"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Series en espacios lineales normados

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Elva Lizbeth Clark Flores

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Febrero de 2022

SINODALES

Dr. Martín Gildardo Garcia Alvarado

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Dr. Fernando Luque Vásquez

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá

A Dios y a mis padres.

Agradecimientos

En primer lugar le agradezco a Dios por darme la fortaleza de seguir adelante.

A mi familia por haber creído en mí en todo momento, por su apoyo incondicional, muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que se incluye éste. Le doy gracias a mis padres Elva Flores y Rosendo Clark por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado y la educación que me brindaron a lo largo de mi vida. Les dedico a ustedes este logro amados padres.

A la señora Norma Rivera por darme un lugar en su hogar, su apoyo y sus consejos que me ayudaron a seguir adelante y gracias a usted logré estudiar la licenciatura en matemáticas, ya que sin su ayuda no estaría aquí ahora.

Quiero agradecer a mi asesora Martha Guzmán quien con sus conocimientos y paciencia me guió a través de cada una de las etapas de este proyecto para alcanzar los resultados que buscaba.

Por último a mis hermanos y amigos que alegraron mis días al apoyarme aún cuando mis ánimos decaían.

Índice general

Introducción

La teoría de espacios normados fue forjada por los esfuerzos conjuntos de varios analistas entre 1910 y 1935, principalmente Riesz, Helly, Hahn y Banach. Esta teoría combina las ideas del álgebra lineal y la noción de distancia, lo cual permite comprender mejor gran parte de las aplicaciones actuales del análisis funcional lineal ya que proporciona una base lo suficientemente general como para incluir muchos modelos prácticos importantes.

La gama de estudios de estos espacios es tan amplia, que en este trabajo hemos enfocado nuestra atención en las series convergentes. El objetivo es analizar algunas de las distintas formas de convergencia de series en espacios normados y posteriormente particularizar este estudio a espacios de Banach y de Hilbert, con el fin de obtener caracterizaciones de los distintos tipos de convergencia. Posteriormente, centramos nuestra atención en el estudio de funciones que preservan la convergencia en espacios lineales normados, generalizando un resultado de Rado.

La tesis consta de cuatro capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el Capítulo 1 daremos un repaso acerca de los tipos de convergencia de series en espacios normados, dichos resultados serán utilizados a lo largo del trabajo.

En el Capítulo 2 analizaremos las relaciones que hay entre los diferentes tipos de convergencia, así como también algunas de sus propiedades más importantes en el espacio de los reales, a saber, la equivalencia de la convergencia absoluta, la convergencia incondicional, la convergencia por subseries y la sumabilidad.

En el Capítulo 3 se introducen algunos resultados básicos en el contexto de espacios de Banach y de Hilbert, haciendo énfasis en la importancia de la completitud secuencial del espacio normado.

Finalmente, en el Capítulo 4 se estudian los espacios normados $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_\infty$ formado por funciones definidas en $[0,1]$ que preservan la convergencia de series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < 1$ donde $t_n \in [0,1]$, los cuales pueden considerarse como subespacios del espacio topológico $\mathfrak{F}$ de todas las funciones reales definidas en $[0,1]$ dotados de la topología de la convergencia uniforme. También caracterizaremos a las funciones que preservan la convergencia de espacios normados, así como también se dará una caracterización de permutaciones que preservan la convergencia de series en dichos espacios.

Preliminares

El objetivo de este capítulo es recordar algunas definiciones y resultados básicos que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Definición 0.1. Un espacio normado X es un espacio vectorial sobre el campo de escalares K, donde K será siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, al cual se ha dotado de una norma.

Una norma en un espacio vectorial V sobre K es una función real en V cuyo valor en $x \in V$ se denota por $\|\cdot\|$ y tiene las propiedades

i) $\|x\| \geq 0 \qquad \forall\, x \in X.$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \forall\, x \in X.$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall\, x \in X, \lambda \in K.$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in X.$

A la pareja $(X, \|\cdot\|)$ le llamaremos espacio normado.

Definición 0.2. Sea X un espacio vectorial sobre K y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en X. Diremos que las normas son equivalentes si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mu\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \lambda\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in X.$$

Algunos ejemplos básicos de espacios normados son:

a) *El espacio* K^n. $K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in K \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$ y K es $\mathbb{R}$, o bien $\mathbb{C}$, con norma

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2} \qquad x \in K^n.$$

b) *Los espacios* l^p *y* l^∞. Dado $1 \leq p < \infty$, l^p consiste de las sucesiones reales $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ para las cuales la serie $\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|^p$ converge. Cuando $p = \infty$, l^∞ consiste de las sucesiones reales acotadas. En otras palabras, $l^p = \{(x_n)_{n\geq 1} \in K^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < \infty\}$ y $l^\infty = \{(x_n)_{n\geq 1} \in K^{\mathbb{N}} : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$, con las siguientes normas respectivamente

$$\|x\|_p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

c) *Los espacios* c_0 *y* c_{00}. Denotemos $c_0 = \{(x_n)_{n\geq 1} \in K^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\}$ y $c_{00} = \{(x_n)_{n\geq 1} \in K^{\mathbb{N}} : \exists\, N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ si $n \geq N\}$, con norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \qquad \forall\, x \in c_{00}.$$

d) *El espacio* $C(X, \mathbb{R})$. Defínase $C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$, donde X es un espacio métrico compacto, con norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Definición 0.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Diremos que X es un espacio de Banach si (X, d) es un espacio métrico completo, donde $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$.

El año de 1920, Stefan Banach (1892-1945) en su tesis doctoral introduce la definición axiomática de los espacios que hoy llevan su nombre (dado por M. Fréchet), que en su momento se refirió a ellos como espacios normados secuencialmente completos y no como espacios de Banach. Por ello algunos matemáticos afirman que en este año fue el nacimiento del Análisis Funcional moderno, debido a las grandes aportaciones que trajo consigo este concepto.

De los ejemplos antes mencionados, solo el espacio c_{00} no es un espacio de Banach.

Además de los espacios de Banach existen otro tipo especial de espacios normados, como los espacios de Hilbert, que no son más que espacios vectoriales dotados de un producto interior lo que permite calcular distancias.

Definición 0.4. Un *espacio pre-Hilbert* es un espacio vectorial X sobre un campo K donde está definido un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to K$ que satisface los siguientes axiomas

(IP1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \qquad (x, y, z \in X).$

(IP2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \qquad (\alpha \in K,\ x, y \in X).$

(IP3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \qquad (x, y \in X)$

(IP4) $\langle x, x\rangle \geq 0 \qquad (x \in X).$

(IP5) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0 \qquad (x \in X).$

Un *espacio de Hilbert* es un espacio pre-Hilbert completo. Claramente, un espacio de Hilbert completo es un espacios de Banach.

Definición 0.5. Una *función preserva la convergencia de series* si para cualquier serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ también es convergente.

Definición 0.6. Se dice que una permutación $p = \{p_n\}_{n\geq 1}$ del conjunto $\mathbb{N}$ *preserva la convergencia de series* en un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|)$ si para cada serie convergente $\sum_{n\geq 1} x_n$ en X la serie $\sum_{n\geq 1} x_{p_n}$ también es convergente.

En algunas ocasiones usaremos la notación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ para una permutación $p = \{p_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ (es decir, ponemos $\pi(n) = p_n, n = 1, 2, \ldots$) luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}.$$

Finalmente, la ultima definición:

Definición 0.7. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es de la forma $A = \{i+1, i+2, \ldots, i+m\}$ para algunos $i, m \in \mathbb{N}$ diremos que A es un *bloque de números enteros positivos.*

Capítulo 1

Tipos de convergencia de series en un espacio normado

En el siglo XVIII el uso de las series y su falta de verificación de su convergencia o divergencia había producido paradojas y desacuerdos entre los matemáticos de esta época, es por ello que a finales de este siglo y principios del siglo XIX, el concepto de serie empezó a tener más auge pues se encontraron algunos resultados sobre series que estimularon las investigaciones, lo que trajo consigo avances en la matemática, ya que con estos resultados se redefinió el concepto de función.

Actualmente, el estudio de series convergentes resulta de gran interés en el análisis matemático. Por ello en este primer capítulo se estudiarán varias formas de convergencia en espacios lineales normados.

Para esto vamos a considerar un espacio lineal normado X, que supondremos real, donde $\|\cdot\|$ representa la norma en X y $\sum_{j\geq 1} x_j$ la serie con términos x_j en X.

1.1. Convergencia y convergencia absoluta

Comenzaremos dando la definición de una serie convergente en un espacio normado X.

Definición 1.1. La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ se dice que *converge* a un valor $x \in X$ llamado *la suma de la serie*, si la sucesión de sus sumas parciales converge a x. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N. \tag{1.1}$$

Si no existe $x \in X$ que satisfaga (1.1), se dice que la serie *no converge*, o que diverge.

Lema 1.1. *Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, la suma x es única.*

Demostración: Supongamos que su suma no es única, entonces existen $x, y \in X$ que satisfacen (1.1), tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que

$$\|x - y\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - x \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - y \right\| < 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano, concluimos que $\|x - y\| = 0$, o equivalentemente $x = y$. $\square$

La definición formal de serie convergente, y el criterio ahora llamado de Cauchy, aparecen en el *Cours d'Analyse*, publicado por Augustin L. Cauchy (1789-1857) en 1821.

Por otro lado, se define la convergencia absoluta de la siguiente manera:

Definición 1.2. La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge absolutamente* si la serie de términos reales $\sum_{j\geq 1} \|x_j\|$ converge.

La definición de serie absolutamente convergente es de gran importancia, más adelante, en el capítulo 3 veremos que la convergencia absoluta de series permite caracterizar a los espacios de Banach.

1.2. Convergencia incondicional

Otra definición de convergencia que estaremos utilizando a lo largo de este trabajo es la siguiente:

Definición 1.3. Sean $\sum_{j\geq 1} x_j$ y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. La serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ se llama un *reordenamiento o un arreglo*, de la serie original $\sum_{j\geq 1} x_j$.

La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ se dice que *converge incondicionalmente* a $x \in X$, si la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge a x, para cada biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge a $x \in X$, pero existe al menos una biyección σ tal que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ no converge a x, se dice que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge condicionalmente*.

Observemos que convergencia incondicional implica convergencia. Esto se ve tomando la biyección identidad. Como consecuencia del Lema 1.1, el valor x en la definición anterior es único.

De acuerdo con ([6], pág. 193) Riemann descubrió un dato interesante sobre series condicionalmente convergentes en 1854, que nos dice que para cualquier número real A es posible reordenar los términos de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \tag{1.2}$$

de tal manera que la serie resultante converja a A. Esto debido a que la suma de los términos positivos y negativos de (1.2)

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \dots$$

son ambos divergentes.

La idea es tomar los términos positivos $1 + 1/3 + \dots$ hasta que la suma supere A y esto es posible ya que la serie con términos positivos diverge. Luego, tomamos los términos negativos hasta que estemos por debajo de A de nuevo, esto es posible ya que $-1/2 - 1/4 - \dots$ diverge. Luego, seguimos agregando términos positivos hasta que se vuelva a sobrepasar A, y así sucesivamente. De esta forma, obtenemos una serie reordenada que converge a A, como se describe a continuación

$$1.2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \dots$$
$$1.5 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots .$$

1.3. Convergencia por subseries

Definición 1.4. La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge por subseries*, si para cada subsucesión $\{x_{j_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{x_j\}_{j\geq 1}$, la serie $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ converge.

Recordemos que $\{x_{j_k}\}_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $\{x_j\}_{j\geq 1}$ si la función $k \to j_k$, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, es estrictamente creciente.

Lema 1.2. *La suma de cada subserie es única.*

Demostración: Considérese la subserie $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$. Supongamos que existen $x, y \in X$ tal que $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ converge a x y también a y, por el Lema 1.1 se tiene que $x = y$.

$\square$

1.4. Sumabilidad

Finalmente, la última definición de convergencia es la siguiente:

Definición 1.5. La familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es *sumable*, con suma $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j\in F} x_j - x \right\| < \varepsilon \tag{1.3}$$

para todo conjunto finito F tal que $F_\varepsilon \subseteq F \subset \mathbb{N}$.

Lema 1.3. *Si la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable, su suma x es única.*

Demostración. Supongamos que la suma no es única, entonces existen $x, y \in X$ que satisfacen (1.3), tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - y\| \leq \left\| \sum_{j\in F_\varepsilon} x_j - x \right\| + \left\| \sum_{j\in F_\varepsilon} x_j - y \right\| < 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como en el caso del Lema 1.1, concluimos que $x = y$.

□

Aunque estaremos usando la definición 1.5, la noción de sumabilidad puede definirse para una familia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, donde Λ es un conjunto arbitrario. Aquí nos limitaremos al caso de familias numerables $\{x_j\}_{j\geq 1}$, es decir al caso $\Lambda = \mathbb{N}$.

Observemos que la definición de sumabilidad no menciona ninguna ordenación en el índice j tomando valores en F. Así, se puede pensar que la sumabilidad es una forma incondicional de convergencia, pero la sumabilidad no depende del orden de los términos, de algún modo se puede decir que no hay un orden. Es lo que Pete Clark llama suma desordenada (ver [3], pág. 299).

Capítulo 2

Equivalencia de algunos tipos de convergencia para series de números reales

En algunos casos cuando se busca la convergencia o divergencia de una serie, es muy difícil trabajar con la propia definición, es por ello por lo que se opta por investigar si existe algún tipo de equivalencia. Por esta razón resulta natural que las primeras propiedades que veremos serán los diferentes tipos de convergencia y sus equivalencias.

Daremos inicio estudiando algunos resultados para series de números reales, los cuales nos serán de utilidad para el estudio de series con valores en un espacio de Banach.

Comenzaremos por estudiar a las series absolutamente convergentes.

Proposición 2.1. *Si la serie de términos reales* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge absolutamente, cada reordenamiento también converge absolutamente, e incondicionalmente a un cierto valor* $x \in X$. *En particular, convergencia absoluta implica convergencia.*

Demostración: Primero se demostrará el caso particular, convergencia absoluta implica convergencia. Consideremos las sumas parciales de ambas

series
$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad t_n = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Si $p, q \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad $q < p$,
$$|s_p - s_q| = \left| \sum_{j=q+1}^{p} x_j \right| \leq \sum_{j=q+1}^{p} |x_j| = t_p - t_q = |t_p - t_q| \tag{2.1}$$

Por hipótesis $\{t_n\}$ es convergente, por ende de Cauchy, es decir dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|t_p - t_q| < \varepsilon$ para todo $p, q \geq n_0$. Por (2.1) se sigue que $|s_p - s_q| < \varepsilon$ para todo $p, q \geq n_0$, es decir, la sucesión $\{s_n\}$ es de Cauchy y por el criterio de convergencia de Cauchy en $\mathbb{R}$, $\{s_n\}$ converge. Por lo tanto convergencia absoluta implica convergencia.

Por otra parte, sea $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ un reordenamiento de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideraremos también $z = \sum_{j\geq 1} |x_j|$ de donde $\sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma(k)}| \leq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión de sumas parciales es acotada se sigue entonces que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge absolutamente a algún $x \in \mathbb{R}$.

Por lo demostrado anteriormente existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$. Si escribimos
$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma(k)}|,$$
por la definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que
$$|y - s_n| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\forall\, n \geq N).$$

Elijamos una suma parcial t_r tal que $|x - t_r| < \frac{\varepsilon}{3}$ y de tal forma que $x_1, \ldots, x_N$ todas ocurren en t_r. Luego
$$|x - y| \leq |x - t_r| + |t_r - s_N| + |s_N - y|.$$

Como $s_N = \sum_{j=1}^{N} x_j$ y cada uno de $x_1, \ldots, x_N$ está en t_r, el mínimo j en $t_r - s_N$, es $j = N + 1$; entonces $|t_r - s_N| \leq \sum_{k\geq N+1} |x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. De aquí se sigue que

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Por lo tanto, $y = x$. Lo que concluye la demostración.

□

La demostración de que si una serie de términos reales converge absolutamente, entonces todos sus reordenamientos convergen a una misma suma se debe al matemático Gustav L. Dirichlet (1805-1859), quien demostró esto en 1837, ([2], pág. 25). Sin embargo, esta afirmación no puede extenderse a cualquier espacio normado; más adelante, en el capítulo 3 se ilustrará este hecho en el ejemplo 3.1.

A continuación veremos una definición equivalente de la convergencia absoluta.

Proposición 2.2. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge absolutamente.*

2. *Para cada sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1}$ tal que $\varepsilon_j = 1$ o -1, la serie $\sum_{j\geq 1} \varepsilon_j x_j$ converge.*

Demostración: Para probar 1) implica 2), sólo basta observar que

$$|\varepsilon_j x_j| = |x_j|$$

y usar el caso particular de la Proposición 2.1, que asegura que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Suponemos que 2) se cumple, eligiendo la sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1}$ tal que:

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \geq 0, \\ -1 & \text{si } x_j < 0. \end{cases},$$

entonces $\sum_{j\geq 1}\varepsilon_j x_j = \sum_{j\geq 1}|x_j|$, lo cual prueba que la serie converge absolutamente.

Esto completa la prueba de la proposición.

□

Teorema 2.1. *Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales converge, pero no absolutamente, entonces para cada $y\in\mathbb{R}$ existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ que converge a y. Además, existen reordenamientos que divergen.*

Demostración: Para probar el teorema basta ver que si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ de tal manera que $-\infty\leq\alpha\leq\beta\leq\infty$, entonces existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ con las sumas parciales tal que

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = \alpha \qquad \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = \beta. \tag{2.2}$$

En particular si $\alpha=\beta$ se tiene entonces que $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge a $\alpha=\beta$ y como α,β son arbitrarios, se cumple que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge a y para toda $y\in\mathbb{R}$, donde $y=\alpha=\beta$. En el caso cuando $\alpha\neq\beta$, son los reordenamientos que divergen de los que habla el teorema.

Definiendo p_n y q_n de la siguiente manera

$$p_n := \frac{|x_n|+x_n}{2}, \qquad q_n := \frac{|x_n|-x_n}{2} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},$$

entonces $p_n - q_n = x_n$, $p_n + q_n = |x_n|$, $p_n, q_n \geq 0$. Observemos que ambas series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ divergen, pues si ambas convergieran entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n) < \infty$$

lo cual contradice la hipótesis. Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N}(p_n-q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n,$$

si la serie $\sum p_n$ diverge y la serie $\sum q_n$ converge (o viceversa) esto implicaría la divergencia de $\sum x_n$ y de nuevo estaríamos contradiciendo la hipótesis.

Ahora, supongamos que $P_1, P_2, \ldots$ denota los términos no negativos de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$, en el orden en que aparecen, y sea $Q_1, Q_2, \ldots$ el valor absoluto de los términos negativos de la sucesión $\sum x_n$, también en su orden original.

Las series $\sum P_n$, $\sum Q_n$ difieren de $\sum p_n$, $\sum q_n$ solo en términos cero y, por lo tanto, son divergentes.

Construimos sucesiones $\{m_n\}$, $\{k_n\}$, de la siguiente manera a fin de considerar la serie

$$P_1+\ldots+P_{m_1}-Q_1-\ldots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\ldots+P_{m_2}-Q_{k_1+1}-\ldots-Q_{k_2}+\ldots \quad (2.3)$$

Escogemos sucesiones reales $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ tal que $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $\alpha_n < \beta_n$, $\beta_1 > 0$.

Sean m_1, k_1 los enteros más pequeños tal que

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} > \beta_1,$$

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

Sean m_2, k_2 los enteros más pequeños tal que

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} > \beta_2,$$

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} < \alpha_2;$$

y continuamos de esta manera. Esto es posible ya que $\sum P_n$ y $\sum Q_n$ divergen. Probaremos que (2.3) es un reordenamiento de la serie $\sum x_n$, que satisface (2.2).

Si a_n, b_n denotan las sumas parciales de (2.3) cuyos últimos términos son P_{m_n}, $-Q_{k_n}$, entonces

$$|a_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \qquad |\alpha_n - b_n| \leq Q_{k_n}.$$

Pues si no se cumpliera que $|a_n - \beta_n| \leq P_{m_n}$, entonces $|a_n - \beta_n| > P_{m_n}$, y por la construcción de los β_n se tiene que $a_n > \beta_n$ es decir $a_n - \beta_n > 0$. Entonces podemos escribir la desigualdad $|a_n - \beta_n| > P_{m_n}$ como $a_n - \beta_n > P_{m_n}$ de aquí obtenemos lo siguiente

$$\beta_n \quad < \quad a_n - P_{m_n} = P_1 + \ldots + P_{m_n} - P_{m_n} = P_1 + \ldots + P_{m_n - 1}$$

contradiciendo la elección de m_n. Por lo tanto $|a_n - \beta_n| \leq P_{m_n}$.
De manera análoga se prueba que $|\alpha_n - b_n| \leq Q_{kn}$.

Como $\sum x_j$ converge, $P_n \to 0$ y $Q_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Y por las desigualdades anteriores se tiene que $a_n \to \beta$, $b_n \to \alpha$.

Por último, veremos que ningún número menor que α o mayor que β puede ser un límite subsecuencial de sumas parciales de (2.3).

Supongamos que $L < \alpha$ y que L es límite subsecuencial de la sucesión de sumas parciales asociadas a (2.3); así, existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales asociada a (2.3), llamémosla S_L tal que S_L converge a L.

Será suficiente suponer que, o bien, S_L contiene una infinidad de sumas incompletas de términos P_k's o bien, S_L contiene una infinidad de sumas incompletas de Q_j's.

Analicemos el caso en el que S_L contiene una infinidad de sumas incompletas de Q_j's.

Dado que $S_L \to L$, entonces cualquier subsucesión de S_L converge a L, por lo cual, existe una subsucesión de S_L que consta solamente de sumas incompletas de Q_j's y que converge a L, digamos que la subsucesión se llama σ_L.

Existe un índice N_1 a partir del cual todos los términos de σ_L se encuentran en el intervalo $(L - r, L + r)$, donde $r = \frac{1}{2}(\alpha - L)$.

Por otra parte, puesto que $\alpha_n \to \alpha$, existe otro índice N_2 a partir del cual α_n se encuentra en el intervalo $(L + r, \alpha + r)$.

Eligiendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ podemos observar que para índices mayores que N tendremos que

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + \ldots + P_{m_s+1} + \ldots + P_{m_{s+1}}$$
$$-Q_{k_s+1} - \ldots - Q_{k_{s+1}-j} < L + r < \alpha_{k_{s+1}}$$

lo cual contradice la minimalidad de k_{s+1}.

De modo análogo se puede analizar el caso en el que $L > \beta$.

Esto concluye la demostración.

$\square$

En otras palabras una serie de términos reales que converge pero no absolutamente, converge condicionalmente. Esta demostración se debe a Bernhard Riemann (1826-1866), quien lo incluyó en su tesis de habilitación, defendida en Göttingen en 1854 ([6], pág. 192).

A partir de este resultado y la proposición 2.1, se obtienen los siguientes corolarios:

Corolario 2.1. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, si*

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x \text{ es la suma de un reordenamiento } \sum_{j\geq 1} x_{\sigma(j)}\right\}$$

entonces, S es, o el conjunto vacío, o un número, o $\mathbb{R}$.

Demostración: La prueba de este corolario se desglosa en 3 casos:

Primero, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, pero no absolutamente, por el Teorema 2.1, se tiene que $S = \mathbb{R}$; en segundo lugar si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente digamos a $x \in \mathbb{R}$ por la Proposición 2.1 se tiene que $S = \{x\}$;

Por último, si $\sum_{j\geq 1} x_j$ no converge, sus reordenamientos no convergen pues si existiera un reordenamiento de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ que convergiera, la serie correspondiente a tal reordenamiento es condicionalmente convergente, ya que la serie original $\sum_{j\geq 1} x_j$ es un reordenamiento del reordenamiento. Y por consiguiente como ningún reordenamiento converge, entonces $S = \emptyset$.

$\square$

Corolario 2.2. *La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales converge absolutamente si y sólo si converge incondicionalmente.*

Demostración: Es claro que si $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente entonces converge incondicionalmente por la Proposición 2.1.

Ahora, supongamos que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge incondicionalmente a $x \in \mathbb{R}$ pero no absolutamente. Por el Teorema 2.1, hay un $y \neq x$ tal que existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(x)}$ que converge a y, lo cual es absurdo, porque la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge incondicionalmente. Por lo tanto la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente.

$\square$

Para el caso de los números reales la definición de convergencia por subseries es equivalente a la convergencia absoluta, como se observa a continuación

Proposición 2.3. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie es sumable.*

2. *La serie converge por subseries.*

3. *La serie converge absolutamente.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable con suma x, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe F_ε tal que si $F_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ donde F_ε es un conjunto finito, se cumple entonces que

$$\left| \sum_{j\in F} x_j - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo conjunto finito F tal que $F_\varepsilon \subseteq F \subset \mathbb{N}$.

Sea $G \subseteq \mathbb{N}$ infinito, si $M \geq N > \max(F_\varepsilon)$ y sean $F_1 = \{n \in \mathbb{N} : n < N\}$, $F_2 = F_1 \cup \{n \in \mathbb{N} : n \leq M \text{ y } n \in G\}$, entonces

$$\left|\sum_{n\in F_1} x_n - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\sum_{n\in F_2} x_n - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\substack{n=N \\ n\in G}}^{M} x_n\right| &= \left|\left(\sum_{n\in F_2} x_n - x\right) - \left(\sum_{n\in F_1} x_n - x\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{n\in F_2} x_n - x\right| + \left|\sum_{n\in F_1} x_n - x\right| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

es decir, la subserie generada por G cumple con la condición de Cauchy. Por tanto, debe converger.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $k \in \mathbb{N}$ y sean $P = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0\}$, $N = \{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$, entonces ambos $\sum\limits_{n\in P} x_n$ y $\sum\limits_{n\in N} x_n$ convergen. Pero

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j| = \sum_{n\in P} x_n - \sum_{n\in N} x_n \qquad n \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

haciendo $k \to \infty$ se tiene que la serie $\sum |x_j|$ converge.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x = \sum x_j$. Entonces existe M tal que

$$\left|\sum_{n\geq M} x_n - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya que $\sum |x_j|$ converge, existe un N tal que $\sum_{n>N} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $F_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : n \leq \max\{M, N\}\}$. Si $F \supseteq F_\varepsilon$ y $G = F \setminus F_\varepsilon$, entonces

$$\left|\sum_{n\in G} x_n\right| \leq \sum_{n\in G} |x_n| \leq \sum_{n>N} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\left|\sum_{n\in F} x_n - x\right| = \left|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_n - x + \sum_{n\in G} x_n\right| \leq \left|\sum_{n\in F_\varepsilon} x_n - x\right| + \left|\sum_{n\in G} x_n\right| < \varepsilon.$$

$\square$

De la proposición 2.3 y el Corolario 2.2, se desprende el siguiente corolario:

Corolario 2.3. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge absolutamente.*
2. *La serie converge incondicionalmente.*
3. *La serie converge por subseries.*
4. *La serie es sumable.*

Como consecuencia de este corolario para el caso de series reales podemos dar una definición equivalente de convergencia incondicional.

Capítulo 3

Series en espacios de Banach y de Hilbert

Si bien muchas proposiciones sobre espacios lineales normados no requieren la hipótesis de completitud, varios teoremas de importancia dependen de este hecho. Es por ello que en este capítulo se introducen algunos resultados básicos en el contexto de espacios de Banach y de Hilbert.

3.1. Series en espacios de Banach

Como se mencionó antes el concepto de convergencia absoluta es de gran interés ya que provee una definición equivalente de la completitud de un espacio normado, en otras palabras:

Proposición 3.1. *Dado un espacio normado X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El espacio X es un espacio de Banach.*
2. *Toda serie con términos en X que es absolutamente convergente, es también convergente.*

Demostración: Primero demostraremos que 1) implica 2). Supongamos que X es espacio de Banach. Sea $\sum_{j\geq 1}\|x_j\| < \infty$ y $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si $n > k$, por la desigualdad del triángulo

$$\|s_n - s_k\| = \left\| \sum_{i=k+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=k+1}^{n} \|x_i\|$$

entonces $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, $\{s_n\}$ debe converger a un punto en X.

Por otra parte, supongamos (2). Sea $\{x_j\}$ una sucesión de Cauchy en X. Eligiendo una subsucesión $\{x_{j_k}\}$ que satisfaga $\|x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\| < \frac{1}{2^k}$, se cumplirá entonces que la serie $\sum_{k\geq 1}(x_{j_{k+1}} - x_{j_k})$ es absolutamente convergente ya que $\sum_{k\geq 1} \|x_{j_{k+1}} - x_{j_k}\| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} < \infty$.

Como estamos suponiendo (2) la serie $\sum_{k\geq 1}(x_{j_{k+1}} - x_{j_k})$ converge a $x \in X$, entonces

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{j_{k+1}} - x_{j_k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(x_{j_{k+1}} - x_{j_k}) = \lim_{n\to\infty}(x_{j_{n+1}} - x_{j_1})$$

es decir la subsucesión $\{x_{j_k}\}$ converge a $x + x_{j_1}$. Ya que $\{x_j\}$ es de Cauchy y $x_{j_k} \to x + x_{j_1}$, se sigue que la sucesión original $\{x_j\}_{j\geq 1}$ converge al mismo límite. Por tanto X es de Banach. □

Resulta de gran importancia suponer que el espacio sea completo. Para ilustrar este hecho, se presentará el siguiente ejemplo de un espacio normado en donde una serie absolutamente convergente no es convergente.

Ejemplo 3.1. *Sea c_{00} el espacio de las sucesiones reales $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que tienen un número finito de términos distintos de cero.*

Si para cada $k \geq 1$, e^k es la sucesión en c_{00} definida como

$$e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{para } j = k \\ 0 & \text{para } j \neq k \end{cases}.$$

la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

converge absolutamente, puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|e^k\|_\infty}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sup_{j\geq 1} |e_j^k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

es convergente. Sin embargo, la serie no converge en c_{00} con respecto a la norma $\|\cdot\|_{l^\infty}$. En efecto, supongamos que existe $e = \{e_j\}_{j\geq 1} \in c_{00}$ tal que $\sum_{k\geq 1} \frac{e^k}{k^2} = e$ en c_{00}. Para esa sucesión en particular, existe $M = M_e \geq 1$ tal que $e_j = 0$ para $j > M$. Es decir, para $j > M$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_j^k}{k^2} = 0$$

lo cual no puede ser, debido a cómo hemos definido e_j^k.

En particular, este ejemplo muestra que c_{00} no es un espacio de Banach y que la Proposición 2.1 no puede extenderse a cualquier espacio lineal normado.

Sin embargo, si el espacio X es de Banach, podemos extender a estos espacios la Proposición 2.1 como se muestra a continuación.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio de Banach. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X converge absolutamente, entonces cada reordenamiento también converge absolutamente, e incondicionalmente a un cierto $x \in X$.*

Demostración: Como consecuencia de la proposición 3.1, la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge en X a un cierto $x \in X$.

Si consideramos un reordenamiento $k \to \sigma(k)$ de $\mathbb{N}$ y si fijamos $N_n \geq 1$ tal que todos los términos en la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ aparecen en la suma parcial $\sum_{j=1}^{N_n} x_j$, tenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_{\sigma(k)}\| \leq \sum_{j=1}^{N_n} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|.$$

Como toda sucesión de números reales acotada y no decreciente converge, la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge absolutamente. Por lo tanto, volviendo a usar la proposición 3.1, resulta que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge en X, a un cierto $y \in X$. Afirmamos que $x = y$.

Para verlo, dado $\varepsilon > 0$ fijamos $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - x \right\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \sum_{j\geq N+1} \|x_j\| < \varepsilon.$$

Además, podemos seleccionar una suma parcial $\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}$ tal que todos los términos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ aparecen en ella. En efecto, como σ es una biyección, deben de existir $n_1, \ldots, n_N$ tal que $\sigma(n_j) = j$, para $1 \leq j \leq N$. Reordenando los valores n_j, si es necesario, podemos suponer que $n_1 < \ldots < n_N$. Finalmente, agregamos a $\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_N)\}$, si es necesario, todos los valores intermedios, a fin de obtener

$$\{1, \ldots, N\} \subset \{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_N)\}.$$

Eligiendo $M \geq n_N$ se sigue que

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y \right\| = \left\| \sum_{k=M+1}^{\infty} x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \|x_{\sigma(k)}\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|x - y\| \;\leq\; & \underbrace{\left\| x - \sum_{j=1}^{N} x_j \right\|}_{(i)} + \underbrace{\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_\sigma(k) \right\|}_{(ii)} \\ & + \underbrace{\left\| \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y \right\|}_{(iii)}. \end{aligned}$$

La elección de N implica que el término (i) es $< \varepsilon$. En cuanto a (ii),

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{\text{ciertos } \sigma(k)\geq N+1} \|x_{\sigma(k)}\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon.$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M, (iii) es también $< \varepsilon$. Es decir,

$$0 \leq \|x - y\| < 3\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Concluimos entonces que $x = y$.

Esto completa la prueba de la proposición. □

La validez de la recíproca de esta proposición fue un problema abierto formulado por Banach, pero no fue hasta casi veinte años más tarde que este problema fue resuelto por Aryev Dvoretsky (1916-2008) y Ambrose Rogers (1920-2005), a quienes también se les atribuye el siguiente teorema de Dvoretsky y Rogers que dice:

Teorema 3.1. *Si X es un espacio de Banach, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Las series incondicionalmente convergentes en X son exactamente aquellas series que convergen absolutamente en X.*

2. *El espacio X tiene dimensión finita.*

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (1) Sea X un espacio de Banach con dimensión algebraica finita.

Sabemos que cuando un espacio normado tiene dimensión finita, todas las normas en X son equivalentes, esto es, si $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_1$ son cualesquiera dos normas en X, entonces existen constantes C_0 y C_1 tales que

$$C_0\|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq C_1\|x\|_0 \qquad (\forall\, x \in X).$$

En particular, esto implica que si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X converge con respecto a una norma dada a un elemento $x \in X$, entonces también converge a x con respecto a cualquier otra norma en X.

Sea $\|\cdot\|_X$ la norma original considerada en X. Supongamos que $dim\ X = n$ y sea $\{u_j\}_{j=1}^n$ una base de Hamel ordenada en X.

Dado cualquier $x \in X$, existen escalares únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j.$$

Se puede demostrar fácilmente que la función $\|\cdot\|_* : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$x \mapsto \|x\|_* := \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}$$

define una norma en X. De este modo, cualquier sucesión que converja con respecto a la norma original de X, convergerá al mismo elemento en la norma $\|\cdot\|_*$, y viceversa.

Enseguida, consideremos una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ en X que es incondicionalmente convergente a un elemento $x \in X$ con respecto a la norma original $\|\cdot\|_X$ de X.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ existen escalares únicos $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$ tales que

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} u_j.$$

Si

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

entonces para cada biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tendremos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\|_X \to 0 \quad \text{si } m \to \infty$$

lo que implica que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\|_* \to 0 \quad \text{si } m \to \infty.$$

De aquí, tenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(\sigma(k))} u_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\|_* \to 0 \quad \text{si } m \to \infty.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(\sigma(k))} u_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\|_* &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha^{(\sigma(k))} u_j - \alpha_j u_j \right] \right\|_* \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right) u_j \right] \right\|_* \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Notemos que para cada $j = 1, \ldots, n$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_j^{(\sigma(k))} - \alpha_j \right)^2 \right)^{1/2} \to 0 \quad \text{si } m \to \infty.$$

Se sigue de esto que para cada $j = 1, \ldots, n$, la serie de números reales $\sum_{k\geq 1} \alpha_j^{(\sigma(k))}$ converge al número real α_j y esta convergencia es independiente de la biyección σ. De este modo, la serie de números reales $\sum_{m\geq 1} \alpha_j^{(m)}$ converge incondicionalmente a α_j para cada $j = 1, \ldots, n$. Por el Corolario 2.2 se sigue que la serie $\sum_{m\geq 1} \alpha_j^{(m)}$ converge absolutamente para cada $j = 1, \ldots, n$.

Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ y dado $j = 1, \ldots, n$ existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que si $s > l \geq N = \max_{1\leq j\leq n} N_j$

$$\left| \sum_{m=1}^{l} \alpha_j^{(m)} - \sum_{m=1}^{s} \alpha_j^{(m)} \right| \leq \sum_{m=l+1}^{s} \left| \alpha_j^{(m)} \right| < \varepsilon$$

uniformemente en $j = 1, \ldots, n$.

Usando la desigualdad $(a+b)^r \leq a^r + b^r$ para a, b reales no negativos y $0 < r < 1$, se sigue que si $s > l \geq N$

$$\sum_{m=l+1}^{s} \|x_m\|_* = \sum_{m=l+1}^{s} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} u_j \right\|_*$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=l+1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{m=l+1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} \right| \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=l+1}^{s} \left| \alpha_j^{(m)} \right| \\
&< n\varepsilon,
\end{aligned}
$$

y por consiguiente, la serie $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ converge absolutamente respecto a la norma $\| \cdot \|_*$, y por tanto, converge absolutamente respecto a la norma original $\| \cdot \|_X$, debido a que ambas normas son equivalentes.
(1) $\Rightarrow$ (2) La prueba de esta implicación es muy profunda y compleja, por lo que no se abordará en este trabajo. El lector interesado puede consultar ([13], pág. 440, Teorema 1) cuya demostración es de naturaleza geométrica basada en la teoría de los operadores que suman absolutamente (ver [13], pág. 431, capítulo IV, sección 30). □

A continuación, presentamos el siguiente resultado, cuya prueba omitimos por encontrarse fuera del alcance de este trabajo. El lector interesado puede consultar [7].

Teorema 3.2. *Dado un espacio de Banach X y dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge incondicionalmente.*

2. *La serie converge por subseries.*

3. *La familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable.*

La completitud del espacio X juega un papel importante en la prueba de la implicacion (1) $\Rightarrow$ (2). Veremos en el Ejemplo 3.3 un espacio normado que no cumple con la condición (1) $\Rightarrow$ (2). Por supuesto, tal espacio será incompleto.

La equivalencia de que la sumabilidad es una forma "incondicional" de convergencia se cumple para espacios que no son necesariamente secuencialmente completos como se muestra a continuación.

Proposición 3.3. *Dado un espacio lineal normado X y dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge incondicionalmente en X.*

2. *La familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable en X.*

Demostración: Comenzamos probando que 1) implica 2). Para ello supondremos que 2) no se cumple, es decir que la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no es sumable. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ no converge, podemos concluir que 1) no se cumple. Si la serie converge, digamos que converge a $x \in X$. Por hipótesis, la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no es sumable en x. Entonces debe existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que existe subconjunto finito F de $\mathbb{N}$, tal que para todo un conjunto finito $\mathbb{N} \supset F' \supseteq F$ tal que

$$\left\| \sum_{j\in F'} x_j - x \right\| \geq \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

Por otra parte, la convergencia de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ a x, significa que existe $N = N_{\varepsilon_0} \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{3.2}$$

para todo $n \geq N$. A partir de esta información construiremos un reordenamiento de la serie que no converge a x. Esto mostrará que la serie no converge incondicionalmente debido a la unicidad del límite.

De acuerdo con (3.2),

$$\left\|\sum_{1\leq j\leq N} x_j - x\right\| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Para $F_1 = \{1,\ldots,N\}$, elegimos $F_1' \supseteq F_1$ de modo que satisfaga (3.1). Si $F_2 = \{1,\ldots,\text{máx}_{j\in F_1'}\}$

$$\left\|\sum_{j\in F_2} x_j - x\right\| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

de acuerdo con (3.2).

Como en el primer paso, seleccionamos $F_2' \supseteq F_2$ de modo que satisfaga (3.1). Siguiendo así obtenemos dos familias $\{F_s\}_{s\geq 1}$ y $\{F_s'\}_{s\geq 1}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con $F_s' \supseteq F_s$, para todo $s \geq 1$. Como la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ no es sumable, este proceso no puede terminar. Es decir, que la familia $\{F_1, F_1' - F_1, F_2' - F_2, \ldots,\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.

Entonces, podemos definir una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enumerando sucesivamente los elementos en los conjuntos $F_1, F_1' - F_1, F_2' - F_2, \ldots$.

Afirmamos que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ así obtenida no converge en X. Para verlo, es suficiente probar que sus sumas parciales no forman una sucesión de Cauchy en X. Es decir que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que dado $M \geq 1$, se pueden elegir $m = m_{M,\varepsilon_1} \geq M$ y $l = l_{M,\varepsilon_1} \geq 1$ tales que

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{m+l} x_{\sigma(k)}\right\| \geq \varepsilon_1. \tag{3.3}$$

En efecto, por la manera de construir los conjuntos F_s y F_s', podemos decir, para todo $s \geq 1$,

$$\left\|\sum_{j\in F_s'-F_s} x_j\right\| \geq \left\|\sum_{j\in F_s'} x_j - x\right\| - \left\|\sum_{j\in F_s} x_j - x\right\| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Por otra parte, por la forma en que se definió σ y por ser σ una biyección, dado $M \geq 1$, deben de existir $m = m_{M,\varepsilon_0} \geq M$ y $l = l_{M,\varepsilon_0} \geq 1$ tales que

$\{\sigma(m+1), \ldots, \sigma(m+l)\} = F'_s - F_s$ para algún $s \geq 1$. Es decir, que (3.3) se cumple para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Así, 1) implica 2).

Recíprocamente, si suponemos que la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable, por definición debe de existir un único $x \in X$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ con

$$\left\| \sum_{j\in F} x_j - x \right\| < \varepsilon$$

para todo conjunto finito $\mathbb{N} \supset F \supseteq F_\varepsilon$.

Si fijamos una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, debe existir $M = M_\varepsilon$ tal que $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(M)\} \supseteq F_\varepsilon$. Entonces, para cada $m \geq M$, tendremos

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\| < \varepsilon.$$

Esto muestra que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge incondicionalmente. Así, concluimos la prueba de la proposición. $\square$

3.2. Series en espacios de Hilbert

En esta sección estaremos suponiendo siempre que los espacios de Hilbert son reales.

Proposición 3.4. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert en el que hay una familia ortonormal $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que es infinita y numerable. Consideremos en H una serie de la forma $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$, donde $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión real. Entonces*

1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

   a) *La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge.*

b*) La serie real* $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ *converge.*

c*) La serie* $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$ *converge incondicionalmente.*

2. La serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$ *converge absolutamente si y sólo si la serie real* $\sum_{j\geq 1}|\alpha_j|$ *converge.*

Demostración: Para probar 1) comenzaremos suponiendo que la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$ converge en H, a un cierto $x \in H$. Es decir, supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\|_H^2 = 0$$

Por la continuidad del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, se tiene que

$$\langle x_k, x\rangle_H = \left\langle x_k, \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j\right\rangle_H = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\langle x_k, x_j\rangle_H = \alpha_k$$

para todo $k \geq 1$. Finalmente,

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2 = \sum_{j=1}^{n}\langle x_j, x\rangle_H^2 \underset{(i)}{\leq} \|x\|_H^2$$

para todo $n \geq 1$, donde la desigualdad (i) es la desigualdad de Bessel. Esto muestra que la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ converge ya que la suma parcial $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2$ es acotada.

Recíprocamente, si la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ converge, podemos escribir

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j x_j\right\|_H^2 &= \left\langle\sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j x_j, \sum_{k=n}^{n+m}\alpha_k x_k\right\rangle_H = \sum_{j=n}^{n+m}\sum_{k=n}^{n+m}\alpha_j\alpha_k\langle x_j, x_k\rangle_H\\ &= \sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j^2\|x_n\|^2 = \sum_{j=n}^{n+m}\alpha_j^2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0,\end{aligned}$$

uniformemente en $m \geq 1$. Puesto que H es un espacio de Banach, resulta que la serie $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$ converge.

Esto prueba que 1a) y 1b) son equivalentes. Si suponemos que la serie real $\sum_{j\geq 1}\alpha_j^2$ converge, el Corolario 2.3 nos dice que esta serie también converge incondicionalmente. Por lo tanto, dada una biyección $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, la serie $\sum_{k\geq 1}\alpha_{\sigma(k)}^2$ converge, lo cual equivale a decir que la serie $\sum_{k\geq 1}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}$ converge. Sólo nos falta probar que converge a $\sum_{j\geq 1}\alpha_j x_j$. Veamos esto

Dado $\varepsilon>0$ fijamos $N=N_\varepsilon\geq 1$ tal que

$$\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j x_j\right\|_H<\varepsilon \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j^2<\varepsilon^2.$$

Además, consideramos una suma parcial $\sum_{1\leq k\leq M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}$ tal que todos los términos $\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\ldots,\alpha_Nx_N$ aparecen en ella y

$$\left\|\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}-y\right\|_H<\varepsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j-y\right\|_H \;\leq\; & \underbrace{\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j x_j\right\|_H}_{(i)}+\underbrace{\left\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x_j-\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}\right\|_H}_{(ii)}\\ & +\underbrace{\left\|\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}-y\right\|_H}_{(iii)}\end{aligned}$$

La elección de N implica que el término (i) es $<\varepsilon$. En cuanto a (ii),

$$\left\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x_j-\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}\right\|_H^2=\sum_{\text{ciertos }\sigma(k)\geq N+1}\alpha_{\sigma(k)}^2\leq\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha_j^2<\varepsilon.$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M, (iii) es también $<\varepsilon$. Es decir

$$0\leq\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j-y\right\|_H<3\varepsilon$$

para todo $\varepsilon>0$, lo cual muestra que 1b) implica 1c). Es claro que 1c) implica 1a). Esto concluye la prueba de (1).

La prueba de (2), es una consecuencia de la desigualdad

$$\|\alpha_j x_j\|_H = |\alpha_j|.$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

De la Proposición 3.4 obtenemos de inmediato el resultado siguiente:

Corolario 3.1. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert en el que hay una familia ortonormal $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que es infinita y numerable. Consideremos en H una serie de la forma $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$, donde $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión real. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge incondicionalmente pero no absolutamente.*

2. *La sucesión $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ pertenece a l^2 pero no pertenece a l^1.*

A modo de ilustración consideraremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Sea $\{e^k\}_{k\geq 1}$ la familia ortogonal en l^2 definida, para cada $k \geq 1$, como*

$$e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{para } j = k \\ 0 & \text{para } j \neq k \end{cases}. \tag{3.4}$$

Entonces, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k} \tag{3.5}$$

converge incondicionalmente en l^2, pero no converge absolutamente.

Es interesante observar que la misma serie (3.5) da un ejemplo en l^p para $1 < p \leq \infty$. En efecto, de la igualdad

$$\left\|\frac{e^k}{k}\right\|_{l^p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{e_j^k}{k}\right|^p\right)^{1/p} = \left(\left|\frac{1}{k}\right|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{k}$$

es claro que la serie (3.5) no converge absolutamente en l^p, para $1 \leq p \leq \infty$.

Para probar la convergencia incondicional, comenzamos fijando una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ arbitraria y un valor de p, $1 < p < \infty$. Afirmamos que la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)}$ converge a $x = \{\frac{1}{j}\}_{j\geq 1}$. En efecto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \\ -\frac{1}{j} & \text{si } j \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right\|_{l^p}^{p} = \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right)_j\right|^p\right)^{1/p}\right]^p = \sum_{j\notin\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} \frac{1}{j^p}$$

Como $p > 1$, dado $\varepsilon > 0$ existe $M = M_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^p} < \varepsilon^p \tag{3.6}$$

(nótese que el caso $p = 1$, no funciona porque la estimación (3.6) no es cierta para $p = 1$).

Como en la prueba de la Proposición 3.2, existe $N = N_M \geq 1$ tal que

$$\{1, \ldots, M\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\},$$

para $n \geq N$. Es decir, para estos valores de n,

$$\mathbb{N} - \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \subseteq \mathbb{N} - \{1, \ldots, M\} = \{j \in \mathbb{N} : j \geq M + 1\}$$

de donde resulta que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right\|_{l^p}^{p} = \sum_{j\notin\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} \frac{1}{j^p} \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{j^p} < \varepsilon^p$$

para todo $n \geq N$.

A continuación, veremos en el siguiente ejemplo que no siempre, en un espacio lineal normado, convergencia incondicional implica convergencia por subseries.

Ejemplo 3.3. *Consideremos el espacio* c_{00} *pero esta vez como subespacio de* l^2*. Sabemos que* c_{00} *es un subespacio incompleto de* l^2*.*

Recordemos que dado un número real a*, la notación* $\lfloor a \rfloor$ *indica el mayor número entero que es* $\leq a$*. Con esta notación, definimos en* c_{00} *la serie*

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor}. \tag{3.7}$$

donde $e^{\lfloor m/2 \rfloor}$ *es la sucesión definida como en (3.4), para* $k = \lfloor m/2 \rfloor$ *y cada* $m \geq 2$*.*

Observemos que si $m = 2j$ *para* $j \geq 1$*.*

$$(-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = 2^{-j} e^j, \tag{3.8}$$

mientras que si $m = 2j + 1$ *para* $j \geq 1$*,*

$$(-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = -2^{-j} e^j, \tag{3.9}$$

Es decir la serie (3.7) converge absolutamente en l^2*. De acuerdo con la proposición 3.2, la serie (3.7) converge incondicionalmente en* l^2*. De (3.8) y (3.9) concluimos que fijando* $n \geq 2$*,*

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^m 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = \begin{cases} 2^{-l} e^l & \text{si } n \text{ es par, } n = 2l, \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar, } n = 2l+1 \end{cases}$$

para $l \geq 1$*.*

Usando otra vez la proposición 3.2, resulta que la serie (3.7) converge incondicionalmente a cero en l^2 *y por lo tanto también en* c_{00}*.*

Por otra parte, de (3.8) tenemos que la subserie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{2j} 2^{-\lfloor 2j/2 \rfloor} e^{\lfloor 2j/2 \rfloor} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{2^j}$$

converge absolutamente y por lo tanto, de acuerdo a la proposición 3.2, converge en el espacio de Banach l^2. Sin embargo, la serie $\sum_{j\geq 1} 2^{-j}e^j$ no converge en c_{00}. El razonamiento es similar a lo dicho en el ejemplo 3.1. En efecto, supongamos que existe $e = \{e_j\}_{l\geq 1} \in c_{00}$ tal que $\sum_{j\geq 1} 2^{-j}e^j = e$, en c_{00}. Para esta sucesión en particular, existe $M = M_e \geq 1$ tal que para $l > M$, $e_l = 0$. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}e_l^j = 0,$$

para $l > M$, lo cual no puede ser, debido a cómo hemos definido e_l^j. O sea, que la serie (3.7) no es convergente por subseries, en c_{00}.

Capítulo 4

Funciones que preservan convergencia de series en espacios normados

El propósito de este capítulo es estudiar un tipo especial de espacio de funciones que preservan la convergencia de series, es decir aquellas funciones $f : X \to X$ donde X es un espacio normado tal que, para cada serie $\sum_{n\geq 1} x_n < \infty$ con $x_n \in X$, la serie $\sum_{n\geq 1} f(x_n)$ también converge.

4.1. Sistemas $\mathfrak{M}_\infty$ y $\mathfrak{M}$

Un tipo especial de funciones que preservan la convergencia de series infinitas son las familias que definiremos a continuación.

Definición 4.1. Denotaremos por $\mathfrak{U}$ el sistema de todas las series de la forma $\sum_{n\geq 1} t_n$ donde $t_n \in [0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 1} t_n \leq 1$.

Definición 4.2. Para $c \geq 0$, denotaremos por $\mathfrak{M}_c$ el sistema de todas las funciones $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que si $\sum_{n\geq 1} t_n \in \mathfrak{U}$ entonces $\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)$ es convergente y $\left|\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)\right| \leq c$. Para abreviar utilizaremos la notación $A = \sum_{n\geq 1} t_n \in \mathfrak{U}$ y $\varphi\{A\}$ en lugar de $\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)$.

Definimos $\mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{c\geq 0}\mathfrak{M}_c$. Además, $\mathfrak{M}$ representa el conjunto de todas las funciones $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que si $A \in \mathfrak{U}$ entonces $\varphi\{A\}$ es convergente.

Notemos que el conjunto $\mathfrak{M}_\infty$ representa un sistema de funciones que conserva, de manera uniforme, la convergencia de las series del sistema $\mathfrak{U}$. R. Rado mostró en ([10] pág. 273—276), que si una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preserva la convergencia de series $\sum_{n\geq 1} x_n$ con $x_n \in \mathbb{R}$ entonces existen $k = k(f)$ y $\delta = \delta(f)$ positivos tales que si $|x| < \delta$ entonces $f(x) = kx$, esto es, f es lineal en alguna vecindad del punto 0.

Observemos que si $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ entonces φ no necesariamente es lineal en una vecindad del punto 0. Para ello definamos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) = x\sin(1/x)$ para $x \in (0,1]$, entonces para cada $A \in \mathfrak{U}$,

$$|\varphi\{A\}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(t_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1,$$

como consecuencia $\varphi \in \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_\infty$ y evidentemente φ es no lineal en cualquier vecindad del punto 0. Pero el siguiente resultado se asemeja en cierto modo al resultado de Rado y caracteriza los elementos de $\mathfrak{M}_\infty$.

Teorema 4.1. *Sea* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$*. Entonces* φ *pertenece a* $\mathfrak{M}_\infty$ *si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\varphi(0) = 0. \tag{4.1}$$

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty. \tag{4.2}$$

$$\varphi \text{ es acotada en } [0,1]. \tag{4.3}$$

Demostración: Supongamos (4.1), (4.2) y (4.3). Por (4.2) se tiene que existe $C > 0$ de modo que si $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que para $0 < t < \delta$ se cumple que

$$\frac{|\varphi(t)|}{t} \leq C + 1 \qquad \text{o equivalentemente} \qquad |\varphi(t)| \leq (C+1)t.$$

Ahora vamos a considerar $A = \sum_{n\geq 1} t_n \in \mathfrak{U}$ arbitrario. Como $t_n \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq t_n < \delta$ para $n > N$ y por (4.3), existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(t_n)| \leq NM,$$

y además

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\varphi(t_n)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (C+1)t_n = (C+1) \sum_{n=N+1}^{\infty} t_n \leq (C+1).$$

Por lo tanto

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(t_n)| \leq NM + C + 1 = K_N$$

es decir $\varphi \in \mathfrak{M}_{K_N} \subset \mathfrak{M}_\infty$. La convergencia de $\varphi\{A\}$, es clara, ya que convergencia absoluta de series de números reales implica convergencia.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$; en vista de la definición del conjunto $\mathfrak{M}_\infty$ existe $c \geq 0$ tal que $\varphi \in \mathfrak{M}_c$.

Se ve fácilmente que $|\varphi(t)| \leq c \cdot 2^{-n+1}$ para $2^{-n} < t \leq 2^{-n+1}$ y $n \in \mathbb{N}$, ya que si no fuese así se tendría que $|\varphi(t)| > c \cdot 2^{-n+1}$ para algún $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]$. Luego, la serie

$$A = \underbrace{t + t + \ldots + t}_{2^{n-1} \text{ veces}} + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

pertenece a $\mathfrak{U}$ y $|\varphi\{A\}| = |2^{n-1}\varphi(t)| > c$, lo cual es una contradicción ya que $|\varphi\{A\}| \leq c$.

Ahora, sea $0 < t \leq 1$. Entonces $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]$ para algún $n \geq 1$ y $|\varphi(t)| \leq c \cdot 2^{-n+1}$. Por lo que

$$\frac{|\varphi(t)|}{t} \leq \frac{c \cdot 2^{-n+1}}{2^{-n}} = 2c < +\infty \tag{4.4}$$

y por lo tanto $\limsup_{t\to 0^+} \frac{|\varphi(t)|}{t} \leq 2c < +\infty$, así (4.2) es válido. La validez de (4.3) es una consecuencia de (4.4). Finalmente, si ocurriese que $\varphi(0) \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1}\varphi(0)$ no sería convergente, es decir $\varphi\notin\mathfrak{M}_\infty$ a pesar del hecho de que $A=\sum_{n\geq 1} 0\in\mathfrak{U}$. Por lo tanto (4.1) también es cierto y la demostración está terminada. $\square$

Del Teorema 4.1 se desprende el siguiente corolario:

Corolario 4.1. *Si* $\varphi\in\mathfrak{M}_\infty$*, entonces* $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=\varphi(0)=0.$

De la demostración del teorema anterior se sigue que $\varphi(0) = 0$, para $\varphi\in\mathfrak{M}$. Además si $\varphi\in\mathfrak{M}$ no necesariamente ocurre que $\limsup\limits_{t\to 0^+}\frac{|\varphi(t)|}{t}<+\infty$, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1. *Sea* $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ *definida como*

$$\varphi(t_n)=\begin{cases} n\cdot 2^{-n} & si \quad t_n=2^{-n}\\ 0 & si \quad t_n\neq 2^{-n}\end{cases}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$*. Entonces* $\varphi\in\mathfrak{M}$*, ya que si* $A\in\mathfrak{U}$ *tiene un número finito de términos* $t_n=2^{-n}$*, resulta evidente que* $\varphi\{A\}$ *es convergente. Por otro lado, si* $A\in\mathfrak{U}$ *tiene una infinidad de términos de* $t_n=2^{-n}$*, es decir, estamos considerando una subserie de la serie* A *de términos no negativos*

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\quad y\quad \varphi\{A\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Entonces $\varphi\{A\}$ *es convergente. En efecto, consideremos las sumas parciales de* $\varphi\{A\}$ *por* s_n *y haciendo un par de operaciones obtenemos*

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{2}s_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n-\frac{1}{2}s_n &= \left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{n}{2}\right)\to 1 \qquad \text{cuando } n\to\infty.\end{aligned}$$

Así $\varphi\{A\} = 2$ *y por tanto* $\varphi \in \mathfrak{M}$. *Además*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{|\varphi(t)|}{t} = \limsup_{t\to 0^+} \frac{n \cdot 2^{-n}}{2^{-n}} = +\infty.$$

De este ejemplo y el Teorema 4.1 se observa que $\mathfrak{M}_\infty \subset \mathfrak{M}$ y que la inclusión es propia.

A pesar de que todas las funciones del sistema $\mathfrak{M}_\infty$ están acotadas, en el sistema $\mathfrak{M}$ no todas sus funciones están acotadas. Como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. *Sea* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

Consideraremos $\mathfrak{U} = \sum_{n\geq 1} t_n$. *De manera que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 \leq t_n < \frac{1}{2}$ *para* $n \geq N$ *de donde*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi(t_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} t_n \leq 1 \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{N} \varphi(t_n) < \infty$$

por lo tanto $\varphi \in \mathfrak{M}$, *pero* φ *no está acotada en* $[0,1]$.

Por otra parte, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2. *Si* $\varphi \in \mathfrak{M}$, *entonces* $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$.

Demostración: Sea $\varphi \in \mathfrak{M}$ y supongamos que $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) \neq 0$, entonces existe un $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión de números positivos $\{\delta_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\delta_n \leq \frac{1}{2^n}$ y $|\varphi(\delta_n)| \geq \varepsilon_0$ para $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\varphi(\delta_n) > 0$ para infinitos n digamos que para $n \in N'$. Entonces $\sum_{n\in N'} \delta_n \in \mathfrak{U}$, pero la serie $\sum_{n\in N'} \varphi(\delta_n)$ no converge, por lo tanto $\varphi \notin \mathfrak{M}$.

$\square$

Los conjuntos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_\infty$ son espacios vectoriales, de hecho $\mathfrak{M}_\infty$ es un espacio normado.

Teorema 4.3. *Los conjuntos $\mathfrak{M}_\infty$ y $\mathfrak{M}$ son espacios vectoriales reales.*

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathfrak{U}$ y $\varphi_i \in \mathfrak{M}_\infty$ para $i = 1, 2$ es decir, $\varphi_i\{A\}$ es convergente y existe $c_i \geq 0$ tal que $|\varphi_i\{A\}| \leq c_i$.

$$(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\} = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1 + \varphi_2)(t_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(t_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_2(t_n) < \infty.$$

Por lo tanto $(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\}$ es convergente.

$$\begin{aligned} |(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\}| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1 + \varphi_2)(t_n)\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(t_n)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_2(t_n)\right| \leq c_1 + c_2, \end{aligned}$$

y de aquí obtenemos $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathfrak{M}_{c_1+c_2} \subset \mathfrak{M}_\infty$.

Si α es un escalar real

$$(\alpha\varphi_1)\{A\} = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\varphi_1)(t_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(t_n) < \infty.$$

Por lo tanto $(\alpha\varphi_1)\{A\}$ es convergente y

$$|(\alpha\varphi_1)\{A\}| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\varphi_1)(t_n)\right| = |\alpha|\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(t_n)\right| \leq |\alpha|c_1$$

por lo que $\alpha\varphi_1 \in \mathfrak{M}_{|\alpha|c_1} \subset \mathfrak{M}_\infty$.

Como claramente la función idénticamente 0 pertenece a $\mathfrak{M}_\infty$, se sigue que $\mathfrak{M}_\infty$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. De manera similar se demuestra que $\mathfrak{M}$ es un espacio vectorial. $\square$

Enseguida, definiremos una norma en $\mathfrak{M}_\infty$.

Definición 4.3. Para $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, definimos $\|\varphi\| = \sup_{A\in\mathfrak{U}} |\varphi\{A\}|$.

Veamos que $\|\varphi\|$ cumple los axiomas de norma:

- $\|\varphi\| \geq 0$.

- $\|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{A\in\mathfrak{U}} |\varphi\{A\}| = 0 \Leftrightarrow \varphi(A) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{U}$ o equivalentemente $\varphi = 0$.

- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\|k\varphi\| = \sup_{A\in\mathfrak{U}} |k\varphi\{A\}| = |k| \sup_{A\in\mathfrak{U}} |\varphi\{A\}| = |k| \cdot \|\varphi\|$.

- $\|\varphi_1 + \varphi_2\| = \sup_{A\in\mathfrak{U}} |(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\}|$, pero $|(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\}| \leq |\varphi_1\{A\}| + |\varphi_2\{A\}| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$. Por lo tanto $\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$.

Así, el conjunto $\mathfrak{M}_\infty$ con esta norma es un espacio lineal normado.

Teorema 4.4. *Sean $\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ para $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es uniformemente convergente en $[0,1]$ a φ.*

Demostración: Sean $\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Sea A el conjunto de todas las series de la forma $A = t + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$, con $t \in [0,1]$. Evidentemente $A \in \mathfrak{U}$ y además por como está definida la norma en $\mathfrak{M}_\infty$, se sigue que $|\varphi_n\{A\} - \varphi\{A\}| < \varepsilon$, para toda A de este tipo y $n \geq n_0$. Por lo tanto, para cada $t \in [0,1]$ se cumple $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ es decir $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a φ en $[0,1]$.

$\square$

La recíproca de este teorema no es cierta, es decir si $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente no necesariamente existe la convergencia en el sentido de la norma previamente definida en $\mathfrak{M}_\infty$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3. *Sean $\varphi, \varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas como*

$$\varphi_n(t) = \frac{t}{1 + n^2 t^2} \qquad y \qquad \varphi(t) = 0$$

para toda $t \in [0,1]$ *y cada* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $A \in \mathfrak{U}$ *por la manera en que se definió* φ_n *se cumple que* $\varphi_n(t_j) \leq t_j$, *para cada* $n \geq 1$ *entonces* $\varphi_n\{A\}$ *es convergente y puesto que*

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_n(t_j)\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_n(t_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} t_j \leq 1$$

se tiene $\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Además, $\varphi_n(t) = \frac{2nt}{2n(1+n^2t^2)} \leq \frac{1}{2n}$ *para todo* $t \in [0,1]$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ *tal que para* $n \geq N$ *se cumple*

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| = \varphi_n(t) \leq \frac{1}{2n} \leq \varepsilon$$

por lo tanto $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *converge uniformemente a* φ *en* $[0,1]$. *Fijemos* $n \in \mathbb{N}$, *y definamos a* t_i *de la siguiente manera,*

$$t_i = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ i \in [1,n] \\ 0 & si\ i > n. \end{cases}$$

Entonces $A = \sum_{t\geq 1} t_i \in \mathfrak{U}$,

$$\varphi_n\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_n(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

así que $\|\varphi_n\| \geq \frac{1}{2}$ *para* $n \geq 1$. *Lo que implica que* $\{\|\varphi_n - \varphi\|\}_{n\geq 1} = \{\|\varphi_n\|\}_{n\geq 1}$ *no converge a cero.*

Una simple consecuencia del Teorema 4.4 es el siguiente corolario

Corolario 4.2. *El conjunto* $\mathfrak{M}_\infty^{(c)}$ *cuyo elementos son todas las funciones continuas en* $[0,1]$ *que pertenecen a* $\mathfrak{M}_\infty$ *es un subespacio lineal cerrado del espacio* $\mathfrak{M}_\infty$.

Demostración: Evidentemente es suficiente probar que $\mathfrak{M}_\infty^{(c)}$ es cerrado en $\mathfrak{M}_\infty$. Sean $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ y $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty^{(c)}$ para $n \geq 1$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$. Por el Teorema 4.4 φ_n converge uniformemente a φ en $[0,1]$ y, por lo tanto, se sigue que φ es continua, esto es, $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^{(c)}$. $\square$

El espacio $\mathfrak{M}_\infty$ cuenta con muchas propiedades interesantes, a continuación procedemos a describir algunas de ellas.

Teorema 4.5. *Sea $c \geq 0$. Entonces $\mathfrak{M}_c$ es un conjunto simétrico, convexo y cerrado en $\mathfrak{M}_\infty$.*

Demostración: Las propiedades de la simetría y la convexidad son evidentes. Sean $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ y $\varphi_n \in \mathfrak{M}_c$ para $c = 1, 2, 3, \ldots$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$. Luego dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$ y cada $A \in \mathfrak{U}$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| - \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(t_k)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(t_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| < \varepsilon,$$

por lo tanto $|\varphi\{A\}| < \|\varphi_n\| + \varepsilon \leq c + \varepsilon$. Dado que la desigualdad se cumple para cada $\varepsilon > 0$, se tiene $\|\varphi\| \leq c$ y por lo tanto $\varphi \in \mathfrak{M}_c$. $\square$

Teorema 4.6. *El espacio $\mathfrak{M}_\infty$ con la norma $\|\cdot\|$ es un espacio de Banach.*

Demostración: Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{M}_\infty$. Entonces, dado $\eta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ se cumple $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \frac{\eta}{4}$. Denotemos por A^* el conjunto de todas las sumas de la forma

$$A = t + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \qquad (\forall\, t \in [0, 1]).$$

Luego, se sigue del hecho de $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \frac{\eta}{4}$ que

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \frac{\eta}{4} \qquad (n, m \geq n_0)$$

y de acuerdo con el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme se tiene que $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es uniformemente convergente a una función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Se demostrará que $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ y $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$.

Sea $A \in \mathfrak{U}$. Para cualquier entero $\lambda > 0$, en vista de la convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, existe un entero positivo $n = n(\lambda) \geq n_0$ tal que

$$-\frac{\eta}{4\lambda} < \varphi(t_k) - \varphi_n(t_k) < \frac{\eta}{4\lambda} \qquad (n \geq n_0,\ k = 1, \ldots, \lambda)$$

así

$$\left|\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) - \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_n(t_k)\right| < \frac{\eta}{4} \qquad (\forall\ n \geq n_0). \tag{4.5}$$

Si tenemos en cuenta que $\|\varphi_{n_0} - \varphi_n\| < \frac{\eta}{4}$, obtenemos para la serie $t_1 + t_2 + \ldots + t_\lambda + 0 + 0 + \ldots \in \mathfrak{U}$

$$\left|\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_n(t_k) - \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k)\right| < \frac{\eta}{4} \qquad (\forall\ n \geq n_0). \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) se tiene

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) - \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k)\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) - \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_n(t_k)\right| + \left|\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_n(t_k) - \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k)\right| \\ &< \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

para todo $n \geq n_0$. Dado que (4.7) es válido para cada entero $\lambda \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\left|\liminf_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) - \limsup_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k)\right| &\leq \left|\liminf_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_0}(t_k)\right| \\ &+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_0}(t_k) - \limsup_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k)\right| \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.\end{aligned}$$

Y puesto que $\eta > 0$ fue arbitrario obtenemos que

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) = \limsup_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k),$$

de modo que la serie $\sum_{k\geq 1} \varphi(t_k)$ es convergente. También de (4.7) se sigue que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| - \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_0}(t_k)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_0}(t_k)\right| \leq \frac{\eta}{2}$$

o equivalentemente

$$|\varphi\{A\}| \leq \|\varphi_{n_0}\| + \frac{\eta}{2} \leq c + \frac{\eta}{2} \qquad (\varphi_{n_0} \in \mathfrak{M}_c).$$

Como n_0 es independiente de A, se obtiene $\|\varphi\| = \sup\limits_{A\in\mathfrak{U}} |\varphi\{A\}| \leq c + \frac{\eta}{2}$, y de esta manera $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Además de (4.7) se sigue que para cada $n \geq n_0$,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(t_k)\right| < \eta$$

por lo tanto $\|\varphi_n - \varphi\| \leq \eta$ para $n \geq n_0$, así que $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$. Por lo tanto $\mathfrak{M}_\infty$ es un espacio de Banach. □

Ahora estudiaremos a los espacios $\mathfrak{M}_\infty$ y $\mathfrak{M}$ como subespacios del espacio topológico $\mathfrak{F}$ de todas las funciones reales definidas en $[0,1]$. Dotaremos a este último de la topología de la convergencia uniforme. Denotaremos la cerradura de B en la topología de la convergencia uniforme como $\overline{B}$.

Teorema 4.7. *Para $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{F}$ como antes, se tiene:*

(a) $\mathfrak{M}_\infty$ y $\mathfrak{M}$ no son conjuntos cerrados de $\mathfrak{F}$.

(b) $\overline{\mathfrak{M}_\infty} \neq \mathfrak{M}$ y ninguna de las relaciones $\overline{\mathfrak{M}_\infty} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}_\infty}$ se verifica.

Demostración: Sea $t_k = 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } t = 2^{-k},\ k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad (\forall\ t \in [0,1]),$$

entonces la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ converge a la función φ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } t = 2^{-k},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{si } t \neq 2^{-k},\ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (\forall\ t \in [0,1]).$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $N > \frac{1}{\varepsilon}$, para toda $n \geq N$ tenemos que

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| = \begin{cases} 0 & \text{si t=}2^{-k},\ k \leq n \\ \frac{1}{k} & \text{si t=}2^{-k},\ k > n \\ 0 & \text{si t}\neq 2^{-k} \end{cases}$$

de lo cual vemos que $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ es decir $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente.

Claramente $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty \subset \mathfrak{M}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ ya que tiene una cantidad finita de términos distintos de cero. Pero $\varphi \notin \mathfrak{M}$, ya que $A = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} \in \mathfrak{U}$ y $\varphi\{A\} = \infty$. De esta manera se prueba la validez de (a), ya que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_\infty$ no contienen sus puntos límites, y simultáneamente se muestra la no validez de $\overline{\mathfrak{M}}_\infty \subset \mathfrak{M}$.

Para concluir la demostración es suficiente probar la existencia de una función $\varphi \in \mathfrak{M}$ pero $\varphi \notin \overline{\mathfrak{M}_\infty}$. Sea φ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} k & \text{si } t = \frac{k}{k+1} \text{ para } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{si } t \neq \frac{k}{k+1} \text{ para } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

para toda $t \in [0, 1]$. Entonces $\varphi \in \mathfrak{M}$, ya que si $A \in \mathfrak{U}$ se tiene como máximo para dos índices j, r que $t_j, t_r \in (\frac{1}{2}, 1)$, de modo que la serie $\sum_{n\geq 1} \varphi(t_n)$ tiene todos, excepto a lo más dos términos, iguales a cero.

Supongamos que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ con $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty$ tal que la sucesión converge uniformemente a la función φ en $[0, 1]$, es decir para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para cada $n \geq n_0$ y todo $t \in [0, 1]$, se tiene

$$\varphi(t) - \varepsilon < \varphi_n(t) < \varphi(t) + \varepsilon. \tag{4.8}$$

Sea $\varphi_{n_0} \in \mathfrak{M}_{c_0}$ $(c_0 \geq 0)$, elegimos $k > c_0 + \varepsilon$ y $t = \frac{k}{k+1}$, así de (4.8) obtenemos

$$\varphi\left(\frac{k}{k+1}\right) - \varepsilon < \varphi_{n_0}\left(\frac{k}{k+1}\right),$$

por lo tanto

$$c_0 < k - \varepsilon = \varphi\left(\frac{k}{k+1}\right) - \varepsilon < \varphi_{n_0}\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

lo cual es una contradicción, ya que $\varphi_{n_0} \in \mathfrak{M}_{c_0}$. Concluimos así la demostración. $\square$

El Teorema 4.4 muestra que la convergencia en la norma es más fuerte que la convergencia uniforme. El siguiente teorema caracteriza la convergencia en norma.

Teorema 4.8. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en el conjunto $\mathfrak{M}_\infty$. Entonces la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ converge a $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ respecto a la convergencia en norma si y solo si existe una vecindad derecha U del punto 0, tal que la sucesión $\{\varphi_n \mathcal{X}_U\}_{n\geq 1}$ ($\mathcal{X}_U$ denota la función característica del conjunto U) converge en norma a $\varphi\mathcal{X}_U$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a φ en $[0,1]-U$.*

Demostración: Primero veremos la validez de la necesidad. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$ y sea $A \in \mathfrak{U}$. Por la definición de convergencia de la norma se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{A\in\mathfrak{U}} |\varphi_n\{A\} - \varphi\{A\}| < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N)$$

de donde se sigue

$$\sup_{A\in\mathfrak{U}} |(\varphi_n \cdot \mathcal{X}_U)\{A\} - (\varphi \cdot \mathcal{X}_U)\{A\}| < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N),$$

donde $U = [0,1]$. La convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ a φ es consecuencia del Teorema 4.4.

Ahora demostramos la suficiencia. Sea U una vecindad derecha del punto 0 donde $U = [0,\delta)$ y sea $\{\varphi_n \mathcal{X}_U\}_{n\geq 1}$ una sucesión que converge $\varphi\mathcal{X}_U$ respecto a la norma y $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en $[0,1]-U$.

Consideremos $A \in \mathfrak{U}$ entonces el intervalo $[\delta, 1] = [0,1] - U$ tiene como máximo $[\delta^{-1}]$ términos de la sucesión $\{t_k\}_{k\geq 1}$, denotaremos a esos términos por $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_s}$ con $k_1 < k_2 < \dots < k_s$. Ya que $\|\varphi_n \mathcal{X}_U - \varphi \mathcal{X}_U\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty}{}' \varphi_n(t_i) - \sum_{i=1}^{\infty}{}' \varphi(t_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall\, n \geq n_1)$$

donde $\sum'$ denota la suma para $i \neq k_1, k_2, \dots, k_s$. Además, de acuerdo con la convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ en $[\delta, 1]$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_2$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2[1/\delta]}, \qquad \forall\, t \in [\delta, 1].$$

Entonces para $n > \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y en vista de que $s \leq \frac{1}{\delta}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n(t_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(t_i)) \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty}{}' \varphi_n(t_i) - \sum_{i=1}^{\infty}{}' \varphi(t_i) \right| + \sum_{j=1}^{s} |\varphi_n(t_{k_j}) - \varphi(t_{k_j})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + s\frac{\varepsilon}{2[1/\delta]} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De la última desigualdad se sigue inmediatamente la afirmación del teorema. □

Este resultado motiva el siguiente teorema.

Teorema 4.9. *Una función φ definida y acotada en $[0,1]$ pertenece a $\mathfrak{M}_\infty$ si y sólo si existe una vecindad derecha U del cero y una función $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ tal que $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ para cada $x \in U$.*

Demostración: Es evidente la necesidad del teorema tomando $U = [0,1]$. Para mostrar la suficiencia, vamos a probar que si φ es acotada en $[0,1]$, entonces si para alguna vecindad $U = [0,\delta)$ se cumple que $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ para alguna $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ entonces $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. Supongamos que $|\varphi(x)| \leq K$ para todo $x \in [0,1]$; como $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$, existe $c \geq 0$ tal que $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_c$. Si $A \in \mathfrak{U}$ se tiene que el intervalo $[\delta, 1]$ tiene como máximo $[\delta^{-1}]$ términos de la sucesión

$\{t_k\}_{k\geq 1}$. Denotemos esos términos por $t_{k_1}, \ldots, t_{k_s}$, con $k_i < k_j$ para $i < j$, $s \leq [1/\delta]$. Entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{\infty}{}' \varphi_1(t_1)\right| + \sum_{j=1}^{s} |\varphi(t_{k_j})|,$$

donde $\sum'$ significa que i varia todos los enteros positivos con excepción de $k_1, k_2, \ldots, k_s$. De acuerdo con el hecho de que $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_c$ y en vista del acotamiento de φ obtenemos

$$|\varphi\{A\}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| \leq c + sK$$

donde c, s, K son independientes de la elección de A. Por lo tanto $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ y $\|\varphi\| \leq c + sK$. $\square$

Definición 4.4. Denotaremos por $M(0,1)$ el espacio de todas las funciones acotadas en $[0,1]$ con la métrica

$$\varrho(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$

De acuerdo con el Teorema 4.1 el espacio $\mathfrak{M}_\infty$ está contenido en $M(0,1)$. Asimismo por el Teorema 4.7 el conjunto $\mathfrak{M}_\infty$ es un subconjunto no cerrado de $M(0,1)$. Sin embargo, podemos mostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *Sea $M_1(0,1)$ el conjunto de todas las funciones $\varphi \in M(0,1)$ para las cuales $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$. Entonces $\overline{\mathfrak{M}_\infty} = M_1(0,1)$.*

Demostración: Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $M_1(0,1)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en $[0,1]$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq \varepsilon \qquad (n \geq N).$$

Como $\varphi_n \in M_1(0,1)$ para todo $n \geq N$, existe $K \geq 0$ tal que $|\varphi_n(t)| \leq K$ para todo $t \in [0,1]$ y

$$|\varphi(t)| - |\varphi_n(t)| \leq |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

de donde se sigue que $|\varphi(t)| \leq K + \varepsilon$ y por lo tanto $\varphi \in M(0,1)$. Ahora, como $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi_n(t) = \varphi_n(0)$ por el Teorema 7.11 de [11] se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0^+} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = \varphi(0),$$

por lo tanto $M_1(0,1) = \overline{M_1(0,1)}$. De este resultado, el Corolario 4.1 y del hecho que $\mathfrak{M}_\infty \subseteq M(0,1)$ se sigue que $\mathfrak{M}_\infty \subseteq M_1(0,1)$ lo que implica $\overline{\mathfrak{M}}_\infty \subseteq M_1(0,1)$.

Ahora, consideremos $\varphi \in M_1(0,1)$ y φ_n definida por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ \varphi(t) & \text{si } t \in (1/n, 1] \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

y en vista del Teorema 4.9, $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty$ para $n \in \mathbb{N}$ y evidentemente $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en $[0,1]$. Por lo tanto $M_1(0,1) \subset \overline{\mathfrak{M}}_\infty$. Así $\overline{\mathfrak{M}}_\infty = M_1(0,1)$.

□

Enseguida estableceremos algunas conexiones con el resultado de Rado mencionado anteriormente.

Definición 4.5. $\mathfrak{L}$ denotará el conjunto de todas las funciones φ definidas en $[0,1]$ que tienen la siguiente propiedad: $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ y existe $\delta = \delta(\varphi)$ tal que φ es lineal en el intervalo $[0, \delta]$.

Como vimos en el ejemplo posterior a de la definición 4.2 se sigue que $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}_\infty$, pero la igualdad se cumple al incluir sus puntos límites.

Teorema 4.11. *Para* $\mathfrak{L}$ *y* $\mathfrak{M}_\infty$ *definido como antes, se tiene que* $\overline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{M}}_\infty (= M_1(0,1))$ *(en el sentido de convergencia uniforme).*

Demostración: Sea $f \in \mathfrak{M}_\infty$. Entonces para cada entero positivo n, existe un intervalo $[0, \delta_n]$ en el cual $|f(x)| < \frac{1}{n}$. Definimos g_n en $[0,1]$ para $n \in \mathbb{N}$ por

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin [0, \delta_n] \\ \frac{x}{n\delta_n} & \text{si } x \in [0, \delta_n] \end{cases}.$$

Evidentemente $g_n \in \mathfrak{L}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $g_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N > \frac{2}{\varepsilon}$ tal que

$$|g_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{x}{n\delta_n} - f(x) \right| \leq \left| \frac{x}{n\delta_n} \right| + |f(x)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq \varepsilon$$

para toda $n \geq N$, es decir g_n converge uniformemente a f en $[0,1]$. Por lo tanto $\mathfrak{M}_\infty \subset \overline{\mathfrak{L}}$ lo que implica $\overline{\mathfrak{M}_\infty} \subseteq \overline{\mathfrak{L}}$. Además $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}_\infty \subset M_1(0,1) = \overline{\mathfrak{M}_\infty}$ entonces $\overline{\mathfrak{L}} \subseteq \overline{\mathfrak{M}_\infty}$. Lo que concluye la demostración. □

De este teorema surge una pregunta: si $\mathfrak{M}_\infty$ es visto como un espacio normado con la norma definida en la definición 4.3, ¿$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}_\infty$ es denso en $\mathfrak{M}_\infty$? Para dar respuesta a esta pregunta es necesario mostrar el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea φ una función definida y acotada en $[0,1]$. Entonces $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ si y solo si $|\varphi| \in \mathfrak{M}_\infty$.*

Demostración: Sea $A \in \mathfrak{U}$ y $|\varphi| \in \mathfrak{M}_\infty$ de modo que existe $c > 0$ tal que $|\varphi| \in \mathfrak{M}_c$, luego

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(t_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(t_i)| \leq c$$

esto quiere decir que $\varphi \in \mathfrak{M}_c$, por lo tanto $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Recíprocamente, si $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, entonces en vista del Teorema 4.1, y del acotamiento de φ en $[0,1]$ existe $K > 0$ tal que $|\varphi(t)| \leq Kt$ para todo $t \in [0,1]$, de manera que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(t_i)| \leq K \sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq K$$

de donde se sigue que $|\varphi| \in \mathfrak{M}_K$, por lo tanto $|\varphi| \in \mathfrak{M}_\infty$. $\square$

Definición 4.6. Sea $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{M}_\infty$. La cerradura del conjunto $\mathfrak{G}$ en el sentido de la convergencia de la norma se denotará por *cl* $\mathfrak{G}$.

Teorema 4.12. *Sea $\mathfrak{M}_\infty$ el espacio lineal con la norma dada en la definición 4.3. Entonces cl $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}_\infty$.*

Demostración: Sea

$$f^+ = \begin{cases} \max\{0, x\sin(1/x)\} & \text{si } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; x = 0 \end{cases}.$$

Debido a que se demostró anteriormente que la función $f(x) = x\sin(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ pertenece a $\mathfrak{M}_\infty$, por el Lema 4.1 más el hecho de que $\mathfrak{M}_\infty$ es un espacio vectorial se sigue que $f^+ \in \mathfrak{M}_\infty$. Se mostrará entonces que f^+ no es una función límite de cualquier sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funciones pertenecientes a $\mathfrak{L}$ en el sentido de la convergencia en la norma en $\mathfrak{M}_\infty$.

Denotemos como $[0, \delta_n]$ el intervalo en el que f_n es lineal y sea $f_n(x) = k_n x$ en ese intervalo. Evidentemente es suficiente considerar el caso $k_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ ya que f^+ es positiva. Consideremos dos casos

1. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada N se cumple que $k_n > \varepsilon_0$ para $n \geq N$.

2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que $k_n \leq \varepsilon$ para $n \geq n_1$.

Si el primer caso ocurre, entonces existe un conjunto infinito de índices n tales que $k_n > \varepsilon_0$. Estos índices forman un conjunto N'. Sea $n \in N'$ y elijamos en el intervalo $[0, \delta_n]$ puntos $t_1, t_2, \ldots, t_r$ con $r = r(n)$ tales que

$$1 \geq t_1 + t_2 + \ldots + t_r \geq \frac{\varepsilon_0}{k_n}$$

y $\sin(1/t_j) = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, r$. Pongamos $t_j = 0$ para $j > r$. Entonces

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \in \mathfrak{U}, \qquad \left| \sum_{j=1}^{\infty} f^{+}(t_j) - \sum_{j=1}^{\infty} f_n(t_j) \right| = k_n \sum_{j=1}^{r} t_j \geq \varepsilon_0.$$

Por lo tanto $\|f^{+} - f_n\| \geq \varepsilon_0$ para una infinidad de índices n, entonces $\{f_n\}_{n\geq 1}$ no es convergente a f^{+} en la norma.

Consideremos ahora el segundo caso y $\varepsilon \leq 1/3$. Sea $[0, \delta_n]$ para $n \in \mathbb{N}$ como en el caso anterior. Para $n \geq n_1$ se tiene $k_n \leq \varepsilon$. Elijamos en el intervalo $[0, \delta_n]$ $(n \geq n_1)$ puntos $t_1, t_2, \ldots, t_s$ con $s = s(n)$ tal que

$$\sin\left(\frac{1}{t_i}\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad 1 \geq t_1 + t_2 + \ldots + t_s \geq \frac{3}{4}$$

y $t_j = 0$ para $j > s$. Entonces para esta n tendremos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{+}(t_j) - f_n(t_j)| \geq \sum_{j=1}^{s} t_j - \varepsilon \sum_{j=1}^{s} t_j \geq \frac{3}{4}(1 - \varepsilon) > \frac{1}{2}$$

$$\|f^{+} - f_n\| \geq \frac{1}{2}$$

para $n \geq n_1$. Por lo tanto $\{f_n\}_{n\geq 1}$ no converge a f^{+} en la norma. Y esto completa la demostración. $\square$

Del teorema anterior se concluye que $\mathfrak{L}$ no es denso en $\mathfrak{M}_{\infty}$.

4.2. Caracterización de las funciones que conservan la convergencia de series

Como se mencionó en la sección anterior, Rado describió a las funciones reales que preservan la convergencia de series en $\mathbb{R}$. Nuestro interés es mostrar una caracterización para las funciones que preservan la convergencia de series en cualquier espacio lineal normado.

Teorema 4.13. *Sea X un espacio lineal normado sobre el campo $\mathbb{R}$. Si una función $f : X \to X$ preserva la convergencia de series en X, entonces existe una vecindad U del punto $0 \in X$ tal que $f(0) = 0$ y f es continua, aditiva y homogénea en U.*

Demostración. Considérese el espacio $X \times X$ dotado con la norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \qquad \forall\ (x, y) \in X \times X,$$

claramente es un espacio lineal normado.

Definamos $g : X \times X \to X$ de la siguiente manera

$$g(x, y) = f(x + y) + f(-x) + f(-y) \qquad \forall\ (x, y) \in X \times X.$$

Demostraremos que $g(x, y) = 0$ en una vecindad U del $(0, 0) \in X \times X$. Supongamos lo contrario, es decir, para cada vecindad U de $(0, 0)$ existe $(x, y) \in U$ tal que $g(x, y) \neq 0$. Entonces existen sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ en X tal que $x_n, y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $g(x_n, y_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea M_n el número

$$M_n = \left[\frac{1}{\|g(x_n, y_n)\|}\right] + 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donde $[t]$ denota la parte entera del número real t.

Construyamos ahora la serie

$$\underbrace{(x_1 + y_1) + (-x_1) + (-y_1) + \ldots + (x_1 + y_1) + (-x_1) + (-y_1)}_{M_1 \text{ sumandos } (x_1+y_1)+(-x_1)+(-y_1)}$$

$$+ \underbrace{(x_2 + y_2) + (-x_2) + (-y_2) + \ldots + (x_2 + y_2) + (-x_2) + (-y_2)}_{M_2 \text{ sumandos } (x_2+y_2)+(-x_2)+(-y_2)}$$

$$\vdots$$

$$+ \underbrace{(x_n + y_n) + (-x_n) + (-y_n) + \ldots + (x_n + y_n) + (-x_n) + (-y_n)}_{M_n \text{ sumandos } (x_n+y_n)+(-x_n)+(-y_n)}$$

$$\vdots$$

Denotaremos a esta serie por $A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Sea S_k la k-ésima suma parcial de A, es decir, $S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ para algún $k = 1, 2, 3, \ldots$, así

$$S_{3k} = \sum_{j=1}^{3k} a_j = 0, \quad S_{3k+1} = \sum_{j=1}^{3k+1} a_j = x_n + y_n, \quad S_{3k+2} = \sum_{j=1}^{3k+2} a_j = y_n,$$

para un adecuado $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, esta serie es convergente y su suma es 0. Dado que f preserva la convergencia de series en X, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)$ converge en X lo que significa que la serie

$$\underbrace{f(x_1+y_1)+f(-x_1)+f(-y_1)+\ldots+f(x_1+y_1)+f(-x_1)+f(-y_1)}_{M_1 \text{ sumandos } f(x_1+y_1)+f(-x_1)+f(-y_1)}$$

$$+\underbrace{f(x_2+y_2)+f(-x_2)+f(-y_2)+\ldots+f(x_2+y_2)+f(-x_2)+f(-y_2)}_{M_2 \text{ sumandos } f(x_2+y_2)+f(-x_2)+f(-y_2)}$$

$$\vdots$$

$$+\underbrace{f(x_n+y_n)+f(-x_n)+f(-y_n)+\ldots+f(x_n+y_n)+f(-x_n)+f(-y_n)}_{M_n \text{ sumandos } f(x_n+y_n)+f(-x_n)+f(-y_n)}$$

$$\vdots$$

es convergente, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n g(x_n, y_n) \ \text{ converge.} \tag{4.9}$$

Por la definición de M_n tenemos que

$$\begin{aligned} M_n\|g(x_n,y_n)\| &= \left(\left[\frac{1}{\|g(x_n,y_n)\|}\right]+1\right)\|g(x_n,y_n)\| \\ &> \left(\frac{1}{\|g(x_n,y_n)\|)}\right)\|g(x_n,y_n)\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

es decir $\|M_n g(x_n, y_n)\| > 1$ y por lo tanto (4.9) no puede ser convergente, lo cual es una contradicción que proviene de suponer que $g(x, y) \neq 0$ en cada vecindad U del $(0, 0)$. Por tanto, existe un vecindad U del 0 tal que para cada $x, y \in U$

$$f(x + y) + f(-x) + f(-y) = 0. \tag{4.10}$$

Supongamos que U es una bola alrededor del punto 0. Si $x = y = 0$ de (4.10) obtenemos $f(0) = 0$ y si $y = 0$ y $x \neq 0$ entonces

$$f(-x) = -f(x). \tag{4.11}$$

Y por lo tanto (4.10) se puede reescribir de la siguiente forma

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in U. \tag{4.12}$$

Por tanto, f es aditiva en U.

Ahora, probemos que f es continua en el punto 0. Sea $x_n \to 0$. Construya-se la siguiente serie

$$x_1 + (-x_1) + x_2 + (-x_2) + \ldots + x_n + (-x_n) + \ldots,$$

la series es convergente y su suma es 0. Entonces la serie

$$f(x_1) + f(-x_1) + f(x_2) + f(-x_2) + \ldots + f(x_n) + f(-x_n) + \ldots$$

también es convergente. Luego, debido a que f es aditiva y $f(0) = 0$, las sumas parciales de esta serie son

$$f(x_1), 0, f(x_2), 0, f(x_3), 0, \ldots$$

lo que implica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, y por lo tanto f es continua en 0.

Sea y un punto arbitrario de U. Por (4.11) y (4.12) tenemos que para $x \in U$

$$f(x - y) = f(x) - f(y). \tag{4.13}$$

Si $x \to y$ por (4.13) tenemos $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$. Por lo tanto f es continua en U.

Finalmente, probaremos que f es homogénea. Procedamos por casos. Si $m \in \mathbb{N}$, de (4.12)

$$f(mx) = f(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{m veces}}) = mf(x) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Si $m = 0$

$$f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x).$$

Si $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, entonces $(-m) > 0$ y de (4.11)

$$-f(mx) = f((-mx)) = f((-m)x) = -mf(x)$$

$$\Rightarrow f(mx) = mf(x) \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

Si $q \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f\left(\frac{q}{q}x\right) = qf\left(\frac{1}{q}x\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{1}{q}f(x) \qquad \forall\, q \in \mathbb{N}.$$

Si $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$$f(rx) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$$

es decir

$$f(rx) = rf(x) \qquad \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{4.14}$$

Ahora, sean $x \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| \leq 1$. Debido a que U es una bola con el centro en 0, $\alpha x \in U$. Elijamos una sucesión $(r_n)_{n\geq 1}$ de racionales tal que $|r_n| \leq 1$ y $r_n \to \alpha$. Entonces $r_n x \to \alpha x$ cuando $n \to \infty$, luego, por la continuidad de f en U y (4.14)

$$f(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = \alpha f(x) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esto muestra la homogeneidad de f. $\square$

El recíproco de este teorema, también es cierto.

Teorema 4.14. *Sea $f : X \to X$ una función continua y aditiva en una vecindad del punto 0. Entonces la función f preserva la convergencia de series infinitas en X.*

Demostración. Supongamos que f es aditiva y continua en la vecindad $U = \{x \in X : \|x\| < \delta\}$ donde $\delta > 0$. De la aditividad de f en U tenemos $f(0) = 0$. Además, como en la demostración del teorema anterior, f es homogénea en U.

Sea $\sum_{k\geq 1} x_k$ una serie convergente con términos $x_k \in X$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Demostraremos que la serie $\sum_{k\geq 1} f(x_k)$ también es convergente.

De acuerdo con la condición de Cauchy para la convergencia de series, dado $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{k+p} x_j \right\| = \|x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+p}\| < \frac{\delta}{2}. \tag{4.15}$$

Como se cumple para toda $p \in \mathbb{N}$, se sigue entonces que

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} x_j \right\| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{4.16}$$

Por (4.15) y la aditividad de f en U obtenemos

$$f\left(\sum_{j=k+1}^{k+p} x_j \right) = \sum_{j=k+1}^{k+p} f(x_j). \tag{4.17}$$

Consideremos ahora los elementos

$$y_p = \sum_{j=k+1}^{k+p} x_j \qquad \text{y} \qquad y = \sum_{j=k+1}^{\infty} x_j \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}$$

que pertenecen a la vecindad U.

La función f es continua en U, es decir, $f(y_p) \to f(y)$ cuando $\lim_{p\to\infty} y_p = y$, esto debido a que el límite del lado izquierdo de la igualdad (4.17) existe y es igual a $f(\sum_{j=k+1}^{\infty} x_j)$. Además el límite del lado derecho de (4.17) también existe y es igual a $\sum_{j=k+1}^{\infty} f(x_j)$. Esto garantiza la convergencia de la serie $\sum_{j=k+1}^{\infty} f(x_j)$ y por lo tanto la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j)$ también debe ser convergente en X. $\square$

Del Teorema 4.13 y Teorema 4.14 se sigue que $f : X \to X$ preserva la convergencia de la serie si y solo si existe una función lineal continua $l : X \to X$ y una vecindad U del punto $0 \in X$ tal que $f|_U = l|_U$.

Las funciones que preservan la convergencia de series en X no necesariamente tienen la forma de $f(x) = cx$ donde $c \in \mathbb{R}$ como es en el caso real (ver [10] pág. 273—276), como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. *Sea $f : l^\infty \to l^\infty$ definida de la siguiente manera: para $x = \{x_k\}_{k\geq 1} \in l^\infty$ escribimos*

$$f(x) = (x_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Claramente, f preserva la convergencia de series en l^∞.

4.3. Permutaciones que preservan la convergencia de series

Una condición suficiente y necesaria para que una permutación preserve la convergencia es la siguiente:

Lema 4.2. *Dada una permutación $p = \{p_n\}_{n\geq 1}$, entonces p preserva la convergencia de series en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) si y solo si existe un entero N tal que para* *cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ se puede representar como unión de no más de N bloques de enteros positivos.*

Demostración: Sea $p = \{p_n\}_{n \geq 1}$ una permutación de $\mathbb{N}$. Denótese

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{p_k}.$$

Supongamos que n es lo suficientemente grande tal que el entero 1 está incluido en $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Por hipótesis $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ se representa como unión de no más de N bloques de enteros positivos, que son en orden creciente, digamos

$$1, 2, 3, \ldots, \beta_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)} + 1, \alpha_1^{(n)} + 2, \ldots, \beta_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)} + 1,$$

$$\alpha_2^{(n)} + 2, \ldots, \beta_2^{(n)}, \ldots, \alpha_{j_n}^{(n)} + 1, \alpha_{j_n}^{(n)} + 2, \ldots, \beta_{j_n}^{(n)}$$

donde

$$0 < \beta_0^{(n)} < \alpha_1^{(n)} < \beta_1^{(n)} < \alpha_2^{(n)} < \beta_2^{(n)} < \ldots < \beta_{j_n}^{(n)}.$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= s(\beta_0^{(n)}) + [s(\beta_1^{(n)}) - s(\alpha_1^{(n)})] + \ldots + [s(\beta_{j_n}^{(n)}) - s(\alpha_{j_n}^{(n)})] \\ &= s(\beta_0^{(n)}) - s(\alpha_1^{(n)}) + s(\beta_1^{(n)}) - \ldots - s(\alpha_{j_n}^{(n)}) + s(\beta_{j_n}^{(n)}). \end{aligned}$$

De modo que $\sigma(n)$ se puede representar como

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s(k)$$

donde

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si k} \in \{\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_{j_n}^{(n)}\} \\ -1 & \text{si k} \in \{\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_{j_n}^{(n)}\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Puesto que $\lim_{n \to \infty} \beta_0^{(n)} = \infty$ se sigue entonces que $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y como $\sigma(n)$ tiene una cantidad impar de elementos entonces $\sum_{k \geq 1} a_{nk} = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

La existencia de $\lim s(n)$ implica $\lim \sigma(n) = \lim s_n$, si y solo si hay una constante M tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M. \tag{4.18}$$

En efecto, supongamos que existe una constante M tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

además, como $\sum a_k$ converge existe $\lim_{n\to\infty} s(n)$. Mostraremos entonces que existe $\lim_{n\to\infty} \sigma(n)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(n).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como existe $\lim_{n\to\infty} s(n)$ y $\lim_{n\to\infty} a_{nk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos hallar R suficientemente grande tal que para todo par de naturales $j, r \geq R$ se cumpla que

$$|s(j) - s(r)| < \varepsilon$$

y también para $n \geq R$

$$|a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{k^2}, \text{ para } k = 1, 2, \dots .$$

De este modo, para $n \geq R$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\sigma(n) - s(n)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s(k) - 1 \cdot s(n)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s(k) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s(n)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}[s(k) - s(n)]\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}||s(k) - s(n)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}||s(k) - s(n)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{nk}||s(k) - s(n)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{k^2}|s(k) - s(n)| + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{nk}| \\
&\leq C\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + (2B_n - 1)\varepsilon
\end{aligned}
$$

donde B_n es el número de bloques disjuntos que aparecen en el conjunto $p_1, p_2, \ldots, p_n$, por lo que $\sum_{k\geq 1} |a_{nk}| = 2B_n - 1$ y C es una constante que proviene del acotamiento de la sucesión $\{s(n)\}$.

Por consiguiente, para toda $n \geq R$

$$
|\sigma(n) - s(n)| \leq \varepsilon \left[C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + 2B_n - 1 \right]
$$

lo cual muestra que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n)$ y además

$$
\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(n),
$$

es decir p preserva la convergencia de series.

Recíprocamente, supongamos que existen $\lim\limits_{n\to\infty} s(n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n)$ y que

$$
\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s(k).
$$

Observemos que para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n\geq 1}$, si la serie $\sum_{n\geq 1} b_n x_n$ converge, entonces $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge absolutamente.

De esto, se sigue que la sucesión $\sum_{k\geq 1} |a_{nk}|$ converge lo cual prueba la afirmación de (4.18).

Puesto que

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 2B_n - 1
$$

la existencia de $\lim\limits_{n\to\infty} s(n)$ implica $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n)$ si y solo si existe una constante M para la cual $2B_n - 1 \leq M$ o $B_n \leq (M+1)/2$. Esto prueba el lema. $\square$

Teorema 4.15. *Una permutación $p = \{p_n\}_{n\geq 1}$ del conjunto $\mathbb{N}$ preserva la convergencia de series en un espacio lineal normado X si y solo si cumple la siguiente condición:*

(a) Existe un entero positivo M tal que por cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ puede expresarse como una unión de no más de M bloques de enteros positivos.

Demostración. "$\Leftarrow$" Sea $p = \{p_n\}_{n\geq 1}$ que satisface la condición (a). Sea $v = \sum_{k\geq 1} x_k$ una serie convergente en X. Demostraremos que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{p_k}$ también es convergente y tiene la misma suma v.

Denotemos por s_j y σ_j la j-ésima suma parcial de la serie $\sum_{k\geq 1} x_k$ y $\sum_{k\geq 1} x_{p_k}$, respectivamente.

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. La convergencia de $\sum_{k\geq 1} x_k$ implica que existe un entero positivo n_0 tal que para cada $n \geq n_0$

$$\|s_n - v\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.19}$$

Por la condición de Cauchy para la convergencia de la serie $\sum_{k\geq 1} x_k$ se tiene que para $j \geq n_0$ y $q \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\|x_{j+1} + x_{j+2} + \ldots + x_{j+q}\| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{4.20}$$

Escojamos ahora un entero positivo m_0 lo suficientemente grande como para que todos los números $1, 2, \ldots, n_0$ estén contenidos en la sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_{m_0}$.

Sea $m \geq m_0$. La elección de m_0 y la condición (a) nos dan la expresión de σ_m de la siguiente forma

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} x_{p_k} = s_n + s_{B_1} + s_{B_2} + \ldots + s_{B_r}, \tag{4.21}$$

donde $r \leq M - 1$, $n \geq n_0$ y s_B (para B un bloque $B = \{i+1, \ldots, i+l\}$) representa la suma $s_B = x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_{i+l}$.

De acuerdo con (4.20) obtenemos

$$\|s_{B_k}\| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.22}$$

A partir de (4.19), (4.21) y (4.22) obtenemos para $m \geq m_0$

$$\|\sigma_m - v\| \leq \|s_n - v\| + \sum_{k=1}^{r} \|s_{B_k}\| < \frac{\varepsilon}{2} + (M-1)\frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon,$$

por tanto, $v = \sum_{k\geq 1} x_{p_k}$.

"$\Rightarrow$" Supongamos que una permutación $p = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ preserva la convergencia de series en X. Fijemos un punto $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ y construyamos el subespacio lineal $E_1 = \{rx_0 : r \in \mathbb{R}\}$ de X. Entonces p también debe preservar la convergencia de series en E_1. Ahora está claro que una serie arbitraria $\sum_{k\geq 1} a_k x_0$ en E_1 es convergente si y solo si la serie real $\sum_{k\geq 1} a_k$ es convergente. Por lo tanto, p preserva la convergencia de series en $\mathbb{R}$, y por el Lema 4.2, p satisface la condición (a). □

Ahora encontraremos una condición suficiente para que una permutación $p = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ preserve la convergencia de series en un espacio de Banach.

Teorema 4.16. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y π una permutación de $\mathbb{N}$ que transforma cualquier serie convergente en X en una serie con sucesiones de sumas parciales acotadas (con respecto a la norma en X). Entonces π preserva la convergencia de series en X.*

Demostracion. Vamos a proceder indirectamente. Supongamos que π satisface el supuesto del teorema pero no preserva la convergencia de series en X. Es decir, existe una serie convergente $\sum_{k\geq 1} x_k$ con $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\pi(k)}$ no es convergente. Dado que X es un espacio de Banach, la condición de convergencia de Cauchy no se satisface para la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\pi(k)}$. Por lo tanto, existe ε_0 tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existen $m, q \in \mathbb{N}$ con $m > n_0$ tal que

$$\|x_{\pi(m+1)} + x_{\pi(m+2)} + \ldots + x_{\pi(m+q)}\| \geq \varepsilon_0. \tag{4.23}$$

Como $\sum_{k\geq 1} x_k$ es convergente, se cumple la condición de Cauchy para esta serie, esto es, dado $k > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i > n \geq m$ se cumple

$$\left\|\sum_{j=n}^{i} x_j\right\| < \frac{1}{k^3}. \tag{4.24}$$

De (4.23) se sigue la existencia de una sucesión de números positivos $\{m_n\}_{n\geq 1}$ tal que $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ y una sucesión de números $\{q_k\}_{k\geq 1}$ tales que: $m_k + q_k < m_{k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{\pi(m_k+1)} + \ldots + x_{\pi(m_k+q_k)}\| \geq \varepsilon_0 \tag{4.25}$$

y de (4.24) se sigue que para todo $k > 0$ y para toda $i > n \geq m_k$ se cumple

$$\left\|\sum_{j=n}^{i} x_j\right\| < \frac{1}{k^3}, \tag{4.26}$$

en particular tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} x_j\right\| < \frac{1}{k^3}. \tag{4.27}$$

Ahora construyamos la serie $\sum_{j\geq 1} x'_j$ de la siguiente manera

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{para } \ j = 1, 2, \ldots, m_1 \\ kx_j & \text{para } \ m_k < j \leq m_{k+1} \ (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}.$$

La serie $\sum_{j\geq 1} x'_j$ es convergente. Para probar esto, es suficiente mostrar que $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$ donde $r_m = \limsup\limits_{k\to\infty} \left\|\sum\limits_{k=m}^{k} x'_j\right\|$.

Sea $\eta > 0$. Elegimos $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i \geq i_0} \frac{1}{i^2} < \eta. \tag{4.28}$$

Ahora sea $m \geq m_{i_0}$. Entonces hay un entero $i \geq i_0$ para el cual $m_i \leq m < m_{i+1}$. Podemos estimar r_m. Por (4.26) y (4.27) obtenemos para $k > m$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=m}^{k} x'_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=m}^{m_{i+1}-1} x'_j \right\| + \left\| \sum_{j=m_{i+1}}^{m_{i+2}-1} x'_j \right\| + \ldots + \left\| \sum_{j=m_{i+l}}^{k} x'_j \right\| \\
&< \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(i+l)^2} \\
&< \sum_{j \geq i} \frac{1}{j^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r_m = \limsup_{k \to \infty} \left\| \sum_{j=m}^{k} x'_j \right\| \leq \sup_{k \geq m} \left\| \sum_{j=m}^{k} x'_j \right\| \leq \sum_{j \geq i} \frac{1}{j^2} < \eta.$$

Por tanto, $\lim_{m \to \infty} r_m = 0$.

Para completar la demostración, mostraremos que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{j \geq 1} x'_{\pi(j)}$ no está acotada. De hecho, según la definición de x'_j $(j = 1, 2, \ldots)$ tenemos

$$x'_{m_k+1} + x'_{m_k+2} + \ldots + x'_{m_k+q_k} = k(x_{m_k+1} + x_{m_k+2} + \ldots + x_{m_k+q_k}),$$

y así por (4.25)

$$\|x'_{\pi(m_k+1)} + x'_{\pi(m_k+2)} + \ldots + x'_{\pi(m_k+q_k)}\| \geq k\varepsilon_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

A partir de esto, se sigue inmediatamente que la sucesión $\{\sum_{j=1}^{n} x'_{\pi(j)}\}_{n \geq 1}$ no está acotada. $\square$

Conclusiones

En este trabajo de tesis se realizó un estudio de series en espacios lineales normados. Estos espacios son la combinación de espacios métricos y de los espacios vectoriales.

A lo largo del trabajo, hay resultados que no requieren de la completitud secuencial del espacio, sin embargo, la mayor parte de los teoremas que se enuncian aquí requieren de la completitud tomando como punto de partida el caso real exhibido en el segundo capítulo. Es por ello por lo que podemos decir con seguridad que la completitud secuencial del espacio juega un papel importante en la convergencia de series.

Esto se hace presente a la hora de comparar las distintas formas de convergencia ya que si no suponemos la completitud podemos encontrar ejemplos en donde una implicación no se cumple, tal es el caso de los ejemplos 3.1 y 3.3.

En el último capítulo se puede observar que las funciones que preservan la convergencia de series se pueden ver como funciones lineales continuas definidas en una vecindad del cero, resultado que generaliza el teorema de Rado mencionado en la sección 4.1.

Esto motivó a adentrarnos más en otras aplicaciones que preserven la convergencia de series, tal es el caso de las permutaciones, que resultan ser caracterizables en los espacios lineales normados.

Así entonces podemos concluir que se cumplió el objetivo de hacer un desarrollo comprensible de las caracterizaciones de los distintos tipos de convergencia de series, particularizando en espacios de Banach y de Hilbert, así como también la caracterización de las funciones que preservan la convergencia de series. De este modo, hemos hecho un interesante estudio dentro del análisis funcional.

Nos enfocamos solo en una pequeña porción del tema sobre convergencia de series en espacios lineales normados, ya que en este trabajo de tesis se estudiaron únicamente cinco tipos diferentes de convergencia. Aún quedan más nociones que se pueden estudiar.

Bibliografía

[1] Agnew, R. P.: *Permutations preserving convergence of series.* Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), pp. 563-564.

[2] Alvarez, Josefina: *La convergencia de series en un espacio de Banach.* Lecturas Matemáticas, 41(1), pp. 21-40, 2020.

[3] Clark, P. L.: *Honors Calculus.* http://alpha.math.uga.edu/~pete/2400full.pdf, 2014.

[4] Dindoŝ, Martiŝovitŝ y Ŝalát: *Remarks on infinite series in linear normed spaces.* Tatra Mt. Math. Publ. 19(2000), pp. 31-46.

[5] Dvoretsky, A. y Rogers C. A.: *Absolute and uncondicional convergence in normed linear spaces.* http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1063160, 1950.

[6] Hairer, E. y Wanner G.: *Analysis By Its History.* Springer, 2008.

[7] Hildebrandt, T. H.: *Unconditional convergence in normed vector spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), pp. 959-962, www.ams.org/journals/bull/1940-46-12/S0002-9904-1940-07344-6/S0002-9904-1940-07344-6.pdf.

[8] Kreyszig, Erwin: *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley Sons Inc, 1978.

[9] Naylor, A. W. y Sell G.R.: *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. Springer, 1982.

[10] Neubrunn, T. y Šalát T.: *On certain spaces of transformations of infinite series Časopis pro pěstování matematiky*. Vol. 92 (1967), No. 3, 267–282.

[11] Rado: *A theorem on infinite series*. J. London Math. Soc. XXXV, pp. 273—276, 1960.

[12] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976.

[13] Sinclair, Paul: *Equivalence of definition of absolute convergence*. Mathematics Stack Exchange, https://math.stackexchange.com/questions/2732626/equivalence-of-definition-of-absolute-convergence, 2018.

[14] Swartz, Charles: *An Introduction to Functional Analysis*. Marcel Dekker, 1992.

[15] Whittaker, E. T. y G. N. Watson: *A Course of Modern Analysis*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 4ª edición, junio 1996.