{3} y_i E_i$. Entonces, se tiene lo siguiente

$$k(X,Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \langle (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3)\rangle = \langle i(X), i(Y)\rangle.$$

(ii) Sean $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$, con $X = \sum_{i=0}^{3} x_i E_i$ y $Y = \sum_{i=0}^{3} y_i E_i$. Entonces, se tiene lo

$$\begin{aligned} i([X,Y]) = i\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_i y_j E_k\right) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_i y_j e_k \\ &= (x_1,x_2,x_3) \times (y_1,y_2,y_3) = i(X) \times i(Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, i es un homomorfismo de álgebras de Lie. Además, claramente i es una transformación linean biyectiva, por lo que i es un isomorfismo del álgebra de Lie $(\mathfrak{so}(3), [\ ,\ ])$ con el álgebra de Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$.

(iii) Para demostrar que i es una función entrelazante de representaciones, notemos que para cualquier matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$ se tiene que

$$\langle i\mathrm{Ad}_R(X), i\mathrm{Ad}_R(Y)\rangle = k(\mathrm{Ad}_R(X), i\mathrm{Ad}_R(Y)).$$ ∎

Proposición 3.2.4. *Sea $X \in \mathfrak{so}(3)$ arbitrario. Existe una matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $Ad_R(X) = rE_1$, donde $r = |X|$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{so}(3)$, entonces existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $X = \sum_{i=1}^{3} x_i E_i$. Si $X = 0$ entonces para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$ se cumple que $\mathrm{Ad}_R X = 0 = 0E_1$.

Supongamos que $X \neq 0$, entonces $r = |X| \geq 0$ y el vector $\mathbf{x} = \frac{1}{r}(x_1, x_2, x_3)$ es un vector propio de la matriz X correspondiente al valor propio 0. ■

3.3. La función exponencial en $\mathfrak{so}(3)$

En esta parte, se presentan propiedades la función exponencial en $\mathfrak{so}(3)$, las cuales serán de utilidad para realizar cálculos donde aparezca la exponenical de una matriz en $\mathfrak{so}(3)$ de manera sencilla.

Proposición 3.3.1. *Sea $X \in \mathfrak{so}(3)$, con X distinta de la matriz 0. Se tiene que*

$$e^X = I + \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}X + \frac{1-\cos(r)}{r^2}X^2.$$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{so}(3)$, con $X = \sum_{i=0}^{3} x_i E_i$. Consideremos el polinomio característico de X

$$p(\lambda) = \det(X - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -x_3 & x_2 \\ x_3 & -\lambda & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\lambda = -\lambda^3 - r^2\lambda.$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton se tiene que $p(X) = 0$, es decir, $-X^3 - r^2X = 0$. De esto se sigue que $X^3 = -r^2X$.

Probaremos por inducción que

$$X^{2n+1} = (-1)^n r^{2n} X. \tag{3.7}$$

para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para ello, notemos que la igualdad se satisface para $n = 0$ y $n = 1$, pues sustituyendo ambos valores de n obtenemos que $X^{2(0)+1} = (-1)^0 r^{2(0)} X = X$ y $X^3 = -r^2X$ respectivamente.

Ahora bien, supongamos que las igualdades se satisfacen para $n = k$, es decir

$$X^{2k+1} = (-1)^k r^{2k} X.$$

Tomando $n = k + 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} X^{2(k+1)+1} &= X^{2k+1}X^2 = (-1)^k r^{2k} X X^2 = (-1)^k r^{2k} X^3 \\ &= (-1)^k r^{2k}(-r^2 X) = (-1)^{k+1} r^{2(k+1)} X. \end{aligned}$$

Así, se tiene que $X^{2n+1} = (-1)^n r^{2n} X$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De la ecuación (3.7) se sigue que $X^{2n+2} = (-1)^n r^{2n} X^2$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Calculando e^X, tenemos que

$$\begin{aligned} e^X &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ &= I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k} X}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k} X^2}{(2k+2)!} \\ &= I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \frac{X}{r} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} r^{2k+2}}{(2k+2)!} \right) \frac{X^2}{r^2} \\ &= I + \frac{\operatorname{sen}(r)}{r} X - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) \frac{X^2}{r^2} \\ &= I + \frac{\operatorname{sen}(r)}{r} X + \frac{1-\cos(r)}{r^2} X^2 \end{aligned}$$

para toda matriz $X \in \mathfrak{so}(3)$. ■

Definamos la función $r^2 : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}$ tal que $r^2(X) = k(X, X)$. Como r^2 es una función diferenciable, entonces las funciones $\dfrac{\operatorname{sen}(r)}{r}$ y $\dfrac{1-\cos(r)}{r^2}$ son funciones diferenciables.

Proposición 3.3.2. *Para toda matriz* $X \in \mathfrak{so}(3)$ *se tiene*

$$e^{-X}\left(De^X\right) = \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X} \tag{3.8}$$

Demostración. Consideremos la función $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ dada por

$$Z(s,t) = e^{-sX - stY} \frac{\partial}{\partial t} e^{sX+stY}.$$

Claramente $Z(0,0) = 0$, mientras que

$$Z(1,0) = e^{-X} \left. \frac{\partial}{\partial t} e^{X+tY} \right|_{t=0} = e^{-X}\left(De^X\right) Y.$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}Z(s,t) &= \frac{\partial}{\partial s}e^{-sX-stY}\frac{\partial}{\partial t}e^{sX+stY} + e^{-sX-stY}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}e^{sX+stY}\\ &= -(X+tY)e^{-sX-stY}\frac{\partial}{\partial t}e^{sX+stY} + e^{-sX-stY}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}e^{sX+stY}\\ &= -(X+tY)e^{-sX-stY}\frac{\partial}{\partial t}e^{sX+stY} + e^{-sX-stY}\frac{\partial}{\partial t}\left((X+tY)e^{sX+stY}\right)\\ &= e^{-sX-stY}Ye^{sX+stY}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Z(1,0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Z(s,0)\mathrm{d}s = \int_0^1 e^{-sX}Ye^{sX}\mathrm{d}s.$$

Notemos que para toda $s \in \mathbb{R}$ se tiene que la función $\gamma_s : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ dada por $\gamma_s(Y) = e^{-sX}Ye^{sX}$ es lineal e invertible, esto es porque

$$\gamma_s(Y+\alpha Z) = e^{-sX}(Y+\alpha Z)e^{sX} = e^{-sX}Ye^{sX} + \alpha e^{-sX}Ze^{sX} = \gamma_s(Y) + \alpha\gamma_s(Z)$$

y claramente exite $\gamma_s^{-1} : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ dada por $\gamma_s^{-1}(Z) = e^{sX}Ze^{-sX}$. Además, la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{so}(3), \mathbb{R})$ tal que $\gamma(s) = \gamma_s$ es una función continua la cual satisface que $\gamma_0(Y) = Y$ y

$$\gamma_{s+t}(Y) = e^{-(s+t)X}Ye^{(s+t)X} = e^{-sX}e^{-tX}Ye^{tX}e^{sX} = (\gamma_s \circ \gamma_t)(Y),$$

lo que implica que γ es un subgrupo uniparamétrico de $\mathrm{GL}(\mathfrak{so}(3)$, el cual satisface que

$$\gamma_0{}'(Y) = \left.\frac{\mathrm{d}}{ds}e^{-sX}Ye^{sX}\right|_{s=0} = -XY + YX = -\mathrm{ad}_X(Y),$$

por lo que $\gamma'(0) = -\mathrm{ad}_X$. Así, γ es un subgrupo uniparamétrico dado por $\gamma(s) = e^{-\mathrm{ad}_X}$, por lo que

$$Z(1,0) = \int_0^1 \gamma_s(Y)\mathrm{d}s = \int_0^1 e^{-s\,\mathrm{ad}_X}(Y)\mathrm{d}s = \left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}\right)(Y),$$

por lo que

$$e^{-X}\left(De^X\right)Y = \left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}\right)(Y)$$

para toda matriz $Y \in \mathfrak{so}(3)$, lo cual implica que

$$e^{-X}\left(De^X\right) = \frac{1-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}$$

para toda matriz $X \in \mathfrak{so}(3)$. ■

3.4. La medida de Haar en SO(3)

Como SO(3) es un grupo de Lie compacto, existe una medida de Haar en SO(3). Nuestro propósito es usar los ángulos de Euler para obtener una representación de la medida de Haar en SO(3).

Sea $f : \mathrm{SO}(3) \to \mathbb{R}^3$ una función, y $A \subset \mathrm{SO}(3)$ el conjunto de matrices en SO(3) que se pueden representar en término de los ángulos de Euler. Si $g \in G_0$, entonces podemos suponer que $f(g) = f(\theta, \phi_1, \phi_2)$. Notemos que f debe satisfacer

$$f(\theta, \phi_1 + 2\pi, \phi_2) = f(\theta, \phi_1, \phi_2 + 2\pi) = f(\theta, \phi_1, \phi_2).$$

La integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(g)\omega(g)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi_1,\phi_2)\omega(\theta,\phi_1,\phi_2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1$$

es llamada la integral invariante de la función $f(g)$ sobre el grupo G_0, si el factor $\omega(g)$ es elegido de tal manera que para cualquier función $f(g) = f(\theta, \phi_1, \phi_2)$, continua respecto a las variables θ, ϕ_1 y ϕ_2, se cumpla que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(gg_0)\omega(g)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(g)\omega(g)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1. \tag{3.9}$$

Probaremos que esto se logra para $\omega(g) = sen(\theta)$, con $g = g_{\phi_1}g_\theta g_{\phi_2}$. Es decir, que la expresión

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(g)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 \tag{3.10}$$

es una integral invariante sobre el grupo G_0. Para esto, consideremos $g' = gg_0$, y sean θ', ϕ_1' y ϕ_2' los ángulos de Euler de la rotación g'. Los ángulos θ', ϕ_1' y ϕ_2' están dados en función de los ángulos de Euler θ, ϕ_1 y ϕ_2 de la rotación g, y la condición (3.9) en la integral (3.10) implica que es necesario que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\phi_1',\phi_2')\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi_1,\phi_2)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1. \tag{3.11}$$

Si en la integral de la izquierda cambiamos las variables de integración θ, ϕ_1 y ϕ_2 por las variables θ', ϕ_1' y ϕ_2' obtendremos la misma integral que en el lado derecho siempre que el cambio de variables transforme a $\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1$ en $\mathrm{sen}(\theta')\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi_2'\mathrm{d}\phi_1'$, es decir, la ecuación (3.11) se satisface siempre que

$$\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = \mathrm{sen}(\theta')\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi_2'\mathrm{d}\phi_1'. \tag{3.12}$$

Para demostrar la relación (3.12), denotemos por $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_3$ a las imágenes de los puntos $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ bajo la rotación g^{-1} respectivamente. Tomemos O como el origen en $\mathbb{R}^3$, como $\mathbf{e}_1 = (0,0,1)$ está sobre la intersección de la esfera unitaria con el plano ortogonal $O\mathbf{e}_3$ que pasa por O se tiene que $\mathbf{g}_1$ está sobre la intersección de la esfera unitaria con el plano ortogonal $O\mathbf{g}_3$ que pasa por O, a la cual llamaremos C.

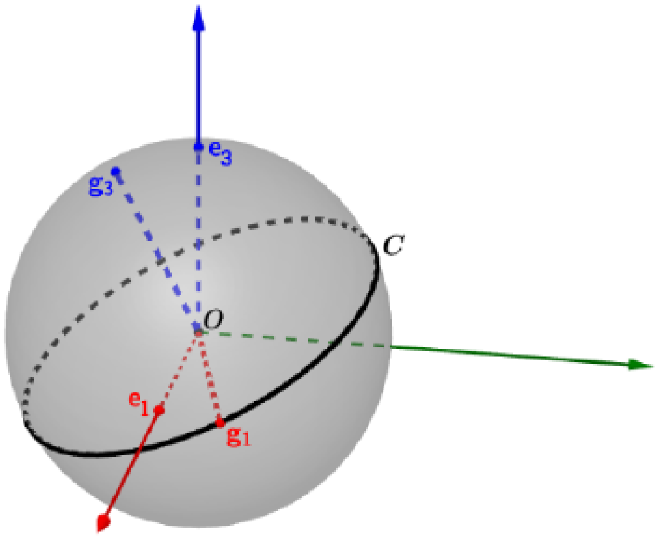

Figura 3.2: Representación gráfica de la acción de g^{-1} en los elementos $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_3$.

De la representación matricial de g dada por (3.2) y el hecho de que la representación matricial de g^{-1} está dada por $g(\theta,\phi_1,\phi_2)^T$ se sigue que las coordenadas cartesianas de $\mathbf{g}_3$ son

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_3 &= g(\theta,\phi_1,\phi_2)^T\mathbf{e}_3 \\
&= \big(\mathrm{sen}(\phi_2)\mathrm{sen}(\theta), \cos(\phi_2)\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)\big) \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi_2\right)\mathrm{sen}(\theta), \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\phi_2\right)\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A partir de (3.13), se sigue que las coordenadas esféricas de $\mathbf{g}_3$ son $\left(1, \frac{\pi}{2}-\phi_2, \theta\right)$. Así, $\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2$ es el diferencial de una superficie esférica sobre $\mathbf{g}_3$. Por otra parte, $\mathrm{d}\phi_1$ es el diferencial de línea de la circunferencia C, el cual, fijados los ángulos θ y ϕ_2, corresponde a una rotación alrededor de $O\mathbf{g_3}$.

Denotemos por $\mathbf{g}'_1$ y $\mathbf{g}'_3$ a las imágenes de los puntos $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_3$ bajo la rotación $g' = gg_0$ respectivamente. Existe una rotación $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g} \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}'_1$ y $\tilde{g} \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}'_3$, esta rotación deja invariantes al diferencial de superficie esférica $\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2$ y al diferencial de línea $\mathrm{d}\phi_1$ de la circunferencia C, por lo que $\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1$ es invariante. Así, el cambio de las variables de integración θ, ϕ_1 y ϕ_2 por las variables θ', ϕ'_1 y ϕ'_2 satisface (3.12).

De lo anterior, se sigue que $\omega(g) = sen(\theta)$ satisface (3.9). Ahora, como

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = 8\pi^2,$$

se tiene que

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = 1.$$

Por lo tanto, la forma diferencial $\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1$ es una realización de la medida de Haar en SO(3) en término de los ángulos de Euler.

Capítulo 4

Representaciones de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ y T$\mathbb{R}^3$ y el operador de promedio

Este capítulo está enfocado en estudiar la representación canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ y la representación diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$, calcular el operador de SO(3)-promedio de la acción canónica y de la acción diagonal de SO(3) para funciones y para campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6$, haciendo uso de la medida de Haar en SO(3) estudiada en la Sección 3.4, y determinar el SO(3)-promedio de algunos ejemplos de funciones y campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6$. Lo anterior con el propósito de dar una caracterización para las funciones y campos vectoriales SO(3)-invariantes, la cual nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

4.1. Representación canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$

En esta sección analizaremos la representación canónica del grupo SO(3) en $\mathbb{R}^3$ con la cual definiremos el operador de SO(3)-promedio en la Sección 4.4. La representación canónica es la correspondencia $\Phi : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ dada por $\Phi(R) = \Phi_R$, donde $\Phi_R(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. A continuación demostraremos que Φ es una representación de SO(3), para ello recordemos que una representación de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ es un homomorfismo de grupos de Lie de SO(3) en GL($\mathbb{R}^3$). Dadas dos matrices $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}(3)$ tenemos que

$$\Phi_{R_1R_2}(\mathbf{x}) = (R_1R_2)\mathbf{x} = R_1(R_2\mathbf{x}) = (\Phi_{R_1} \circ \Phi_{R_2})(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, $\Phi_{R_1R_2} = \Phi_{R_1} \circ \Phi_{R_2}$. Así, Φ es un homomorfismo de grupos. Sólo falta probar que Φ es una función continua para tener que Φ es un homomorfismo de grupos de Lie de SO(3) en GL($\mathbb{R}^3$), para lo cual usaremos la definición ε-δ, pero primero recordemos que GL($\mathbb{R}^3$) lo podemos identificar con GL($3,\mathbb{R}$) es el conjunto de matrices invertibles de 3×3 por lo que la métrica en GL($\mathbb{R}^3$) es la métrica inducida por la norma de Hilbert-Schmidt. Además, fijada la base canónica $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ la representación matricial de Φ_R respecto a $\mathcal{B}$ es la matriz R para toda $R\in \mathrm{SO}(3)$. Así, dada una matriz arbitraria $R_1\in \mathrm{SO}(3)$ se tiene que para cada $\varepsilon>0$, tomando $\delta=\varepsilon$ y una matriz $R_2\in\mathrm{SO}(3)$ tal que $\mathrm{d}(R_1,R_2)<\delta$ se tiene que

$$\mathrm{d}(\Phi_{R_1},\Phi_{R_2})=\mathrm{d}(R_1,R_2)<\delta=\varepsilon.$$

Por lo tanto, Φ es continua en R para toda matriz $R\in\mathrm{SO}(3)$, y así, Φ es una representación de SO(3) en $\mathbb{R}^3$.

4.2. Representación de SO(3) en $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$

A continuación presentaremos una representación del grupo SO(3) en $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$ inducida por la representación canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$. Antes de continuar es necesario recordar la definición del haz tangente $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$, para ello recordemos que para cada $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3$ denota el espacio tangente a $\mathbb{R}^3$ en $\mathbf{x}$ (ver Apéndice A). El haz tangente se define por

$$\mathrm{T}\mathbb{R}^3=\bigsqcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3.$$

Para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ denota el segmento de recta dirigido que conecta al origen con $\mathbf{u}$, mientras que $\vec{u}_{\mathbf{x}}$ denota al vector con punto inicial $\mathbf{x}$, con la misma dirección y magnitud que $\vec{u}$. Como $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$ es la unión disjunta de los espacios tangente en cada punto de $\mathbb{R}^3$, es posible identificar a $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^6$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\mathbb{R}^3&=\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\{\mathbf{x}\}\times\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3\\&=\{(\mathbf{x},\vec{u}_{\mathbf{x}})\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \vec{u}_{\mathbf{x}}\in\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos definir una representación de SO(3) en $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$ mediante una representación de SO(3) en $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Así, la función $\Psi:\mathrm{SO}(3)\to\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ dada por $\Psi(R)=\Psi_R$ donde $\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q})=(R\mathbf{p},R\mathbf{q})$ es una representación de SO(3) en $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$, tomando a $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. La acción Ψ es llamada levantamiento tangente de la acción canónica Φ de SO(3) en $\mathbb{R}^3$, [12]. Nos referiremos a la acción Ψ de SO(3) en T$\mathbb{R}^3$ como la acción diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$.

Por completez, procederemos a demostrar que Ψ es una representación de SO(3) en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, para ello sean $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}(3)$ y $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ arbitrarios, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi_{R_1R_2}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= ((R_1R_2)\mathbf{p},(R_1R_2)\mathbf{q}) = (R_1(R_2\mathbf{p}),R_1(R_2)\mathbf{q})) = \Psi_{R_1}(R_2\mathbf{p},R_2\mathbf{q})\\ &= \Psi_{R_1}(\Psi_{R_2}(\mathbf{p},\mathbf{q})) = (\Psi_{R_1}\circ\Psi_{R_2})(\mathbf{p},\mathbf{q})\end{aligned}$$

para todo $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, por lo que $\Psi_{R_1R_2} = \Psi_{R_1} \circ \Psi_{R_2}$, para cualesquiera $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}(3)$. Así, Ψ es un homomorfismo de grupos.

Por otra parte, Ψ es una función continua de $\mathbb{R}^3$ a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, esto es porque $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^6)$ el cual se identifica de manera natural con $\mathrm{GL}(6, \mathbb{R})$, por lo cual, considerando que la representación matricial de Ψ_R respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} R & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}$$

para cada matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$. Además, tomando la métrica en $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^6)$ como la métrica inducida por la norma de Hilbert-Schmidt, se tiene que dada una matriz $R_1 \in \mathrm{SO}(3)$ cualquiera, para cada $\varepsilon > 0$, si $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $\mathrm{d}(R_1, R_2) < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Psi_{R_1},\Psi_{R_2}) &= \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} R_1 & 0\\ 0 & R_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} R_2 & 0\\ 0 & R_2\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} R_1 & 0\\ 0 & R_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} R_2 & 0\\ 0 & R_2\end{pmatrix}\right\|\\ &= \left\|\begin{pmatrix} R_1-R_2 & 0\\ 0 & R_1-R_2\end{pmatrix}\right\| = \left(2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|(R_1-R_2)_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{2}\,\|O_1-O_2\| = \sqrt{2}\,d(R_1,R_2) < \sqrt{2}\,\delta = \sqrt{2}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo que Ψ es continua en R_1 para toda $R_1 \in \mathrm{SO}(3)$. Así, Ψ es una representación de SO(3) en T$\mathbb{R}^3$, tomando en cuenta que T$\mathbb{R}^3$ se identifica con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

4.3. Espacio de órbitas

Recordemos que una representación de un grupo G en un espacio vectorial V es esencialmente una acción $\Phi : G \times V \to V$, donde Φ_g es un isomorfismo lineal para cada

$g \in G$. Teniendo esto en cuenta, procederemos a determinar el espacio de órbitas de las representaciones de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathrm{T}\mathbb{R}^3$,vistas como acciones de grupos, mostradas en las secciones 4.1 y 4.2, respectivamente. Para ello, comenzaremos analizando la acción canónica Φ de SO(3) en $\mathbb{R}^3$.

Antes de empezar, recordemos que el espacio de órbitas de una acción $\Phi : G \times V \to V$ es el conjunto de todas las órbitas de la acción. A este conjunto se le puede dotar de la topología cociente, y se denota por V/G. Para saber como son los elementos de $\mathbb{R}^3/\mathrm{SO}(3)$ para $\Phi : \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $\Phi(R, \mathbf{x}) = R\mathbf{x}$ es necesario determinar como son las orbitas de la acción Φ. Para ello, tomemos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y notemos que, como SO(3) es el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$, se satisface que para cuales quiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$ existe una matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $\Phi_R(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2$. Por otro lado, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $\|R\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$. Por lo cual es claro que

$$\mathrm{Orb}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\}.$$

La interpretación geométrica de lo anterior es que la orbita de $\mathbf{x}$ con la acción Φ es la esfera de radio $\|\mathbf{x}\|$ si $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ y el origen si $\mathbf{x} = 0$. Así, el espacio de orbitas $\mathbb{R}^3/\mathrm{SO}(3)$ es el espacio de todas las esferas concéntricas con centro en el origen.

Ahora, procederemos a determinar como son las orbitas de la acción Ψ de SO(3) en $\mathrm{T}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vista en la sección anterior. Primero, notemos que

$$\Psi_R(\mathbf{p}, 0) = (R\mathbf{p}, 0) = (\Phi_R(\mathbf{p}), 0)$$

y

$$\Psi_R(0, \mathbf{q}) = (0, R\mathbf{q}) = (0, \Phi_R(\mathbf{q}))$$

para cualesquiera $(\mathbf{p}, 0), (0, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$, tomando $\mathbf{p} \neq 0$ y $\mathbf{q} \neq 0$. Así, se tiene que

$$\mathrm{Orb}(\mathbf{p}, 0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{p}\|\} \times \{0\}$$

y

$$\mathrm{Orb}(0, \mathbf{q}) = \{0\} \times \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{q}\|\}.$$

Geometricamente, las orbitas de los puntos $(0, 0)$, $(\mathbf{p}, 0)$ y $(0, \mathbf{q})$ consisten de el conjunto que sólo contiene origen en $\mathbb{R}^6$, el producto cartesiano de la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio $\|\mathbf{p}\|$ con origen en $\mathbb{R}^3$ y el producto cartesiano del origen en $\mathbb{R}^3$ con la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio $\|\mathbf{q}\|$, respectivamente.

Ahora bien, consideremos $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{p} \neq 0$ y $\mathbf{q} \neq 0$. Como $\langle R\mathbf{p}, R\mathbf{q}\rangle = \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Orb}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{p}\|\} \times \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{q}\|\}\\ \cap \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\}\end{aligned}$$

para todo $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. A diferencia de los casos anteriores, es más complicado dar una interpretación geométrica a la orbita de $(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Sin embargo, podemos decir lo siguiente, si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes ($\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq 0$), entonces $R\mathbf{p}$ y $R\mathbf{q}$ también son linealmente independientes, para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$. Si por el contrario, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes ($\mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0$), entonces $R\mathbf{p}$ y $R\mathbf{q}$ también lo son. Tomando en cuenta que la acción diagonal y la acción canónica se relacionan de la siguiente manera $\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\Phi_R(\mathbf{p}), \Phi_R(\mathbf{q}))$, vamos a dar una interpretación geométrica de los siguientes conjuntos

$$\{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{p}}\} \text{ y } \{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}}\},$$

donde $\mathrm{SO}(3)_{\mathbf{p}}$ y $\mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}}$ denotan los grupos de isotropías de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ con respecto a la acción canónica Φ respectivamente. Primero, notemos que

$$\begin{aligned}\{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{p}}\} &= \{\mathbf{p}\} \times \big(\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{q}\|\} \cap \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{p},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\}\big)\\ &= \{\mathbf{p}\} \times \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{q}\|,\ \langle \mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{y}\rangle = 0\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}}\} &= \big(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{p}\|\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x},\mathbf{q}\rangle = \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\}\big) \times \{\mathbf{q}\}\\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{p}\|,\ \langle \mathbf{p}-\mathbf{x},\mathbf{q}\rangle = 0\} \times \{\mathbf{q}\}.\end{aligned}$$

Lo cual, geometricamente es el producto cartesiano del conjunto que contiene únicamente al punto $\mathbf{p}$ con la intersección de la esfera de radio $\|\mathbf{p}\|$ y el plano ortogonal al vector $\vec{p}$ que pasa por $\mathbf{q}$ y el producto cartesiano de la intersección de la esfera de radio $\|\mathbf{q}\|$ y el plano ortogonal al vector $\vec{q}$ que pasa por $\mathbf{p}$ con el conjunto que cuyo único elemento es $\mathbf{q}$ respectivamente, donde $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son los vectores en $\mathbb{R}^3$ que salen del origen y llegan a los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ respectivamente. La utilidad de estos dos conjuntos es que tienen la propiedad de que para cualesquiera $(\mathbf{x}_1,\mathbf{q}) \in \{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}}\}$ y $(\mathbf{p},\mathbf{x}_2) \in \{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{p}}\}$ existen $R_1 \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}}$ y $R_2 \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{p}}$ tales que $\Psi_{R_1}(\mathbf{x}_1,\mathbf{q}) =$

$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $\Psi_{R_2}(\mathbf{p}, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ respectivamente, lo cual utilizaremos más adelante en la demostración de la Proposición 4.4.4.

4.4. Operador de SO(3)-promedio para funciones

En esta sección definiremos el operador de promedios para funciones sobre el grupo SO(3), con base en la definición del operador de promedio vista en el Capítulo 2.

Para ello, usaremos el hecho de que la medida de Haar en SO(3) está dada por

$$\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1,$$

la cual satisface

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1 = 1.$$

Para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, se define el SO(3)-promedio de f respecto a la acción canónica Φ de $\mathbf{SO}(3)$ en $\mathbb{R}^3$, como la función $\langle f\rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ definida por

$$\langle f\rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi_R^* f(\mathbf{x})\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1.$$

Como se puede ver en el Apéndice A, la expresión anterior es equivalente a

$$\langle f\rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1, \tag{4.1}$$

donde $R(\theta, \phi_1, \phi_2)$ está dada por

$$R(\theta,\phi_1,\phi_2) = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) & -\cos(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) - \cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) & \mathrm{sen}(\phi_1)\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi_1)\cos(\phi_2) + \cos(\theta)\cos(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) & -\mathrm{sen}(\phi_1)\mathrm{sen}(\phi_2) + \cos(\theta)\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) & -\cos(\phi_1)\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi_2)\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\phi_2)\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Es decir, $R(\theta, \phi_1, \phi_2)$ es la parametrización de la matriz R en término de los ángulos de Euler.

De manera análoga, podemos definir el SO(3)-promedio para funciones en $\mathbb{R}^6$. Para ello, sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, se define el SO(3)-promedio de f respecto a la acción diagonal Ψ de **SO**(3) en $\mathbb{R}^6$, como la función $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ definida por

$$\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\Psi(R(\theta, \phi_1, \phi_2), \mathbf{x})) \mathrm{sen}(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi_2 \mathrm{d}\phi_1. \tag{4.2}$$

A continuación presentamos los promedios de algunas funciones en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^6$. Los promedios de estas funciones fueron calculados usando la fórmulas (4.1) y (4.2), mediante el uso del código mostrado en el Apéndice B, implementado en el software wx-Maxima. En los primero cinco ejemplos el promedio se calculó respecto a la acción canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$, mientras que en los ejemplos posteriores se consideró la acción diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$.

1. Sea $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Se tiene que

$$\langle f_1 \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\|\mathbf{x}\|^2.$$

2. Sea $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. El SO(3)-promedio de f_2 está dado por

$$\langle f_2 \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|.$$

3. Sea $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f_3(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^2 + x_3^3$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. El SO(3)-promedio de f_3 es

$$\langle f_3 \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\|\mathbf{x}\|^2.$$

4. Sea $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f_4(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2 x_3^2$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Se tiene que

$$\langle f_4 \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = 0.$$

5. Sea $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f_5(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. El SO(3)-promedio de f_5 es

$$\langle f_5 \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = 0.$$

6. Sea $\rho_1 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ definida por $\rho_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2$, donde $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. El SO(3)-promedio de ρ_1 está dado por

$$\langle \rho_1 \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2.$$

7. Sea $\rho_2 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ dada por $\rho_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2$, donde $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. El SO(3)-promedio de ρ_2 es
$$\langle \rho_2 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2.$$

8. Sea $\rho_3 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ tal que $\rho_3(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$, donde $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. Se tiene que
$$\langle \rho_3 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}.$$

9. Sea $\rho_4 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ definida por $\rho_4(\mathbf{p},\mathbf{q}) = p_1 + p_2 + p_3$, donde $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_1,q_2,q_3)$. El SO(3)-promedio de ρ_4 es
$$\langle \rho_4 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0.$$

10. Sea $\rho_5 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ dada por $\rho_5(\mathbf{p},\mathbf{q}) = p_1q_3 + p_2q_2 + p_3q_1$, donde $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_1,q_2,q_3)$. Se tiene que el SO(3)-promedio de ρ_5 está dado por
$$\langle \rho_5 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{3}\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}.$$

Como se menciona en el Capítulo 2, es posible demostrar en el contexto general de acciones de grupos que el operador de promedio en G de un tensor R es G-invariante. En las proposiciones 4.4.1 y 4.4.2 se está considerando el promedio respecto a la acción canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$. Para la acción diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$ se tienen resultados análogos.

Proposición 4.4.1. *Para toda función* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *se satisface que* $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ *es una función* SO(3)*-invariante.*

Demostración. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Para ver que $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ es una función SO(3)-invariante es necesario probar que es constante a lo largo de las orbitas de la acción $\Phi : \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Para ello, recordemos que la medida de Haar en SO(3) es
$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\Phi_{R_1}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2),\Phi_{R_1}(\mathbf{x})))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2),\Phi(R_1,\mathbf{x})))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2)R_1,\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta',\phi_1',\phi_2'),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1.
\end{aligned}$$

En la Sección 3.4 también se vió que al cambiar las variables de integración θ, ϕ_1 y ϕ_2 por θ', ϕ_1' y ϕ_2' obtenemos que

$$\begin{aligned}
\langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\Phi_{R_1}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta',\phi_1',\phi_2'),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta',\phi_1',\phi_2'),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta')\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi_2'\mathrm{d}\phi_1'\\
&= \langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

para toda $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ y toda matriz $R_1\in\mathrm{SO(3)}$. Por lo tanto, para toda función $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ se satisface que $\langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}}$ es una función SO(3)-invariante. ■

De manera análoga a la demostración anterior se prueba de que $\langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}}$ es una función SO(3)-invariante para toda función $f\in C^\infty(\mathbb{R}^6)$.

La Proposición 4.4.1 nos ayuda para dar otra manera de determinar si una función $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es SO(3)-invariante, la cual se sigue de la siguiente proposición.

Proposición 4.4.2. *Sea f una función suave en $\mathbb{R}^3$. f es* SO(3)*-invariante si y sólo si $\langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}} = f$.*

Demostración. Sea f una función suave en $\mathbb{R}^3$. Si f es SO(3)-invariante se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle f\rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\mathbf{x})\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= f(\mathbf{x})\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= f(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, lo cual implica que $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)} = f$. Para el regreso supongamos que $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)} = f$, esto implica que f es SO(3)-invariante pues de la Proposición 4.4.1 se sigue que $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ es SO(3)-invariante. ■

La prueba de que una función suave f en $\mathbb{R}^6$ es SO(3)-invariante si y sólo si $\langle f \rangle_{\mathrm{SO}(3)} = f$ es análoga a la demostración anterior.

En los ejemplos anteriores el promedio obtenido en cada una de las funciones es una función SO(3)-invariante. En particular, del segundo ejemplo del SO(3)-promedio de funciones en $\mathbb{R}^3$ se sigue que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ es una función SO(3)-invariante. Más aún, probaremos que toda función suave en $\mathbb{R}^3$ SO(3)-invariante es función de la norma en $\mathbb{R}^3$, como se ve en la siguiente proposición.

Teorema 4.4.3. *Toda función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ SO(3)-invariante se puede expresar como función de $r = \|\mathbf{x}\|$.*

Demostración. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ SO(3)-invariante. Consideremos la función g sobre $\mathbb{R}$ dada por $g(r) = f(r, 0, 0)$. Como f es una función SO(3)-invariante se tiene que

$$f(\Phi_R(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$$

para toda $R \in \mathrm{SO}(3)$, es decir,

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$

para toda $\mathbf{y} \in \mathrm{Orb}(\mathbf{x})$.

De la Sección 4.3 sabemos que

$$\mathrm{Orb}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\},$$

por lo cual, si $\|\mathbf{x}\| = r$ entonces $(r, 0, 0) \in \mathrm{Orb}(\mathbf{x})$. Así, tenemos que

$$f(\mathbf{x}) = f(r, 0, 0) = g(r) = g(\|\mathbf{x}\|)$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. ■

Por otra parte, de los ejemplos del 6 al 8 se sigue que $\langle \rho_i \rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \rho_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para $i = 1, 2, 3$, lo cual implica que ρ_i es una función SO(3)-invariante para $i = 1, 2, 3$. A continuación probaremos que las funciones ρ_1, ρ_2 y ρ_3 no solamente son SO(3)-invariantes, sino que toda función suave en $\mathbb{R}^6$ que sea SO(3)-invariante es función de ρ_1, ρ_2 y ρ_3. Antes de formular este resultado, probaremos la siguiente proposición.

Proposición 4.4.4. *La función* $\Gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\rho_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_3(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \tag{4.3}$$

satisface las siguientes propiedades:

(i) Para cualesquiera $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *y* $R \in \mathrm{SO}(3)$ *se tiene que* $\Gamma(\Psi_R(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

(ii) Si $\Gamma(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \Gamma(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ *entonces existe una matriz* $R \in \mathrm{SO}(3)$ *tal que* $\Psi_R(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$.

Demostración.

(i) Sean $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y $R \in \mathrm{SO}(3)$ arbitrarios, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(\Psi_R(\mathbf{p}, \mathbf{q})) &= (\rho_1(\Psi_R(\mathbf{p}, \mathbf{q})), \rho_2(\Psi_R(\mathbf{p}, \mathbf{q})), \rho_3(\Psi_R(\mathbf{p}, \mathbf{q}))) \\ &= (\rho_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_3(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}).\end{aligned}$$

Esto es porque ρ_1, ρ_2 y ρ_3 son funciones SO(3)-invariantes.

(ii) Sean $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1), (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tales que $\Gamma(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \Gamma(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$, es decir

$$(\rho_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1), \rho_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1), \rho_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)) = (\rho_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2), \rho_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2), \rho_3(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)).$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{p}_1\|^2 = \rho_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \rho_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_2\|^2$$

y

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{q}_1\|^2 = \rho_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \rho_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}_2\|^2,$$

lo cual implica que $\|\mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_2\|$ y $\|\mathbf{q}_1\| = \|\mathbf{q}_2\|$.

Así, si $\mathbf{q}_1 = 0$ se tiene que $\|\mathbf{q}_2\| = \|\mathbf{q}_1\| = 0$, por lo que $\mathbf{q}_2 = 0$. Además, como $\|\mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_2\|$, entonces existe una matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $R\mathbf{p}_1 = R\mathbf{p}_2$. Así, existe $R \in \mathrm{SO}(3)$ tal que

$$\Psi_R(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = (R\mathbf{p}_1, R0) = (\mathbf{p}_2, 0) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$$

Si $\mathbf{q}_1 \neq 0$, entonces como $\|\mathbf{q}_1\| = \|\mathbf{q}_2\|$, existe una matriz $R_1 \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $R_1\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$. Además

$$\Gamma(\Psi_{R_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)) = \Gamma(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \Gamma(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$$

de lo cual se sigue que $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_2 = \Psi_{R_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = R_1\mathbf{p}_1 \cdot R_1\mathbf{q}_1 = R_1\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_2$, por lo que $(R_1\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{q}_2 = 0$, lo cual implica que $R_1\mathbf{p}_1$ está en la intersección de la esfera de radio $\|\mathbf{p}_2\|$ y el plano ortogonal a $\vec{q}_2$ que pasa por $\mathbf{p}_2$, donde $\vec{q}_2$ es el vector que sale del origen y llega a $\mathbf{q}_2$, es decir $(R_1\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2) \in \{\Psi_R(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) \mid R \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}_2}\}$, por lo cual existe una matriz $R_2 \in \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{q}_2}$ tal que $\Psi_{R_2}(R_1\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$. Por lo tanto, existe $R = R_2R_1 \in \mathrm{SO}(3)$ tal que

$$\begin{aligned}
\Psi_R(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) &= \Psi_{R_2R_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = (\Psi_{R_2} \circ \Psi_{R_1})(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)\\
&= \Psi_{R_2}\left(\Psi_{R_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)\right) = \Psi_{R_2}\left(R_1\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2\right)\\
&= (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2).
\end{aligned}$$

Así, si $\Gamma(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \Gamma(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ existe $R \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $\Psi_R(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$. ■

Teorema 4.4.5. *Para cada función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$ SO(3)-invariante existe una función $h \in C^\infty(U)$, donde U es un abierto en $\mathbb{R}^3$, tal que $H = h(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.*

Demostración. Consideremos la función $\mathbb{J} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbb{J}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ y el conjunto $V = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbb{J}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq 0\}$ el cual es un abierto denso en $\mathbb{R}^6$, esto es porque $V = \mathbb{J}^{-1}(\mathbb{R}^6 \setminus \{0\})$ y como $\mathbb{J}$ es una función continua de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$ es un abierto en $\mathbb{R}^3$, esto implica que V es abierto en $\mathbb{R}^6$. Además, para ver que V es denso en $\mathbb{R}^6$ notemos que el origen no esta en V pero $\mathbf{x}_\varepsilon = \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{\varepsilon}{2}, 0\right)\right) \in V$ ya que $\mathbb{J}(\mathbf{x}_\varepsilon) = \left(0, 0, \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$, además $\|\mathbf{x}_\varepsilon\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, por lo que $\mathbf{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon(0)$, de lo cual se sigue que $0 \in V' \subseteq \overline{V}$.

Sea $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \notin V$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideremos $\mathbf{y}_\varepsilon = (\mathbf{p}, \lambda\mathbf{p}) + \mathbf{x}_\varepsilon$, entonces $\|\mathbf{y}_\varepsilon - (\mathbf{p}, \lambda\mathbf{p})\| = \|\mathbf{x}_\varepsilon\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Tomando $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ tenemos que $\mathbf{y}_\varepsilon = (p_1 + \frac{\varepsilon}{2}, p_2, p_3, \lambda p_1, \lambda p_2 + \frac{\varepsilon}{2}, \lambda p_3)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(\mathbf{y}_\varepsilon) &= \left(p_1 + \frac{\varepsilon}{2}, p_2, p_3\right) \times \left(\lambda p_1, \lambda p_2 + \frac{\varepsilon}{2}, \lambda p_3\right)\\
&= \left(\lambda p_2 p_3 - p_3\left(\lambda p_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \lambda p_3\left(p_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \lambda p_1 p_3, \left(p_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\lambda p_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \lambda p_1 p_2\right)\\
&= \left(-\frac{\varepsilon}{2}p_3, \frac{\varepsilon}{2}p_3, \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(p_1 + \lambda p_2)\right)\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Así, $\mathbf{y}_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{q})$ para todo $\varepsilon > 0$, lo cual implica que $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in V' \subseteq \overline{V}$ para todo $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \notin V$. Por lo tanto, $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \overline{V}$ para todo $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, lo que por definición implica que V es denso en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Consideremos la representación $\Psi : \mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ definida en la sección 4.1 y la función $\Gamma : V \to U \subseteq \mathbb{R}^3$ definida como en (4.3), donde $U = \Gamma(V)$. Notemos que para cada función $h \in C^\infty(\Gamma(V))$ existe una única función SO(3)-invariante $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ tal que $H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (h\circ\Gamma)(\mathbf{p},\mathbf{q})$ y para cada función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ SO(3)-invariante, existe una única función $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (h \circ \Gamma)(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Esto se debe a que Γ es una función sobreyectiva en U, por lo que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ existe $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{x}$, así $h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ para $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ tal que $\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{x}$. Además, de la Proposición 4.3.2 se sigue que $\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \Gamma(\mathbf{p}',\mathbf{q}')$ si y sólo existe $R \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $\Psi_R(\mathbf{p}',\mathbf{q}') = (\mathbf{p}.\mathbf{q})$, entonces $\Gamma^{-1}(\mathbf{x}) = \{\Psi_R(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid R \in \mathrm{SO}(3)\} = \mathrm{Orb}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, lo que implica que h está bien definida pues H es SO(3)-invariante. Por lo tanto, como $h(\mathbf{x}) = h(\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q}))$, se tiene que $H = h\circ\Gamma$, lo cual implica que $H = h(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$. ■

4.5. Operador de SO(3)-promedio para campos vectoriales

En esta parte veremos como calcular el operador de SO(3)-promedio para campos vectoriales, haciendo uso de la medida de Haar en SO(3).

Dada una acción $\Phi : \mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, se define el SO(3)-promedio del campo vectorial $X : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{T}\mathbb{R}^3$ por

$$\langle X\rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi_R^* X(\mathbf{x})\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1,$$

lo cual es equivalente a (ver Apéndice A)

$$\langle X\rangle_{\mathrm{SO}(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2)^{-1}, X(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2),\mathbf{x})))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1, \tag{4.4}$$

para el caso de la acción canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ con $R(\theta,\phi_1,\phi_2)$ la parametrización de la matriz R en término de los ángulos de Euler.

A continuación presentamos los promedios de algunos campos vectoriales con respecto a la acción canónica de SO(3) en $\mathbb{R}^3$. Los promedios de estos campos vectoriales fueron calculados usando la fórmula (4.4), mediante el uso del código mostrado en el Apéndice B, implementado en el software wx-Maxima.

1. Sea $X_1 : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ definido por $X_1(\mathbf{x}) = (1, 0, 0)$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. El SO(3)-promedio de X_1 es
$$\langle X_1 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) = 0,$$
tomando $0 \in \mathbb{R}^3$.

2. Sea $X_2 : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ un campo vectorial dado por $X_2(\mathbf{x}) = (x_1, 0, 0)$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. El SO(3)-promedio de X_2 es
$$\langle X_2 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x}.$$

3. Sea $X_3 : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ dado por $X_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Se tiene que
$$\langle X_3 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

4. Sea $X_4 : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ dado por $X_4(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.El SO(3)-promedio de X_4 está dado por
$$\langle X_4 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) = 0,$$
con $0 \in \mathbb{R}^3$.

5. Sea $X_5 : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ dado por $X_5(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0)$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Se tiene que
$$\langle X_5 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x}.$$

6. Sea $V_1 : \mathbb{R}^6 \to T\mathbb{R}^6$ definido por $V_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ donde $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. El SO(3)-promedio de V_1 es
$$\langle V_1 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0,$$
tomando $0 \in \mathbb{R}^6$.

7. Sea $V_2 : \mathbb{R}^6 \to T\mathbb{R}^6$ un campo vectorial dado por $V_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. El SO(3)-promedio de V_2 es
$$\langle V_2 \rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

8. Sea $V_3 : \mathbb{R}^6 \to \mathrm{T}\mathbb{R}^6$ dado por $V_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3, 0, 0, 0)$ donde $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Se tiene que

$$\langle V_3 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0,$$

tomando $0 \in \mathbb{R}^6$.

9. Sea $V_4 : \mathbb{R}^6 \to \mathrm{T}\mathbb{R}^6$ dado por $V_4(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1^2, p_2^2, p_3^2, q_1^2, q_2^2, q_3^2)$ donde $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$.El SO(3)-promedio de V_4 está dado por

$$\langle V_4 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0,$$

con $0 \in \mathbb{R}^6$.

10. Sea $V_5 : \mathbb{R}^6 \to \mathrm{T}\mathbb{R}^6$ dado por $V_5(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1 + p_2 + p_3, 0, 0, q_1 + q_2 + q_3, 0, 0)$ para $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Se tiene que

$$\langle V_5 \rangle_{\mathrm{SO}(3)} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{3}(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Igual que en el caso de funciones suaves se tiene que el SO(3)-promedio de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es un campo vectorial SO(3)-invariante, la prueba de esta afirmación se sigue de la siguiente proposición.

Proposición 4.5.1. *Para todo campo vectorial X en $\mathbb{R}^3$ se tiene que $\langle X \rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ es un campo* SO(3)*-invariante.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Para ver que $\langle X \rangle_{\mathrm{SO}(3)}$ es una campo vectorial SO(3)-invariante es necesario probar que es constante a lo largo de las orbitas de la acción $\Phi : \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Para ello, notemos que

$$\left(\Phi_{R_1}^* \langle X \rangle_{\mathrm{SO}(3)}\right)(\mathbf{x})$$

es igual a

$$\Phi\left(R_1^{-1}, \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(R(\theta, \phi_1, \phi_2)^{-1}, X(\Phi(R(\theta, \phi_1, \phi_2), \Phi_{R_1}(\mathbf{x}))))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\right),$$

lo cual puede reescribirse como

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi\left(R_1^{-1}, \Phi(R(\theta, \phi_1, \phi_2)^{-1}, X(\Phi(R(\theta, \phi_1, \phi_2), \Phi(R_1, \mathbf{x})))\mathrm{sen}(\theta)\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1,$$

y esto es

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi\left(R_1^{-1}R(\theta,\phi_1,\phi_2)^{-1}, X(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2)R_1,\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1.$$

Tomando en cuenta que $R_1^{-1}R(\theta,\phi_1,\phi_2)^{-1} = (R(\theta,\phi_1,\phi_2)R_1)^{-1}$, lo anterior puede reescribirse como

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi\left(R(\theta',\phi_1',\phi_2')^{-1}, X(\Phi(R(\theta',\phi_1',\phi_2'),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1.$$

En la Sección 3.4 también se vio que al cambiar las variables de integración θ, ϕ_1 y ϕ_2 por θ', ϕ_1' y ϕ_2' obtenemos que lo anterior es igual a

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi\left(R(\theta',\phi_1',\phi_2')^{-1}, X(\Phi(R(\theta',\phi_1',\phi_2'),\mathbf{x}))\mathrm{sen}(\theta')\right)\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi_2'\mathrm{d}\phi_1',$$

lo cual es el SO(3)-promedio de X en $\mathbf{x}$. Así,

$$\left(\Phi_{R_1}^*\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}}\right)(\mathbf{x}) = \langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x})$$

para toda $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ y toda matriz $R_1\in\mathrm{SO(3)}$. Por lo tanto, para todo campo vectorial X se tiene que $\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}}$ es un campo SO(3)-invariante. ■

Para la acción diagonal de SO(3) se tiene que el promedio de un campo vectorial en $\mathbb{R}^6$ es SO(3)-invariante. La prueba de esta afirmación es análoga a la demostración de la proposición anterior.

La importancia de la Proposición 4.5.1 radica en que permite dar una manera alterna de determinar si un campo vectorial $X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ es SO(3)-invariante mediante su promedio, la cual está dada por la siguiente proposición.

Proposición 4.5.2. *Sea X un campo vectorial. X en* SO(3)*-invariante si y sólo* $\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}} = X$.

Demostración. Sea $X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Supongamos que X en SO(3)-invariante, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2)^{-1}),(X(\Phi(R(\theta,\phi_1,\phi_2),\mathbf{x})))\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X(\mathbf{x})\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= X(\mathbf{x})\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1\\
&= X(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

para toda $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, lo cual implica que $\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}} = X$. Para el regreso de la proposición, es claro que si $\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}} = X$ entonces X es SO(3)-invariante, pues de la Proposición 4.5.1 se sigue que $\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}}$ es SO(3)-invariante. ■

De manera análoga a la demostración anterior se prueba que dado un campo vectorial $X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^6)$, X en SO(3)-invariante si y sólo $\langle X\rangle_{\mathrm{SO(3)}} = X$.

A partir de la proposición anterior se sigue que los promedios de los campos vectoriales en los ejemplos anteriores son campos vectoriales SO(3)-invariantes.

Capítulo 5

Sistemas Hamiltonianos SO(3)-invariantes

En este capítulo estudiaremos sistemas Hamiltonianos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6$ que son invariantes con respecto a las acciones del grupo SO(3) sobre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^6$ que hemos revisado en el capítulo anterior.

Para comenzar, se hace una breve presentación de los corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^n$ y los campos Hamiltonianos. Para el caso de $\mathbb{R}^3$, estudiamos toda una familia de corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$ la cual se caracteriza en términos de una función de Casimir dada. Luego, establecemos condiciones para las cuales algunos corchetes de ésta familia de corchetes generan campos Hamiltonianos SO(3)-invariantes. Para el caso de $\mathbb{R}^6$, como este espacio es de dimensión par, consideraremos el corchete de Poisson canónico, con respecto al cual la acción diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$ resulta ser Hamiltoniana con aplicación de momentum equivariante, [7, 13]. Esto quiere decir que los generadores infinitesimales de la acción resultan ser campos Hamiltonianos.

Nuestro propósito en este capítulo es ilustrar el proceso de reducción y reconstrucción de dinámica para sistemas Hamiltonianos SO(3)-invariantes.

5.1. Definición y propiedades de sistemas Hamiltonianos

Consideremos el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y el álgebra de funciones suaves en $\mathbb{R}^n$, denotada por $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definición 5.1.1. *Un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^n$ es una operación binaria $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) Linealidad:
$$\{f + \alpha g, h\} = \{f, h\} + \alpha\{g, h\}.$$

(ii) Antisimetría:
$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

(iii) Identidad de Jacobi:
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

(iv) Regla de Leibniz:
$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g.$$

De las propiedades (i), (ii) y (iii) se sigue que un corchete de Poisson es una operación bilineal, más aún, es un corchete de Lie en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ visto como espacio vectorial. Por lo tanto, $(C^\infty(\mathbb{R}^n), \{\ ,\ \})$ es un álgebra de Lie de dimensión infinita. Dado un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^n$, al par $(\mathbb{R}^n, \{\ ,\ \})$ se le llama espacio de Poisson.

Corchete de Poisson canónico en $\mathbb{R}^{2n}$

Considerando que los elementos de $\mathbb{R}^{2n}$ se pueden expresar de la forma $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, podemos definir la operación $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ dada por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{5.1}$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Proposición 5.1.2. *La operación binaria $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ definida por (5.1) es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^{2n}$.*

Demostración. Para ver que $\{\ ,\ \}$ es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^{2n}$ notemos que

$$\begin{aligned}
\{f+\alpha g,h\} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(f+\alpha g)}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial(f+\alpha g)}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}+\alpha\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)\frac{\partial h}{\partial q_i}-\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}+\alpha\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)+\alpha\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\\
&= \{f,h\}+\alpha\{g,h\}
\end{aligned}$$

para cualesquiera $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$. Además,

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)=-\{f,g\}$$

para cualesquiera $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Para demostrar que $\{\ ,\ \}$ satisface la regla de Leibniz recordemos que las derivadas parciales satisfacen la regla de Leibniz, por lo que

$$\begin{aligned}
\{fg,h\} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial(fg)}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(f\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial p_i}g\right)\frac{\partial h}{\partial q_i}-\left(f\frac{\partial g}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}g\right)\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\\
&= f\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\right)g\\
&= f\{g,h\}+g\{f,h\}
\end{aligned}$$

para cualesquiera $f,g,h\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Sólo resta probar que $\{\ ,\ \}$ satisface la identidad de Jacobi para tener que $\{\ ,\ \}$ es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^{2n}$. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} &= \left\{f,\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\right)-\right.\\
&\qquad\left.\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)\right)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}\right)\right)-\right.\\
&\qquad\left.\frac{\partial f}{\partial q_j}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

lo cual puede reescribirse como

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}-\right.$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\right).$$

Por lo tanto

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}$$

es igual a

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}-\right.$$
$$\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}+$$
$$\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}-$$
$$\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}+$$
$$\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}+\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}-$$
$$\left.\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\right),$$

lo cual, reordenando los términos en la sumatoria y separándola en dos sumatorias es igual a

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}+\right.$$
$$\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}+$$
$$\left.\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}+\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}+\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\right)$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}+\right.$$
$$\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}+\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}+$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)$$

que es igual a 0. Es decir,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Por lo tanto, $\{\ ,\ \}$ es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^{2n}$. ∎

Corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$

Para cada función $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ definamos el corchete $\{\ ,\ \}_K : C^\infty(\mathbb{R}^3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ por

$$\{f, g\}_K = \langle \nabla f, \nabla K \times \nabla g \rangle, \tag{5.2}$$

donde ∇f denota el vector gradiente de f.

Proposición 5.1.3. *Para cada función $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ la operación binaria $\{\ ,\ \}_K : C^\infty(\mathbb{R}^3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ definida por (5.2) es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. Sea $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Para ver que $\{\ ,\ \}_K$ es una operación lineal, tomemos $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ cualesquiera y $\alpha \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned}\{f + \alpha g, h\}_K &= \langle \nabla(f + \alpha g), \nabla K \times \nabla h \rangle = \langle \nabla f + \alpha \nabla g, \nabla K \times \nabla h \rangle \\ &= \langle \nabla f, \nabla K \times \nabla h \rangle + \alpha \langle \nabla g, \nabla K \times \nabla h \rangle = \{f, h\}_K + \alpha \{g, h\}_K\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\{f + \alpha g, h\}_K = \{f, h\}_K + \alpha\{g, h\}_K$. Además

$$\{f, g\}_K = \det \begin{bmatrix} \nabla f \\ \nabla K \\ \nabla g \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \nabla g \\ \nabla K \\ \nabla f \end{bmatrix} = -\{g, f\}_K$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ahora, comprobemos la regla de Leibniz.

$$\begin{aligned}\{fg, h\}_K &= \langle \nabla(fg), \nabla K \times \nabla h \rangle = \langle f \nabla g + (\nabla f)\, g, \nabla K \times \nabla h \rangle \\ &= f \langle \nabla g, \nabla K \times \nabla h \rangle + \langle \nabla f, \nabla K \times \nabla h \rangle g = f\{g, h\}_K + g\{f, h\}_K\end{aligned}$$

para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Así, $\{\ ,\ \}_K$ es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$ para toda función $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. ∎

Definición 5.1.4. *Un corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice ser no-degenerado si para cualquier $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\{f, g\} = 0$ para todo $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que f es constante.*

El corchete de Poisson canónico en $\mathbb{R}^{2n}$ definido por la ecuación (5.1) es no-degenerado.

A partir de la Definición 5.1.3, podemos analizar bajo que condiciones un corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ en $\mathbb{R}^n$ es no-degenerado, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.5. *Si un corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ en $\mathbb{R}^n$ es no-degenerado, entonces n es par.*

La prueba de esta proposición puede ser consultada en las siguientes referencias [8, 10, 20].

Definición 5.1.6. *Sean $\{\ ,\ \}_1$ y $\{\ ,\ \}_2$ corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Una función suave $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice ser una función o morfismo de Poisson si satisface que*

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \phi$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 5.1.7. *La función Γ definida en (4.3) de $(\mathbb{R}^6, \{\ ,\ \}_{can})$, donde $\{\ ,\ \}_{can}$ es el corchete canónico en $\mathbb{R}^6$ dado por (5.1), y $(\mathbb{R}^3, \{\ ,\ \}_F)$, con $\{\ ,\ \}_F$ dado por (5.8) al tomar $F(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 - x_3^2$, es un morfismo de Poisson. Este hecho lo verificaremos a detalle en la Sección 5.3.*

Proposición 5.1.8. *Dado un corchete de Poisson $\{\ ,\ \} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una función suave $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, existe un único campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\mathcal{L}_{X_H} f = \{H, f\} \tag{5.3}$$

para toda función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $\mathcal{L}_{X_H}$ denota la derivada de Lie a lo largo del campo X_H (ver Apéndice A).

Demostración. Notemos que $\{H, \cdot\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una derivación pues es una función lineal que satisface la regla de Leibniz. Por tanto, existe un campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathcal{L}_{X_H} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\lambda_i(\mathbf{x}) = \{H, x_i\}$. ■

Nota. *En la prueba anterior estamos usando el hecho de que toda derivación del álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tiene asociado un único campo vectorial. Este hecho se puede encontrar en [9, 10].*

Definición 5.1.9. *Dado un corchete de Poisson* $\{\ ,\ \} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *y una función suave* $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, se define el campo Hamiltoniano* X_H *asociado a* H *como el único campo vectorial que satisface (5.3).*

De la definición anterior, se sigue que $X_H = \{H, \}$. Además, a partir de dicha definición es posible definir lo que es un sistema Hamiltoniano como se sigue a continuación.

Definición 5.1.10. *Dado un corchete de Poisson* $\{\ ,\ \}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y una función suave* $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, se define un sistema Hamiltoniano como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en* $\mathbb{R}^n$ *definido por*

$$\dot{\mathbf{x}} = X_H(\mathbf{x}),$$

donde X_H *es el campo Hamiltoniano asociado a* H*.*

La función H de la definición anterior es llamada el Hamiltoniano del sistema.

Definición 5.1.11. *Sea* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in C^\infty(U)$ *con* $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto.* f *es una integral primera de* X *si* $\mathcal{L}_X f = 0$*.*

Una integral primera de un sistema es una función $f \in C^\infty(U)$ que es constante a lo largo de las trayectorias del sistema, es decir, si $\alpha(t)$ es solución del sistema, entonces $f(\alpha(t)) = constante$.

Proposición 5.1.12. *Sea* $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Entonces* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es integral primera de* X_H *si y sólo si* $\{H, f\} = 0$*.*

Demostración. Sea $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por definición se tiene que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es integral primera de X_H si y sólo si $\mathcal{L}_X f = 0$ lo cual es equivalente a $\{H, f\} = 0$. ■

Corolario 5.1.13. *Si* X_H *es el campo Hamiltoniano asociado a la función* H*, entonces* H *es integral primera de* X_H*.*

Demostración. Dado un corchete de Poisson $\{\ ,\ \} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y el campo Hamiltoniano X_H asociado a la función H, de la propiedad de antisimetría de $\{\ ,\ \}$ se sigue que

$$\{H, H\} = 0,$$

lo cual, por la proposición anterior, implica que H es integral primera de X_H. ■

A continuación se presenta la noción de funciones de Casimir para un corchete de Poisson.

Definición 5.1.14. *Sea $\{\ ,\ \}$ un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^n$. Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice ser de Casimir si $\{f, g\} = 0$ para toda función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Al conjunto de todas las funciones de Casimir las denotaremos por*

$$\mathrm{Casim}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \{f, g\} = 0\ \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

De la definición se sigue que dado un campo Hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, toda función $f \in \mathrm{Casim}(\mathbb{R}^n)$ satisface que $\{H, f\} = 0$, lo que por la Proposición 5.1.12 implica que f es integral primera de X_H. Por otra parte, si H es una función de Casimir, entonces $X_H = 0$. Además, dado un corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathrm{Casim}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ ya que cualquier función constante f es de Casimir.

Proposición 5.1.15. *Si $\{\ ,\ \}$ es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^n$, entonces la aplicación que a cada función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ le asocia su campo Hamiltoniano es un morfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Sea $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ un corchete de Poisson y $\eta : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta(H) = X_H$. Por definición se tiene que

$$\eta(H_1 + \alpha H_2)(f) = X_{H_1+\alpha H_2}(f)$$

para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para cualesquiera $H_1, H_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. De la linealidad del corchete se sigue que $X_{H_1+\alpha H_2} = \{H_1 + \alpha H_2,\ \} = \{H_1,\ \} + \alpha\{H_2,\ \} = X_{H_1} + \alpha X_{H_2}$, por lo que

$$\eta(H_1 + \alpha H_2)(f) = (X_{H_1+\alpha H_2})(f) = (X_{H_1} + \alpha X_{H_2})(f) = (\eta(H_1) + \alpha\eta(H_2))(f)$$

para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para cualesquiera $H_1, H_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Así, $\eta(H_1 + \alpha H_2) = \eta(H_1) + \alpha\eta(H_2)$ para cualesquiera $H_1, H_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo que η es una función lineal.

Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned}\eta(\{H_1,H_2\})(f) &= X_{\{H_1,H_2\}}(f) = \{\{H_1,H_2\},f\} = \{H_1,\{H_2,f\}\} + \{H_2,\{f,H_1\}\}\\ &= \{H_1,\{H_2,f\}\} - \{H_2,\{H_1,f\}\} = \{H_1, X_{H_2}(f)\} - \{H_2, X_{H_1}(f)\}\\ &= (X_{H_1}\circ X_{H_2})(f) - (X_{H_2}\circ X_{H_1})(f) = [X_{H_1}, X_{H_2}](f)\\ &= [\eta(H_1),\eta(H_2)](f)\end{aligned}$$

para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y cualesquiera $H_1, H_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo que $\eta(\{H_1,H_2\}) = [\eta(H_1),\eta(H_2)]$ para cualesquiera $H_1, H_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, η es un morfismo de álgebras de Lie. ■

A partir de lo anterior, fijada una función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es posible analizar el conjunto de integrales primeras de su campo Hamiltoniano X_H. Para ello, denotemos por $\mathcal{A}_H = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \{H,f\} = 0\}$.

Proposición 5.1.16. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se satisface que*

$$\{f, F\circ g\} = F'(g)\{f,g\}.$$

Demostración. Notemos que si $X_f = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, entonces

$$\begin{aligned}\{f, F\circ g\} = L_{X_f}(F\circ g) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial(F\circ g)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i F'(g)\frac{\partial(g)}{\partial x_i}\\ &= F'(g)\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial(g)}{\partial x_i} = F'(g) L_{X_f}(g) = F'(g)\{f,g\}\end{aligned}$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolario 5.1.17. *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces $F\circ f \in \mathcal{A}_H$ para toda $f \in \mathcal{A}_H$.*

Demostración. Sea X_H un campo Hamiltoniano y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave. De la proposición anterior se sigue que dada una función $f \in \mathcal{A}_H$ arbitraria, se satisface que

$$\{H, F\circ f\} = F'(f)\{H,f\} = F'(f)(0) = 0,$$

por lo que $F\circ f \in \mathcal{A}_H$ para toda $f \in \mathcal{A}_H$. ■

Definición 5.1.18. *Sea* $(\mathbb{R}^n, \{\ ,\ \})$ *un espacio de Poisson. Un campo vectorial* X *se dice ser un campo de Poisson si satisface que*

$$\mathcal{L}_X\{f,g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\}$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

A partir de la definición de espacio de Poisson y de Definición 5.1.14 se tiene la siguiente proposición

Proposición 5.1.19. *Sea* $(\mathbb{R}^n, \{\ ,\ \})$ *un espacio de Poisson.* X_H *es un campo de Poisson para toda función* $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Sea $(\mathbb{R}^n, \{\ ,\ \})$ un espacio de Poisson.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H}\{f,g\} &= \{H,\{f,g\}\} = -\{g,\{H,f\}\} - \{f,\{g,H\}\}\\ &= \{\{H,f\},g\} + \{f,\{H,g\}\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\}\end{aligned}$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, X_H es un campo de Poisson para toda función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

5.2. Acciones canónicas y Hamiltonianas

Esta parte está enfocada en estudiar las llamadas acciones canónicas y acciones Hamiltonianas sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.2.1. *Sea* $(\mathbb{R}^n, \{\ ,\ \})$ *un espacio de Poisson y* $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una acción suave de* G *en* $\mathbb{R}^n$*. Se dice que* G *actúa de manera canónica en* $\mathbb{R}^n$ *si* Φ_g *es un morfismo de Poisson para cada* $g \in G$*. La acción se dice ser Hamiltoniana si los generadores infinitesimales son campos Hamiltonianos.*

Vamos a probar que la acción diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$ es Hamiltoniana. Para ello, definamos la función $J : \mathbb{R}^3 \to C^\infty(\mathbb{R}^6)$ dada por $J(\mathbf{x}) = J_\mathbf{x}$, donde

$$J_\mathbf{x}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rangle. \tag{5.4}$$

Proposición 5.2.2. *La función* $J : \mathbb{R}^3 \to C^\infty(\mathbb{R}^6)$ *definida por (5.4) satisface las siguientes propiedades* *(i)* J *es una transformación* $\mathbb{R}$*-lineal.*

(ii) *Para cada matriz* $A \in \mathfrak{so}(3)$ *se satisface que* $A_{\mathbb{R}^3} = X_{J_{\mathbf{x}}}$*, donde* $\mathbf{x} = i(A)$*, con* $i : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ *la función de la Definición 3.2.2.*

(iii) $H \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$ *es* SO(3)*-invariante si y sólo si* $\{H, J_i\} = 0$*, donde* $J_i = J_{\mathbf{e}_i}$*, para* $i = 1, 2, 3$.

Demostración.

(i) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarios. A partir de la definición de la función J y de las propiedades del producto interior en $\mathbb{R}^3$ se sigue que

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \langle \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rangle + \alpha \langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rangle \\ &= J_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \alpha J_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (J_{\mathbf{x}} + \alpha J_{\mathbf{y}})(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \end{aligned}$$

por lo que $J(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = J_{\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}} = J_{\mathbf{x}} + \alpha J_{\mathbf{y}} = J(\mathbf{x}) + \alpha J(\mathbf{y})$ para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Así, J es una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

(ii) Recordemos que

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{d}{dt} \left(e^{tA}\mathbf{p}, e^{tA}\mathbf{q} \right) \Big|_{t=0} \\ &= (A\mathbf{p}, A\mathbf{q}) \\ &= (x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_1p_2 - x_2p_1, x_2q_3 - x_3q_2, \\ &\quad\ x_3q_1 - x_1q_3, x_1q_2 - x_2p_1) \end{aligned}$$

Notemos que $J_{\mathbf{x}} = x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3$, donde $J_i = J_{\mathbf{e}_i}$ para $i = 1, 2, 3$, ya que $J_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_2q_3 - p_3q_2$, $J_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_3q_1 - p_1q_3$ y $J_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_2 - p_2q_1$. Así, para el corchete $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbb{R}^6) \times C^\infty(\mathbb{R}^6) \to C^\infty(\mathbb{R}^6)$ dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
X_{J_{\mathbf{x}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \{J_{\mathbf{x}},\ \}(\mathbf{p},\mathbf{q})\\
&= (x_2p_3 - x_3p_2)\frac{\partial}{\partial p_1}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + (x_3p_1 - x_1p_3)\frac{\partial}{\partial p_2}(\mathbf{p},\mathbf{q}) +\\
&\quad (x_1p_2 - x_2p_1)\frac{\partial}{\partial p_3}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + (x_2q_3 - x_3q_2)\frac{\partial}{\partial q_1}(\mathbf{p},\mathbf{q}) +\\
&\quad (x_3q_1 - x_1q_3)\frac{\partial}{\partial q_2}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + (x_1q_2 - x_2p_1)\frac{\partial}{\partial q_3}(\mathbf{p},\mathbf{q})\\
&= (x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_1p_2 - x_2p_1, x_2q_3 - x_3q_2,\\
&\quad x_3q_1 - x_1q_3, x_1q_2 - x_2p_1)\\
&= A_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{p},\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

para todo $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$. Por lo tanto, para toda matriz $A \in \mathfrak{so}(3)$ se satisface que $A_{\mathbb{R}^3} = X_{J_{\mathbf{x}}}$, donde $\mathbf{x} = i(A)$.

(*iii*) Del inciso anterior se sigue que $J_{\mathbf{x}}$ es el Hamiltoniano de $A_{\mathbb{R}^3}$ con $i(A) = \mathbf{x}$. El flujo del campo Hamiltoniano es la familia de soluciones del sistema Hamiltoniano asociado a $X_{J_{\mathbf{x}}}$. Supongamos que $\gamma(t,(\mathbf{p},\mathbf{q}))$ denota el flujo del campo Hamiltoniano $X_{J_{\mathbf{x}}}$, es decir

$$\dot{\gamma}(t,(\mathbf{p},\mathbf{q})) = X_{J_{\mathbf{x}}}(\gamma(t,(\mathbf{p},\mathbf{q})))$$

y

$$\gamma(0,(\mathbf{p},\mathbf{q})) = (\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Por lo cual, en este caso se tiene que

$$\frac{d}{dt}Fl^t_{X_{J_{\mathbf{x}}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \left(Ae^{tA}\mathbf{p}, Ae^{tA}\mathbf{q}\right) = (A\tilde{\mathbf{p}}, A\tilde{\mathbf{q}}) = A_{\mathbb{R}^3}(\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{q}}) = X_{J_{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{q}})$$

con $\tilde{\mathbf{p}} = e^{tA}\mathbf{p}$ y $\tilde{\mathbf{q}} = e^{tA}\mathbf{q}$. Así

$$\frac{d}{dt}Fl^t_{X_{J_{\mathbf{x}}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = X_{J_{\mathbf{x}}}\left(e^{tA}\mathbf{p}, e^{tA}\mathbf{q}\right) = X_{J_{\mathbf{x}}}\left(Fl^t_{X_{J_{\mathbf{x}}}}(\mathbf{p},\mathbf{q})\right).$$

De lo anterior se sigue que si H es SO(3)-invariante, entonces $H(\Phi_R(\mathbf{p},\mathbf{q})) = H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$. Además, como $e^{tE_i} \in \mathrm{SO}(3)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ con $\{E_1,E_2,E_3\}$ la base de $\mathfrak{so}(3)$ dada por (3.3), se tiene que $H(\Phi_{e^{tE_i}}(\mathbf{p},\mathbf{q})) = H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ para $i = 1,2,3$, por lo que $H(Fl^t_{X_{J_i}}(\mathbf{p},\mathbf{q})) = H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ para $i = 1,2,3$, lo cual sucede si y sólo si $\mathcal{L}_{X_{J_i}}H = 0$, es decir, $\{H, J_i\} = 0$ para $i = 1,2,3$.

Por otra parte, si $\{H, J_i\} = 0$ para $i = 1, 2, 3$ entonces $\{H, J_{\mathbf{x}}\} = 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ pues $J_{\mathbf{x}} = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3$. Sea $R \in \mathrm{SO}(3)$, entonces existe $A = x_1 E_1 + x_2 E_1 + x_3 E_1$ tal que $e^A = R$, pues la exponencial restringida a $\mathfrak{so}(3)$ es una función sobre en SO(3). Así, $\gamma(t) = e^{(1+t)(A)}$ satisface que $\gamma(t) \in \mathrm{SO}(3)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\gamma(0) = R$, por lo que $\{H, J_{(1+t)A}\} = 0$ si y sólo si $H\left(Fl^t_{X_{J_{(1+t)A}}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\right) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, lo cual sucede si y sólo si $H(\Phi_{e^{(1+t)A}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tomando $t = 0$ se tiene que $H(\Phi_R(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$, lo cual implica que H es SO(3)-invariante. ■

Se sigue del inciso (*iii*) de la Proposición 5.2.2 que la acción diagonal de SO(3) en $\mathbb{R}^6$ es Hamiltoniana.

5.3. Reducción y reconstrucción de sistemas Hamiltonianos SO(3)-invariantes

A continuación estudiaremos un tipo particular de sistemas Hamiltonianos, los cuales son conocidos como sistemas Hamiltonianios rotacionalmente invariantes o sistemas Hamiltonianios SO(3)-invariantes. Para hablar de este tipo de sistemas, primero daremos la definición de un sistema Hamiltoniano SO(3)-invariante, para lo ello, es necesario recordar la definición de un grupo de simetrías de un sistema autónomo, la cual está dada de la siguiente manera.

Definición 5.3.1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y G un grupo. Se dice que G es un grupo de simetrías del sistema*

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \tag{5.5}$$

si existe una acción de G en $\mathbb{R}^n$ se tiene que para toda curva solución $\gamma : I_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$ del sistema (5.5) se satisface que $g \cdot \gamma$ está bien definida y también es una solucón de (5.5) para todo $g \in G$.

Un sistema Hamiltoniano es SO(3)-invariante si el grupo SO(3) es un grupo de simetrías del sistema. Es decir, dado el sistema Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{x}} = X_H(\mathbf{x}) \tag{5.6}$$

con Hamiltoniano H y una acción Φ de SO(3) en $\mathbb{R}^n$, el sistema es SO(3)-invariante si para toda solución $\gamma : I_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$ del sistema (5.6) se satisface que $\Phi_R \circ \gamma$ está bien definida y también es una solución de (5.6) para toda $R \in \mathrm{SO}(3)$.

Reducción de sistemas Hamiltonianos SO(3)-invariantes

Dada una acción de SO(3) en $\mathbb{R}^n$ es posible definir que es una reducción de un sistema Hamiltoniano SO(3)-invariante de la siguiente manera.

Sea H es una función SO(3)-invariante en $\mathbb{R}^n$. H define una función h en $\mathbb{R}^n/\mathrm{SO}(3)$ tal que $H = h \circ \pi$, donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathrm{SO}(3)$ es una función de Poisson. Así, π transforma al campo X_H sobre $\mathbb{R}^n$ en el campo X_h sobre $\mathbb{R}^n/\mathrm{SO}(3)$. Se dice que el sistema Hamiltoniano definido por X_h sobre $\mathbb{R}^n/\mathrm{SO}(3)$ es una reducción del sistema Hamiltoniano definido por X_H sobre $\mathbb{R}^n$.

A continuación nos centraremos en trabajar con una acción de SO(3) en $\mathbb{R}^6$, con el propósito de dar un ejemplo de cómo llevar a cabo la reducción de un sistema Hamiltoniano SO(3)-invariante con condición inicial, para posteriormente resolver el sistema reducido con una condición inicial que depende de la condición inicial del sistema original, y dar un método para encontrar una solución del sistema original a partir de una solución del sistema reducido.

Reconstrucción de soluciones

Sean $(\mathbb{R}^6, \{\ ,\ \}_{\mathbb{R}^6})$ un espacio de Poisson, y sea $H \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$ SO(3)-invariante. Supongamos que se quiere encontrar la curva solución $\gamma(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0))$ del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = X_H(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

que pasa por el punto $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ en $t = 0$, es decir, se busca la curva $\gamma(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0))$ que satisface

$$\dot{\gamma}(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) = X_H(\gamma(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)))$$

y

$$\gamma(0, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0).$$

Para ello, consideremos el espacio de Poisson $(\mathbb{R}^3, \{\ ,\ \}_K)$. Sabemos que existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $H = h \circ \Gamma$, donde Γ es la función definida (4.3), tal que Γ es un morfismo de Poisson, es decir, $\{f \circ \Gamma, g \circ \Gamma\}_{\mathbb{R}^6} = \{f, g\}_F \circ \Gamma$ para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Sea $\mathbf{x}_0 = \Gamma(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$. Consideremos el sistema reducido X_h, tal que $\alpha(t, \mathbf{x}_0)$ es la curva solución de X_h que pasa por $\mathbf{x}_0$, es decir, $\alpha(t, \mathbf{x}_0)$ satisface que

$$\dot{\alpha}(t, \mathbf{x}_0) = X_h(\alpha(t, \mathbf{x}_0))$$

y

$$\alpha(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0.$$

Por el inciso (*iii*) de la Proposición 5.2.2 sabemos que H es SO(3)-invariante si y sólo si $\{H, \mathrm{J}_i\} = 0$ para $i = 1, 2, 3$, es decir

$$\mathrm{J}_i\left(Fl^t_{X_H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\right) = \mathrm{J}_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

para $i = 1, 2, 3$, lo cual implica que

$$\mathbb{J}\left(Fl^t_{X_H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\right) = \mathbb{J}(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

y así

$$\mathbb{J}\left(Fl^t_{X_H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)\right) = \mathbb{J}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = \mu \neq 0$$

con $\mu \in \mathbb{R}^3$ fijo. Supongamos que $\mu = (c_1, c_2, c_3)$, entonces $Fl^t_{X_H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) \in \mathbb{J}^{-1}(\mu) = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6 \mid \mathrm{J}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c_1,\ \mathrm{J}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c_2,\ \mathrm{J}_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c_3\}$

Sea $\beta(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0))$ una curva suave tal que $\beta(0, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0)) = (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0)$, $\beta(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0)) \in \mathbb{J}^{-1}(\mu)$ para todo t y $\Gamma(\beta(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0))) = \alpha(t, \mathbf{x}_0)$. Así, se tiene que $\Gamma(\beta(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0))) = \Gamma(\gamma(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0)))$ para todo t, por lo que del inciso (*ii*) de la Proposición 4.4.4 se sigue que existe $R(t) \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $\gamma(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0)) = \Phi_{R(t)}(\beta(t, (\mathbf{p_0}, \mathbf{q}_0)))$ para todo t. Así, tomando $\gamma(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ y $\beta(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) = (\tilde{\mathbf{p}}(t), \tilde{\mathbf{q}}(t))$, tenemos que $\gamma(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = (R(t)\tilde{\mathbf{p}}(t), R(t)\tilde{\mathbf{q}}(t))$, por lo que

$$X_H(\gamma(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0))) = \left(R(t)\dot{\tilde{\mathbf{p}}}(t), R(t)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}R(t)\tilde{\mathbf{p}}(t), \frac{d}{dt}R(t)\tilde{\mathbf{q}}(t))\right).$$

Por otra parte, como X_H es SO(3)-invariante, tenemos que $\Phi^*_R X_H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = X_H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para toda matriz $R \in \mathrm{SO}(3)$, por lo que

$$\begin{aligned}
X_H(\beta(t, (\mathbf{p}, \mathbf{q}))) &= D_{\Phi_{R(t)}(\beta(t,(\mathbf{p},\mathbf{q})))}\Phi^{-1}_{R(t)}(X_H(\Phi_{R(t)}(\beta(t, (\mathbf{p}, \mathbf{q}))))) \\
&= D_{\gamma(t,(\mathbf{p},\mathbf{q}))}\Phi_{R(t)^{-1}}(X_H(\gamma(t, (\mathbf{p}, \mathbf{q})))) \\
&= \dot{\beta}(t, (\mathbf{p}, \mathbf{q})) + \left(R(t)^{-1}\frac{d}{dt}R(t)\tilde{\mathbf{p}}(t), R(t)^{-1}\frac{d}{dt}R(t)\tilde{\mathbf{q}}(t)\right).
\end{aligned}$$

Como $R(t)^{-1}\frac{d}{dt}R(t)$ es una matriz antisimétrica para todo t y $A_{\mathbb{R}^6}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (A\mathbf{p}, A\mathbf{q})$ para toda matriz $A \in \mathfrak{so}(3)$, se tiene que existe $A \in \mathfrak{so}(3)$ tal que

$$A_{\mathbb{R}^6}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \left(R(t)^{-1}\frac{d}{dt}R(t)\tilde{\mathbf{p}}(t), R(t)^{-1}\frac{d}{dt}R(t)\tilde{\mathbf{q}}(t)\right).$$

De esta forma, resolviendo

$$(A(t))_{\mathbb{R}^6}(\beta(t,(\mathbf{p},\mathbf{q}))) = X_H(\beta(t,(\mathbf{p},\mathbf{q}))) - \dot{\beta}(t,(\mathbf{p},\mathbf{q}))$$

se tiene que la matriz $R(t)$ debe satisfacer

$$\frac{d}{dt}R(t) = R(t)A(t). \tag{5.7}$$

Por último, una vez encontrada la matriz $R(t)$ que satisface (5.7), la solución del sistema original se obtiene al tomar $\gamma(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)) = \Phi_{R(t)}(\beta(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)))$.

Ejemplo de reconstrucción de soluciones de campos invariantes

Consideremos $\mathbb{R}^6$ con el corchete de Poisson canónico $\{\ ,\ \}_{can}$ y la representación del espacio de órbitas de la acción diagonal dada por el espacio de Poisson $(\mathbb{R}^3, \{\ ,\ \}_F)$ con el corchete dado por

$$\{f,g\}_F = \left\langle \nabla f, \frac{1}{2}\nabla F \times \nabla g \right\rangle,$$

donde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 - x_3^2.$$

En coordenadas este corchete toma la forma

$$\begin{aligned}\{f,g\}_F = 2x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) - 2x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) - \\ x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Así, $\{\ ,\ \}_F$ es el corchete de Poisson definido por (5.2) para la función $K = \frac{1}{2}F$. Por otra parte, $\{\ ,\ \}_{can}$ es el corchete de Poisson canónico en $\mathbb{R}^{2n}$ dado por (5.1) para el caso $n = 3$. Por lo tanto, $(\mathbb{R}^3, \{\ ,\ \}_F)$ y $(\mathbb{R}^6, \{\ ,\ \}_{can})$ son dos espacios de Poisson.

Por otra parte, como se dijo en el Ejemplo 5.1.7, la función $\Gamma : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ dada por (4.3) es un morfismo de Poisson. Para verificar lo anterior, recordemos que

$$\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\rho_1(\mathbf{p},\mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p},\mathbf{q}), \rho_3(\mathbf{p},\mathbf{q})) = \left(\frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2, \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\right),$$

para cualquier $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$, por lo que

$$\begin{aligned}
\{f\circ\Gamma, g\circ\Gamma\}_{can} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial(f\circ\Gamma)}{\partial p_i}\frac{\partial(g\circ\Gamma)}{\partial q_i} - \frac{\partial(f\circ\Gamma)}{\partial q_i}\frac{\partial(g\circ\Gamma)}{\partial p_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \rho_j}\frac{\partial \rho_j}{\partial p_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial \rho_j}\frac{\partial \rho_j}{\partial q_i}\right) - \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \rho_j}\frac{\partial \rho_j}{\partial q_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial \rho_j}\frac{\partial \rho_j}{\partial p_i}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\left(p_i\frac{\partial f}{\partial \rho_1} + q_i\frac{\partial f}{\partial \rho_3}\right)\left(q_i\frac{\partial g}{\partial \rho_2} + p_i\frac{\partial g}{\partial \rho_3}\right) - \right.\\
&\qquad \left.\left(q_i\frac{\partial f}{\partial \rho_2} + p_i\frac{\partial f}{\partial \rho_3}\right)\left(p_i\frac{\partial g}{\partial \rho_1} + q_i\frac{\partial g}{\partial \rho_3}\right)\right)\\
&= (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_2}\frac{\partial g}{\partial \rho_3} - \frac{\partial f}{\partial \rho_3}\frac{\partial g}{\partial \rho_2}\right) - (q_1^2+q_2^2+q_3^2)\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\frac{\partial g}{\partial \rho_3} - \right.\\
&\quad \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_3}\frac{\partial g}{\partial \rho_1}\right) - (p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\frac{\partial g}{\partial \rho_2} - \frac{\partial f}{\partial \rho_2}\frac{\partial g}{\partial \rho_1}\right)\\
&= 2\rho_1\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_2}\frac{\partial g}{\partial \rho_3} - \frac{\partial f}{\partial \rho_3}\frac{\partial g}{\partial \rho_2}\right) - 2\rho_2\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\frac{\partial g}{\partial \rho_3} - \frac{\partial f}{\partial \rho_3}\frac{\partial g}{\partial \rho_1}\right) - \\
&\quad \rho_3\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\frac{\partial g}{\partial \rho_2} - \frac{\partial f}{\partial \rho_2}\frac{\partial g}{\partial \rho_1}\right)\\
&= \left(2x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) - 2x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) - \right.\\
&\quad \left. x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\right)\circ\Gamma\\
&= \{f,g\}_F\circ\Gamma,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\Gamma : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ es un morfismo de Poisson.

Ahora bien, sea $H \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$ dada por $H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \rho_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2$, la función $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que satisface $H = h\circ\Gamma$ es $h(\mathbf{x}) = x_2$ para todo $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

De lo anterior, se sigue que

$$X_h = \{h,\cdot\}_F = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3} = (0, x_3, 2x_1)$$

y

$$X_H = \{H, \cdot\}_{can} = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial q_3} = (q_1, q_2, q_3, 0, 0, 0)$$

son dos campos de Poisson.

Consideremos los sistemas Hamiltonianos para los campos hamiltonianos X_h y X_H. El sistema Hamiltoniano con Hamiltoniano h es el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 0, \\ \dot{x_2} &= x_3, \\ \dot{x_3} &= 2x_1. \end{aligned}$$

Para la función $H = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2$, el sistema Hamiltoniano tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= q_1, \\ \dot{p_2} &= q_2, \\ \dot{p_3} &= q_3, \\ \dot{q_1} = \dot{q_2} &= \dot{q_3} = 0 \end{aligned}$$

Tomemos la condición inicial $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (\sqrt{2a_1}, 0, 0, 0, \sqrt{2a_2}, 0) \in \mathbb{R}^6$, con $a_1, a_2 > 0$ constantes. Sea $\mu = \mathbb{J}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (0, 0, 2\sqrt{a_1 a_2})$. Claramente $\mu \neq 0$ es constante y $\mathbf{x}_0 = \Gamma(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (a_1, a_2, 0)$. Como la solución α del sistema Hamiltoniano con Hamiltoniano h en $\mathbf{x}_0$ satisface

$$\dot{\alpha}(t, \mathbf{x}_0) = X_h(\alpha(t, \mathbf{x}_0))$$

y

$$\alpha(0, \mathbf{x}_0) = (a_1, a_2, 0),$$

resolviendo lo anterior obtenemos que

$$\alpha(t, \mathbf{x}_0) = (a_1, a_3 t + a_2, 2a_1 t)\,.$$

Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ dada por

$$\begin{aligned} \beta(t, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) = \big(&\sqrt{2a_1}\cos(t) - \sqrt{2a_2}t\mathrm{sen}(t), \sqrt{2a_1}\mathrm{sen}(t) + \sqrt{2a_2}t\cos(t), 0, \\ &-\sqrt{2a_2}\mathrm{sen}(t), \sqrt{2a_2}\cos(t), 0\big)\,. \end{aligned}$$

Notemos que $\beta(0,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0))=(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)$, además $\Gamma(\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)))=\alpha(t,\mathbf{x}_0)$ y $\mathbb{J}(\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)))=\mathbb{J}(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)$. Por otra parte,

$$X_H(\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)))=\left(-\sqrt{2a_2}\text{sen}(t),\sqrt{2a_2}\cos(t),0,0,0,0\right)$$

y

$$\begin{aligned}\dot\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0))=\big(&-\sqrt{2a_1}\text{sen}(t)-\sqrt{2a_2}\text{sen}(t)-\sqrt{2a_2}t\cos(t),\sqrt{2a_1}\cos(t)+\sqrt{2a_2}\cos(t)\\&-\sqrt{2a_2}t\text{sen}(t),0,-\sqrt{2a_2}\cos(t),-\sqrt{2a_2}\text{sen}(t),0\big)\,,\end{aligned}$$

por lo que

$$X_H(\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)))-\dot\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0))$$

es igual a

$$\left(\sqrt{2a_1}\text{sen}(t)+\sqrt{2a_2}t\cos(t),-\sqrt{2a_2}\cos(t)+\sqrt{2a_2}t\text{sen}(t),0,\sqrt{2a_2}\cos(t),\sqrt{2a_2}\text{sen}(t),0\right).$$

Tomando $\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0))=(\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{q}})$, tenemos que

$$X_H(\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)))-\dot\beta(t,(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0))=\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tilde{\mathbf{p}},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tilde{\mathbf{q}}\right),$$

entonces

$$A(t)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

La solución del sistema

$$\frac{d}{dt}R(t)=R(t)A(t)$$

con condición inicial

$$R(0)=I$$

es

$$R(t)=e^{A(t)}=\begin{pmatrix}\cos(t)&\text{sen}(t)&0\\-\text{sen}(t)&\cos(t)&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Así, como $\gamma(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)) = \Phi_{R(t)}(\beta(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)))$, se tiene que

$$\gamma(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)) = (\sqrt{2a_1}, \sqrt{2a_2}t, 0, 0, \sqrt{2a_2}, 0). \tag{5.9}$$

Ahora bien, para comprobar que $\gamma(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0))$ dada por (5.9) es solución del sistema original, notemos que

$$\dot{\gamma}(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)) = (0, \sqrt{2a_2}, 0, 0, 0, 0) = X_H(\gamma(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)))$$

y

$$\gamma(0,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0)) = \left(\sqrt{2a_1}, 0, 0, 0, \sqrt{2a_2}, 0\right) = (\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0),$$

por lo que la curva $\gamma(t,(\mathbf{p_0},\mathbf{q}_0))$ dada por (5.9) es la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = X_H(\mathbf{p},\mathbf{q}),$$

que pasa por el punto $(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)$.

Apéndice A

Nociones básicas de cálculo diferencial

En este apéndice, $\mathbb{R}^n$ denota el espacio euclidiano usual.

Un vector $\vec{u}$ en $\mathbb{R}^n$ representa el segmento de recta dirigido que conecta al origen con el punto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\vec{u}_{\mathbf{x}}$ al vector con punto inicial de $\mathbf{x}$ y tiene la misma dirección y longitud que el vector $\vec{u}$.

Definición A.1. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se define al espacio tangente en $\mathbf{x}$ a $\mathbb{R}^n$, como el conjunto de todos los vectores $\vec{u}_{\mathbf{x}}$ en $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$.

A partir de la definición anterior, es claro que $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si se establece que la biyección $\eta_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$, dada por $\eta_{\mathbf{x}}(\vec{u}) = \vec{u}_{\mathbf{x}}$, es una isometría lineal, es decir, si $\eta_{\mathbf{x}}$ es una isometría tal que

$$\eta_{\mathbf{x}}(\vec{u} + \alpha\vec{v}) = \eta_{\mathbf{x}}(\vec{u}) + \alpha\eta_{\mathbf{x}}(\vec{v})$$

para cualesquiera vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$. De lo anterior se sigue que $\eta_{\mathbf{x}}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

A partir de la definición del espacio tangente en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es posible definir cuando una función f definida sobre un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{x}$. Para ello, es necesario recordar la definición de una derivación de un álgebra, la cual está dada de la siguiente manera.

Definición A.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Se dice que $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una derivación de $\mathcal{A}$ si D es un operador lineal y cumple la regla de Leibniz, es decir,

$$D(f + \alpha g) = D(f) + \alpha D(g)$$

y

$$D(fg) = fD(g) + D(f)g$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{A}$.

Definición A.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + h) - f(\mathbf{x}) - T(h)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|h\|_{\mathbb{R}^m}} = 0.$$

En la definición anterior, a la transformación T se le conoce como la diferencial de f en $\mathbf{x}$, la cual denotaremos como $D_{\mathbf{x}}f$. Diremos que f es diferenciable en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si es diferenciable en $\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in U$.

Se dice que f es una función suave en U, si f es infinitamente diferenciable, es decir, $D^n f$ es diferenciable U para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $D^n f$ es la diferencial en U de $D^{n-1}f$, tomando $D^0 f = f$. El conjunto de funciones suaves en U se denota por $C^\infty(U)$.

Definición A.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. f es un difeomorfismo si f es un homeomorfismo, f es diferenciable y f^{-1} es diferenciable.

Existen distintas maneras de definir al espacio tangente en $\mathbf{x}$ a $\mathbb{R}^n$, por lo cual veremos una segunda definición de este espacio. Para ello, consideremos $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva suave, tal que $0 \in I$ y $\gamma(0) = \mathbf{x}$. Entonces, se dice que γ es una curva que pasa por $\mathbf{x}$. Al conjunto de curvas que pasan por el punto $\mathbf{x}$ lo denotaremos por $C^\infty(\mathbf{x}; \mathbb{R}^n)$. Diremos que dos curvas $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbf{x}; \mathbb{R}^n)$ son equivalentes si sus derivadas evaluadas en cero coinciden, es decir, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si y sólo si $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia de curvas. Además, para cada curva $\gamma \in C^\infty(\mathbf{x}; \mathbb{R}^n)$ se tiene que el vector $\gamma'(0)$ pertenece a $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$, por lo que podemos definir al espacio tangente en $\mathbf{x}$ a $\mathbb{R}^n$ como

$$\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n = \{\gamma'(0) \mid \gamma \in C^\infty(\mathbf{x}; \mathbb{R}^n)\}.$$

Para ver que la definición es equivalente a la Definición A.2, falta demostrar que para cualquier vector $\vec{u}_{\mathbf{x}}$ existe una curva suave γ tal que $\gamma(0) = \mathbf{x}$ y $\gamma'(0) = \vec{u}_{\mathbf{x}}$, para ello, notemos que la curva $\gamma(t) = t\vec{u}_{\mathbf{x}} + \mathbf{x}$ satisface ambas condiciones.

Definición A.5. La unión disjunta de los espacios tangentes en cada punto de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\bigsqcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n,$$

es llamada haz tangente, y se denota por $\mathrm{T}\mathbb{R}^n$.

Definición A.6. Un campo vectorial es una función $X : \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}\mathbb{R}^n$ tal que $X(\mathbf{x}) \in \mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

A partir de la definición anterior, podemos pensar a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ como

$$X(\mathbf{x}) = (\lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_n(\mathbf{x}))$$

con $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ya que $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial. Es decir, podemos definir a un campo vectorial por medio de su vector de coordenadas con respecto a una base de $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$. Tomando $\{x_1, \ldots, x_n\}$ como las coordenadas en $\mathbb{R}^n$, se puede probar que

$$X(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x}) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}}$$

(ver [19]).

Al conjunto de campos vectoriales lo denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Considerando el producto escalar y la suma usual de funciones, se tiene que $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Más aún, es posible probar que el conjunto $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se puede identificar con el álgebra de derivaciones del álgebra de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, [3]. Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Proposición A.7. *El espacio de campos vectoriales $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ junto con el conmutador es una álgebra de Lie.*

Demostración. Ver demostración en [3, 8, 9]. ■

Definición A.8. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se define la derivada de Lie de f a lo largo de X como la función $\mathcal{L}_X f$ definida por

$$\mathcal{L}_X f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde $X = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

La definición usual de un campo vectorial suave dice que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es suave si las funciones componentes λ_i son suaves para toda $i = 1, \ldots, n$. Sin embargo podemos dar una definición equivalente de un campo vectorial suave mediante la derivada de Lie, como se ve a continuación.

Definición A.9. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. X se dice ser suave si para cada función suave $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $\mathcal{L}_X f$ es suave.

Las siguientes definiciones son utilizadas en el desarrollo de éste trabajo y son puestas aquí para usarse como referencia por el lector.

Definición A.10. Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. X y Y se dicen estar f relacionados si $D_{\mathbf{x}} f(X(\mathbf{x})) = Y(f(\mathbf{x}))$.

Definición A.11. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funciones suaves en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. El pull-back de g bajo f es una función $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$(f^*g)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definición A.12. Sea f un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. El pull-back de X bajo f es una función $f^* : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$(f^*X)(\mathbf{x}) = D_{f(\mathbf{x})} f^{-1}(X(f(\mathbf{x})))$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definición A.13. Un sistema autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, dado por

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = X(\mathbf{x}) \tag{A.1}$$

donde $X(\mathbf{x}) = (\lambda_1(\mathbf{x}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{x}))$ es un campo vectorial suave definido en un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$

Una función suave $\gamma = I_\varepsilon \to \mathcal{D}$, con $I_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < \varepsilon\}$, se dice ser una solución de (A.1) en un punto $\mathbf{x}_0$ si se satisface que

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = X(\gamma(t)) \tag{A.2}$$

para todo $t \in I_\varepsilon$, y

$$\gamma(0) = \mathbf{x}_0. \tag{A.3}$$

Del Teorema de Existencia y Unicidad se sigue que existe una única solución $\gamma(t)$ para el problema con las condiciones (A.2) y (A.3) en el intervalo I_ε.

En general, la solución $\gamma : I_\varepsilon \to \mathcal{D}$ del sistema (A.1) en el punto $\mathbf{x}_0$ se denota como $\gamma(t, \mathbf{x_0})$ o bien como $\gamma^t(\mathbf{x_0})$.

Por otra parte, la curva suave parametrizada que se forma por la imagen de I_ε bajo $\gamma(t, \mathbf{x_0})$ es llamada la trayectoria que pasa por $\mathbf{x}_0$ en el tiempo $t = 0$.

Definición A.14. El flujo de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es la familia de funciones suaves $Fl_X^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determinadas a lo largo de las trayectorias del sistema (A.1), dada por

$$Fl_X^t(\mathbf{x}_0) = \gamma(t, \mathbf{x}_0).$$

Apéndice B

Código para calcular el operador de promedio en SO(3)

Programa utilizado para calcular el SO(3)-promedio de las funciones y campos vectoriales presentados en el Capítulo 4, en el software wxMaxima.

```
/*  Matriz R en SO(3)  */

R11(t,p1,p2):=cos(p1)*cos(p2)-cos(t)*sin(p1)*sin(p2);

R12(t,p1,p2):=-cos(p1)*sin(p2)-cos(t)*sin(p1)*cos(p2);

R13(t,p1):=sin(p1)*sin(t);

R21(t,p1,p2):=sin(p1)*cos(p2)+cos(t)*cos(p1)*sin(p2);

R22(t,p1,p2):=-sin(p1)*sin(p2)+cos(t)*cos(p1)*cos(p2);

R23(t,p1):=-cos(p1)*sin(t);

R31(t,p2):=sin(p2)*sin(t);

R32(t,p2):=cos(p2)*sin(t);

R33(t):=cos(t);

R(t,p1,p2):=matrix([R11(t,p1,p2),R12(t,p1,p2),R13(t,p1)],
                   [R21(t,p1,p2),R22(t,p1,p2),R23(t,p1)],
                   [ R31(t,p2)  , R32(t,p2)  , R33(t) ]);
```

```
/*   Vectores en ℝ³   */

v:[v1,v2,v3];

w:[w1,w2,w3];


/*   Funciones suaves en ℝ³   */

f1(x):=x[1];

f2(x):=sqrt(x[1]^2+x[2]^2+x[3]^2);

f3(x):=x[1]+x[2]^2+x[3]^3;

f4(x):=x[1]^3+x[2]*x[3]^2;

f5(x):=x[1]*x[2]*x[3];


/*   Promedio de funciones suaves en ℝ³   */

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(f1(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(f2(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(f3(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(f4(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(f5(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));


/*   Funciones suaves en ℝ³ × ℝ³   */

r1(p,q):=1/2*p.p;

r2(p,q):=1/2*q.q;

r3(p,q):=p.q;
```

```
r4(p,q):=p[1]+p[2]+p[3];

r5(p,q):=p[1]*q[3]+p[2]*q[2]+p[3]*q[1];
```

/*   Promedio de funciones suaves en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ */

```
trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(r1(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),
p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(r2(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),
p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(r3(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),
p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(r4(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),
p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(r5(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*%pi),
p1,0,2*%pi)));
```

/*   Campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ */

```
X1(x):=[1,0,0];

X2(x):=[x[1],0,0];

X3(x):=[x[1],x[2],x[3]];

X4(x):=[x[1]^2,x[2]^2,x[3]^2];

X5(x):=[x[1]+x[2]+x[3],0,0];
```

/*   Promedio de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ */

```
trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R(t,p1,p2)).X1(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*
%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R(t,p1,p2)).X2(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*
%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R(t,p1,p2)).X3(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*
%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R(t,p1,p2)).X4(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*
%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R(t,p1,p2)).X5(R(t,p1,p2).v)))*sin(t),t,0,%pi),p2,0,2*
%pi),p1,0,2*%pi)));


/*  Matriz auxiliar R2  */

R2(t,p1,p2):=matrix([R11(t,p1,p2),R12(t,p1,p2),R13(t,p1),0,0,0],
                    [R21(t,p1,p2),R22(t,p1,p2),R23(t,p1),0,0,0],
                    [ R31(t,p2)  , R32(t,p2)  , R33(t)  ,0,0,0],
                    [0,0,0,R11(t,p1,p2),R12(t,p1,p2),R13(t,p1)],
                    [0,0,0,R21(t,p1,p2),R22(t,p1,p2),R23(t,p1)],
                    [0,0,0, R31(t,p2)  , R32(t,p2)  , R33(t)  ]);


/*  Campos vectoriales en ℝ⁶  */

V1(p,q):=[1,0,0,0,0,0];

V2(p,q):=[p[1],p[2],p[3],q[1],q[2],q[3]];

V3(p,q):=[p[1]*q[1],p[2]*q[2],p[3]*q[3],0,0,0];

V4(p,q):=[p[1]^2,p[2]^2,p[3]^2,q[1]^2,q[2]^2,q[3]^2];

V5(p,q):=[p[1]+p[2]+p[3],0,0,q[1]+q[2]+q[3],0,0];
```

```
/*  Promedio de campos vectoriales en ℝ^6  */

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R2(t,p1,p2)).V1(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,
%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R2(t,p1,p2)).V2(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,
%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R2(t,p1,p2)).V3(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,
%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R2(t,p1,p2)).V4(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,
%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));

trigsimp(ratsimp((1/(8*%pi^2))*integrate(integrate(integrate(trigsimp(
ratsimp(invert(R2(t,p1,p2)).V5(R(t,p1,p2).v,R(t,p1,p2).w)))*sin(t),t,0,
%pi),p2,0,2*%pi),p1,0,2*%pi)));
```

Bibliografía

[1] G. Dávila Rascón, R. Flores Espinoza and Yu. Vorobiev. *Álgebra Lineal: Teoría y Problemas*, volume 57. Editorial Unison, 2006.

[2] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, volume 222. Springer, 2015.

[3] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer New York, 1983.

[4] JJ Duistermaat and Johan AC Kolk. *Lie Groups.* Springer Science & Business Media, 1999.

[5] William M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, volume 120. Academic press, 1986.

[6] Mark Aronovich Naimark and H.K. Farahat. *Linear Representations of the Lorentz Group.* Pergamon, 1964.

[7] Richard H. Cushman and Larry M. Bates. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, volume 94. Springer, 1997.

[8] R. Flores Espinoza and Yu. Vorobiev. *Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Geometry.* 1998.

[9] R Abraham, JE Marsden, and R Ratiu. Manifolds, tensor analysis, and applications. 1988.

[10] Ralph Abraham and Jerrold E Marsden. Foundations of mechanics, 1987.

[11] V. I. Arnold. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. 1988.

[12] JE Marsden, R Montgomery, and TS Ratiu. Reduction, symmetry and phases in mechanics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 88(436):1–110, 1990.

[13] J.E. Marsden and T. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Springer New York, 1994.

[14] Peter W Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93. American Mathematical Soc., 2008.

[15] James Montaldi. Persistence and stability of relative equilibria. *Nonlinearity*, 10(2): 449, 1997.

[16] J.A. Sanders and F. Verhulst. Nonlinear differential equations and dynamical systems. 1985.

[17] J.A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Springer New York, 2007.

[18] JR Munkres. Topology prentice hall. *Englewood Cliffs, NJ*, 1975.

[19] Michael Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.

[20] Jean-Paul Dufour and Nguyen Tien Zung. *Poisson structures and their normal forms*, volume 242. Springer Science & Business Media, 2006.