"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Obstrucción de finitud de Wall

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Félix Alejandro Medina Lugo

Director de tesis: Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña.

Hermosillo, Sonora, México, Julio 2, 2018

SINODALES

Dr. Guillermo Dávila Rascón.
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa.
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Jesús Franscisco Espinoza Fierro.
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña.
UNAM, Instituto de Matemáticas, Cuernavaca, Morelos.

Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional en cada paso de mi vida.
A mi hermano, por enseñarme a no perder la esperanza en las nuevas generaciones.
A mi hermana, por mostrarme que siempre hay que seguir adelante y buscar aquello que amas.
A mis compañeros, por hacer de esta travesía la mejor aventura.
A mis profesores, por abrirme las puertas y guiarme por el maravilloso mundo de las matemáticas.
A mi director de tesis, por la paciencia y el enorme apoyo que me brindó en cada momento.

Índice de contenido

Introducción

La topología algebraica es una rama de las matemáticas que utiliza herramientas del álgebra para estudiar los espacios topológicos. El objetivo básico es encontrar invariantes algebraicos que clasifiquen los espacios topológicos almenos hasta homeomorfismos aunque la mayoría son invariantes de los espacios hasta homotopía. En este trabajo nos enfocamos en los espacios topológicos con una estructura topológica de complejo CW los cuales son de gran interés en la topología algébraica por la relativa facilidad que se tiene al calcular sus grupos de homología y homotopía, de los cuales se puede obtener gran información de los espacios, sobre todo cuando tratamos con un complejo CW finito.
El pedir que un espacio tenga estructura de complejo CW finito no es siempre sencillo, asi que nos conformamos con que sea homotópicamente equivalente a uno. El trabajo se enfoca en espacios llamados finitamente dominados, estos son espacios que logran ser "casi" homotópicamente equivalentes a complejo CW finito y nuestro objetivo es ver cuando en efecto uno de estos espacios es homotópico a un complejo CW finito.

Entonces nuestra pregunta de interés es, ¿Un espacio topológico finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito? la respuesta en general es que no, sin embargo, no es trivial demostrarlo. En 1965, C.T.C Wall [Wal65] en una serie de artículos dio una solución al problema en el espíritu de la topología algebraica que como mencionamos al principio, esto significa dar respuesta al problema en términos de un invariante algebraico. Por otra parte en 1985 Andrew Ranicki [Ran85] desarrollo la teoría algebraica de la obstrucción de finitud para complejos de cadenas en una categoría aditiva, la cual ayuda a entender el paso de la topología al álgebra.
Para entender esta solución utilizaremos herramientras teorícas de la K-teoría algebraica, el álgebra homológica, la topología algebraica y la topología. En este trabajo veremos un planteamiento del problema algebraico y lo resolveremos en su totalidad, para el problema topológico se necesitarán muchas más herramientas y lenguaje, por lo que no lo resolveremos en su totalidad en este trabajo, aún así, desarrollaremos suficiente lenguaje para enunciar el resultado topológico así como dar una solución parcial de este.
En el primer capítulo veremos teoría de módulos, sobre todo los complejos de cadenas, sucesiones exactas, teoría de módulos libres y de módulos proyectivos, el como se relacionan y se clasifican. Estas nociones nos serán de utilidad para definir aspectos en K-teoría algebraica.
En el segundo capítulo introducimos el concepto del grupo K_0 de un anillo R, establecido mediante un cociente en las clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos, es dentro

de esta estructura algebraica donde definiremos el invariante algebraico en el que se centra el trabajo.
Despúes de obtener nuestra estructura algebraica, en el tercer capítulo planteamos el problema en lenguaje algebraico, definiendo un complejo de cadenas finitamente dominado y cuando este es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito conformado por R-módulos libres, lo resolvemos con herramientas del álgebra homológica como los complejos de cadenas, la homología, la homotopía, entre otros.
Al haber resuelto en su totalidad el problema en un sentido algebraica queremos ver que en efecto resuelve el problema topologico inicial. En el cuarto capítulo utilizaremos aspectos de la topología algebraica y la topología general, comenzamos definiendo el grupo fundamental, los grupos de homotopía y los cubrientes. Para despúes pasar a definir un complejo de cadenas para los espacios topológicos, el complejo de cadenas singular y sus respectivos grupos de homología.
Habiendo definido un poco más de teoría, pasamos a definir la estructura en la que nos enfocamos, la estructura de complejo CW, algunas operaciones en este tipo de espacios y asignamos nuevamente un complejo de cadenas a estos espacios, el complejo de cadenas celular el cual permite facilitar algunos calculos como se menciono anteriormente.
Teniendo lista la mayoría de nuestra teoría, por último llegamos a la definición de espacios finitamente dominados y algunas implicaciones, despúes de definir dos teoremas importantes en la topología algebraica, el teorema de Whitehead y el teorema de Hurewicz, vemos como relacionar el resultado obtenido a partir del álgebra pura y dar una respuesta parcial al gran problema topológico.

1 El grupo K_0

En este primer capítulo comenzaremos viendo la teoría necesaria para definir y entender el grupo $K_0(R)$. El capítulo se divide en dos secciones, el de teoría de módulos y el del grupo K_0. Los R-módulos son las estructuras básicas en las que trabajaremos a lo largo de los primeros tres capítulos.

1.1 Teoría de módulos

En esta sección definiremos algunos conceptos básicos de gran importancia sobre la teoría de módulos, más específicamente, los conceptos para definir y trabajar los R-módulos libres y R-módulos proyectivos.

1.1.1 Módulos y homomorfismos

Comenzamos definiendo la estructura de R-módulo para un un anillo R y las funciones que relacionan a estos, los homomorfismo de módulos.

Sea R un anillo asociativo con $1 \neq 0$.

Definición 1.1.1. Sea $(M, +)$ un grupo abeliano. Decimos que M es un módulo izquierdo sobre R o R-módulo izquierdo si existe una multiplicación por escalar $\eta : R \times M \longrightarrow M$ escrita $(r, m) \mapsto rm$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $(r + s)m = rm + sm$,
2. $(rs)m = r(sm)$,
3. $r(m + n) = rm + rn$,

4. $1m = m$,

para todo $r, s \in R$ y para todo $m, n \in M$.

Observación 1.1.1. Podemos definir R-módulo derecho mediante
$\gamma : M \times R \longrightarrow M$ tal que:

1. $m(r + s) = mr + ms$,
2. $m(rs) = (mr)s$,
3. $(m + n)r = mr + nr$,
4. $m1 = m$,

para todo $r, s \in R$ y para todo $m, n \in M$.

Notemos que las definiciones de R-módulo izquierdo y R-módulo derecho difieren en $m(rs) = (mr)s$ y $(rs)m = r(sm)$. A lo largo del texto nos referiremos a los R-módulos izquierdos simplemente como R-módulos.

Ejemplo 1.1. Todo anillo R es un R-módulo con las operaciones de suma y producto en el anillo.

Ejemplo 1.2. El grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo donde las propiedades de módulo se siguen de las propiedades de congruencia, es decir:

$$m \cdot (\overline{k}) = (\overline{mk}) \qquad m \in \mathbb{Z}, \overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Un subconjunto N de un R-módulo M, se llama *submódulo* de M si N es un subgrupo aditivo de M y para toda $r \in R$, $rN = \{rx \mid x \in N\} \subset N$.
Definiremos ahora las funciones de interés en el estudio de los R-módulos.

Definición 1.1.2. Sean M y N R-módulos. Una función $f : M \longrightarrow N$ se llama homomorfismo de R-módulos o R-lineal si f es un homomorfismo de grupos tal que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in R$ y para todo $x \in M$.

Si f es sobreyectiva la llamaremos epimorfismo; si es inyectiva la llamaremos monomorfismo. En el caso que f sea tanto epimorfismo como monomorfismo, diremos que es un isomorfismo. Si existe un isomorfismo de R-módulos de M a N diremos que M es isomorfo a N y lo denotamos por $M \cong N$.

Definición 1.1.3. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo, definimos

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0_N\} \text{ y}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in N \mid f(x) = y, \text{ para algún } x \in M\}.$$

Proposición 1.1.1. *El homomorfimo f es monomorfismo si y sólo si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo, es decir, si $f(x) = f(y)$ tenemos que $x = y$, $x, y \in M$. Sea $x \in \mathrm{Ker}(f)$, como f es un homomorfismo se cumple que $f(0) = 0$, así $f(0) = f(x)$ y como f es monomorfismo debe ser que $x = 0$. Supongamos ahora que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ y sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$ y por lo tanto $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, como $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ tenemos que $x - y = 0$ es decir $x = y$.

■

Proposición 1.1.2. *La composición de dos homomorfismos de R-módulos es un homomorfismo de R-módulos*

Demostración. Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de R-módulos y $x, y \in M'$, entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Además, $(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f)(x)$. Por lo tanto $g \circ f$ es un homomorfismo de R-módulos. ■

Proposición 1.1.3. *Si $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo, entonces* $\mathrm{Im}(f) \cong M$.

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo, si restringimos f a $\mathrm{Im}(f)$ tenemos que $f' : M \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ es tanto monomorfismo como epimorfismo, por lo que f' es un isomorfismo y $M \cong \mathrm{Im}(f)$. ■

El homomorfismo identidad en el R-módulo M' lo denotaremos por $1_{M'}$.

Proposición 1.1.4. *Sea $h : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de R-módulos. El homomorfismo h es un isomorfismo si y sólo si existe $g : N \longrightarrow M$ tal que $h \circ g = 1_M$ y $g \circ h = 1_N$.*

Demostración. Si h es un isomorfismo, en particular es un homomorfismo de grupos biyectivo, por lo que existe homomorfismo de grupos $g : N \longrightarrow M$ tal que $h \circ g = 1_M$ y $g \circ h = 1_N$, como grupos.
Falta ver que g es homomorfismo de módulos, sea $\alpha \in R$, entonces

$$\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x)) = \alpha\varphi(\varphi^{-1}(x)) = \alpha x.$$

Por lo que $\varphi^{-1}(\alpha x) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))) = \alpha\varphi^{-1}(x)$.
Para el regreso, hay que mostrar que si existe homomorfismo de R-módulos $g : N \longrightarrow M$ tal que $h \circ g = 1_M$ y $g \circ h = 1_N$, entonces h es isomorfismo. Primero mostraremos que h es epimorfismo, sea $x \in N$ y definimos $y = g(x)$, entonces $h(y) = h(g(x)) = x$ y por tanto h es epimorfismo.
Veamos ahora que h es monomorfismo, sean $x, y \in M$ tales que $h(x) = h(y)$, mostraremos que $x = y$. Definimos $x' = h(x)$ y $y' = g(x')$, entonces

$$\begin{aligned} x =& 1_M(x) \\ =& g(h(x)) \\ =& g(x') \\ =& y'. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} y =& 1_M(y) \\ =& g(h(y)) \\ =& g(h(x)) \\ =& y'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x = y$ y así h es isomorfismo.

■

Al isomorfismo g de la Proposición anterior lo llamamos *la inversa de h* y lo denotamos por h^{-1}.

Proposición 1.1.5. *Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de R-módulos y $h = g \circ f$ la composición, se cumple que*

1. *Si h es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.*

2. Si h es un epimorfismo, entonces g es un epimorfismo.

Demostración. 1. Sean $x, y \in M'$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y)$. Como h es un monomorfismo, tenemos que $x = y$. Por lo tanto f es un monomorfismo.

2. Como h es un epimorfismo, tenemos que $h(M') = M''$, entonces

$$M'' = g(f(M')) \subset g(M) \subset M'',$$

y así $g(M) = M''$. Por lo tanto g es un epimorfismo.

■

Teorema 1.1.6. ***(Primer teorema de isomorfismo para módulos)*** *Si M, N son R-módulos y $\varphi : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces*

$$M/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong N.$$

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\mathrm{Ker}\varphi. & \end{tikzcd}$$

Como φ en partircular es un homomorfismo sobreyectivo de grupos, por el primer teorema de isomorfismo de grupos tenemos que existe un homomorfismo biyectivo bien definido de grupos $\overline{\varphi} : M/\mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow N$ que hace conmutar al diagrama, i.e.

$$\overline{\varphi}(x + \mathrm{Ker}(\varphi)) = \varphi(x), \;\; x \in M.$$

Falta verificar que $\overline{\varphi}$ es homomorfismo de módulos. Sea $\alpha \in R$ y $x \in M$, se sique que

$$\alpha\overline{\varphi}(x + \mathrm{Ker}(\varphi) = \alpha(\varphi(x)) = \varphi(\alpha x) = \overline{\varphi}(\alpha x + \mathrm{Ker}(\varphi)).$$

Por lo tanto $\overline{\varphi}$ es isomorfismo de R-módulos.

■

1.1.2 Suma directa y sucesiones exactas

Teniendo definida nuestra primer estructura, pasamos a definir algunas formas de relacionar los R-módulos, como la suma directa y las sucesiones de R-módulos, en particular nos son de interés las sucesiones exactas y más adelante nos enfocaremos en los complejos de cadenas.

Definición 1.1.4. Sea I un conjunto de índices y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de R-módulos, definimos

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \mid f(i) = 0 \ \forall i \in I - J, J \subset I, |J| < \infty, f(i) \in M_i\}$$

como *la suma directa* de la familia $(M_i)_{i\in I}$. Equivalentemente $\oplus_{i\in I} M_i$ se puede definir mediante sumas formales, es decir

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{j\in J} \alpha_j x_j \mid \alpha_j \in R, x_j \in M_j, \text{para algún } J \subset I, |J| < \infty \right\}.$$

Observación 1.1.2. El conjunto $\oplus_{i\in I} M_i$ tiene estructura de R-módulo con las operaciones $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ y $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$.

Denotaremos por $(x_i)_{i\in I}$ a los elementos de $\oplus_{i\in I} M_i$.

Teorema 1.1.7. ***(Propiedad universal de la suma directa)*** *Si M es un R-módulo y $\{\varphi_j : M_j \longrightarrow M\}_{j\in I}$ es una familia de homomorfismos, entonces existe un único homomorfismo $\varphi : \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ i_j = \varphi_j$ para todo $j \in I$, donde $i_j : M_j \longrightarrow \oplus_{i\in I} M_i$ es la inclusión natural.*

Demostración. Sea $\varphi : \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi((x_i)_{i\in I}) = \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j)$, donde $x_j \neq 0$ para toda j en J. Como $\sum_{j\in J} \varphi_j(x_j)$ es una suma finita, φ está bien definida, veamos que es un homomorfismo. Sean $(x_i)_{i\in I}, (x'_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ y $\alpha \in R$.

1.

$$\begin{aligned}
\varphi((x_i)_{i\in I} + (x'_i)_{i\in I}) &= \varphi((x_i + x'_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j + x'_j) \\
&= \sum_{j\in J} (\varphi_j(x_j) + \varphi_j(x'_j)) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) + \sum_{j\in J} \varphi_j(x'_j) \\
&= \varphi((x_i)_{i\in I}) + \varphi((x'_i)_{i\in I}).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(x_i)_{i\in I}) &= \varphi((\alpha x_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(\alpha x_j) \\
&= \sum_{j\in J} \alpha\varphi_j(x_j) \\
&= \alpha \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) \\
&= \alpha\varphi((x_i)_{i\in I}).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\varphi \circ i_j = \varphi_j$. Sea $x \in M_l, l \in I$, tenemos que $i_l(x) = ((x_i)_{i\in I})$ con $x_i = 0$ si $i \neq l$ y $x_i = x$ si $i = l$

$$\begin{aligned}
\varphi \circ i_l(x) &= \varphi(i_l(x)) \\
&= \varphi((x_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) \\
&= \varphi_l(x),
\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi \circ i_l = \varphi_l$.
Veamos ahora que es única. Sea $\psi : \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ un homomorfismo tal que $\psi \circ i_j = \varphi_j$ para todo $j \in I$. Podemos escribir a todo $x = (x_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ como $(x_i)_{i\in I} = \sum_{j\in J}(i_j(x))$, entonces

$$
\begin{aligned}
\psi((x_i)_{i\in I}) &= \psi(\sum_{j\in J} i_j(x)) \\
&= \sum_{j\in J} \psi(i_j(x)) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) \\
&= \varphi((x_i)_{i\in I}),
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\psi = \varphi$.

■

Sean N, N' submódulos de un R-módulo M, denotamos por $N + N'$ al conjunto $N + N' = \{n + n' \mid n \in N, n' \in N'\}$.

Teorema 1.1.8. *Sean N, N' submódulos de M tales que $N \cap N' = \{0\}$ y $N + N' = M$. Entonces $\varphi : N \oplus N' \longrightarrow M$ dado por $\varphi((y, y')) = y + y'$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $\psi : N \longrightarrow M, \psi' : N' \longrightarrow M$ las inclusiones, las cuales son homomorfismos, por lo que existe un único $\varphi : N \oplus N' \longrightarrow M$ tal que:

$$\varphi \circ i = \psi \ \ y \ \ \varphi \circ i' = \psi',$$

donde i, i' son las inclusiones en la suma directa, falta ver que φ es biyectiva. Si $\varphi(y, y') = 0$, tenemos que $y = -y' \in N \cap N' = \{0\}$, es decir $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, por lo que φ es un monomorfismo. Ahora, como $N + N' = M$ es claro que φ es un epimorfismo. Por lo tanto φ es isomorfismo. ■

Teorema 1.1.9. *Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de módulos tales que $g \circ f$ es isomorfismo. Entonces*

$$M \cong \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g).$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = M$. Sea $x \in M$ y $g(x) \in M''$, como $g \circ f : M' \longrightarrow M''$ es un isomorfismo, existe $y \in M'$ tal que $(g \circ f)(y) = g(x)$. Definimos $z = f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ y $z' = x - z$, así $g(z') = g(x - z) = g(x) - g(z) = (g \circ f)(y)) - g(f(y)) = 0$ por lo que $z' \in \mathrm{Ker}(g)$ y por lo tanto $z + z' = x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

Falta ver que $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{0\}$. Sea $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$, entonces existe $y \in M'$ tal que $f(y) = x$ y $g(x) = 0$ y así $gf(y) = g(x) = 0$.

Como $g \circ f$ es isomorfismo tenemos que $y = 0$ y $f(y) = 0 = x$ pues f es homomorfismo. Por lo tanto $M \cong \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(g)$.

■

Definición 1.1.5. Sea

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

una sucesión de R-módulos y R-homomorfismos, tal que $\operatorname{Im}(f_{j+1}) \subset \operatorname{Ker}(f_j)$, o bien $f_j \circ f_{j+1} = 0$, para toda j. Una sucesión que cumple esta condición es llamada complejo de cadenas.

Si $f : M' \longrightarrow M$ es un monomorfismo, lo denotamos por $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M$ y si $g : M \longrightarrow M''$ es un epimofirsmo, lo denotamos por $M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$.

Definición 1.1.6. Diremos que una sucesión es exacta si $\operatorname{Im}(f_{i+1}) = \operatorname{Ker}(f_i)$ para todo i.

A una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

la llamaremos *sucesión exacta corta*.

Observación 1.1.3. En 1.1 tenemos que f es un monomorfismo y g es un epimorfismo, la reescribiremos como

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''.$$

Ejemplo 1.3. Sea N un submódulo de M, consideremos el R-módulo cociente M/N. Sea $i : N \longrightarrow M$ el monomorfismo de inclusión y $\pi : M \longrightarrow M/N$ el epimorfismo de proyección, entonces

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Definición 1.1.7. Diremos que una sucesión exacta corta

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'',$$

se escinde si existe un homomorfismo $g' : M'' \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_{M''}$.

Proposición 1.1.10. *Si $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces $M \simeq M' \oplus M''$.*

Demostración. Si $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces existe $g' : M'' \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_{M''}$, el cual es un isomorfismo.
Por el Teorema 1.1.9, $M \cong \mathrm{Im}(g') \oplus \mathrm{Ker}(g)$ y por la Proposición 1.1.5 tenemos que al ser $1_{M''}$ monomorfismo, g' es monomorfismo, por lo que $\mathrm{Im}(g') \cong M''$.
Como la sucesión es exacta corta, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ y f es monomorfismo, por lo que $\mathrm{Im}(f) \cong M'$. Por lo tanto $M \cong M'' \oplus M' \cong M' \oplus M''$. ■

Denotamos el conjunto de los homomorfismos de R-módulos de M a N mediante $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

El conjunto $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ es un grupo abeliano con la operación $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ para todo anillo R y para todo M, N R-módulo. Ahora, sea $\alpha \in R$ con R un anillo conmutativo, definimos el producto escalar $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, así dotamos a $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ con estructura de R-módulo.
El hecho de tomar un anillo conmutativo R nos garantiza que $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ sea en efecto un homomorfismo de R-módulos.

Definición 1.1.8. Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_R(N', N)$, definimos

$$\psi_* : \mathrm{Hom}_R(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N),$$

mediante $\psi_*(f) = \psi \circ f$ para cualquier R-módulo M. A ψ_* le llamamos el homomorfismo inducido por ψ.

El homomorfismo ψ_* está bien definido pues composición de homomorfismos es un homomorfismo.

Proposición 1.1.11. *Sea $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\longrightarrow} N''$ una sucesión exacta de R-módulos. Entonces para cualquier R-módulo M, la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \overset{\psi_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M, N) \overset{\psi'_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \tag{1.2}$$

es exacta.

Demostración. Veamos que ψ_* es un monomorfismo, supongamos que $\psi_*(f) = 0$, es decir $(\psi \circ f)(y) = 0$ para toda $y \in M$ con $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N')$.
Como ψ es un monomorfismo, $f(y) = 0$ para todo $y \in M$, lo que implica que $f = 0$ y por lo tanto ψ_* es un monomorfismo.

Ahora demostraremos que (1.2) es exacta en $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

1. $\mathrm{Im}\psi_* \subset \mathrm{Ker}\psi_*^{'}$. Sea $g \in \mathrm{Im}\psi_*$, entonces $g = \psi \circ f$ con $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N')$. Luego

$$\psi_*^{'}(g) = \psi^{'} \circ g = \psi^{'} \circ \psi \circ f = 0,$$

   pues $\psi^{'} \circ \psi = 0$ debido a que la sucesión $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi^{'}}{\longrightarrow} N''$ es exacta.

2. $\mathrm{Ker}\psi_*^{'} \subset \mathrm{Im}\psi_*$. Sea $g \in \mathrm{Ker}\psi_*^{'}$, i.e. $\psi_*^{'}(g) = 0$ y entonces $\psi^{'} \circ g = 0$. Queremos ver que existe $f : M \longrightarrow N'$ tal que $\psi_*(f) = g = \psi \circ f$.
   Sea $x \in M$, entonces $\psi' g(x) = 0$ y así $g(x) \in \mathrm{Ker}\psi' = \mathrm{Im}\psi$ por lo que existe un único $y \in N'$ tal que $\psi(y) = g(x)$, pues ψ es un monomorfismo. Definamos $f : M \longrightarrow N'$ mediante $f(x) = y = \psi^{-1} g(x)$, por lo tanto $\psi(f) = g$.

■

1.1.3 Módulos libres y módulos proyectivos

Habiendo definido ya los R-módulos, nos enfocaremos en algunos casos particulares de estos, los R-módulos libres y los R-módulos proyectivos. A partir de estos dos tipos de R-módulos definiremos el grupo $K_0(R)$ en la siguiente sección.

Definición 1.1.9. Sea M un R-módulo y $A \subseteq M$. Diremos que M es libre sobre A (o que A es un conjunto libre de generadores de M) si para todo $x \in M, x \neq 0$, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ tales que

$$x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n, \;\; n \in \mathbb{N},$$

de manera única.

Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo K con respectivas bases $\beta, \widetilde{\beta}$. Si $f : V \to W$ es una transformación lineal, esta se define a partir de $f(x) \in \mathrm{Im}(f), x \in \beta$

y extendiendo por linealidad. De manera similar, si L es un R-módulo libre sobre A y $f : L \to M$ un homomorfismo de R-módulos, f se define apartir de $f(x) \in \operatorname{Im}(f), x \in A$ y extendieno por linealidad.

Teorema 1.1.12. ***(Propiedad universal de R-módulos libres)*** *Sea L un R-módulo libre sobre A, para cualquier R-módulo M y función $\varphi : A \longrightarrow M$. Existe un único homomorfismo de R-módulos $\phi : L \longrightarrow M$ tal que $\varphi = \phi \circ i$.*

Demostración. Sea $x \in L$, entonces x es de la forma $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ y definimos

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(a_i).$$

Falta ver que ϕ es un homomorfismo. Sean $x, y \in L$ y $\alpha \in R$.

1.

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) =& \phi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{j=1}^{m} s_j b_j\right) \\
=& \phi(r_1 a_1 + \dots r_n a_n + s_1 b_1 + \dots + s_m b_m) \\
=& r_1 \varphi(a_1) + \dots r_n \varphi(a_n) + s_1 \varphi(b_1) + \dots + s_m \varphi(b_m) \\
=& (r_1 \varphi(a_1) + \dots r_n \varphi(a_n)) + (s_1 \varphi(b_1) + \dots + s_m \varphi(b_m)) \\
=& \phi(x) + \phi(y).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha x) =& \phi(\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i a_i) \\
=& \phi(\sum_{i=1}^{n} (\alpha r_i) a_i) \\
=& \sum_{i=1}^{n} (\alpha r_i) \varphi(a_i) \\
=& \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(a_i) \\
=& \alpha \phi(x).
\end{aligned}$$

■

Definición 1.1.10. Sea M un R-módulo y $X \subset M$ un subconjunto. Definimos el submódulo de M generado por X como

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in R, x_i \in X, \text{para algún } n \right\}.$$

Definición 1.1.11. Sea M un R-módulo, decimos que M es finitamente generado si existe $X \subset M$ finito tal que $\langle X \rangle = M$.

Teorema 1.1.13. *Todo R-módulo M es cociente de un R-módulo libre.*

Demostración. Sea M un R-módulo y sea $X \subseteq M$ tal que $\langle X \rangle = M$. En particular podemos tomar $X = M$. Sea L el R-módulo libre generado por X, así el homomorfismo inclusión $f : X \longrightarrow M$ se extiende a un homomofismo $\phi : L \longrightarrow M$. Como $X = f(X) \subseteq \phi(L) \subset M$ y $X = M$ vemos que $\phi(L) = M$. Por lo tanto ϕ es un epimorfismo, y por el primer Teorema de isomorfismo (1.1.6)

$$M \cong L/\text{Ker}\phi.$$

■

Teorema 1.1.14. *Si L es un R-módulo libre con base X entonces es isomorfo a $\bigoplus_{j \in X} R_j$, donde R_j es isomorfo a R.*

Demostración. Sea $x \in L$, así $x = \sum_{j \in X} \lambda_j x_j$, $\lambda_j \in R$ para todo j. Definimos $\eta : L \longrightarrow \bigoplus_{j \in X} R_j$ mediante $\eta(x) = (\lambda_j)_{j \in X}$ y $\rho_j : R_j \longrightarrow L$ mediante $\rho_j(\lambda_j) = \lambda_j x_j$. Por la propiedad universal de la suma directa obtenemos un homomorfismo $\rho : \oplus_{j \in X} R_j \longrightarrow L$. Así

$$\begin{aligned} \rho \circ \eta(x) &= \rho(\lambda_j)_{j \in X} \\ &= \sum_{j \in X} \rho_j(\lambda_j) \\ &= \sum_{j \in X} \lambda_j x_j \\ &= x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho \circ \eta = 1_L$, análogamente $\eta \circ \rho = 1_{\oplus_{j \in X} R_j}$. ■

Definición 1.1.12. Un R-módulo P se llamará proyectivo si para todo homomorfismo $f : P \longrightarrow N''$ y para todo epimorfismo $\psi' : N \longrightarrow N''$ de R-módulos, existe un homomorfismo

$h : P \longrightarrow N$ tal que $\psi' \circ h = f$. En esta situación tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Teorema 1.1.15. *Sea P un R-módulo, entonces P es proyectivo si y sólo si para cualquier epimorfismo $f : M \longrightarrow P$, existe su inversa derecha, es decir, existe $g : P \longrightarrow M$ tal que $f \circ g = 1_p$.*

Demostración. Supongamos que P es proyectivo y tomemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"] & \\ M \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, existe $g : P \longrightarrow M$ tal que $f \circ g = 1_P$.
Ahora supongamos que para cualquier epimorfismo $f : M \longrightarrow P$ existe $g : P \longrightarrow M$ tal que $f \circ g = 1_P$ y supongamos que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Reemplazamos $M \xrightarrow{\varphi} N$ por $M \oplus P \xrightarrow{\psi \oplus 1_P} N \oplus P$ y $P \xrightarrow{\varphi} N$ por $(\varphi, 1_P) : P \longrightarrow N \oplus P$ para obtener el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "{(\varphi,1_P)}"] & \\ M \oplus P \arrow[r, "\psi\oplus 1_P"] & N \oplus P \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Veamos que $(\varphi, 1_P)$ es monomorfismo, sea $x \in P$ tal que $(\varphi, 1_P)(x) = (\varphi(x), 1_P(x)) = (\varphi(x), x) = (0, 0)$. Entonces $x = 0$ y así $\operatorname{Ker}(\varphi, 1_P) = 0$. Ahora si reemplazamos N por $\operatorname{Im}(\varphi)$ y M por $\psi^{-1}(\operatorname{Im}(\varphi))$ obtenemos que $(\varphi, 1_P)$ es un isomorfismo y $f = \varphi^{-1} \circ \psi : M \longrightarrow P$ es un epimorfismo.
Como f es epimorfismo existe g tal que $f \circ g = (\varphi^{-1} \circ \psi) \circ g =$, y como esto es válido para cualquier diagrama, concluimos que P es proyectivo.

■

Proposición 1.1.16. *Sea P un R-módulo proyectivo, $f : M \longrightarrow P$ un epimorfismo y $g : P \longrightarrow M$ su inversa derecha. Entonces $\rho = g \circ f$ es idempotente, es decir, $\rho \circ \rho = \rho$. En consecuencia $M = \rho(M) \oplus (1-\rho)(M)$.*

Demostración. Para ver que ρ es idempotente, hay que ver que $\rho^2 = \rho$.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (g \circ f) \circ (g \circ f) \\ &= g \circ (f \circ g) \circ f \\ &= g \circ 1_P \circ f \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in M$. Entonces $x = \rho(x) + x - \rho(x) = \rho(x) + (1-\rho)(x)$, por lo que $M = \rho(M) + (1-\rho)(M)$. Falta ver que $\rho(M) \cap (1-\rho)(M) = 0$, notemos que si $x \in \rho(M) \cap (1-\rho)(M)$ tenemos que $x = \rho(y) = (1-\rho)(z)$.
Por lo que $\rho(x) = \rho^2(y) = \rho(y) = x$ y $\rho(x) = \rho(1-\rho)(z) = \rho(z) - \rho(z) = 0$, así concluimos que $x = 0$.

Proposición 1.1.17. *Sea P un R-módulo, P es proyectivo si y sólo si para toda sucesión exacta corta $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} N''$, la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N') \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{\psi'_*} \mathrm{Hom}_R(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Supongamos que P es proyectivo. Por la Proposición 1.1.11, sólo nos queda mostrar que ψ'_* es un epimorfismo. Tenemos que ψ'_* es un epimorfismo si y sólo si para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(P, N'')$ existe $h \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ tal que $\psi'_*(h) = f$. Como P es proyectivo y ψ' es un epimorfismo, tenemos que existe $h : P \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h = \psi'_*(h)$. Por lo tanto ψ'_* es un epimorfismo. Ahora supongamos que para toda sucesión exacta corta $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} N''$ la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N') \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{\psi'_*} \mathrm{Hom}_R(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sea $f : P \longrightarrow N''$ un homomorfismo, como ψ'_* es epimorfismo tenemos que existe $h : P \longrightarrow N$ tal que $\psi' \circ h = f$, es decir, P es proyectivo.

$\blacksquare$

Lema 1.1.18. *Si L es un R-módulo libre, entonces L es proyectivo. Es decir para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(L, N'')$ y para todo $\psi' : N \longrightarrow N''$ epimorfismo, existe un homomorfismo $h : L \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h$.*

Demostración. Sea L un R-módulo libre con base $X \subset L$. Para todo $x_i \in X$ tenemos que $f(x_i) \in N''$ y como ψ' es un epimorfismo, se sigue que para cualquier $x_i \in X$ existe $g(x_i) \in N$ con $g : X \longrightarrow N$ tal que $\psi'(g(x_i)) = f(x_i)$. Ahora como L es libre, $g : X \longrightarrow N$ se extiende a un homomorfismo $h : L \longrightarrow N$ con $g(x_i) = h(x_i)$ para todo $x_i \in X$. Luego, como $\langle X \rangle = L$, podemos escribir a x como $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\lambda_i \in R, x_i \in X$ para cada $x \in L$, por lo que

$$\begin{aligned}
\psi'(h(x)) &= \psi'(h(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi'(h(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi'(g(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi' \circ h = f$.

■

Teorema 1.1.19. *$P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ es un R-módulo proyectivo si y sólo si P_i es proyectivo para todo $i \in I$.*

Demostración. Veamos el caso $i \in \{1, 2\}$, el caso general es análogo. Sea $P = P_1 \oplus P_2$ un R-módulo proyectivo, probaremos que P_2 es proyectivo.
Sean $f : P_2 \longrightarrow N'', \psi' : N \twoheadrightarrow N'', i_2 : P_2 \longrightarrow P$ y $\pi_2 : P \longrightarrow P_2$ homomorfismos en los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] & P_2 \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, existe $h : P \longrightarrow N$ homomorfismo que hace conmutar el diagrama, es decir $\psi' \circ h = f \circ \pi_2$. Sea $k = h \circ i_2 : P_2 \longrightarrow N$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "k"'] & P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h"] & P_2 \arrow[d, "f"] & \\
& & N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego

$$\psi' \circ k = \psi' \circ h \circ i_2 = f \circ \pi_2 \circ i_2 = f,$$

pues $\pi_2 \circ i_2 = 1_{P_2}$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& P_2 \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Se sigue que P_2 es proyectivo. La demostración para P_1 es análoga. Supongamos ahora que P_1 y P_2 son proyectivos, sean $\psi' : N \twoheadrightarrow N''$, $h : P = P_1 \oplus P_2 \longrightarrow N, h_j = h \circ i_j : P_j \longrightarrow N''$. Como P_1 y P_2 son proyectivos, existen k_1, k_2 tales que $\psi' \circ k_1 = h_1$ y $\psi' \circ k_2 = h_2$, veamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "k_2"'] \arrow[dr, "h_2"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[d, "h"] & \\
& N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & P_1. \arrow[ul, "k_1"] \arrow[u, "h_1"'] \arrow[uu, bend right, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma directa (1.1.7) existe un único homomorfismo $k : P \longrightarrow N$ tal que $k \circ i_1 = k_1$ y $k \circ i_2 = k_2$. Luego

$$\psi' \circ k \circ i_j = \psi' \circ k_j = h_j = h \circ i_j.$$

Por la unicidad de k tenemos que $\psi' \circ k = h$

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

■

Teorema 1.1.20. *Sea P un R-módulo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *P es proyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

   se escinde.
3. *P es un sumando directo de un R-módulo libre.*
4. *Para cualquier sucesión exacta corta $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N'') \longrightarrow 0$$

   es exacta.

Demostración. (1 $\Rightarrow$ 2) La implicación es inmediata del Teorema 1.1.15 y del diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "1_P"] & \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

(2 $\Rightarrow$ 3) Por el Teorema 1.1.13 tenemos que P es isomorfo al cociente de un R-módulo libre L y por lo tanto existe un epimorfismo $g : L \longrightarrow P$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis existe $h : P \longrightarrow L$ tal que $1_P = g \circ h$, donde claramente 1_P es un isomorfismo y por consecuencia del Teorema 1.1.9 tenemos que:

$$L \cong \mathrm{Im}(h) \oplus \mathrm{Ker}(g).$$

Ahora, como 1_P es un monomorfismo, por la Proposición 1.1.5 se sigue que h es monomorfismo. Por lo tanto

$$P \cong \mathrm{Im}(h).$$

3 $\Rightarrow$ 1 Usamos el Teorema 1.1.19, como todo R-módulo libre es proyectivo y todo sumando directo de un proyectivo es proyectivo, la implicación es inmediata.

$1 \Leftrightarrow 4$ Esta equivalencia se probo en la Proposición 1.1.17.

$\blacksquare$

Ejemplo 1.4. Tomemos el anillo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-módulo libre con base 1 y por tanto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ son proyectivos pero no son libres como $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-módulos.

1.2 $K_0(R)$

En esta sección definiremos el grupo abeliano $K_0(R)$ de un anillo R, grupo en el cual se encuentra el invariante algebraico definido por C.T.C Wall. Para más información sobre Teoría de módulos y K_0, consulte [LP05].

Teorema 1.2.1. *Sea P un R-módulo. Tenemos que P es proyectivo y finitamente generado si y sólo si es sumando directo de un R-módulo libre finitamente generado, es decir, P es sumando directo de R^n para algún n.*

Demostración. Supongamos que P un R-módulo proyectivo y finitamente generado cuyo conjunto de generadores es $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.Tomemos $F = R^n$ y $\varphi : F \longrightarrow P$ tal que

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Por lo que φ es un epimorfismo y al ser P proyectivo, existe $\psi : P \longrightarrow F$ tal que $\varphi \circ \psi = 1_P$. Como $\varphi \circ \psi$ es isomorfismo, usando el Teorema 1.1.9 vemos que

$$F \cong \mathrm{Im}(\psi) \oplus Ker(\varphi)$$

y como ψ es monomorfismo, $\mathrm{Im}(\psi) \cong P$, por lo tanto

$$F = R^n \cong Ker(\varphi) \oplus P.$$

Supongamos ahora que P es sumando directo de R^n para algún n y sea $f : M \longrightarrow P$ un epimorfismo, entonces $f \oplus 1_Q : M \oplus Q \longrightarrow P \oplus Q \cong R^n$ es también un epimorfismo. Como R^n es libre, es proyectivo, por lo que existe g tal que $(f \oplus 1_Q) \circ g = 1_{R^n}$, consideramos la reestricción de g a P y proyectamos a M, es decir $(f \oplus 0) \circ g|_P = 1_P$, por lo que $g|_P$ es la inversa derecha de f. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es base de R^n, el conjunto $p(x_1), \ldots, p(x_n)$ genera a P, donde $p = (1_P, 0) : P \oplus Q \longrightarrow P \oplus Q$. Por lo tanto P es proyectivo y finitamente generado. ■

Proposición 1.2.2. *Si P, Q son R-módulos proyectivos finitamente generados, entonces $P \oplus Q$ es finitamente generado.*

Demostración. Como P y Q son finitamente generados, existen P' y Q' tales que $P \oplus P' \cong R^n$ y $Q \oplus Q' \cong R^m$. Entonces

$$(P \oplus Q) \oplus (P' \oplus Q') \cong R^n \oplus R^m \cong R^{n+m}.$$

Por lo tanto $P \oplus Q$ es proyectivo y finitamente generado.

■

Definición 1.2.1. Sea M un conjunto y $+ : M \times M \longrightarrow M$ una operación binaria en M. Se dice que $(M, +)$ es un monoide si, para todo $m, m_1, m_2, m_3 \in M$, se satisfacen las siguientes propiedades

1. $(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$.
2. Existe $0 \in M$ tal que $m + 0 = m$.

Ejemplo 1.5. La pareja $(\mathbb{N} \cup 0, +)$ tiene estructura de monoide.

Definición 1.2.2. Sea R un anillo, definimos $\mathbf{Proj}(R)$ como el conjunto de las clases de isomorfirmos de R-módulos proyectivos finitamente generados.

Lema 1.2.3. *(**Proj**(R),$\oplus$) tiene estructura de monoide abeliano con identidad el R-módulo* 0.

Demostración.

1. La operación $\oplus$ está bien definida: Sean $P, P' \in [P]$ y $Q, Q' \in [Q]$, es decir $P \cong P'$ y $Q \cong Q'$. Luego, $P \oplus Q \cong P' \oplus Q'$, o bien $[P \oplus Q] = [P' \oplus Q]$.
2. Suma: Claramente la suma directa de dos clases de módulos es isomorfo a la clase de la suma directa de los representantes,

$$[P] \oplus [Q] = [P \oplus Q].$$

3. Neutro: La clase del R-módulo trivial actua como neutro en nuestro monoide,

$$[P] \oplus [0] = [P \oplus 0] = [P].$$

4. Asociatividad:

$$([P] \oplus [Q]) \oplus [V] = [P \oplus Q] \oplus [V] = [P \oplus Q \oplus V] = [P] \oplus [Q \oplus V] = [P] \oplus ([Q] \oplus [V]).$$

5. Conmutatividad:

$$[P] \oplus [Q] = [P \oplus Q] = [Q \oplus P] = [Q] \oplus [P].$$

De esta manera logramos asociarle a un anillo R un monoide abeliano $\mathbf{Proj}(R)$, nos interesa ahora poder asociarle a R un grupo abeliano que respete la operación en $\mathbf{Proj}(R)$, este grupo será el que llamaremos $K_0(R)$.

Definición 1.2.3. Sea R un anillo, F el grupo abeliano libre generado por Proj(R) y H el subgrupo de F generado por todas las expresiones de la forma

$$[P] + [Q] - [P \oplus Q].$$

Definimos

$$K_0(R) = F/H = \mathbb{Z}[\mathbf{Proj}(R)]/\langle [P] + [Q] - [P \oplus Q] \rangle.$$

$K_0(R)$ se llama *grupo de clases proyectivas de R.*

Ejemplo 1.6. Sea $R = K$ un campo. Sabemos que un campo es un caso particular de un anillo, así los K-módulos proyectivos finitamente generados son los espacios vectoriales de dimensión finita y por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{Proj}(K) = \{[0], [K], [K^2], [K^3], \dots\}.$$

Claramente existe una biyección entre $\mathbf{Proj}(K)$ y $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dada por la dimensión del representante de la clase. Como la completación del monoide $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a un grupo es $\mathbb{Z}$, tenemos que

$$K_0(K) \cong \mathbb{Z}.$$

Veamos que efectivamente existe el isomorfismo. Denotemos por $\overline{M}$ la imagen de $[M]$ en $K_0(K)$, definimos $\psi : K_0(K) \to \mathbb{Z}$ mediante $\psi(\overline{M}) = \dim(M)$, veamos que es isomorfismo.

Lo primero que hay que verificar es que nuestra función está bien definida. Para ello observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ F/H \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\ 0 & \end{tikzcd}$$

donde φ está definido por $\varphi([M]) = \dim(M)$, donde F, H son los como en la Definición 1.2.3. Podemos ver que φ está bien definido y es homomorfismo ya que si $[M] = [N]$ entonces $\dim(M) = \dim(N)$ y

$$\begin{aligned} \varphi([M] + [N]) &= \varphi([M \oplus N]) \\ &= \dim(M \oplus N) \\ &= \dim(M) + \dim(N) \\ &= \varphi([N]) + \varphi([N]). \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del cociente, para que ψ este bien definida hay que verificar que $\varphi(H) = \{0\}$.
Sea $[P] + [Q] - [P \oplus Q]$ en H, luego

$$\begin{aligned} \varphi([P] + [Q] - [P \oplus Q]) &= \varphi([P]) + \varphi([Q]) - \varphi([P \oplus Q]) \\ &= \dim(P) + \dim(Q) - \dim(P \oplus Q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto ψ está bien definida. Veamos que es suprayectiva, como $\psi(\overline{K}) = 1$ ya acabamos pues 1 es generador de $\mathbb{Z}$.
Ahora, si $\psi(\overline{M}) = 0$ tenemos que $\dim(M) = 0$ y por lo tanto $M = 0$, así $\overline{M} = 0$ y ψ es inyectiva.

El ejemplo siguiente nos ayuda a entender por qué se consideran los módulos finitamente generados.

Ejemplo 1.7. (Eilenberg swindle) Sea R un anillo, definimos $\mathbf{Proj}^{\infty}(R)$ como el monoide de las clases de isomorfimos de módulos proyectivos generados por un conjunto numerable. Sea R^{∞} un módulo libre generado por una base numerable. Si $P \oplus Q \cong R^{\infty}$, entonces

$$P \oplus R^\infty \cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus \ldots \cong (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \ldots \cong R^\infty.$$

Así, dos elementos se vuelven isomorfos al sumarlos con $[R^\infty]$ y por lo tanto el grupo asociado a este monoide es el grupo trivial, es decir,

$$\mathbb{Z}[\mathbf{Proj}^\infty(R)]/\langle [P] + [Q] - [P \oplus Q] \rangle = 0.$$

Teorema 1.2.4. *Para cualquier grupo H y cualquier homomorfismo de monoides $\psi : \boldsymbol{Proj}(R) \longrightarrow H$ existe un único homomorfismo de grupos $\theta : K_0(R) \longrightarrow H$ tal que $\psi = \theta \circ \varphi$, donde $\varphi : \boldsymbol{Proj}(R) \longrightarrow K_0(R)$ es el homomorfismo natural. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} H & \\ \boldsymbol{Proj}(R) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & K_0(R). \arrow[ul, dashed, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\overline{\theta} : \mathbb{Z}[\mathbf{Proj}(R)] \longrightarrow H$ tal que $\overline{\theta}([M]) = \psi([M])$. Está bien definida pues $\mathbb{Z}[\mathbf{Proj}(R)]$ es abeliano libre y debido a que los elementos de la imagen de ψ conmutan, ya que $\mathbf{Proj}(R)$ es abeliano, notemos que también es un homomorfismo. Para ver que $\overline{\theta}$ deciende un homomorfismo $\theta : K_0(R) \longrightarrow H$ en el cociente, hay que verificar que $\langle [P] + [Q] - [P \oplus Q] \rangle \subset$
$Ker(\overline{\theta})$.

$$\begin{aligned} \overline{\theta}([P] + [Q] - [P \oplus Q]) &= \overline{\theta}([P]) + \overline{\theta}([Q]) - \overline{\theta}([P \oplus Q]) \\ &= \psi([P]) + \psi([Q]) - \psi([P \oplus Q]) \\ &= \psi([P] + [Q]) - \psi([P \oplus Q]) \\ &= \psi([P \oplus Q]) - \psi([P \oplus Q]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La unicidad de θ viene dada por el hecho de que nuestra función este definida en generadores, por lo que cualquier otra función θ' que cumpla $\psi = \theta' \circ \varphi$ debera coincidir en los generadores y por lo tanto en todo el grupo.

■

Definición 1.2.4. Definimos el grupo K_0 reducido de R como el cociente

$$\widetilde{K_0}(R) = K_0(R)/L,$$

donde L es el subrgrupo de $K_0(R)$ generado por las clases de isomorfismos de R-módulos libres finitamente generados.

Ejemplo 1.8. Si $R = K$ es un campo, $\widetilde{K_0}(K) = 0$, pues todos los módulos proyectivos finitamente generados son módulos libres finitamente generados.

Definición 1.2.5. Sean P, Q R-módulos finitamente generados. Se dice que P y Q son establemente isomorfos si existe un entero $n > 0$ tal que

$$P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$$

Teorema 1.2.5. *Sean P y Q dos R-módulos proyectivos finitamente generados. Tenemos que $\overline{P} = \overline{Q}$ en $K_0(R)$ si y sólo si P y Q son establemente isomorfos.*

Demostración. Supongamos que $[P] \equiv [Q](mod\, H)$, es decir $[P]$ y $[Q]$ son representantes de la misma clase en $K_0(R)$. Se tiene que

$$[P] - [Q] = \sum_i ([P_i] + [Q_i] - [P_i \oplus Q_i]) - \sum_j ([T_j] + [S_j] - [T_j \oplus S_j]).$$

Luego

$$[P] + \left(\sum_j ([T_j] + [S_j] - [T_j \oplus S_j]) \right) = [Q] + \left(\sum_i ([P_i] + [Q_i] - [P_i \oplus Q_i]) \right).$$

Como $\left(\sum_j ([T_j] + [S_j] - [T_j \oplus S_j])\right)$ y $(\sum_i ([P_i] + [Q_i] - [P_i \oplus Q_i]))$ son isomorfos, los representamos por N y tenemos que $P \oplus N \cong Q \oplus N$. Ahora como N es suma directa de módulos proyectivos finitamente generados, N también lo es, por lo que existe un R-módulo M tal que $N \oplus M \cong R^n$, ya que $N \oplus M$ es libre y finitamente generado. Luego $P \oplus N \oplus M \cong Q \oplus N \oplus M$ y por lo tanto $P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$.

Ahora supongamos que $P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$ entonces $\overline{P \oplus R^n} = \overline{Q \oplus R^n}$, luego $\overline{P} + \overline{R^n} = \overline{Q} + \overline{R^n}$ y por lo tanto $\overline{P} = \overline{Q}$, pues $K_0(R)$ es un grupo.

■

Definición 1.2.6. Un R-módulo M se llama establemente libre si es establemente isomorfo a un R-módulo libre, es decir

$$M \oplus R^n \cong R^m.$$

Teorema 1.2.6. *Sea $\overline{M} \in \widetilde{K_0}(R)$, entonces $\overline{M} = 0$ si y sólo si M es establemente libre.*

Demostración. Supongamos que $\overline{M} = 0$, entonces $[M] - [0] = [R^n]$, por lo que $M \oplus 0 \cong R^n$, es decir, M es establemente libre.
Supongamos ahora que M es establemente libre, entonces $M \oplus R^n \cong R^m$ y así, $[M] = [R^{m-n}]$. Por lo que $\overline{M} = 0$ en $\widetilde{K_0}$

■

2 Homología

En este capítulo definiremos un concepto muy importante en el álgebra homológica y la topología algebraica, el de homología. Comenzaremos dando un acercamiento a la homología desde un punto de vista puramente algebraico, más adelante veremos como se relacionan estos con sus equivalentes en la topología. Los conceptos a tratar pueden consultarse en [Ros96]

2.1 Homología

En esta sección definiremos los grupos de homología de un complejo de cadenas y las funciones que relacionan a los complejos de cadenas, los morfismos de cadenas.

Definición 2.1.1. Sea

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

un complejo de cadenas (ver definición 1.1.5) de R-módulos, al cual denotaremos por $(C_\bullet, d)$. Definimos la homología de $(C_\bullet, d)$ mediante $H_*(C_\bullet) = \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$. Más específicamente definimos los grupos de homología $H_i(C_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i+1})$.
Los elementos de $\mathrm{Ker}(d)$ son llamados ciclos y los elementos de $\mathrm{Im}(d)$ son llamados fronteras. Llamamos al complejo de cadenas acíclico si $H_i(C_\bullet) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Notemos que si el complejo de cadenas es acíclico, entonces la sucesión es exacta (ver definición 1.1.6).

Definición 2.1.2. Sean $(C_\bullet, d)$ y $(C'_\bullet, d')$ complejos de cadenas de R-módulos. Un morfismo de cadenas es un homomorfismo de módulos $\varphi : C \longrightarrow C'$, definido por $\varphi_i : C_i \longrightarrow C'_i$, para toda i, tal que

$$d'_i \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ d_i.$$

De manera equivalente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{i+2}"] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & C'_i \arrow[r, "d'_i"] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.1.1. *Sean $\varphi : C \longrightarrow C'$ y $\psi : C' \longrightarrow N$ morfismos de cadenas, entonces tanto φ como ψ inducen homomorfismos $\varphi_* : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C'_\bullet)$, $\psi_* : H_n(C'_\bullet) \longrightarrow H_n(N_\bullet)$ en homologías y*

1. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$
2. $(1_\bullet)_* = 1_{H_n(\bullet)}$

Demostración. Para ver que inducen un homomorfismo hay que ver que la relación $d'_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n$ manda ciclos en ciclos y fronteras en fronteras.
Sea $x \in \mathrm{Ker}(d_n)$, entonces $d'_n(\varphi_n(x)) = \varphi_{n-1}(d_n(x)) = 0$. Por lo tanto $\varphi_n(x) \in \mathrm{Ker}(d'_n)$.
Ahora sea $x \in \mathrm{Im}(d_{n+1})$,i.e. $d_{n+1}(y) = x$, se sigue que $\varphi_n(d_{n+1}(y)) = \varphi_n(x) = d'_{n+1}(\varphi_{n+1}(y))$, así concluimos que $\varphi_n(x) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1})$.
La propiedad de $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ se sigue inmediatamente del hecho que la composición de morfismos es asociativa, $(\varphi\psi)d = \varphi(\psi d)$, mientras que la segunda propiedad es clara debido al comportamiento de $1_\bullet$.

■

2.1.1 Invarianza homotópica

En el estudio de los complejos de cadenas nos interesa el conocer información sobre comportamientos similares entre los complejos de cadenas. Un ejemplo de esto es la homotopía de cadenas primero entre morfismos de cadenas y apartir de esta la equivalencia homotopica entre complejos de cadenas.

En ocaciones omitiremos algunos subíndices en las funciones, pero debe considerarse que las composiciones están definidas en los subíndices donde tiene sentido realizarla.

Definición 2.1.3. Sean $\varphi : C \longrightarrow C'$ y $\psi : C \longrightarrow C'$ morfismos de cadenas. Una homotopía entre φ y ψ, es un homomorfismo de R-módulos $s : C \longrightarrow C'$ tal que

$$s \circ d + d' \circ s = \varphi - \psi.$$

Lo que nos lleva al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{i+1}"] \arrow[dl, "s_{i+1}"'] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, shift right, "\varphi_i"'] \arrow[d, shift left, "\psi_i"] \arrow[dl, "s_i"'] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{i-1}"] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{i+2}"'] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & C'_i \arrow[r, "d'_i"'] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.1.2. *La homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de morfismos de cadenas*

$$\{\varphi : C \longrightarrow C' \mid d'_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n, \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}\}$$

Demostración. Sea $\varphi : C \longrightarrow C'$ un morfismo de cadenas, y tomemos $0 : C \longrightarrow C'$. Entonces

$$0 \circ d + d' \circ 0 = 0 = \varphi - \varphi,$$

y por lo tanto $\varphi \simeq \varphi$.
Ahora sean $\psi, \varphi : C \longrightarrow C'$ morfismos de cadenas homotópicos, i.e. $\varphi \simeq \psi$, por lo que existe $s : C \longrightarrow C'$ tal que $s \circ d + d' \circ s = \varphi - \psi$. Luego,

$$\psi - \varphi = -(s \circ d + d' \circ s) = (-s) \circ d + d' \circ (-s)$$

y esto nos dice que $-s : C \longrightarrow C'$ es una homotopía tal que $\psi \simeq \varphi$.
Por último supongamos que $\varphi, \psi, \phi : C \longrightarrow C'$ son morfismos de cadenas tales que $\varphi \simeq \psi$ y $\psi \simeq \phi$, así tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi - \psi &= s \circ d + d' \circ s \\
\psi - \phi &= t \circ d + d' \circ t.
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos que $\varphi - \phi = (s + t) \circ d + d' \circ (s + t)$, y por lo tanto $s + t$ es una homotopía tal que $\varphi \simeq \phi$. ∎

Definición 2.1.4. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas. Si existe una homotopía entre 1_C y 0, decimos que C es contraible y llamamos contracción a la homotopía .

Teorema 2.1.3. *Morfismos de cadenas homotópicos inducen el mismo homomorfismo en homología, es decir, si $\varphi \simeq \psi$, entonces $\varphi_* = \psi_*$.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi : C \longrightarrow C'$ morfismos de cadenas homotópicos y sea $x \in \mathrm{Ker}(d)$, entonces

$$\varphi(x) - \psi(x) = (s \circ d)(x) + (d' \circ s)(x) = d'(s(x)),$$

ya que $d(x) = 0$. Por lo tanto $\varphi(x) - \psi(x) \in \mathrm{Im}(d')$, esto nos dice que en homología $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ y así φ y ψ determinan la misma clase de homología, i.e. φ_* y ψ_* son iguales en la clase de x.

■

Con esto nos damos cuenta inmediatamente que si $(C_\bullet, d)$ es contraible, entonces $H_*(C_\bullet) = 0$, i.e. $C_\bullet$ es una sucesión exacta.

Definición 2.1.5. Si existen morfismo de cadenas $\varphi : C \longrightarrow C'$ y $\psi : C' \longrightarrow C$ tales que $\varphi \circ \psi \simeq 1_{C'}$ y $\psi \circ \varphi \simeq 1_C$, decimos que C y C' son homotopicamente equivalentes. Llamamos a φ y ψ equivalencias homotópicas.

La definición anterior implica que φ_* es un isomorfismo en homología con inversa

Teorema 2.1.4. *Sean $(C_\bullet, d)$ y $(C'_\bullet, d')$ complejos de cadenas. Si $(C'_\bullet, d')$ es contraíble, entonces $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a $(C_\bullet, d) \oplus (C'_\bullet, d') = (C_\bullet \oplus C'_\bullet, (d, d'))$.*

Demostración. Tomamos las funciones $\pi : C \oplus C' \longrightarrow C$ la proyección natural y $i : C \longrightarrow C \oplus C'$ la inclusión, queremos ver que $\pi \circ i \simeq 1_C$ y $i \circ \pi \simeq 1_{C \oplus C'}$.
Tenemos que existe $s : C' \longrightarrow C'$ tal que $s \circ d' + d' \circ s = 0 - 1_{C'}$, definimos así $s' : C \oplus C' \longrightarrow C \oplus C'$ que manda (x, x') a $(0, s(x'))$, entonces

$$\begin{aligned}
(s' \circ (d, d') + (d, d') \circ s')(x, x') &= s' \circ (d, d')(x, x') + (d, d') \circ s'(x, x') \\
&= s'(d(x), d'(x')) + (d, d')(0, s(x')) \\
&= (0, s(d'(x'))) + (0, d'(s(x'))) \\
&= (0, s(d'(x')) + d'(s(x'))) \\
&= (0, -x') \\
&= (x, 0) - (x, x') \\
&= i \circ \pi - 1_{C \oplus C'}(x, x').
\end{aligned}$$

Por otra parte, tomamos $0 : C \longrightarrow C$ y así

$$\begin{aligned}(0 \circ d + d \circ 0)(x) &= 0 \circ d(x) + d \circ 0(x) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \\ &= x - x \\ &= \pi \circ i - 1_C(x).\end{aligned}$$

■

2.2 Complejos de cadenas de módulos proyectivos

Nos son de especial interés los complejos de cadenas cuyos R-módulos son R-módulos proyectivos. En esta sección definiremos y probaremos propiedades importantes de estos complejos de cadenas.

Definición 2.2.1. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas, decimos que $(C_\bullet, d)$ está acotado inferiormente si existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $C_k = 0$ para todo $k < j$.

Teorema 2.2.1. *Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas de R-módulos proyectivos. Si $H_*(C_\bullet) = 0$ y $(C_\bullet, d)$ está acotado inferiormente, entonces $(C_\bullet, d)$ es contraible.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C_j = 0$ para $j < 0$ (basta con reindexar). Procedemos a demostrar por inducción sobre n, queremos construir $s_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ tal que

$$s_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ s_n = 1_{C_n},$$

y mostrar por inducción que $\mathrm{Ker}(d_n)$ es sumando directo de C_n. Para $j < 0$ definamos $s_j = 0$, con esto solo nos falta construir s_0 para comenzar nuestra inducción.
El hecho de que $H_0(C_\bullet) = 0$ y $C_{-1} = 0$ nos dice que $d_1 : C_1 \longrightarrow C_0$ es un epimorfismo, ahora como C_0 es proyectivo, d_1 debe tener una inversa derecha s_0 y esta cumple $s_{-1} \circ d_0 + d_1 \circ s_0 = 1_{C_0}$. Además $\mathrm{Ker}(d_0) = \mathrm{Im}(d_1) = C_0$ es proyectivo.
Supongamos que hemos contruido s_j para $j < n$ tales que

$$s_{j-1} \circ d_j + d_{j+1} \circ s_j = 1_{C_j},$$

y que $\mathrm{Ker}(d_j) = \mathrm{Im}(d_{j+1})$ es sumando directo de C_j y por lo tanto proyectivo, pues C_j lo es. Por hipótesis de inducción tenemos que $C_{n-1} = \mathrm{Im}(d_n) \oplus Q_{n-1}$ para algún R-módulo

proyectivo Q_{n--1}.
Si nos restringimos a $\mathrm{Im}(d_n) = \mathrm{Ker}(d_{n-1})$, podemos ver que $s_{n-2} \circ d_{n-1} = 0$ gracias a la igualdad $s_{n-2} \circ d_{n-1} + d_n \circ s_{n-1} = 1_{C_{n-1}}$ y además, $d_n \circ s_{n-1} = 1_{C_{n-1}}$.
Con esto notamos que s_{n-1} es la inversa derecha del epimorfismo

$$d_n : C_n \longrightarrow \mathrm{Im}(d_n) \subset C_{n-1},$$

y por lo tanto $\rho = s_{n-1} \circ d_n$ es idempotente y $C_n = \rho(C_n) \oplus (1-\rho)(C_n)$. Veamos que $(1-\rho)(C_n) = \mathrm{Ker}(d_n) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$. Sea $x \in \mathrm{Ker}(d_n)$, entonces $x = x - 0 = x - (s_{n-1})(0) = x - (s_{n-1} \circ d_n)(x)$, por lo que $x \in (1-\rho)(C_n)$. Ahora sea $x \in (1-\rho)(C_n)$, esto nos dice que existe $y \in C_n$ tal que $1(y) - \rho(y) = x$ y entonces

$$\begin{aligned}
d_n(x) =& d_n(y - s_{n-1}(d_n(y))) \\
=& d_n(y) - (d_n \circ s_{n-1})(d_n(y)) \\
=& d_n(y) - (1_{C_{n-1}} - s_{n-2} \circ d_{n-1})(d_n(y)) \\
=& d_n(y) - d_n(y) + s_{n-2}(d^2(y)) \\
=& 0 + s_{n-2}(0) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Así $C_n = \rho(C_n) \oplus \mathrm{Ker}(d_n)$. Tomamos ahora el epimorfismo

$$d_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{n+1}) = \mathrm{Ker}(d_n) \subset C_n,$$

y al ser $\mathrm{Ker}(d_n)$ proyectivo, existe la inversa derecha s_n de d_{n+1}. Extendemos s_n a todo C_n haciendo $s_n(x) = 0$ si $x \in \rho(C_n)$. Veamos que cumple

$$s_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ s_n = 1_{C_n}.$$

Sea $x \in C_n$, tenemos que $x = y + z$ donde $y \in \mathrm{Ker}(d_n)$ y $z \in \rho(C_n)$, recordemos que por esto, $\rho(z) = z$. Luego,

$$\begin{aligned} s_{n-1} \circ d_n(x) + d_{n+1} \circ s_n(x) =& s_{n-1} \circ d_n(y) + d_{n+1} \circ s_n(y) \\ &+ s_{n-1} \circ d_n(z) + d_{n+1} \circ s_n(z) \\ =& s_{n-1} \circ d_n(z) + d_{n+1} \circ s_n(y) \\ =& \rho(z) + 1(y) \\ =& z + y \\ =& x. \end{aligned}$$

■

Definición 2.2.2. Sea $\varphi : C \longrightarrow C'$ un morfismo de cadenas de R-módulos. Definimos el cono de la función φ como el complejo de cadenas $(C''_\bullet, d'')$, donde $C''_n = C_{n-1} \oplus C'_n$ y

$$d''_n(x, x') = (-d_{n-1}(x), \varphi_{n-1}(x) + d'_n(x'))$$

Observación 2.2.1. El cono de una función es, en efecto, un complejo de cadenas. Recordemos que $d'_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n$., así

$$\begin{aligned} d''_{n-1} \circ d''_n(x, x') &= d''_{n-1}(-d_{n-1}(x), \varphi_{n-1}(x) + d'_n(x')) \\ &= (d_{n-2} \circ d_{n-1}(x), \varphi_{n-2}(-d_{n-1}(x)) + d'_{n-1}(\varphi_{n-1}(x) + d'_n(x'))) \\ &= (0, -\varphi_{n-2} d_{n-1}(x) + d'_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + 0) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Definición 2.2.3. Diremos que

$$0 \to (C'_\bullet, d') \xrightarrow{\alpha} (C_\bullet, d) \xrightarrow{\beta} (C''_\bullet, d'') \to 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas si α y β son morfismos de cadenas y la sucesión

$$0 \to C'_j \xrightarrow{\alpha} C_j \xrightarrow{\beta} C''_j \to 0$$

es exacta para j.

Teorema 2.2.2. ***(Teorema fundamental del álgebra homológica)***
Sea

$$0 \to (C'_\bullet, d') \xrightarrow{\alpha} (C_\bullet, d) \xrightarrow{\beta} (C''_\bullet, d'') \to 0$$

una sucesiíon exacta corta de complejos de cadenas, entonces existe una sucesión exacta inducida

$$\cdots \to H_j(C'_\bullet) \xrightarrow{\alpha_{j*}} H_j(C_\bullet) \xrightarrow{\beta_{j*}} H_j(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_j} H_{j-1}(C'_\bullet) \to \cdots$$

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, "d'_{i+2}"] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] & C'_i \arrow[r, "d'_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\beta_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "\beta_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d''_{i+2}"] & C''_{i+1} \arrow[r, "d''_{i+1}"] \arrow[d] & C''_i \arrow[r, "d''_i"] \arrow[d] & C''_{i-1} \arrow[r, "d''_{i-1}"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con exactitud en cada columna. Como α y β son morfismos de cadenas, inducen homomorfismos en homología. Definamos $\partial_j : H_j(C''_\bullet) \longrightarrow H_{j-1}(C'_\bullet)$. Sea $[x''] \in H_j(C''_\bullet)$, donde x'' es un ciclo ($d''_j(x'') = 0$), como β_j es un epimorfismo, existe $x \in C_j$ tal que $x'' = \beta_j(x)$. Por lo que $d''_j \circ \beta_j(x) = 0$ y al ser β un morfismo de cadenas, resulta que $\beta_{j-1} \circ d_j(x) = 0$, i.e. $d_j(x) \in \mathrm{Ker}(\beta_{j-1}) = \mathrm{Im}(\alpha_{j-1})$.
Esto nos dice que existe $x' \in C'_{j-1}$ tal que $\alpha_{j-1}(x') = d_j(x)$, veamos que $d'_{j-1}(x') = 0$, es decir x' es un ciclo y representa una clase en $H_{j-1}(C'_\bullet)$. Utilizaremos el hecho de que α es un morfismo de cadenas, así

$$\alpha_{j-2} \circ d'_{j-1}(x') = d_{j-1} \circ \alpha_{j-1}(x) = d_j \circ d_{j-1}(x') = 0,$$

y como α_{j-2} es monomorfismo, obtenemos que $d'(x') = 0$.
Definimos $\partial_j : H_j(C''_\bullet) \longrightarrow H_{j-1}(C'_\bullet)$ mediante $\partial_j[x''] = [x']$. Veamos que está bien definida,

1. Si tomamos otro representante de la la clase $[x'']$ sería de la forma $x'' + d''_{j+1}y''$. Ahora, como $y'' = \beta_{j+1}(y)$ con $y \in C_{j+1}$ tenemos que

$$x'' + d''_{j+1}y'' = x'' + d''_{j+1}\beta_{j+1}y = x'' + \beta_j d_{j+1}(y) = \beta_j(x + d_{j+1}y),$$

por lo que al tomar otro representante, sólo cambiamos x por $x + d_{j+1}y$, pero $d_j(x) = d_j(x) + 0 = d_j(x) + d_j \circ d_{j+1}(y) = d_j(x + d_{j+1}(y))$.

2. El elemento x' queda determinado de manera única por $d_j(x)$ ya que α_{j-1} es un monomorfismo.

3. Si tomamos y en lugar de x, tendríamos $\beta_j(x) = \beta_j(y)$, por lo que $y - x \in \mathrm{Ker}(\beta_j) = \mathrm{Im}(\alpha_j)$, es decir $y - x = \alpha_j(y')$ para algún $y' \in C'_j$ y así $y = x + \alpha_j(y')$.
   Notemos que el cambiar x por $x + \alpha_j(y')$ es cambiar x' por otro representante de su misma clase $x' + d'_j(y')$, ya que
   $$d_j(x + \alpha_j(y')) = d_j(x) + d_j\alpha_j(y') = \alpha_{j-1}(x') + \alpha_{j-1}d'_j(y') = \alpha_{j-1}(x' + d'_jy').$$

Veamos ahora que es un homomorfismo, tomemos $\partial_j[x''_1] = [x'_1]$ y $\partial[x''_2] = [x'_2]$ con sus respectivos x_1, x_2. Entonces $\beta_j(x_1 + x_2) = \beta_j(x_1) + \beta_j(x_2) = x''_1 + x''_2$ y
$$\alpha_{j-1}(x'_1 + x'_2) = \alpha_{j-1}(x'_1) + \alpha_{j-1}(x'_2) = d_j(x_1) + d_j(x_2) = d_j(x_1 + x_2).$$

Por lo tanto $\partial_j([x''_1] + [x''_2]) = [x'_1] + [x'_2]$.
Falta probar la exactitud de las columnas. Primero las contenciones de las imagenes.

1. $\mathrm{Im}(\alpha_*) \subset \mathrm{Ker}(\beta_*)$. Este es inmediato ya que $\beta\alpha = 0$ implica $\beta_*\alpha_* = 0$.

2. $\mathrm{Im}(\beta_*) \subset \mathrm{Ker}(\partial)$. Sea $[x''] = \beta_*[x]$ para algún $[x] \in H_j(C_\bullet)$, entonces $d_j(x) = 0 = \alpha_{j-1}(x')$ y por lo tanto $\partial[x''] = [0]$.

3. $\mathrm{Im}(\partial) \subset \mathrm{Ker}(\alpha_*)$. La construcción de $\partial_j[x'']$ nos da
   $$\alpha_{j-1_*}(\partial_j[x'']) = \alpha_{j-1_*}[x'] = [\alpha_{j-1}(x')] = [d_j(x)] = 0,$$
   ya que $[d_j(x)] = 0 \in H_{j-1}(C_\bullet)$.

Falta probar las contenciones de los núcleos en las imágenes para tener exactitud.

1. $\mathrm{Ker}(\beta_*) \subset \mathrm{Im}(\alpha_*)$. Sea $[x] \in \mathrm{Ker}(\beta_*)$, esto quiere decir que $x \in C_j$ es un ciclo y $\beta_j(x)$ es una frontera, i.e. $\beta_j(x) = d'_{j+1}(x')$ con $x' \in C''_{j+1}$. Como β_{j+1} es epimorfismo, existe $y \in C_{j+1}$ tal que $\beta_{j+1}(y) = x'$ y notemos que $d'_{j+1}(\beta_{j+1}(y)) = d'_{j+1}(x') = \beta_j(x)$. Entonces
   $$\beta_j(x - d_{j+1}(y)) = \beta_j(x) - \beta_j(d_{j+1}(y)) = \beta_j(x) - d'_{j+1}(\beta_{j+1}(y)) = 0.$$

Y como $\mathrm{Ker}(\beta_j) = \mathrm{Im}(\alpha_j)$, tenemos que $[x] \in \mathrm{Im}(\alpha_*)$.

2. $\mathrm{Ker}(\partial) \subset \mathrm{Im}(\beta_*)$. Sea $[x''] \in \mathrm{Ker}(\partial)$, i.e. $\partial_j[x''] = [0] \in H_{j-1}(C'_\bullet)$, $x'' \in C''_j$ y $d''_j(x'') = 0$. Siguiendo la definición de ∂ tenemos que $x'' = \beta_j(x)$ con $d_j(x) = \alpha_{j-1}(x')$ y $x' = d'_j(y')$, $y' \in C'_j$. Ahora

$$d_j(\alpha_j(y')) = \alpha_{j-1}(d'_j(y')) = \alpha_{j-1}(x') = d_j(x).$$

Con esto notamos que $x - \alpha_j(y') \in \mathrm{Ker}(d_j)$ y como $\beta_j(x - \alpha_j(y')) = \beta_j(x) - 0 = x''$ (por exactitud en las columnas), concluimos que

$$[x''] = \beta_{j*}[x - \alpha_j(y')].$$

3. $\mathrm{Ker}(\alpha_*) \subset \mathrm{Im}(\partial)$. Sea $[x'] \in \mathrm{Ker}(\alpha_*)$, es decir $x' \in C'_{j-1}$, $d'_{j-1}(x') = 0$ y $\alpha_*[x'] = 0$ en $H_{j-1}(C)$. Entonces $\alpha_{j-1}(x') = d_j(x)$ para algún $x \in C_j$, ahora sea $x'' = \beta_j(x)$, entonces

$$d''_j(x'') = \beta_{j-1}(d_j(x)) = \beta_{j-1}(\alpha_{j-1}(x')) = 0,$$

o bien, x'' define una clase en $H_j(C''_\bullet)$. Por la construcción de ∂ tenemos que $\partial[x''] = [x']$, por lo que $\mathrm{Ker}(\alpha_*) \subset \mathrm{Im}(\partial)$.

■

Teorema 2.2.3. *Sea $\varphi : C \longrightarrow C'$ un morfismo de cadenas y sea $(C''_\bullet, d'')$ su cono. Tenemos que φ es una equivalencia homotópica si y sólo si $(C''_\bullet, d'')$ es contraible.*

Demostración. Supongamos que $(C''_\bullet, d'')$ es contraible y sea $s'' : C'' \longrightarrow C''$ una contracción, definimos $s : C \longrightarrow C$, $s' : C' \longrightarrow C'$ y $\psi : C' \longrightarrow C$ mediante

$$s''(x, 0) = (s(x), \cdots)$$
$$s''(0, x') = (\psi(x'), -s'(x')).$$

Como $d''s'' + s''d'' = 1_{C''}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
1_{C''}(x, 0) &= (d''s'' + s''d'')(x, 0) \\
&= d''(s(x), \cdots) + s''(-d(x), \varphi(x) + d'(0)) \\
&= (-d \circ s(x) + s \circ (-d)(x) + \psi(\varphi(x) + 0), \cdots) \\
&= (-d \circ s(x) - s \circ d(x) + \psi \circ \varphi(x), \cdots).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1_{C''}(0,x') &= (d''s''+s''d'')(0,x') \\
&= d''(\psi(x'), -s'(x')) + s''(0, d'(x')) \\
&= (-d\circ\psi(x'), \varphi\circ\psi(x') + d'(-s')(x)) + (\psi\circ d'(x'), -s'\circ d'(x')) \\
&= (-d\circ\psi(x') + \psi\circ d'(x'), \varphi\circ\psi(x') + d'(-s')(x) - s'\circ d'(x')).
\end{aligned}$$

Con esto concluimos tres cosas

1. $0 = -d\circ\psi(x') + \psi\circ d'(x')$ para todo x', es decir $d\circ\psi(x') = \psi\circ d'(x')$ o bien que ψ es un morfismo de cadenas.

2. $1_C(x) = -d\circ s(x) - s\circ d(x) + \psi\circ\varphi(x)$ para todo x, lo que es equivalente a $d\circ s(x) + s\circ d(x) = \psi\circ\varphi(x) - 1_C(x)$ es decir $\psi\circ\varphi \simeq 1_C$.

3. $1_{C'}(x') = \varphi\circ\psi(x') + d'(-s')(x) - s'\circ d'(x')$ y por un argumento similar al de arriba, vemos que $\varphi\circ\psi \simeq 1_{C'}$.

En la otra dirección supongamos que φ es una equivalencia homotópica con inversa ψ y tenemos homotopías s de $\psi\circ\varphi \simeq 1_C$ y s' de $\varphi\circ\psi \simeq 1_{C'}$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
\psi\circ d' &= d\circ\psi \\
\varphi\circ d &= d'\circ\varphi \\
d\circ s + s\circ d &= \psi\circ\varphi - 1_C \\
d'\circ s' + s'\circ d' &= \varphi\circ\psi - 1_{C'}.
\end{aligned}$$

Definimos ahora $s'' : C'' \longrightarrow C''$ mediante

$$\begin{aligned}
s''(x,x') =& (s(x) + \psi(x') + \psi\circ s'\circ\varphi(x) - \psi\circ\varphi\circ s(x), \\
& - s'(x') + s'\circ\varphi\circ s(x) - (s')^2\circ\varphi(x)),
\end{aligned}$$

queremos ver que $d'' \circ s'' + s'' \circ d'' = 1_{C''}$, i.e. s'' es una contracción.
Tenemos que

$$\begin{aligned}
(d'' \circ s'' + s'' \circ d'')(x, x') =& d''(s(x) + \psi(x') + \psi \circ s' \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi \circ s(x), \\
& - s'(x') + s' \circ \varphi \circ s(x) - (s')^2 \circ \varphi(x)) \\
& + s''(-d(x), \varphi(x) + d'(x')) \\
=& (-d(s(x) + \psi(x') + \psi \circ s' \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi \circ s(x)), \\
& \varphi(s(x) + \psi(x') + \psi \circ s' \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi \circ s(x)) \\
& + d'(-s'(x') + s' \circ \varphi \circ s(x) - (s')^2 \circ \varphi(x))) \\
& + (s(-d(x)) + \psi(\varphi(x) + d'(x')) + \psi \circ s' \circ \varphi(-d(x)) \\
& - \psi \circ \varphi \circ s(-d(x)), -s'(\varphi(x) + d'(x')) \\
& + s' \circ \varphi \circ s(-d(x)) - (s')^2 \circ \varphi(-d(x))).
\end{aligned}$$

Comencemos con la primera coordenada, despúes de reagrupar nos quedamos con

$$\begin{aligned}
=& [-d \circ s(x) - s \circ d(x)] + [-d \circ \psi(x') + \psi \circ d'(x)] \\
& + [-(d \circ \psi) \circ s' \circ \varphi(x) - \psi \circ s' \circ (\varphi \circ d)(x)] \\
& + [(d \circ \psi) \circ \varphi \circ s(x) + \psi \circ \varphi \circ s \circ d(x)] + \psi \circ \varphi(x) \\
=& [1_C(x) - \psi \circ \varphi(x)] + \psi \circ \varphi(x) + [0] \\
& + [-(\psi \circ d') \circ s' \circ \varphi(x) - \psi \circ s' \circ (d' \circ \varphi)(x)] \\
& + [(\psi \circ d') \circ \varphi \circ s(x) + \psi \circ \varphi \circ s \circ d(x)] \\
=& x - \psi \circ \varphi(x) + \psi \circ \varphi(x) \\
& + [-\psi \circ (d' \circ s' + s' \circ d') \circ \varphi(x)] + [\psi \circ (d' \circ \varphi) \circ s(x) + \psi \circ \varphi \circ s \circ d(x)] \\
=& x + [-\psi \circ (\varphi \circ \psi - 1_{C'}) \circ \varphi(x)] + [\psi \circ \varphi \circ (d \circ s + s \circ d)(x)] \\
=& x - \psi \circ \varphi \circ \psi \circ \varphi(x) + \psi \circ \varphi(x) + [\psi \circ \varphi \circ (\psi \circ \varphi - 1_C)(x)] \\
=& x - \psi \circ \varphi \circ \psi \circ \varphi(x) + \psi \circ \varphi(x) + \psi \circ \varphi \circ \psi \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi(x) \\
=& x.
\end{aligned}$$

Ahora para la segunda coordenada volvemos a reagrupar y tenemos que

$$
\begin{aligned}
=&[\varphi \circ \psi(x') - d' \circ s'(x') - s' \circ d'(x')] \\
&+ [\varphi \circ s(x) + d' \circ s' \circ \varphi \circ s(x) - \varphi \circ \psi \circ \varphi \circ s(x)] \\
&+ [-s' \circ \varphi(x) - d' \circ (s')^2 \circ \varphi(x) + \varphi \circ \psi \circ s' \circ \varphi(x)] \\
&- s' \circ \varphi \circ s \circ d(x) + (s')^2 \circ \varphi \circ d(x) \\
=&[\varphi \circ \psi(x') - \varphi \circ \psi(x') + 1_{C'}(x)] \\
&+ [1_C + d' \circ s' - \varphi \circ \psi] \circ \varphi \circ s(x) \\
&+ [-1_C - d' \circ s' + \varphi \circ \psi] \circ s' \circ \varphi(x) - s' \circ \varphi \circ s \circ d(x) + (s')^2 \circ \varphi \circ d(x) \\
=&[x'] + [-s' \circ d'] \circ \varphi \circ s(x) + [s' \circ d'] \circ s' \circ \varphi(x) - s' \circ \varphi \circ s \circ d(x) + (s')^2 \circ \varphi \circ d(x) \\
=&x' + -s' \circ (d' \circ \varphi) \circ s(x) + s' \circ d' \circ s' \circ \varphi(x) - s' \circ \varphi \circ s \circ d(x) + s' \circ s' \circ (\varphi \circ d)(x) \\
=&x' + -s' \circ (\varphi \circ d) \circ s(x) + s' \circ d' \circ s' \circ \varphi(x) - s' \circ \varphi \circ s \circ d(x) + s' \circ s' \circ (d' \circ \varphi)(x) \\
=&x' - s' \circ \varphi \circ (d \circ s + s \circ d)(x) + s' \circ (d' \circ s' + s' \circ d') \circ \varphi(x) \\
=&x' - s' \circ \varphi \circ (\psi \circ \varphi - 1_C)(x) + s' \circ (\varphi \circ \psi - 1_{C'}) \circ \varphi(x) \\
=&x' - s' \circ \varphi \circ \psi \circ \varphi(x) + s' \circ \varphi(x) + s' \circ \varphi \circ \psi \circ \varphi(x) - s' \circ \varphi(x) \\
=&x'.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d'' \circ s'' + s'' \circ d'' = 1_{C''}$ ■

Teorema 2.2.4. *Sean $(C_\bullet, d)$ y $(C'\bullet, d')$ complejos de cadenas acotados inferiormente y conformados por R-módulos proyectivos. Sea $\varphi : C \longrightarrow C'$ un morfismo de cadenas y sea $(C''_\bullet, d'')$ su cono, φ es una equivalencia homotópica si y sólo si $(C''_\bullet, d'')$ es acíclico.*
φ es una equivalencia homotópica si y sólo si φ induce un isomorfismo φ_* en homología, es decir $\varphi_* : H_k(C_\bullet) \longrightarrow H_k(C'_\bullet)$ es un isomorfismo para toda k.

Demostración. Sea $\varphi : C \longrightarrow C'$ un morfismo de cadenas y sea $(C''_\bullet, d'')$ su cono. Definimos la sucesión

$$0 \longrightarrow (C'_\bullet, d') \xrightarrow{i} (C''_\bullet, d'') \xrightarrow{\pi} (C_{\bullet-1}, -d) \longrightarrow 0$$

donde $i_j : C'_j \longrightarrow C''_j = C_{j-1} \oplus C'_j$ es la inclusión y $\pi_j : C''_j \longrightarrow C_{j-1}$ es la proyección, veamos que la sucesión es exacta.

Tenemos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+2}"] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "i_{n+1}"] & C'_i \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "i_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] \arrow[d, "i_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d''_{n+2}"] & C''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"] \arrow[d, "\pi_{n+1}"] & C''_n \arrow[r, "d''_n"] \arrow[d, "\pi_n"] & C''_{n-1} \arrow[r, "d''_{n-1}"] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "-d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "-d_n"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "-d_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-2} \arrow[r, "-d_{n-2}"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

donde la exactitud de las columnas es clara, queremos ver que el diagrama conmuta cuadro a cuadro. Comencemos con las proyecciones

$$
\begin{aligned}
\pi_j \circ d''_{j+1}(x, x') &= \pi_j(-d_j(x), \varphi(x) + d'_j(x')) \\
&= -d_j(x).
\end{aligned}
$$

$$
-d_j \circ \pi(x, x') = -d_j(x).
$$

Y ahora para las inclusiones

$$
\begin{aligned}
i_j \circ d'_{j+1}(x') &= i_j(d'_{j+1}(x')) \\
&= (0, d'_{j+1}(x')).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d''_{j+1} \circ i_{j+1}(x') &= d''_{j+1}(0, x') \\
&= (0, d'_{j+1}(x')).
\end{aligned}
$$

Ahora como la sucesión es exacta, por el Teorema 2.2.2, existe la sucesión exacta

$$
\cdots \to H_n(C''_\bullet) \to H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C'_\bullet) \to H_{n-1}(C''_\bullet) \to \cdots
$$

Volvamos a realizar la construcción de ∂, sea $[x] \in H_{n-1}(C_\bullet)$, con $d(x) = 0$. Como π es sobreyectiva, existe $(x, 0) \in C''$ tal que $x = \pi(x, 0)$, ahora como π es un morfismo de cadenas y $d(x) = 0$ se sigue que $d \circ \pi(x, 0) = 0$ y por lo tanto $\pi \circ d''(x, 0) = 0$, es decir

$d''(x,0) = (-d(x), \varphi(x) + d'(0)) = (0, \varphi(x)) \in \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(i)$.
Por lo que existe $y \in C'$ tal que $i(y) = (0, \varphi(x))$ y por la definición de i, vemos que $y = \varphi(x)$, así nuestra ∂ está definida por $\partial[x] = [\varphi(x)]$, que es precisamente la definición de φ_* y por lo tanto nuestra sucesión es de la forma

$$\cdots \to H_n(C''_\bullet) \to H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi_*} H_{n-1}(C'_\bullet) \to H_{n-1}(C''_\bullet) \to \cdots$$

Si φ_* es isomorfismo para toda n, utilizando la exactitud de la sucesión notamos que

$$\mathrm{Im}(\pi_*) = \mathrm{Ker}(\varphi_*) = 0$$
$$\mathrm{Ker}(i_*) = \mathrm{Im}(\varphi_*) = H_{n-1}(C'_\bullet).$$

Como $\mathrm{Ker}(i_*) = H_{n-1}(C'_\bullet)$, debe ser que $i_* = 0$ y entonces tenemos la relación $\mathrm{Ker}(\pi_*) = \mathrm{Im}(i_*) = 0$, lo que nos dice que π_* es monomorfismo. Ahora como $\mathrm{Im}(\pi_*) = 0$, debe ser que su dominio es 0, es decir $H_j(C''_\bullet) = 0$ para todo j, o bien, C'' es acíclico.
Ahora si C'' es acíclico, nuestra sucesión exacta de homologías es

$$\cdots \to 0 \to H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi_*} H_{n-1}(C'_\bullet) \to 0 \to \cdots$$

Por lo que φ_* es un isomorfismo para todo n.
Es fácil ver que si C y C' están acotados inferiormente y son proyectivos, C'' también es proyectivo y está acotado inferiormente. Recordemos que si un complejo de cadenas es contraible, entonces es acíclico y por el Teorema 2.2.1, si C'' es acíclico entonces es contraible por cadenas, por lo que $(C''_\bullet, d'')$ es acíclico si y sólo si es contraible, y por el Teorema 2.2.3, es acíclico si y sólo si φ es una equivalencia homotópica.

$\blacksquare$

3 Obstrucción de finitud de Wall: versión algebraica

En este capítulo veremos algunas relaciones entre los conceptos vistos hasta ahora, complejos de cadenas, equivalencias homotópicas, R-módulos libres y proyectivos, entre otros.
Una pregunta importante es la siguiente: si tenemos un complejo de cadenas $(C_\bullet, d)$ finitamente dominado, es decir, existe $(D_\bullet, d')$ complejo de cadenas de tipo finito conformado por R-módulos libres y morfismos de cadenas $f : C \longrightarrow D$, $g : C \longrightarrow D$ tales que $gf \simeq 1_C$, ¿será $(C_\bullet, d)$ homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos libres?.
La respuesta en general es que no. Wall responde a esta pregunta con su teorema de la obstrucción de finitud que nos dice cuando un complejo de cadenas finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos libres, utilizando conceptos que se definirán en esta sección y el grupo $\tilde{K}_0(R)$.

3.1 Característica de Euler

En esta sección definiremos el invariante algebraico que nos permitira caracterizar los espacios finitamente dominado, la característica de Euler. En principio esta se define para complejos de cadenas de tipo finito conformados por R-módulos proyectivos, para luego definirla en complejos de cadenas homotópicamente equivalentes a un complejo de cadenas de tipo finito conformado por R-módulos proyectivos.

Definición 3.1.1. Un complejo de cadenas $(C_\bullet, d)$ de R-módulos es llamado acotado si $C_j = 0$ para todo j excepto un conjunto finito y es llamado de tipo finito si es acotado y C_j es finitamente generado para todo j.

Recordemos que todo R-módulo proyectivo finitamente generado define un elemento en $K_0(R)$ (vease definición 1.2.3).

Definición 3.1.2. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos. Definimos su característica de Euler mediante

$$\chi(C) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C_j], \quad [C_j] \in K_0(R).$$

Notemos que la anterior es una suma finita pues $(C_\bullet, d)$ es de tipo finito y como $[C_j] \in K_0(R)$, $\chi(C) \in K_0(R)$. Definimos también $\widetilde{\chi}(C)$ como la clase de equivalencia de $\chi(C)$ en $\widetilde{K_0}(R)$.

Teorema 3.1.1. ***(Principio de Euler-Poincaré).***
La característica de Euler es aditiva en sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas de tipo finito. Es decir, si

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C'' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos, entonces $\chi(C'') = \chi(C') + \chi(C)$.
Además, si $(C_\bullet, d)$ es un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos y todos sus módulos de homología son proyectivos, entonces

$$\chi(C) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [H_j(C)].$$

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C'' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de complejos de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos. Esto nos dice para todo j, la sucesión

$$0 \longrightarrow C'_j \longrightarrow C''_j \longrightarrow C_j \longrightarrow 0$$

es exacta, y al estar conformada por módulos proyectivos, se escinde. Por lo que $C''_j \cong C'_j \oplus C_j$ y $[C''_j] = [C'_j] + [C_j]$, entonces

$$\begin{aligned}\chi(C'') &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C''_j] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j ([C'_j] + [C_j]) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C'_j] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C_j] \\ &= \chi(C') + \chi(C).\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $(C_\bullet, d)$ es un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos y que todos sus módulos de homología son proyectivos. Definimos $Z_j = \mathrm{Ker}(d_j)$ y $B_j = \mathrm{Im}(d_{j+1})$, notenemos las sucesiones exactas cortas

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{j+1}) \xrightarrow{i} C_{j+1} \xrightarrow{d_{j+1}} \mathrm{Im}(d_{j+1}) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{j+1}) \xrightarrow{i} \mathrm{Ker}(d_j) \xrightarrow{\pi} H_j(C) \longrightarrow 0.\end{gathered}$$

Como $H_j(C)$ es proyectivo, la sucesión se escinde y $Z_j \cong B_j \oplus H_j(C)$. Utilizando que el complejo de cadenas es de tipo finito podemos suponer sin perdida de generalidad que $C_j = 0$ para $j < 0$, basta con reindexar, por lo que $C_0 = \mathrm{Ker}(d_0) = Z_0$, lo que hace a Z_0 proyectivo. Al ser Z_0 proyectivo y usando $Z_0 \cong B_0 \oplus H_0(C)$ vemos que B_0 es proyectivo, de esto se sigue que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_1 \xrightarrow{i} C_1 \xrightarrow{d_1} B_0 \longrightarrow 0$$

se escinde y $C_1 \cong Z_1 \oplus B_0$. Lo que implica que Z_1 es proyectivo y como $Z_1 \cong B_1 \oplus H_1(C)$, B_1 es proyectivo.

Continuando por inducción tenemos que B_j y Z_j son proyectivos para todo j y todas las sucesiones se escinden. Así

$$[C_j] = [Z_j] + [B_{j-1}] \text{ y } [Z_j] = [B_j] + [H_j].$$

Calculamos ahora $\chi(C)$,

$$\begin{aligned}
\chi(C) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C_j] \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j ([H_j] + [B_j] + [B_{j-1}]) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [H_j] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [B_j] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [B_{j-1}] \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [H_j] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [B_j] - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [B_j] \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [H_j].
\end{aligned}$$

■

Definición 3.1.3. Sean $(C_\bullet, d)$, $(C'_\bullet, d')$, complejos de cadenas de R-módulos proyectivos y $(C'_\bullet, d')$ de tipo finito, supongamos que son homotópicamente equivalentes, entonces definimos la característica de Euler de $(C_\bullet, d)$ por

$$\chi(C) = \chi(C').$$

Proposición 3.1.2. *La característica de Euler $\chi(C)$ de la proposición anterior está bien definida, es invariante bajo clases de equivalencias de homotopía y es aditivo en sucesiones exactas cortas*

$$0 \longrightarrow (D''_\bullet, f'') \to (C_\bullet, d) \to (D'_\bullet, f') \longrightarrow 0.$$

Donde $(D''_\bullet, f'')$ y $(D'_\bullet, f')$ son complejos de cadenas de módulos proyectivos homotópicos a algún complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos (no necesariamente el mismo).

Demostración. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas de R-módulos proyectivos homotopicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos $(C'_\bullet, d')$.

Definimos $\chi(C) = \chi(C')$, hay que ver que es independiente de la elección de $(C'_\bullet, d')$. Sea $(C''_\bullet, d'')$ otra posible elección de complejo de cadenas homotopicamente equivalente a $(C_\bullet, d)$, por lo que $(C'_\bullet, d')$ y $(C''_\bullet, d'')$ son homotopicamente equivalentes.

Sea $\varphi : C' \longrightarrow C''$ la equivalencia homotópica y sea (D, f) su cono. Como C' y C'' son de tipo finito de módulos proyectivos, $D_j \cong C'_{j-1} \oplus C''_j$ también lo es para todo j. Usando la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (C''_\bullet, d'') \xrightarrow{i} (D_\bullet, f) \xrightarrow{\pi} (C'_{\bullet-1}, -d) \longrightarrow 0$$

y el Teorema 3.1.1 tenemos

$$\begin{aligned}\chi(D) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C''_j] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C'_{j-1}] \\ &== \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C''_j] - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C'_j] \\ &= \chi(C'') - \chi(C').\end{aligned}$$

El cono (D, f) es acíclico pues φ es una equivalencia homotópica, esto nos dice que $H_j(D) = 0$ para todo j y al ser de tipo finito de módulos proyectivos tenemos que $\chi(C) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j[H_j(C)] = 0$. Por lo tanto $\chi(C'') = \chi(C')$, es decir $\chi(C)$ está bien definido.
Este mismo calculo nos dice que cadenas homotopicamente equivalentes tienen la misma característica de Euler, o bien, es invariante bajo clases de equivalencias de homotopía.
Por último la aditividad de la característica de Euler se sigue de el Teorema 3.1.1 y el hecho de que sucesiones exactas cortas de módulos proyectivos se escinden.

■

3.2 Obstrucción de finitud de Wall

En esta sección enunciaremos y demostraremos una versión algebraica del Teorema de Obstrucción de finitud de Wall. Comenzamos demostrando un Lema de gran importancia para la demostración del Teorema.

Lema 3.2.1. ***(Wall)***
Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas de módulos proyectivos homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos. El complejo de cadenas $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos libres si y sólo si $\widetilde{\chi}(C) = 0$ en $\widetilde{K_0}(R)$.

Demostración. Supongamos que $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a $(C'_\bullet, d')$ que es de tipo finito, ambos conformados por R-módulos proyectivos. Entonces $\chi(C) = \chi(C')$

y por lo tanto $\widetilde{\chi}(C) = \widetilde{\chi}(C')$. Si $(C'_\bullet, d')$ está conformado por R-módulos libres, entonces $[C'_j] = 0 \in \widetilde{K_0}(R)$ y así $\widetilde{\chi}(C') = 0 = \widetilde{\chi}(C)$.
Supongamos ahora que $\widetilde{\chi}(C') = 0$. Basta con demostrar que $(C'_\bullet, d')$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de módulos libres.
Supongamos que $C'_j = 0$ para j fuera del intervalo $\{k, k+1, k+2, \ldots, k+n\}$, es posible ya que C' es de tipo finito. Tomamos módulos proyectivos $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ tales que $C'_{k+n} \oplus Q_n$ es libre, $C'_{k+n-1} \oplus Q_n \oplus Q_{n-1}$ es libre y en general $C'_{k+i} \oplus Q_{i+1} \oplus Q_i$ es libre, con $0 \leq i < n$, es posible pues proyectivo implica sumando de un libre.
Definimos (T^j, d^{T^j}) para $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mediante

$$T^j_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k+j, k+j-1 \\ Q_j & \text{si } i = k+j, k+j-1 \end{cases}$$

y $d^{T^j}_{k+j} = 1_{Q_j} : Q_j \longrightarrow Q_j$, es decir, (T^j, d^{T^j}) es el complejo de cadenas

$$\cdots \to 0 \to 0 \to Q_j \xrightarrow{d^{T^j}_{k+j}} Q_j \to 0 \to 0 \to \cdots$$

el cual claramente es contraible por el Teorema 2.2.1. Por el Teorema 2.1.4,

$$(C''_\bullet, d'') = (C'_\bullet, d') \oplus \bigoplus_{j=0}^{n} (T^j, d^{T^j})$$

es homotópicamente equivalente a $(C'_\bullet, d')$ y está conformado por R-módulos libres excepto en $k-1$ donde $C''_{k-1} = Q_0$, ya que el complejo de cadenas $(C''_\bullet, d'')$ es precisamente

$$\cdots \to 0 \to C'_{k+n} \oplus Q_n \to C'_{k+n-1} \oplus Q_n \oplus Q_{n-1} \to C'_{k+n-2} \oplus Q_{n-1} \oplus Q_{n-2} \to$$
$$\to C'_{k+n-3} \oplus Q_{n-2} \oplus Q_{n-3} \to \cdots \to C'_k \oplus Q_1 \oplus Q_0 \to Q_0 \to 0 \to \cdots$$

Entonces $0 = \widetilde{\chi}(C') = \widetilde{\chi}(C'') = (-1)^k [C''_{k-1}]$ en $\widetilde{K_0}(R)$, lo que nos dice que C''_{k-1} es establemente libre. Sea F un R-módulo libre finitamente generado tal que $C''_{k-1} \oplus F \cong F$, definimos (T, d^T) mediante

$$T_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k-1, k-2 \\ F & \text{si } j = k-1, k-2 \end{cases}$$

con $d^T_{k-1} = 1_F : F \longrightarrow F$. El complejo de cadenas (T, d^T) es precisamente

$$\cdots \to 0 \to 0 \to F \xrightarrow{d^T_{k-1}} F \to 0 \to 0 \to \cdots$$

y claramente es contraible.
Por lo tanto $(C''_\bullet, d'')$ es homotópicamente equivalente a $(C''_\bullet, d'') \oplus (T, d^T)$, el cual está conformado por R-módulos libres y así $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de módulos libres.

■

Ejemplo 3.1. Tomemos el complejo de cadenas X, dado por

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0$$

Es un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-módulos proyectivos y es de tipo finito. Luego

$$\chi(X) = [\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] + [\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] - [\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}] + [\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}] = [\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}],$$

entonces $\widetilde{\chi}(X) \neq 0$ pues $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es proyectivo pero no libre. Falta ver que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no es establemente libre, para esto usaremos un argumento de cardinalidad. Todo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-módulo tiene cardinalidad alguna potencia de 6, que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sea establemente libre nos diría que existe un libre con cardinalidad 6^n tal que al hacer suma directa con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, obtenemos un libre con cardinalidad 6^m, lo cual es absurdo.

Definiremos ahora uno de los conceptos más importantes de la sección, el de un complejo de cadenas finitamente dominado, esta definición nos es de importancia pues un complejo de cadenas finitamente dominado es "casi" homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de módulos libres.

Definición 3.2.1. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas de R-módulos proyectivos. Llamamos a $(C_\bullet, d)$ finitamente dominado si existe un complejo de cadenas $(D_\bullet, d')$ de tipo finito de R-módulos libres y morfismos de cadenas $f : C \longrightarrow D$, $g : D \longrightarrow C$ tales que $g \circ f \simeq 1_C$. Decimos que $(C_\bullet, d)$ es dominado por $(D_\bullet, f, g)$.

Los siguientes Lemas nos facilitarán los calculos en demostraciones futuras.

Lema 3.2.2. *Sean $(C_\bullet, d)$, $(D_\bullet, d')$ complejos de cadenas y $f : C \longrightarrow D$, $g : D \longrightarrow C$ morfismos de cadenas tales que existe una homotopía h que satisface $1 - gf = dh + hd$. Tenemos que*

$$fh^{n-1}gfg - fh^{n-2}gfhg + \cdots + fhgfh^{n-2}g - fgfh^{n-1}g - d'fh^n g = -fh^n dg \tag{3.1}$$

$$fh^{n-1}gfg - fh^{n-2}gfhg + \cdots - fhgfh^{n-2}g + fgfh^{n-1}g + d'fh^n g = -fh^n dg + fh^{n-1}g \tag{3.2}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}-d'fh^ng =& -f(dh)h^{n-1}g\\ =& -f(1-gf-hd)h^{n-1}g\\ =& -fh^{n-1}g+fgfh^{n-1}g+fhdh^{n-1}g.\end{aligned}$$

Reescribimos la ecuación 3.1 sustituyendo $-d'fh^ng$,

$$fh^{n-1}gfg - fh^{n-2}gfhg + fh^{n-3}gfh^2g - \cdots + fhgfh^{n-2}g - fh^{n-1}g + (fhdh^{n-1}g).$$

Ahora, sustituyendo $fhdh^{n-1}g$ por $fh^{n-1}g - fhgfh^{n-2}g - fh^2gfh^{n-2}g$, la ecuación 3.1 se reduce a

$$fh^{n-1}gfg - fh^{n-2}gfhg + fh^{n-3}gfh^2g - \cdots - (fh^2gfh^{n-2}g).$$

De manera similar realizamos las sustituciones en 3.1

$$\begin{aligned}fh^2gfh^{n-2}g =& fh^{n-1}g - fh^2gfh^{n-3}g - fh^3gfh^{n-3}g\\ &\vdots\\ fh^{n-3}dh^3g =& fh^{n-1}g - fh^{n-3}fh^2g - fh^{n-2}dh^2g\\ -fh^{n-2}dh^2g =& -fh^{n-1}g + fh^{n-2}fhg + fh^{n-1}dhg\\ fh^{n-1}dhg =& fh^{n-1}g - fh^{n-1}gfg - fh^ndg.\end{aligned}$$

Por lo que 3.1 se reduce a $-fh^ndg$.
Para la ecuación 3.2 realizamos las sustituciones

$$\begin{aligned}d'fh^ng =& f(dh)h^{n-1}g\\ =& f(1-gf-hd)h^{n-1}g\\ =& fh^{n-1}g - fgfh^{n-1}g - fhdh^{n-1}g\\ -fhdh^{n-1}g =& -fh^{n-1}g + fhgfh^{n-2}g + fh^2dfh^{n-2}g\\ &\vdots\\ fh^{n-3}dh^3g =& fh^{n-1}g - fh^{n-3}fh^2g - fh^{n-2}dh^2g\\ -fh^{n-2}dh^2g =& -fh^{n-1}g + fh^{n-2}fhg + fh^{n-1}dhg\\ fh^{n-1}dhg =& fh^{n-1}g - fh^{n-1}gfg - fh^ndg.\end{aligned}$$

Por lo que al reducir la ecuación 3.2 terminamos precisamente con $-fh^ndg + fh^{n-1}g$. ■

Lema 3.2.3. *Sean* $(C_\bullet, d)$, $(D_\bullet, d')$ *complejos de cadenas y* $f : C \longrightarrow D$, $g : D \longrightarrow C$ *morfismos de cadenas tales que existe una homotopía* h *que satisface* $1 - gf = dh + hd$. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} &fh^n gfg - fh^{n-1}gfhg + fh^{n-2}gfh^2g - \cdots \\ &+ fh^2gfh^{n-2}g - fhgf^{n-1}g + fgfh^ng = fh^ng - fh^{n+1}dg - fdh^{n+1}g \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &fh^n gfg - fh^{n-1}gfhg + fh^{n-2}gfh^2g - \cdots \\ &- fh^2gfh^{n-2}g + fhgf^{n-1}g - fgfh^ng = -fh^{n+1}dg + fdh^{n+1}g \end{aligned} \tag{3.4}$$

Demostración. Reescribimos la ecuación 3.3 como

$$\begin{gathered} fh^ngfg - fh^{n-1}gfhg + fh^{n-2}gfh^2g - \cdots + fh^2gfh^{n-2}g - fhgf^{n-1}g + fgfh^ng = \\ f(h^ngf - h^{n-1}gfh + h^{n-2}gfh^2 - \cdots + h^2gfh^{n-2} - hgf^{n-1} + gfh^n)g. \end{gathered}$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} h^ngf &= h^n - h^ndh - h^{n+1}d \\ -h^{n-1}gfh &= -h^n + h^{n-1}dh^2 + h^ndh \\ h^{n-2}gfh^2 &= h^n - h^{n-2}dh^3 - h^{n-1}dh^2 \\ &\vdots \\ h^2gfh^{n-2} &= h^n - h^2dh^{n-1} - h^3dh^{n-2} \\ -hgfh^{n-1} &= -h^n + hdh^n + h^2dh^{n-1} \\ gfh^n &= h^n - dh^{n+1} - hdh^n. \end{aligned}$$

Por lo que al sustituir, la ecuación 3.3 se reduce a $fh^ng - fh^{n+1}dg - fdh^{n+1}g$. Ahora, reescribimos la ecuación 3.4,

$$\begin{gathered} fh^ngfg - fh^{n-1}gfhg + fh^{n-2}gfh^2g - \cdots - fh^2gfh^{n-2}g + fhgf^{n-1}g - fgfh^ng = \\ f(h^ngf - h^{n-1}gfh + h^{n-2}gfh^2 - \cdots - h^2gfh^{n-2} + hgf^{n-1} - gfh^n)g \end{gathered}$$

y realizamos las sustituciones

$$\begin{aligned}
h^n gf =& h^n - h^n dh - h^{n+1} d \\
-h^{n-1} gfh =& - h^n + h^{n-1} dh^2 + h^n dh \\
h^{n-2} gfh^2 =& h^n - h^{n-2} dh^3 - h^{n-1} dh^2 \\
&\vdots \\
-h^2 gfh^{n-2} =& - h^n + h^2 dh^{n-1} + h^3 dh^{n-2} \\
hgfh^{n-1} =& + h^n - hdh^n - h^2 dh^{n-1} \\
-gfh^n =& - h^n + dh^{n+1} + hdh^n.
\end{aligned}$$

Así obtenemos que la ecuación se reduce a $-fh^{n+1}dg + fdh^{n+1}g$. ■

Sean $(M_i)_{i=1}^n$, $(N_j)_{j=1}^m$ familias de R-módulos y sean $\bigoplus_{i=1}^n M_i$, $\bigoplus_{j=1}^m N_j$ sus sumas directas. Una función $F : \bigoplus_{i=1}^n M_i \to \bigoplus_{j=1}^m N_j$ es de la forma

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

con $f_j : \bigoplus_{i=1}^n M_i \to N_j$. Ahora sea $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$, se tiene que

$$f_j((x_i)_{i=1}^n) = g_{j1}(x_1) + g_{j2}(x_2) + \cdots + g_{jn}(x_n)$$

donde $g_{jk} : M_k \to N_j$ y con esto representamos a F en forma matricial de la siguiente manera

$$F = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}.$$

Así, $F((x_i)_{i=1}^n) = (f_1((x_i)_{i=1}^n), f_2((x_i)_{i=1}^n), \dots, f_n((x_i)_{i=1}^n))$ se representa de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(x_1) + \cdots + g_{1n}(x_n) \\ g_{21}(x_1) + \cdots + g_{2n}(x_n) \\ \vdots \\ g_{m1}(x_1) + \cdots + g_{mn}(x_n) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} g_{11}(x_1)+\cdots+g_{1n}(x_n) \\ g_{21}(x_1)+\cdots+g_{2n}(x_n) \\ \vdots \\ g_{m1}(x_1)+\cdots+g_{mn}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1((x_i)_{i=1}^n) \\ f_2((x_i)_{i=1}^n) \\ \vdots \\ f_m((x_i)_{i=1}^n) \end{pmatrix}$$

Sean $F : \bigoplus_{i=1}^n M_i \to \bigoplus_{j=1}^m N_j$ y $H : \bigoplus_{j=1}^m N_j \to \bigoplus_{k=1}^l M'_k$ con representaciones matriciales

$$F = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{l1} & h_{l2} & h_{l3} & \cdots & h_{lm} \end{pmatrix}.$$

La representación matricial de la composición $H \circ F : \bigoplus_{i=1}^n M_i \to \bigoplus_{k=1}^l M'_k$ viene dada por el producto de las matrices con composiciones en las entradas, es decir,

$$H \circ F = \begin{pmatrix} h_{11}\circ g_{11}+\cdots+h_{1m}\circ g_{m1} & \cdots & h_{11}\circ g_{1n}+\cdots+h_{1m}\circ g_{mn} \\ h_{21}\circ g_{11}+\cdots+h_{2m}\circ g_{m1} & \cdots & h_{21}\circ g_{2n}+\cdots+h_{2m}\circ g_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{l1}\circ g_{11}+\cdots+h_{lm}\circ g_{m1} & \cdots & h_{l1}\circ g_{1n}+\cdots+h_{lm}\circ g_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.2.4. *Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas finitamente dominado por $(D_\bullet, f, g)$. La función $\rho : \oplus_{i=0}^n D_i \longrightarrow \oplus_{i=0}^n D_i$ con representación matricial*

$$\begin{pmatrix} fg & d' & 0 & 0 & \cdots \\ fhg & 1-fg & -d' & 0 & \cdots \\ fh^2g & -fhg & fg & d' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

es idempotente, es decir, $\rho^2 = \rho$.

Demostración. Como h es una homotopía que satisface $1 - gf = dh + hd$, vemos que $f(1-gf)g = fg - (fg)^2 = fdhg + fhdg = d'fhg + fhgd'$ ya que f, g son morfismos de cadenas. Esto nos dice que fhg es una homotopía entre fg y $(fg)^2$, donde $(fg)^2 = f \circ g \circ f \circ g$.

Procedemos por inducción sobre la longitud del complejo de cadenas $(D_\bullet, d')$, es decir, el entero i más pequeño tal que $C_j = 0$ para todo $j \geq i$.

Para $n = 1$ tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d_1'"] \arrow[d, "g_1"] & D_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "g_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "g_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "f_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d_1'"] & D_0 \arrow[r, "d_0'"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y la matriz que representa a ρ está dada por

$$\begin{pmatrix} fg \end{pmatrix}.$$

Así ρ^2 viene representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} (fg)^2 \end{pmatrix},$$

de donde $(fg)^2 = fg - d'f_1hg - fhgd_0' = fg$, pues $f_1 = 0$ y $d_0 = 0$.
Para $n = 2$ tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d_2'"] \arrow[d, "g_2"] & D_1 \arrow[r, "d_1'"] \arrow[d, "g_1"] & D_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "g_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "g_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_3"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "f_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d_2'"] & D_1 \arrow[r, "d_1'"] & D_0 \arrow[r, "d_0'"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y la respectiva representación matricial de ρ

$$\begin{pmatrix} fg & d' \\ fhg & 1 - fg \end{pmatrix}.$$

Por lo que ρ^2 es representada por

$$\begin{pmatrix} (fg)^2 + d'fhg & fgd' + d' - d'fg \\ fhgfg + fhg - fgfhg & fhgd' + 1 - fg - fg + (fg)^2 \end{pmatrix}.$$

Analizemos entrada por entrada,

(1,1) : $(fg)^2 + d'fhg = fg - fhgd_0' = fg$, pues $d_0' = 0$.

(1,2) : $fgd' + d' - d'fg = d'$, pues fg es morfismo de cadenas.

(2,1) : $fhgfg+fhg-fgfhg = f(hgf+h-gfh)g$, ahora usamos la igualdad $gf = 1-dh-hd_0$ para ver que $hgf = h-hdh-h^2d_0$ y $gfh = h-hdh-d_2h^2$. Obtenemos entonces que la entrada $(2,1)$ es $-fh^2d_0g+fd_2h^2g+fhg$. Recordemos que $d_0g = gd'_0 = 0$ y $fd_2 = d'f_2 = 0$, así concluimos que la entrada es fhg.

(2,2) : $fhgd'+1-fg-fg+(fg)^2$, usamos que $fg-(fg)^2 = d'fhg+fhgd'$ y sustituimos para obtener $1-fg-d'f_2hg = 1-fg$ pues $f_2 = 0$.

Para $n = 3$ el diagrama es de la forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d'_3"] \arrow[d, "g_3"] & D_2 \arrow[r, "d'_2"] \arrow[d, "g_2"] & D_1 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "g_1"] & D_0 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "g_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "g_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_4"] & C_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "f_3"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "f_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d'_3"] & D_2 \arrow[r, "d'_2"] & D_1 \arrow[r, "d'_1"] & D_0 \arrow[r, "d'_0"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y ρ está representada por

$$\begin{pmatrix} fg & d' & 0 \\ fhg & 1-fg & -d' \\ fh^2g & -fhg & fg \end{pmatrix},$$

por lo que la representación matricial de ρ^2 es

$$\begin{pmatrix} (fg)^2+d'fhg & fgd'+d'-d'fg & -d'^2 \\ fhgfg+fhg-fgfhg-d'fh^2g & fhgd'+1-fg-fg+(fg)^2+d'fhg & -d'+fgd'-d'gf \\ fh^2gfg-fhgfhg+fgfh^2g & fh^2gd'-fhg+fhgfg-fgfhg & fhgd'+(fg)^2 \end{pmatrix},$$

Para ρ^2 solo hay que revisar las entradas del segundo y el tercer renglón, pues el primer renglón es idempotente utilizando el caso $n = 2$ y $d' \circ d' = 0$.

(2,1) : $fhgfg+fhg-fgfhg-d'fh^2g = fhg+f(hgf-gfh-dh^2)g$, y notemos que $hgf-gfh-dh^2 = h^2d_0$, por lo que entrada es $fhg+fh^2d_0g = fhg$, ya que $d_0g = gd'_0 = 0$.

(2,2) : $fhgd'+1-fg-fg+(fg)^2+d'fhg = 1-fg$, utilizando que $fg-(fg)^2 = d'fhg+fhgd'$.

(2,3) : $-d'+fgd'-d'gf = -d'$, pues fg esun morfismo de cadenas.

(3,1) : $fh^2gfg - fhgfhg + fgfh^2g = f(h^2gf - hgfh + gfh^2)g$, y tenemos que $h^2gf - hgfh + gfh^2 = h^2 - h^3d_0 - d_2h^3$, por lo que la entrada es $fh^2g - fh^3d_0g - fd_2h^3g = fh^2g$, ya que $d_0g = gd_0' = 0$ y $f_2d_3 = d_3'f_3 = 0$.

(3,2) : $fh^2gd' - fhg + fhgfg - fgfhg = -fhg + f(hgf + h^2d - gfh)g$, reduciendo obtenemos $-fhg + fd_2h^2g = -fhg$.

(3,3) : $fhgd' + (fg)^2 = fg - d'f_3hg = fg$.

Ahora suponemos que la matriz es idempotente para $n = k$, demostraremos que lo es para $n = k + 1$. Tomaremos dos casos, el caso en que k es par y el caso en donde es impar, esto se debe a que la matriz de $k + 1 \times k + 1$ es diferente si k es par o impar.
En ambos casos tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d'_{k+1}"] \arrow[d, "g_{k+1}"] & D_k \arrow[r, "d'_k"] \arrow[d, "g_k"] & D_{k-1} \arrow[r, "d'_{k-1}"] \arrow[d, "g_{k-1}"] & \cdots \arrow[r, "d'_2"] & D_1 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "g_1"] & D_0 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "g_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "g_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{k+2}"] & C_{k+1} \arrow[r, "d_{k+1}"] \arrow[d, "f_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "d_k"] \arrow[d, "f_k"] & C_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "f_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d'_{k+1}"] & D_k \arrow[r, "d'_k"] & D_{k-1} \arrow[r, "d'_{k-1}"] & \cdots \arrow[r, "d'_2"] & D_1 \arrow[r, "d'_1"] & D_0 \arrow[r, "d'_0"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

para $n = k + 1$ con k par, la matriz que representa a ρ es

$$\begin{pmatrix}
fg & d' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
fhg & 1 - fg & -d' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
fh^2g & -fhg & fg & d' & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
fh^{k-1}g & -fh^{k-2}g & fh^{k-3}g & -fh^{k-4} & \cdots & fhg & 1 - fg & -d' \\
fh^kg & -fh^{k-1}g & fh^{k-2}g & -fh^{k-3} & \cdots & fh^2g & -fhg & fg
\end{pmatrix}.$$

Por nuestra hipótesis de inducción tenemos idempotencia en todos los renglones excepto el k-ésimo y el $k+1$-ésimo de la representación matricial de ρ^2, solo hay que revisar estos. Para la entrada $(k, 1)$ utilizaremos el Lema 3.2.2,

$(k, 1)$: $fh^{k-1}gfg - fh^{k-2}gfhg + fh^{k-3}gfh^2g - \cdots + fhgfh^{k-2}g + fh^{k-1}g - fgfh^{k-1}g - d'fh^kg$

Por lo que la entrada $(k, 1)$ es $fh^{k-1}g - fh^kd_0g = fh^{k-1}g$, pues $d_0g = 0$.
Para la entrada (k, j) con $j = 2, \ldots, k-1$ consideramos dos casos, donde j es par y donde

es impar.

Para j par tenemos

$$(k,j)\ :\ fh^{k-j+1}gd' - fh^{k-j}g + fh^{k-j}gfg - fh^{k-j-1}gfhg + fh^{k-j-2}gfh^2g - \cdots - fhgfh^{k-j-1}g - fh^{k-j}g. + fgfh^{k-j}g + d'fh^{k-j+1}g.$$

Y por el Lema 3.2.2 y obtenemos que la entrada es $-fh^{k-j}g$.

Para j impar tenemos

$$(k,j)\ :\ fh^{k-j+1}gd' + fh^{k-j}gfg - fh^{k-j-1}gfhg + fh^{k-j-2}gfh^2g - \cdots + fhgfh^{k-j-1}g + fh^{k-j}g - fgfh^{k-j}g - d'fh^{k-j+1}g,$$

y volvemos a utilizar el Lema 3.2.2 para obtener que la entrada es $fh^{k-j}g$. Pasamos a las últimas dos coordenadas del renglón k,

$$(k,k)\ :\ fhgd' + 1 - fg - fg + (fg)^2 + d'fhg = 1 - fg.$$

$$(k,k+1)\ :\ -d' + fgd' + d'fg = -d'.$$

Pasamos ahora al último renglĺon, para la entrada $(k+1,1)$ utilizaremos el Lema 3.2.3

$$(k+1,1)\ :\ fh^kgfg - fh^{k-1}gfhg + fh^{k-2}gfh^2g - \cdots + fh^2gfh^{k-2}g - fhgf^{k-1}g + fgfh^kg = f(h^kgf - h^{k-1}gfh + h^{k-2}gfh^2 - \cdots 4 + h^2gfh^{k-2} - hgf^{k-1} + gfh^k)g.$$

Por lo que la entrada $(k+1,1)$ es $f(h^k - h^{k+1}d_0 - d_{k+1}h^{k+1})g = fh^kg$.

De manera similar al renglón anterior, tomaremos los dos casos de la entrada $(k+1,j)$ con $j = 2,\ldots,k-1$.

Para j par tenemos

$$(k+1,j)\ :\ fh^{k-j+2}gd' - fh^{k-j+1}g + fh^{k-j+1}gfg - fh^{k-j}gfhg + \cdots - fh^2gfh^{k-j-1}g + fhgfh^{k-j}g - fgfh^{k-j+1}g.$$

Utilizamos el Lema 3.2.3 y vemos que la entrada es $-fh^{k-j+1}g + fd_{k+1}h^{k-j+2}g_{j-1}$ que es igual a $-fh^{k-j+1}g$.

Para j impar tenemos

$(k+1,j)\ :\ fh^{k-j+2}gd' + fh^{k-j+1}gfg - fh^{k-j}gfhg + \cdots + fh^2gfh^{k-j-1}g - fhgfh^{k-j}g + fgfh^{k-j+1}g$

y al utilizar el Lema 3.2.3 obtenemos $fh^{k-j+1}g - fd_{k+1}h^{k-j+2}g_{j-1} = fh^{k-j+1}g$.
Falta ver las últimas dos columnas del último renglón del caso k par.

$(k+1,k)\ :\ fh^2gd' - fhg + fhgfg - fgfhg = -fhg + fd_{k+1}h^2g = -fhg$

$(k+1,k+1)\ :\ fhgd' + (fg)^2 = fg - d'f_{k+1}hg = fg.$

Para el caso k impar, ρ está representada por

$$\begin{pmatrix} fg & d' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ fhg & 1-fg & -d' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ fh^2g & -fhg & fg & d' & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ fh^{k-1}g & -fh^{k-2}g & fh^{k-3}g & -fh^{k-4} & \cdots & -fhg & fg & d' \\ fh^kg & -fh^{k-1}g & fh^{k-2}g & -fh^{k-3} & \cdots & -fh^2g & fhg & 1-fg \end{pmatrix}.$$

De manera similar, solo hay que analizar los dos últimos renglones de la representación matricial de ρ^2, para $(k,1)$ tenemos que

$(k,1)\ : fh^{k-1}gfg - fh^{k-2}gfhg + fh^{k-3}gfh^2g - \cdots - fhgfh^{k-2}g + fgfh^{k-1}g + d'fh^kg.$

Usando nuevamente el Lema 3.2.2, vemos que la entrada $(k,1)$ es $-fh^kgd_0' + fh^{k-1}g = fh^{k-1}g$. Para la entrada (k,j) con $j = 2,\dots,k-1$ analizamos de nuevo el caso par e impar. Para j par la entrada es

$(k,j)\ : fh^{k-j+1}gd' - fh^{k-j}g + fh^{k-j}gfg - fh^{k-j-1}gfhg + fh^{k-j-2}gfh^2g - \cdots + fhgfh^{k-j-1}g - fgfh^{k-j}g - d'fh^{k-j+1}g.$

ahora con el Lema 3.2.3, vemos que $(k,j) : -fh^{k-j}g$.
Para j impar tenemos

$(k,j)\ : fh^{k-j+1}gd' + fh^{k-j}gfg - fh^{k-j-1}gfhg + fh^{k-j-2}gfh^2g - \cdots - fhgfh^{k-j-1}g + fgfh^{k-j}g + d'fh^{k-j+1}g,$

y esta vez utilizamos el Lema 3.2.2 para obtener que la entrada es $fh^{k-j}g$. Ahora para las dos últimas columnas tenemos

$$(k,k)\ :\ fhgd' + (fg)^2 + d'fhg = fg.$$

$$(k,k+1)\ :\ fgd' + d' - d'fg = d'.$$

Solo nos queda verificar el último renglón, para $(k+1,1)$ podemos ver que

$$(k+1,1)\ : fh^kgfg - fh^{k-1}gfhg + fh^{k-2}gfh^2g - \cdots - fh^2gfh^{k-2}g + fhgf^{k-1}g + fh^kg - fgfh^kg$$

y con el Lema 3.2.3 llegamos a que la entrada es $fh^kg - fh^{k+1}d_0g + fd_{k+1}h^{k+1}g$ el cual es precisamente fh^kg.
Volvemos a separar en dos casos para $(k+1,j)$ con $j = 2,\ldots,k-1$, comencemos con j par

$$(k+1,j)\ : fh^{k-j+2}gd' - fh^{k-j+1}g + fh^{k-j+1}gfg - fh^{k-j}gfhg + \cdots + fh^2gfh^{k-j-1}g - fhgfh^{k-j}g - fh^{k-j+1}g + fgfh^{k-j+1}g.$$

Haciendo uso de el Lema 3.2.3, llegamos a que la entrada es $-fh^{k-j+1}g - fd_{k+1}h^{k-j+2}g = -fh^{k-j+1}g$.
Ahora para j impar la entrada es

$$(k+1,j)\ :\ fh^{k-j+2}gd' + fh^{k-j+1}gfg - fh^{k-j}gfhg + \cdots - fh^2gfh^{k-j-1}g + fhgfh^{k-j}g + fh^{k-j+1}g - fgfh^{k-j+1}g$$

y despúes de usar el Lema 3.2.3 vemos que la entrada es $fh^{k-j+1}g + fd_{k+1}h^{k-j+2}g = fh^{k-j+1}g$.
Para finalizar, veamos las dos últimas columnas

$$(k+1,k)\ :\ fh^2gd' + fhgfg + fhg - fgfhg = fhg + fd_{k+1}h^2g = fhg.$$

$$(k+1,k+1)\ :\ fhgd' + 1 - fg - fg + (fg)^2 = -d'f_{k+1}hg + 1 - fg = 1 - fg.$$

$\blacksquare$

Proposición 3.2.5. *Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas finitamente dominado por $(D_\bullet, f, g)$ y sea $C'_r = D_r \oplus D_{r+1} \oplus D_{r+2} \oplus \cdots \oplus D_{n-1} \oplus D_n$. Sea $\partial_i : C'_i \longrightarrow C'_{i-1}$ la función con representación matricial*

$$\begin{pmatrix} d' & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-fg & -d' & 0 & 0 & \cdots \\ -fhg & fg & d' & 0 & \cdots \\ -fh^2g & fhg & 1-fg & -d' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Entonces $(C'_\bullet, \partial)$, dado por

$$0 \to C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C'_1 \xrightarrow{\partial_1} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} C'_0 \xrightarrow{\rho} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} \cdots$$

es un complejo de cadenas.

Demostración. Comencemos con ∂_n que viene dada por

$$\begin{pmatrix} d' \\ 1-fg \end{pmatrix},$$

y así ∂_{n-1} es representada por

$$\begin{pmatrix} d' & 0 \\ 1-fg & -d' \\ -fhg & fg \end{pmatrix}.$$

Queremos ver que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, la matriz producto

$$\begin{pmatrix} d' \circ d' \\ d' - fgd' - d' + d'fg \\ -fhgd' + fg - (fg)^2 \end{pmatrix},$$

es nula.

En efecto, pues

(1,1) : $d' \circ d' = 0$ por definición.

(2,1) : $d' - fgd' - d' + d'fg = 0$ pues fg es morfismo de cadenas.

(3,1) : $-fhgd' + fg - (fg)^2 = d'_{n+1} f_{n+1} hg = 0$ pues $f_{n+1} = 0$.

Pasamos ahora al caso general desde $n-1$ hasta 1, para k par, la matriz de $(k+2)\times(k+1)$ es

$$\begin{pmatrix}
d' & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
1-fg & -d' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-fhg & fg & d' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-fh^2g & fhg & 1-fg & -d' & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-fh^{k-4}g & fh^{k-5}g & -fh^{k-6}g & fh^{k-7}g & \cdots & -d' & 0 & 0 & 0\\
-fh^{k-3}g & fh^{k-4}g & -fh^{k-5}g & fh^{k-6}g & \cdots & fg & d' & 0 & 0\\
-fh^{k-2}g & fh^{k-3}g & -fh^{k-4}g & fh^{k-5}g & \cdots & fhg & 1-fg & -d' & 0\\
-fh^{k-1}g & fh^{k-2}g & -fh^{k-3}g & fh^{k-4}g & \cdots & fh^2g & -fhg & fg & d'\\
-fh^{k}g & fh^{k-1}g & -fh^{k-2}g & fh^{k-3}g & \cdots & fh^3g & -fh^2g & fhg & 1-fg
\end{pmatrix},$$

y la multiplicaremos por la matriz de $(k+1)\times(k)$

$$\begin{pmatrix}
d' & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
1-fg & -d' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-fhg & fg & d' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-fh^2g & fhg & 1-fg & -d' & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-fh^{k-5}g & fh^{k-6}g & -fh^{k-7}g & fh^{k-8}g & \cdots & d' & 0 & 0 & 0\\
-fh^{k-4}g & fh^{k-5}g & -fh^{k-6}g & fh^{k-7}g & \cdots & 1-fg & -d' & 0 & 0\\
-fh^{k-3}g & fh^{k-4}g & -fh^{k-5}g & fh^{k-6}g & \cdots & -fhg & fg & d' & 0\\
-fh^{k-2}g & fh^{k-3}g & -fh^{k-4}g & fh^{k-5}g & \cdots & -fh^2g & fhg & 1-fg & -d'\\
-fh^{k-1}g & fh^{k-2}g & -fh^{k-3}g & fh^{k-4}g & \cdots & -fh^3g & fh^2g & -fhg & fg
\end{pmatrix}.$$

Analizemos las entradas de la representación matricial de la composición

(1,1) : $d'\circ d'=0$, por definición.

$(1,l)$: 0 para $l=2,\ldots,k+1$.

(2,1) : $d'-fgd'-d'+d'fg=0$ pues fg es morfismo de cadenas.

(2,2) : $d'\circ d'=0$.

$(2,l)$: 0 para $l=3,\ldots,k+1$.

Veamos el caso ahora para (j,i), donde $j = 3,\ldots,k+1$ y $i = 1,\ldots,j-1$ Para (j,i), con j par y i par, tenemos que $j-i-1$ es impar.

$$j^T = \begin{pmatrix} -fh^{j-2}g \\ fh^{j-3}g \\ -fh^{j-4}g \\ fh^{j-5}g \\ \vdots \\ fhg \\ 1-fg \\ -d' \\ 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{k+1-j} \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ -d' \\ fg \\ fhg \\ fh^2g \\ \vdots \\ fh^{k-i-2}g \\ fh^{k-i-1}g \\ fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Entonces $(j,i) : -fh^{j-i-1}gd' - fh^{j-i-2}gfg + fh^{j-i-3}gfhg - fh^{j-i-4}gfh^2g + \cdots + fhgfh^{j-i-3}g + fh^{j-i-2}g - fgfh^{j-i-2}g - d'fh^{j-i-1}g$ y por el Lema 3.2.2 $(j,1) : 0$

Para (j,i), con j par y i impar, tenemos que $j-i-1$ es par.

$$j^T = \begin{pmatrix} -fh^{j-2}g \\ fh^{j-3}g \\ -fh^{j-4}g \\ fh^{j-5}g \\ \vdots \\ fhg \\ 1-fg \\ -d' \\ 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{k+1-j} \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ d' \\ 1-fg \\ -fhg \\ -fh^2g \\ \vdots \\ -fh^{k-i-2}g \\ -fh^{k-i-1}g \\ -fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Entonces $(j,i) : -fh^{j-i-1}gd' + fh^{j-i-2}g - fh^{j-i-2}gfg + fh^{j-i-3}gfhg - fh^{j-i-4}gfh^2g + \cdots - fhgfh^{j-i-3}g - fh^{j-i-2}g + fgfh^{j-i-2}g + d'fh^{j-i-1}g$ y de nuevo por el Lema 3.2.2, $(j,i) : 0$

Para (j,i), con j impar y i par, tenemos que $j-i-1$ es par.

$$j^T = \begin{pmatrix} -fh^{j-2}g \\ fh^{j-3}g \\ -fh^{j-4}g \\ fh^{j-5}g \\ \vdots \\ -fhg \\ fg \\ d' \\ 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{k+1-j} \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ -d' \\ fg \\ fhg \\ fh^2g \\ \vdots \\ fh^{k-i-2}g \\ fh^{k-i-1}g \\ fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Entonces $(j,i) = -fh^{j-i-1}gd' - fh^{j-i-2}gfg + fh^{j-i-3}gfhg - fh^{j-i-4}gfh^2g + \cdots - fhgfh^{j-i-3}g + fgfh^{j-i-2}g + d'fh^{j-i-1}g$ y por el Lema 3.2.2, obtenemos que $(j,i):0$. Para (j,i), con j impar y i impar, tenemos que $j-i-1$ es impar.

$$j^T = \begin{pmatrix} -fh^{j-2}g \\ fh^{j-3}g \\ -fh^{j-4}g \\ fh^{j-5}g \\ \vdots \\ -fhg \\ fg \\ d' \\ 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{k+1-j} \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ d' \\ 1-fg \\ -fhg \\ -fh^2g \\ \vdots \\ -fh^{k-i-2}g \\ -fh^{k-i-1}g \\ -fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Entonces $(j,i) = -fh^{j-i-1}gd' + fh^{j-i-2}g - fh^{j-i-2}gfg + fh^{j-i-3}gfhg - fh^{j-i-4}gfh^2g + \cdots + fhgfh^{j-i-3}g - fgfh^{j-i-2}g - d'fh^{j-i-1}g$ y usando el Lema 3.2.2, vemos que $(j,i) = 0$. Falta verificar cuando $i = j$, $j = 3,\ldots,k$, cuando $i > j$ con $j = 3,\ldots,k-1$ y el último renglón. Para el primero, notemos que $(j,i) = d' \circ d' = 0$ por definición, para el segundo vemos directamente que es 0.

Para $(k+2,i)$, $i=1,\ldots,k$, consideramos los casos i par y i impar, si i es impar entonces

$$(k+2)^T = \begin{pmatrix} -fh^kg \\ fh^{k-1}g \\ -fh^{k-2}g \\ fh^{k-3}g \\ \vdots \\ -fh^2g \\ fhg \\ 1-fg \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ d' \\ 1-fg \\ -fhg \\ -fh^2g \\ \vdots \\ -fh^{k-i-2}g \\ -fh^{k-i-1}g \\ -fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Por lo que $(k+2,i)$ es precisamente $-fh^{k-i+1}gd' + fh^{k-i}g - fh^{k-i}gfg + fh^{k-i-1}gfhg - fh^{k-i-2}gfh^2g + \cdots + fh^2gfh^{k-i-2}g - fhgfh^{k-i-1}g - fh^{k-i}g + fgfh^{k-i}g$, que al reducirla mediante el Lema 3.2.3, resulta ser $-fd_{n+1}h^{k-i+1}g = -d'_{n+1}f_{n+1}h^{k-i+1}g = 0$, pues $f_{n+1} = 0$.

Si i es par entonces

$$(k+2)^T = \begin{pmatrix} -fh^kg \\ fh^{k-1}g \\ -fh^{k-2}g \\ fh^{k-3}g \\ \vdots \\ -fh^2g \\ fhg \\ 1-fg \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ -d' \\ fg \\ fhg \\ fh^2g \\ \vdots \\ fh^{k-i-2}g \\ fh^{k-i-1}g \\ fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Por lo que $(k+2,i)$ está dada por $-fh^{k-i+1}gd' - fh^{k-i}gfg + fh^{k-i-1}gfhg - fh^{k-i-2}gfh^2g + \cdots - fh^2gfh^{k-i-2}g + fhgfh^{k-i-1}g + fh^{k-i}g - fgfh^{k-i}g$ y por el Lema 3.2.3, es precisamente $fd_{n+1}h^{k-i+1}g = 0$.

Para el caso donde k es impar, solo hay que verificar el último renglón, el resto se demuestra exactamente igual que en el caso donde k es par.
Para $(k+2,i)$, con i impar tenemos

$$(k+2)^T = \begin{pmatrix} -fh^kg \\ fh^{k-1}g \\ -fh^{k-2}g \\ fh^{k-3}g \\ \vdots \\ fh^2g \\ -fhg \\ fg \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ d' \\ 1-fg \\ -fhg \\ -fh^2g \\ \vdots \\ -fh^{k-i-2}g \\ -fh^{k-i-1}g \\ -fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Y así $(k+2,i)$ es $-fh^{k-i+1}gd' + fh^{k-i}g - fh^{k-i}gfg + fh^{k-i-1}gfhg - fh^{k-i-2}gfh^2g + \cdots - fh^2gfh^{k-i-2}g + fhgfh^{k-i-1}g - fgfh^{k-i}g$.
Usamos el Lema 3.2.3 para obtener que $(k+2,i)$ es $fd_{n+1}h^{k-i+1}g = 0$.
Para i par tenemos

$$(k+2)^T = \begin{pmatrix} -fh^kg \\ fh^{k-1}g \\ -fh^{k-2}g \\ fh^{k-3}g \\ \vdots \\ fh^2g \\ -fhg \\ fg \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{i-1} \\ -d' \\ fg \\ fhg \\ fh^2g \\ \vdots \\ fh^{k-i-2}g \\ fh^{k-i-1}g \\ fh^{k-i}g \end{pmatrix}.$$

Por lo que $(k+2,i)$ está dado por $-fh^{k-i+1}gd' - fh^{k-i}gfg + fh^{k-i-1}gfhg - fh^{k-i-2}gfh^2g + \cdots + fh^2gfh^{k-i-2}g - fhgfh^{k-i-1}g + fgfh^{k-i}g$, el cual al reducirlo con el Lema 3.2.3 resulta

$-fd_{n+1}h^{k-i+1}g = 0$.
Veamos ahora que $(1-\rho)\circ\partial_1 = 0$, notemos que si quitamos la primera columna de ρ obtenemos ∂_1. Como ρ es idempotente, el producto $\rho\partial_1$ resulta ser ∂_1, así $(1-\rho)\partial_1 = \partial_1 - \rho\partial_1 = \partial_1 - \partial_1 = 0$.
Para el resto de las composiciones utilizamos que ρ es idempotente y por lo tanto $\rho(1-\rho) = (1-\rho)\rho = \rho - \rho^2 = 0$.

■

Proposición 3.2.6. *Sean $(C_\bullet, d)$ y $(C'_\bullet, \partial)$ complejos de cadenas definidos como en las proposiciones anteriores, entonces $(C_\bullet, d)$ y $(C'_\bullet, \partial)$ son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Sean $\varphi : C \longrightarrow C'$ y $\psi : C' \longrightarrow C$ morfismos de cadenas con representaciones

$$\varphi_k : C_k \longrightarrow C'_k = \begin{pmatrix} f \\ fh \\ fh^2 \\ fh^3 \\ \vdots \\ fh^{k-3} \\ fh^{k-2} \\ fh^{k-1} \end{pmatrix}, \psi_k^T : C'_k \longrightarrow C_k = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La composición $\psi_k \circ \varphi_k$ está dada por el producto

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ fh \\ fh^2 \\ fh^3 \\ \vdots \\ fh^{k-3} \\ fh^{k-2} \\ fh^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gf \end{pmatrix},$$

entonces $\psi \circ \varphi = gf$ y por hipótesis, $gf \simeq 1_C$.
Ahora, definimos $\pi_k : C'_k \longrightarrow C'_{k+1}$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

veamos que π_k es tal que $\pi_{k-1} \circ \partial_k + \partial_{k+1} \circ \pi_k = 1_{C'_k} - \varphi_k \circ \psi_k$.
Realizando el producto $\pi_{k-1}\partial_k$, obtenemos la matriz ∂_k sin el primer renglón, con el producto $\partial_{k+1}\pi_k$ obtenemos la matriz ∂_k a la que se le agrego una columna de 0 por la izquierda, por lo que $\pi_{k-1} \circ \partial_k + \partial_{k+1} \circ \pi_k$ viene representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1-fg & -d & 0 & 0 & \cdots \\ -fhg & fg & d & 0 & \cdots \\ -fh^2g & fhg & 1-fg & -d & \cdots \\ -fh^3g & fh^2g & -fhg & fg & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-fg & -d & 0 & \cdots \\ 0 & -fhg & fg & d & \cdots \\ 0 & -fh^2g & fhg & 1-fg & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-fg & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -fhg & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -fh^2g & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -fh^3g & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, $\varphi_k \circ \psi_k$ está representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ fhg & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ fh^2g & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ fh^3g & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

Por lo que $1_{C'_k} - \varphi_k \circ \psi_k$ viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1-fg & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -fhg & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -fh^2g & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -fh^3g & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi \simeq 1_{C'}$

■

Lema 3.2.7. *Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas dominado por $(D_\bullet, f, g)$, entonces $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas $(C'_\bullet, \partial)$ de módulos libres finitamente generados*

$$0 \to C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C'_1 \xrightarrow{\partial_1} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} C'_0 \xrightarrow{\rho} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} \cdots$$

Demostración. Sea $\rho : \oplus_{i=0}^n D_i \longrightarrow \oplus_{i=0}^n D_i$ representada por

$$\begin{pmatrix} fg & d' & 0 & 0 & \cdots \\ fhg & 1-fg & -d' & 0 & \cdots \\ fh^2g & -fhg & fg & d' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

la cual es idempotente por la Proposición 3.2.4.
Definimos ahora $C'_r = D_r \oplus D_{r+1} \oplus D_{r+2} \oplus \cdots \oplus D_{n-1} \oplus D_n$ y $\partial_i : C'_i \longrightarrow C'_{i-1}$ con representación matricial

$$\begin{pmatrix} d' & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-fg & -d' & 0 & 0 & \cdots \\ -fhg & fg & d' & 0 & \cdots \\ -fh^2g & fhg & 1-fg & -d' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

por la Proposición 3.2.5 obtenemos el complejo de cadenas

$$0 \to C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C'_1 \xrightarrow{\partial_1} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} C'_0 \xrightarrow{\rho} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} \cdots$$

Como $(D_\bullet, d')$ está conformada por R-módulos libres finitamente generados, $(C'_\bullet, \partial)$ tambien lo está, y por la Proposición 3.2.6, $(C_\bullet, d)$ y $(C'_\bullet, \partial)$ son homotópicamente equivalentes.

$\blacksquare$

Proposición 3.2.8. *El complejo de cadenas $(C'_\bullet, \partial)$ dado por*

$$0 \to C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C'_1 \xrightarrow{\partial_1} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} C'_0 \xrightarrow{\rho} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} \cdots$$

es homotópicamente equivalente al complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos $(C''_\bullet, \partial')$ dado por

$$0 \to C'_n \xrightarrow{\partial_n} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C'_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{Ker}(1-\rho) \to 0.$$

Demostración. Notemos que $(C''_\bullet, \partial'')$ está conformado por módulos proyectivos finitamente generados, pues C'_k es libre y finitamente generado para todo k y $\mathrm{Ker}(1-\rho)$ es proyectivo ya que es sumando del módulo libre $C'_0 = \mathrm{Im}(1-\rho) \oplus \mathrm{Ker}(1-\rho)$ pues $1-\rho$ es idempotente. Luego, $(C''_\bullet, d'')$ es complejo de cadenas pues $(C'_\bullet, \partial')$ lo es.
Ahora tomemos el complejo de cadenas $(D'_\bullet, h)$

$$0 \to \mathrm{Im}(1-\rho) \xrightarrow{1-\rho} C'_0 \xrightarrow{\rho} C'_0 \xrightarrow{1-\rho} C'_0 \xrightarrow{\rho} \cdots$$

y notemos que $(C''_\bullet, \partial') \oplus (D'_\bullet, h) = (C'_\bullet, \partial)$, por el Teorema 2.1.4, solo hay que demostrar que $(D'_\bullet, h)$ es contraíble para terminar la demostración.
Sea $s_n : D'_n \longrightarrow D'_{n+1}$ con $n \leq 0$, tal que

$$s_n = \begin{cases} \rho & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1-\rho & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Para $n = 0$, queremos ver que

$$s_{-1}h_0 + h_1 s_0 = 1_{\mathrm{Im}(1-\rho)},$$

donde $s_{-1} = 1-\rho$, $s_0 = \rho$ y $h_1 = 1-\rho$, $h_0 = \rho$. Como $\mathrm{Im}(1-\rho) \subset \mathrm{Ker}(\rho)$, entonces $h_1 s_0 = 0$, por lo que sólo hay que ver que $(1-\rho)(1-\rho) = 1_{\mathrm{Im}(1-\rho)}$ lo cual es claro pues $(1-\rho)$ es idempotente.

Para $n < 0$ queremos ver que

$$(\rho)(\rho) + (1-\rho)(1-\rho) = 1_{C'_0},$$

al ser ρ y $1-\rho$ indempotentes tenemos que $(\rho)(\rho) + (1-\rho)(1-\rho) = \rho + 1 - \rho = 1$, por lo tanto $(D'_\bullet, h)$ es contraible y así $(C'_\bullet, \partial)$ es homotópicamente equivalente a $(C''_\bullet, \partial')$.

■

Corolario 3.2.9. *Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas finitamente dominado por $(D_\bullet, f, g)$, entonces $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos.*

Teorema 3.2.10. ***(Obstrucción de finitud de Wall)***
Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas finitamente dominado por $(D_\bullet, f, g)$, tenemos que $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos libres si y sólo si $\widetilde{\chi}(C) = 0 \in \widetilde{K_0}(R)$.

Demostración. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de cadenas finitamente dominado por $(D_\bullet, f, g)$, por el Colorario 3.2.9, $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos proyectivos y por la Proposición 3.1.2 , $\chi(C)$ está bien definido.
Ahora, por el Lema 3.2.1 tenemos que al ser $(C_\bullet, d)$ homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos proyectivos, $(C_\bullet, d)$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos libres si y sólo si $\widetilde{\chi}(C) = 0 \in \widetilde{K_0}(R)$.

■

4 | Aspectos topológicos

En este capítulo todos nuestros espacios los consideramos arco-conexos a menos que se mencione lo contrario, de esta manera podemos definir caminos entre cualesquiera puntos del espacio.

4.1 Grupo fundamental

En está sección definiremos algunos conceptos muy importantes en la topología algebraica, el de homotopía y grupo fundamental de un espacio topológico. Puede encontrar más sobre este tema en [Hat02], [Cis01] y [Cha05]

4.1.1 Homotopías

Definición 4.1.1. Sean X y Y espacios topológicos. Definimos como homotopía a una familia de funciones $\{f_t : X \longrightarrow Y\}_{t\in[0,1]}$ tal que la función asociada $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por $H(x,t) = f_t(x)$ es continua.

Decimos que dos funciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ son homotópicas si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$. Denotamos que f_0 y f_1 son homotópicas como $f_0 \simeq f_1$.

Definición 4.1.2. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una función $g : Y \longrightarrow X$ tal que $fg \simeq Id_Y$ y $gf \simeq Id_X$. Se dice que los espacios X y Y son homotópicamente equivalentes o tienen el mismo tipo de homotopía y se denota como $X \simeq Y$.

Definición 4.1.3. Dos funciones $f_0, f_1 : X \to Y$ son homotópicas relativamente a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \to Y$ entre f_0 y f_1 tal que

$$F(x,t) = f_0(x) = f_1(x),$$

para toda $x \in A$ y todo $t \in [0,1]$. Denotamos que f_0 y f_1 son homotópicas relativamente por $f_0 \simeq_{\text{rel A}} f_1$.

Definición 4.1.4. Sean $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos en X tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Se dice que son equivalentes si son homotópicos relativamente a $\{0,1\}$. Escribimos, $\alpha \sim \beta$.

Ésto es, los caminos $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

tal que

$$F(t,0) = \alpha(t),\ F(t,1) = \beta(t) \text{ y}$$

$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0),\ F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1),$$

para todo $t \in [0,1]$ y para todo $s \in [0,1]$.

Definición 4.1.5. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ fijo, definimos un lazo f como una trayectoria tal que el punto inicial coincide con el punto final, i.e. $f : [0,1] \longrightarrow X$ es continua y $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, denotamos por $\mathcal{L}(x_0)$ al conjunto de los lazos en X cuyo punto inicial o base es x_0.

Proposición 4.1.1. *La relación de homotopía por caminos define una relación de equivalencia en $\mathcal{L}(x_0)$, $x_0 \in X$.*

Demostración.

1. Reflexiva, $f \sim f$ mediante la homotopía $f_t = f$ para todo $t \in [0,1]$.

2. Simétrica, supongamos que $f \sim g$ mediante f_t, entonces $g \sim f$ mediante la homotopía inversa f_{1-t}.

3. Transitiva, supongamos que $f \sim g$ mediante f_t y $g \sim h$ mediante g_t. Definimos

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g_{2t-1} & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

así $f \sim h$ mediante h_t, queremos ver que $H(x,t) = h_t(x)$ es continua. Recordemos que una función definida en la unión de dos conjuntos cerrados es continua si es continua al restringirla en cada uno de los conjuntos cerrados y como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde F y G son las funciones asociadas de f_t y g_t respectivamente. Ahora H es continua por que F y G coinciden en $t = \frac{1}{2}$.

■

Dadas dos trayectorias $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(1) = g(0)$ definimos la trayectoria producto $f \cdot g$ mediante

$$f \cdot g = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observación 4.1.1. Este producto respeta las clases de homotopías, es decir si $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$ entonces $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$.

Demostración. Supongamos que $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$ mediante f_t y g_t respectivamente, que $f_0(1) = g_0(0)$ y $f_1(1) = g_1(0)$. Así $f_t \cdot g_t$ define una homotopía $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$.

■

Definición 4.1.6. Sea X un espacio topológico, decimos que X es contraíble si es homotópicamente equivalente a un punto.

4.1.2 Grupo fundamental

Definición 4.1.7. Definimos $\pi_1(X, x_0)$ como el conjunto de las clases de homotopías $[f]$ de lazos con punto base x_0

Proposición 4.1.2. *$\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con respecto al producto $[f][g] = [f \cdot g]$.*

Demostración. Tenemos, por construcción, que la asignación del producto $[f][g] = [f \cdot g]$, es correcta. Además, por la observación anterior, tenemos que está bien definida. Ahora, sean $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$[f]([g][h]) = [f(gh)],$$

y

$$([f][g])[h] = [(fg)h].$$

Donde, por definición del producto de lazos con punto base x_0,

$$f(gh) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$(fg)h = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la siguiente homotopía,

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ g(4t-s-1) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ h(1-\frac{4(t-1)}{s-2}) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$H(t,0) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$H(t,1) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$H(0,s) = (fg)h(0) = f(gh)(0),$$

$$H(1,s) = (fg)h(1) = f(gh)(1).$$

De ésto, $f(gh)$ y $(fg)h$ son homotópicamente equivalentes, lo que implica que

$$[f(gh)] = [(fg)h],$$

por lo tanto, la operación es asociativa.

El elemento neutro de dicha operación es el lazo

$$\begin{array}{rccc} 1_{\pi_1(X,x_0)}: & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & t & \mapsto & x_0 \end{array}$$

Sea $[\widetilde{f}] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$[\widetilde{f}]1_{\pi_1(X,x_0)} = \begin{cases} \widetilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$1_{\pi_1(X,x_0)}[\widetilde{f}] = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{f}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la homotopía

$$\widetilde{H}(t,s) = \begin{cases} \widetilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\widetilde{H}(t,0) = \begin{cases} \widetilde{f}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ x_0 & \text{si } 1 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\widetilde{H}(t,1) = \begin{cases} \widetilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$\widetilde{H}(0,s) = \widetilde{f}(0) = (\widetilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)})(0),$$

$$\widetilde{H}(1,s) = \widetilde{f}(1) = (\widetilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)})(1).$$

De ésto, $[\widetilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\widetilde{f}]$. Luego, consideremos la homotopía

$$G(t,s) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ \widetilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$G(t,0) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0, \\ \widetilde{f}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$G(t,1) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{f}(2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$G(0,s) = \widetilde{f}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)}\widetilde{f})(0),$$

$$G(1,s) = \widetilde{f}(1) = (1_{\pi_1(X,x_0)}\widetilde{f})(1).$$

De ésto, $[1_{\pi_1(X,x_0)}\widetilde{f}] = [\widetilde{f}]$. Así,

$$[1_{\pi_1(X,x_0)}\widetilde{f}] = [\widetilde{f}] = [\widetilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}].$$

Luego, sea $\widetilde{g} \in \pi_1(X,x_0)$, definimos su elemento inverso $\widetilde{g}$ como $\widetilde{g}^{-1}(t) = \widetilde{g}(1-t)$. Entonces,

$$\widetilde{g}\widetilde{g}^{-1} = \begin{cases} \widetilde{g}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$\widetilde{g}^{-1}\widetilde{g} = \begin{cases} \widetilde{g}(1-2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ahora, consideremos la siguiente homotopía

$$F(t,s) = \begin{cases} \widetilde{g}(2ts) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(2s(1-t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$F(t,0) = \begin{cases} \widetilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \widetilde{g}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \widetilde{g}\widetilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \widetilde{g}\widetilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\widetilde{g}\widetilde{g}^{-1}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$.

Ahora, consideremos la homotopía

$$\widetilde{F}(t,s) = \begin{cases} \widetilde{g}(s(1-2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(s(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\widetilde{F}(t,0) = \begin{cases} \widetilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\widetilde{F}(t,1) = \begin{cases} \widetilde{g}(1-2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \widetilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \widetilde{g}^{-1}\widetilde{g}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \widetilde{g}^{-1}\widetilde{g}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\widetilde{g}^{-1}\widetilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$. Así,

$$[\widetilde{g}^{-1}\widetilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\widetilde{g}\widetilde{g}^{-1}].$$

Por lo tanto, $\pi_1(X,x_0)$ es un grupo.

■

Definición 4.1.8. Sea X un espacio topológico, decimos que X es simplemente conexo si $\pi_1(X,x_0) = 0$.

Proposición 4.1.3. *Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función tal que $\varphi(x_0) = y_0$, entonces φ induce un homomorfismo $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ definido mediante $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$, $[f] \in \pi_1(X,x_0)$.*

Demostración. Veamos primero que φ_* está bien definido, sea f_t una homotopía de lazos basados en x_0 de f_0 a f_1, entonces $\varphi \circ f_t$ es una homotopía de lazos basados en y_0, por lo que

$$\varphi_*[f_0] = [\varphi f_0] = [\varphi_1] = \varphi[_1]$$

.

Luego, como $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$, φ_* es un homomorfismo.

■

Proposición 4.1.4. *Sean $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ tales que $\varphi(x_0) = y_0$ y $\psi(y_0) = z_0$, entonces*

1. $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$.
2. $(Id_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.

Demostración. El primer inciso se sigue inmediatamente del hecho que la composición de funciones es asociativa, $(\psi\varphi)f = \psi(\varphi f)$. Y por la definición de $(Id_X)_*$, el segundo inciso es claro.

■

De manera similar podemos definir el n-ésimo grupo de homotopía, denotamos el cubo n-dimensional por I^n y su frontera por ∂I^n.

Definición 4.1.9. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$, definimos $\pi_n(X, x_0)$ como el conjunto de las clases de homotopía de funciones $f : I^n \longrightarrow X$ donde las homotopías f_t son tales que $f_t(\partial I^n) = x_0$ para todo t.

Generalizando el producto definido para $\pi_1(X, x_0)$ definimos el producto en $\pi_n(X, x_0)$ mediante

$$(f \cdot g)(s_1, s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

Teorema 4.1.5. *Sea X un espacio topológico, entonces $\pi_n(X, x_0)$ es grupo.*

Para una demostración detallada del teorema consúltese [Hat02, 340].

4.1.3 Retractos

Las siguientes definiciones son utilizadas para comparar el tipo de homotopía entre un espacio topológico X y un subespacio A.

Definición 4.1.10. Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X y sea $r : X \longrightarrow A$ una función continua, definimos r como retracción si

$$r \circ i = Id_A$$

donde i denota la inclusión de A en X. A es llamado un retracto de X.

Definición 4.1.11. Un subespacio A de X es llamado retracto por deformación de X si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq Id_X$. Es llamado retracto de deformación fuerte si $i \circ r \simeq_{\text{rel A}} Id_X$.

Proposición 4.1.6. *Si A es un retracto de deformación de X entonces A y X son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Sea A un retracto de deformación de X, entonces existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq Id_X$, es decir, existe una función $r : X \longrightarrow A$ continua tal que

$$r \circ i = Id_A \quad \text{y} \quad i \circ r \simeq Id_X.$$

En particular $r \circ i \simeq Id_A$ y por lo tanto A y X son homotópicamente equivalentes.

■

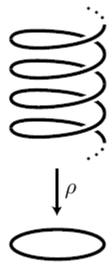
4.2 Espacios cubrientes

En esta sección veremos una definición importante en la topología algebraica, el de espacio cubrientes, nos interesa principalmente la definición de cubriente universal y la acción del grupo fundamental sobre este espacio.

Definición 4.2.1. Sea X un espacio topológico, definimos un espacio cubriente de X como un espacio $\widetilde{X}$ junto con una función continua $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow X$ que satisfacen, para cada $x \in X$ existe una vecindad $U \subset X$ de x tal que $\rho^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos $V \subset \widetilde{X}$ tales que $\rho_{|_V} : V \longrightarrow U$ es homeomorfismo para cada V. A la vecindad U se le llama vecindad regular.

Veamos ahora un ejemplo clásico de un cubriente para un espacio topológico.

Ejemplo 4.1. Sea $X = S^1$, $\widetilde{X} = \mathbb{R}$ y $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ tal que $\rho(t) = exp(2\pi it)$. Podemos pensar a $\mathbb{R}$ como la hélice en $\mathbb{R}^3$ y ρ como la proyección de esta en $\mathbb{R}^2$, como en el siguiente dibujo



Una propiedad importante de los cubrientes es la de los levantamientos que nos permite definir una función en el cubriente apartir de una función en el espacio

Definición 4.2.2. Sea $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente y $f : Y \longrightarrow X$ una función continua, definimos un levantamiento $\widetilde{f}$ de f como una función continua $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que $f = \rho \circ \widetilde{f}$. Ilustremonos con un diagrama

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "\rho"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Una demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [Hat02, 61]

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio topológico, $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente y $f : Y \longrightarrow X$ una función continua, con Y localmente arco-conexo. Entonces existe $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ si y sólo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \rho_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$.*

Proposición 4.2.2. *Sea X un espacio topológico, $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente y $f : Y \longrightarrow X$ una función continua. Si $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ levantamientos de f coinciden en un punto de Y, entonces $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}$ coinciden en todo Y.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y U una vecindad regular de $f(y) \in X$, por lo que $\rho^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos que son mandados mediante homeomorfismos a U. Sean $\widetilde{U_1}$ y $\widetilde{U_2}$ los abiertos que contienen a $\widetilde{f_1}(y)$ y $\widetilde{f_2}$ respectivamente. Por la continuidad de $\widetilde{f_1}$y $\widetilde{f_2}$, existe una vecindad N de y que es mandada a $\widetilde{U_1}$ mediante $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{U_2}$ mediante $\widetilde{f_2}$. Si $\widetilde{f_1}(y) \neq \widetilde{f_2}(y)$ tenemos $\widetilde{U_1} \neq \widetilde{U_2}$, por lo que $\widetilde{U_1}$ y $\widetilde{U_2}$ son disjuntos y $\widetilde{f_1} \neq \widetilde{f_2}$ en N. Si $\widetilde{f_1}(y) = \widetilde{f_2}(y)$ resulta que $\widetilde{U_1} = \widetilde{U_2}$ y como ρ es inyectiva, pues es homeomorfismo, en $\widetilde{U_1} = \widetilde{U_2}$ y $\rho\widetilde{f_1} = \rho\widetilde{f_2}$ concluimos que $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$ en N. Por lo tanto el conjunto de puntos en los que $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{f_2}$ coinciden es cerrado, abierto y no vacío y como Y es conexo, el único conjunto cerrado, abierto y no vació es Y.

■

Definición 4.2.3. Definimos un isomorfismo $f : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$ entre cubrientes $(\widetilde{X_1}, \rho), (\widetilde{X_2}, \rho')$ como un homeomorfismo f tal que $\rho = \rho' f$. Esta condición significa que f preserva la estructura de cubriente, llevando $\rho^{-1}(x)$ a $\rho'^{-1}(x)$ para cada $x \in X$. Resulta que f^{-1} es también isomorfismo.

Teorema 4.2.3. *Sea X un espacio topológico y sean $(\widetilde{X_1}, \rho), (\widetilde{X_2}, \rho')$ cubrientes conexos y localmente arco-conexos. Sean x_1, x_2, x_0 puntos bases de $\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}, X$ respectivamente con $\rho(x_1) = \rho'(x_2) = x_0$. Entonces*

$$\rho_*(\pi_1(\widetilde{X_1}, x_1)) = \rho'_*(\pi_1(\widetilde{X_2}, x_2))$$

si y sólo si existe un isomorfismo $f : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$, i.e. $\rho = \rho' f$.

Demostración. Si existe isomorfismo $f : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$, tenemos las relaciones $\rho = \rho' f$ y $\rho f^{-1} = \rho'$ y como $f_* : \pi_1(\widetilde{X_1}, x_1) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{X_2}, x_2)$ es isomorfismo,tenemos que

$$\rho_*(\pi_1(\widetilde{X_1}, x_1)) = \rho'_*(\pi_1(\widetilde{X_2}, x_2)).$$

Supongamos ahora que $\rho_*(\pi_1(\widetilde{X_1}, x_1)) = \rho'_*(\pi_1(\widetilde{X_2}, x_2))$, por el Teorema 4.2.1, existen los levantamientos $\widetilde{\rho}$ y $\widetilde{\rho}'$ tales que $\rho = \rho'\widetilde{\rho}$ y $\rho' = \rho\widetilde{\rho}'$. Sea $\varphi = \widetilde{\rho}'\widetilde{\rho} : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$, entonces

$$\rho\varphi = \rho(\widetilde{\rho}'\widetilde{\rho}) = (\rho\widetilde{\rho}')\widetilde{\rho} = \rho'\widetilde{\rho} = \rho$$

y como $\varphi(x_1) = x_1$, por la proposición 4.2.2, $\widetilde{\rho}'\widetilde{\rho} = \varphi = Id_{\widetilde{X_1}}$. Un argumento similiar nos lleva a que $\widetilde{\rho}\widetilde{\rho}' = \varphi' = Id_{\widetilde{X_2}}$.

■

Definición 4.2.4. Sea X un espacio topológico, decimos que X es semilocalmente simplemente conexo si para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que la función inducida por la inclusión $i_* : \pi(U_x, x) \longrightarrow \pi(X, x)$ es trivial.

Para la definición de simplemente conexo véase 4.1.8

Definición 4.2.5. Sea X un espacio topológico y sea $\widetilde{X}$ un cubriente, decimos que $\widetilde{X}$ es un cubriente universal si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo.

El que X sea semilocalmente simplemente conexo es una condición necesaria para la existencia del cubriente universal $\widetilde{X}$, la demostración de esto y del teorema siguiente pueden encontrarse en [Hat02, 63].

Teorema 4.2.4. *Sea X un espacio topológico, si X es localmente arco-conexo y semilocalemente simplemente conexo, entonces X tiene un cubriente simplemente conexo.*

Proposición 4.2.5. *Sea X un espacio topológico localmente arco-conexo, $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente universal de X y $(\widetilde{X_1}, \varphi)$ un cubriente arco-conexo de X, entonces $\widetilde{X}$ es cubriente de $\widetilde{X_1}$.*

Demostración. Como $\widetilde{X}$ es cubriente universal, es simplemente conexo, por lo que $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) = 0 \subset \rho_*(\pi_1(\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1}))$, entonces $\widetilde{\rho} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X_1}$ existe. Luego como $\rho = \varphi \circ \widetilde{\rho}$, $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ es cubriente de $\widetilde{X_1}$.

■

Proposición 4.2.6. *Sea X un espacio topológico y $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente arco-conexo, cambiar el punto base x_0 en $\rho^{-1}(x_0)$ corresponde a cambiar $\rho_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ por un conjugado en $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Sea $\widetilde{x_1}$ otro punto base de $\rho^{-1}(x_0)$ y sea $\widetilde{\gamma}$ un camino de $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x_1}$. Entonces $\widetilde{\gamma}$ se proyecta a un lazo γ en X representando a un elemento $g \in \pi_1(X, x_0)$. Sea $H_i = \rho_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_i}))$ con $i = 0, 1$. Sea $\widetilde{f}$ un lazo en $\widetilde{x_0}$, entonces $\widetilde{\gamma}^{-1} \cdot \widetilde{f} \cdot \widetilde{\gamma}$ es un lazo en $\widetilde{x_1}$, por lo que $g^{-1}H_0 g \subset H_1$, de manera similar tenemos que $gH_1g^{-1} \subset H_0$ y así $H_1 \subset g^{-1}H_0g$ y así $g^{-1}H_0g = H_1$.
Ahora, para cambiar H_1 a un subgrupo conjugado $g^{-1}H_0g$, tomamos un lazo γ representando a g, levantamos a un camino $\widetilde{\gamma}$ que comienza en $\widetilde{x_0}$ y definimos $\widetilde{x_1} = \widetilde{\gamma}(1)$. El argumento anterior muestra que tenemos la relación $g^{-1}H_0g = H_1$.

■

4.2.1 Transformaciones de cubrientes

Definición 4.2.6. Sea X un espacio topológico y sea $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente, denotamos el conjunto de los isomorfismos $g : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ como $G(\widetilde{X})$, el cual tiene estructura de grupo con la composición de funciones, a este grupo lo llamamos el grupo de transformaciones cubrientes.

Definición 4.2.7. Sea X un espacio topológico y sea $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente, decimos que el cubriente es normal si para cada $x \in X$ y cada par de levantamientos $\widetilde{x}, \widetilde{x}'$ de $x \in X$ existe una $\tau \in G(\widetilde{X})$ tal que $\tau(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$.

Teorema 4.2.7. *Sea X un espacio topológico localmente arco-conexo y sea $(\widetilde{X}, \rho)$ un cubriente arco-conexo. Denotemos a $\rho_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) \subset \pi_1(X, x_0)$ por H, entonces*

1. *El cubriente es normal si y sólo si H es un subrgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.*

2. *El grupo $G(\widetilde{X})$ es isomorfo a $N(H)/H$, con $N(H)$ el normalizador de H en $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Vimos ya que cambiar el punto base $\widetilde{x_0} \in \rho^{-1}(x_0)$ por $\widetilde{x_1} \in \rho^{-1}(x_0)$ corresponde precisamente a conjugar H por un elemento $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ donde γ se levanta a un camino $\widetilde{\gamma}$ de $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x_1}$. Por lo que $[\gamma] \in N(H)$ si y sólo si $\rho_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_0)) = \rho_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_1))$, lo que es equivalente a que exista $\tau \in G(\widetilde{X})$ tal que $\tau(\widetilde{x_0}) = \widetilde{x_1}$. Por lo tanto, el cubriente es normal si y sólo si $N(H) = \pi_1(X, x_0)$, es decir, $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$.
Definimos $\varphi : N(H) \longrightarrow G(\widetilde{X})$ tal que $\varphi[\gamma] = \tau$, con τ que lleva $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x_1}$ como en el párrafo anterior (donde $\widetilde{\gamma}$ es un levantamiento de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x_0}$ y $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{x_1}$). Veamos que φ es homomorfismo, sea γ' un lazo de x_0 con su respectiva imagen τ' que va de $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x_1}'$. Entonces $\gamma \cdot \gamma'$ se levanta a $\widetilde{\gamma} \cdot (\tau(\widetilde{\gamma}'))$, el cual es un camino de $\widetilde{x_0}$ a $\tau(\widetilde{x_1}') = \tau\tau'(\widetilde{x_0})$. Por lo que $\tau\tau'$ es la transformacion correspondiente a $[\gamma][\gamma']$.
El primer párrafo nos muestra que φ es sobreyectiva, luego $\mathrm{Ker}(\varphi)$ consiste de las clases $[\gamma]$ que son levantados a lazos en $\widetilde{X}$, que es precisamente H, por lo que tenemos una función sobreyectiva de $N(H)$ a $G(\widetilde{X})$ y $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$ y por el Teorema 1.1.6, $G(\widetilde{X})$ es isomorfo a $N(H)/H$.

■

Corolario 4.2.8. *Si $\widetilde{X}$ es un cubriente normal, entonces $G(\widetilde{X})$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0)/H$. Si $\widetilde{X}$ es un cubriente universal, $G(\widetilde{X})$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$.*

El grupo de las transformaciones de cubrientes es un caso particular de las acciones de grupo sobre un espacio, o bien, dado un grupo G y un espacio X una acción de G en el espacio X es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow H(X)$, donde $H(X)$ es el conjunto de homeomorfismos de Y en si mismo, por lo que a cada $g \in G$ se le asocia un homeomorfismo $\rho(g) : X \longrightarrow X$. El que ρ sea un homomorfismo es pedir precisamente que $\rho(g_1)(\rho(g_2)(x)) = (\rho(g_1 g_2))(x)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.
Nos interesa particularmente la acción de grupo natural de $\pi_1(X, x_0)$ sobre el espacio $\widetilde{X}$ cuando $\widetilde{X}$ es un cubriente universal.

4.2.2 Complejos de cadenas singular

En esta sección utilzaremos nuevamente el concepto de complejo de cadenas, nos interesan en particular el complejo de cadenas singular de un espacio topológico X y el de su cubriente universal $\widetilde{X}$ en caso de existir.
Comenzamos definiendo los complejos simpliciales, a partir de estos definiremos un complejo de cadenas y sus respectivos grupos de homología para un espacio topológico.

Definición 4.2.8. Definimos el n-simplejo como el conjunto convexo más pequeño en un espacio Euclidiano $\mathbb{R}^m$ que contiene $n+1$ puntos $v_0, v_1, \ldots, v_n$ no contenidos en un hiperplano de dimensión menor que n, o bien el n-simplejo estándar definido por

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_i t_i = 1 \quad \text{y} \quad t_i \geq 0 \quad \text{para todo } i\},$$

donde v_i es el vector unitario a lo largo de los ejes coordenados.

Llamamos a los puntos v_i vértices, para efectos de la homología es importante el orden de los vértices para definir las aristas direccionadas que salen desde un vértice con indice menor a un vértice de índice mayor.

Definición 4.2.9. Definimos una cara de Δ^n como el simplejo generado por $n-1$ vértices que se obtienen al retirar uno de los vértices de Δ^n, la unión de las caras de Δ^n se define como la frontera de Δ^n y se denota por $\partial\Delta^n$, el simplejo abierto $\mathring{\Delta}^n$ como $\Delta^n - \partial\Delta^n$, el interior de Δ^n.

Conociendo la definición de un n-simplejo procedemos a definir un n-simplejo singular en un espacio topológico X, a partir del cual se definirán las n-cadenas para poder definir el complejo de cadenas singular.

Definición 4.2.10. Definimos un n-simplejo singular en un espacio topológico X como una función continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, denotamos al conjunto de n-simplejos singulares en X por $S_n(X)$.
Sea $C_n(X)$ el grupo abeliano libre con base $S_n(X)$, los elementos de $C_n(X)$ son llamados n-cadenas y son de la forma $\sum_i n_i\sigma_i$, una suma finita con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X$.

La palabra singular es usada para expresar que σ no necesita ser un buen encaje, que pueda tener singularidades de manera que su imagen en X no se vea como un simplejo.

Definición 4.2.11. Sean X un espacio topológico, definimos el homomorfismo frontera $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ mediante

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n],$$

donde $\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ denota la restricción de σ al $(n-1)$-simplejo generado por Δ^n al que se le quitó el i-ésimo vértice preservando el orden de estos. Notemos que $\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ puede verse como una función continua de Δ^{n-1} a X, es decir, un $(n-1)$-simplejo singular.

Teorema 4.2.9. *La composición*

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1}(X)$$

es cero, i.e. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Demostración. Tenemos que $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ y así

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = &\sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &+ \sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1} \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n].\end{aligned}$$

Los sumandos se cancelan pues al cambiar i por j en el segundo, obtenemos precisamente el negativo del primero.

■

Estamos listos para definir nuestro complejo de cadenas

Definición 4.2.12. Sea X un espacio topológico, definimos el complejo de cadenas singular $S_\bullet(X)$ como el complejo de cadenas de grupos abelianos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial n-1} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Si tenemos una función continua $f : X \longrightarrow Y$, esta induce un homomorfismo en complejos de cadenas $f_\# : S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$ donde para cada n la función $f_\# : C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$ está definida por la composición con los n-simplejos singulares $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ con f para obtener un n-simplejo singular $f\sigma : \Delta^n \longrightarrow Y$ y extender a $f_\#$ por linealidad. La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [Hat02, 111].

Teorema 4.2.10. *Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas, si f, g son homotópicas entonces $f_\#$ y $g_\#$ son homotoópicas como morfismos de cadenas.*

De manera similar a la definida en capítulos anteriores, pasamos a definir los grupos de Homología singular del espacio X.

Definición 4.2.13. Sea X un espacio topológico, definimos el n-ésimo grupo de homología singular de X mediante $H_n(X) = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$.

Nos interesa en particular el complejo de cadenas singular de un cubriente universal $\widetilde{X}$ de un espacio topológico X. Vimos ya que $\pi_1(X, x_0)$ tiene una acción natural en $\widetilde{X}$, dicha acción a su vez induce una acción natural sobre $S_\bullet(\widetilde{X})$.
A cada $g \in \pi_1(X, x_0)$ se le asigna un homeomorfismo $\rho(g) : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ y cada n-simplejo singular es una función $\sigma : \Delta^n \longrightarrow \widetilde{X}$, por lo que definimos un nuevo simplejo mediante la composición $\sigma\rho(g) : \Delta^n \longrightarrow \widetilde{X}$, de esta forma definimos una acción de $\pi_1(X, x_0)$ en $S_n(\widetilde{X})$ que extendemos linealemente a una acción en $C_n(\widetilde{X})$, es decir, para cada $g \in \pi_1(X, x_0)$, existe un n-simplejo $\sigma \in S_n(X)$, para cada n, de esta manera podemos notar que $C_n(\widetilde{X})$ puede verse precisamente como un $Z[\pi_1(X, x_0)]$ módulo que además resulta ser libre por el isomorfismo $G(\widetilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$ y porque la acción es libre, es decir, si $gx = x$ para todo $x \in X$, entonces $g = 1_G$, el único elemento que fija a todo x es la identidad.

4.2.3 Grupos de homología relativa

En ocasiones ignorar cierta información o estructura nos resulta en una teoría más sencilla y flexible, un ejemplo de esto es la arimetica de *mod* n, donde se ignoran los múltiplos de n y se enfoca en los residuos. Otro ejemplo de esto son los grupos de homología relativa, donde se ignoran las cadenas singulares de un subespacio del espacio dado.

Definición 4.2.14. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio, definimos $C_n(X, A)$ como el grupo cociente $C_n(X)/C_n(A)$, así las n-cadenas en A son triviales en $C_n(X, A)$.

El homomorfismo frontera $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ manda $C_n(A)$ en $C_{n-1}(A)$, por lo que induce en el cociente un homomorfismo frontera $\partial_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$ y la relación $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ se mantiene, así tenemos el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X,A) \longrightarrow \cdots$$

Definición 4.2.15. Definimos el n-ésimo grupo de homología relativa $H_n(X,A) = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$, un elemento en $H_n(X,A)$ es una n-cadena $\alpha \in C_n(X)$ tal que $\partial_n(\alpha) \in C_{n-1}(A)$, llamamos a α ciclo relativa.
Luego, $\alpha = 0 \in H_n(X,A)$ si y sólo si es frontera relativa, es decir, $\alpha = \partial\beta + \gamma$ para algún $\beta \in C_{n+1}(X)$ y $\gamma \in C_n(A)$.

Con esto podemos tener una idea intuitiva que $H_n(X,A)$ es la homología de X modulo A. Ahora, haciendo uso de el Teorema 2.2.2 tenemos la sucesión exacta

$$\cdots H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

4.3 Complejos CW

En esta sección definiremos una estructura topológica importante que nos permite en algunos casos calcular con mayor facilidad los grupos de homología del espacio.

4.3.1 Complejos CW

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en [Han]. Comencemos recordando algunas definiciones simples. Definimos el n-disco en $\mathbb{R}^n$:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \| x \| \leqslant 1\},$$

donde $\| \cdot \| \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ es la norma usual en $\mathbb{R}^n$.
El n-disco abierto denotado por $int(D^n)$ está definido por

$$int(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \| x \| < 1\}$$

y la frontera del n-disco es la $(n-1)$-esfera

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \| x \| = 1\}.$$

Notemos que el 0-disco D^0 coincide con $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ por definición y tenemos que $int(D^0) = D^0 = \{0\}$.

Definición 4.3.1. Una n-célula es un espacio homeomorfo al n-disco abierto $int(D^n)$. Una célula es un espacio tal que es una n-célula para algún $n \geqslant 0$. Diremos que una n-célula tiene dimensión n.

Definición 4.3.2. Una descomposición celular de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{E} = \{e_\alpha \mid \ \alpha \in I\}$ de subespacios de X tal que e_α es una célula para cada $\alpha \in I$ y

$$X = \coprod_{\alpha \in I} e_\alpha,$$

la unión disconjunta de conjuntos.
Definimos el n-esqueleto de X como el subespacio

$$X^n = \coprod_{\alpha \in I | dim(e_\alpha) \leqslant n} e_\alpha$$

Definición 4.3.3. Llamaremos a X un complejo CW, donde X es un espacio de Hausdorff y $\mathcal{E}$ es una descomposición celular de X si los siguientes axiomas se satisfacen:

1. Para cada n-célula $e \in \mathcal{E}$ existe $\phi_e : D^n \longrightarrow X$ que al restringirlo a $int(D^n)$ induce un homeomorfismo $\phi_e \mid_{int(D^n)}$: $int(D^n) \longrightarrow e$ y mapea S^{n-1} en X^{n-1} llamados mapeos característicos.

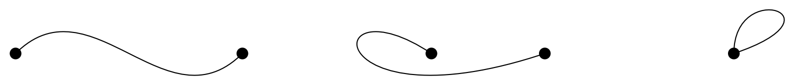
2. Para cualquier célula $e \in \mathcal{E}$ la cerradura $\overline{e}$ intersecta solo un número finito de células en $\mathcal{E}$.

3. Un subconjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $A \cap \overline{e}$ es cerrado en X para todo $e \in \mathcal{E}$

Diremos que un complejo CW X es finito si $\mathcal{E}$ es finito y que es de dimensión finita si existe $n \geqslant 0$ tal que $X = X^n$.

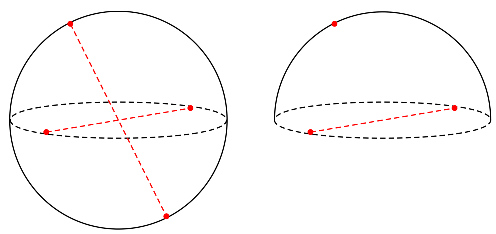
Definición 4.3.4. Sea X un complejo CW, definimos un subcomplejo de X como un subespacio cerrado $A \subseteq X$ que es unión de células de X. La pareja (X, A) es llamada pareja CW.

Ejemplo 4.2. Un complejo CW de dimensión $1, X = X^1$ es lo que se conoce como gráfica en topología algebraica. Consiste de vértices (0-células) a los cuales se les agregan aristas (1-células), ambos extremos de una 1-célula pueden estar adheridas a un mismo vertice.



Ejemplo 4.3. La esfera S^n tiene estructura de complejo CW con dos células, una 0-célula e_0 y una n-célula e_n donde e_n es adherida mediante el mapeo constante $S^{n-1} \longrightarrow e_0$. Esto es equivalente a definir la esfera como el espacio cociente $D^n/\partial D^n$

Ejemplo 4.4. Recordemos que el n-espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^n$ puede definirse como el espacio cociente $S^n/(v \sim -v)$, la esfera con puntos antípodas identificados. Esto es equivalente a definirla como el hemisferio D^n con puntos antípodas de ∂D^n identificados.



Y como ∂D^n identificada con puntos antípodas es precisamente $\mathbb{R}P^{n-1}$ observamos que $\mathbb{R}P^n$ se obtiene de $\mathbb{R}P^{n-1}$ agregando una n-célula mediante la proyección $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$. Se sigue por inducción sobre n que $\mathbb{R}P^n$ tiene estructura de complejo CW, $e_0 \cup e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_n$, con e_i de dimensión i.

4.3.2 Operaciones en espacios

Los complejos CW cuentan con una agradable mezcla de rigidez y flexibilidad, rigidez que permite utilizar argumentos de naturaleza combinatoria célula por célula y una flexibilidad que permite realizar muchas construcciones de manera natural en estos espacios.

Proposición 4.3.1. *Sean X y Y complejos CW y (X, A) una pareja CW, entonces $X \times Y$ y X/A tienen una estructura natural de complejo CW.*

Demostración. Si X y Y son complejos CW, $X \times Y$ tiene estructura de complejo CW donde sus células son productos de la forma $e_\alpha \times e_\beta$ y sus mapeos característicos son de la forma $\phi_\alpha \times \psi_\beta$, donde e_α es una célula en X y ϕ_α su mapeo característico y e_β es una célula en Y con ψ_β su mapeo característico.
Ahora, si (X, A) es una pareja CW, el espacio cociente X/A recibe una estructura de complejo CW donde sus células son las células de $X - A$ y una nueva 0-célula, la imagen

de A en X/A, donde los mapeos vienen dados mediante una composición con la proyección $\pi : X \longrightarrow X/A$. ■

Es importante mencionar que en ocaciones la topología en $X \times Y$ como complejo CW suele ser más fina que la topología producto.

Definición 4.3.5. Sean X y Y complejos CW definimos $f : X \longrightarrow Y$ como una función celular si $f(X^n) \subset Y^n$ para toda n.

Para una demostración del siguiente teorema, consúltese [Hat02, 349]

Teorema 4.3.2. ***(Teorema de aproximación celular)***
Sean X y Y complejos CW y $f : X \longrightarrow Y$, entonces f es homotópica a una función celular.

Vease la definición de cilindro y toro de una función en el apéndice A y consúltese [aFS00].

Lema 4.3.3. *Sean X, Y complejos CW y sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow X$ funciones celulares, entonces M_f y T_g tienen estructura de complejo CW.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función celular, la estructura CW de M_f viene dada por las células de $X \times [0, 1)$ y las de Y. Veamos que $X \times [0, 1)$ tiene estructura de complejo CW, X y $[0, 1]$ son complejos CW, por lo que $X \times [0, 1]$ es un complejo CW y $X = X \times 1$ es un subcomplejo, entonces $X \times [0, 1] - X \times 1 = X \times [0, 1)$ es un complejo CW. Solo hay que verificar que en donde se pega mediante el cociente no tengamos n-células fuera del n-esqueleto de Y pero el que f sea una función celular nos garantiza precisamente esto. Para el toro utilizamos un argumento similiar, tomando las células de $X \times [0, 1)$ y las células de X, verificando que $g(X^n) \subset X^n$ lo cual es claro pues g es una función celular. ■

4.3.3 Complejo de cadenas celular

Primero Veamos algunas propiedades de la homología singular en el caso que X es un complejo CW, para ver la demostración consultese [Hat02, 137].

Lema 4.3.4. *Sea X un complejo CW, entonces*

1. *$H_k(X^n, X^{n-1})$ es cero para $k \neq n$, es abeliano libre para $k = n$ con una base en correspondencia uno a uno con las n-células de X.*

2. *$H_k(X^n) = 0$ para $k > n$. En particular si X es de dimensión finita, $H_k(X) = 0$ para $k > dim\ X$.*

3. *La función $H_k(X^n) \longrightarrow H_k(X)$ inducida por la inclusión $X^n \longrightarrow X$ es un isomorfismo para $k < n$ y es suprayectiva para $k = n$.*

De esta manera las parejas (X^{n+1}, X^n), (X^n, X^{n-1}) y (X^{n-1}, X^{n-2}) pueden acomodarse en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 & & \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) \arrow[ur] & & & \\
 & & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "\pi_n"] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "\pi_{n-1}"'] & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $d_{n+1} = \pi_n \partial_{n+1}$ y $d_n = \pi_{n-1}\partial_n$, de esta manera la sucesión horizontal es un complejo de cadenas pues $d_{n+1}d_n = \pi_n \partial_{n+1} \pi_{n-1} \partial_n = \pi_n \circ 0 \circ \partial_n = 0$.

Definición 4.3.6. Sea X un complejo CW, definimos el complejo de cadenas celular de X como el complejo de cadenas $C_\bullet(X)$ dado por

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \cdots$$

Ya que $H_n(X^n, X^{n-1})$ es abeliano libre con base las n-células de X, podemos pensar en los elementos de $H_n(X^n, X^{n-1})$ como combinaciones lineales de n-células.

Definición 4.3.7. Sea X un complejo CW y sea $C_\bullet(X)$ su complejo de cadenas celular, definimos el n-ésimo grupo de homología celular de X como $H_n^{CW}(X) = \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$.

Teorema 4.3.5. *Sea X un complejo CW, entonces $H_n^{CW}(X) \simeq H_n(X)$.*

Demostración. Si observamos el diagrama anterior, podemos notar que $H_n(X)$ se identifica con $H_n(X^n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. Luego, por la inyectividad de π_n tenemos $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \simeq \mathrm{Im}(\pi_n\partial_{n+1}) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$ y $H_n(X^n) \simeq \mathrm{Im}(\pi_n) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$. Usando ahora la inyectividad de π_{n-1}, vemos que $\mathrm{Ker}(\partial_n) = \mathrm{Ker}(d_n)$, así π_n induce un isomorfismo del cociente $H_n(X^n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ a $\mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}) = H_n^{CW}$.

■

De este teorema obtenemos inmediatamente las siguientes aplicaciones:

1. $H_n(X) = 0$ si X es un complejo CW sin n-células.

2. Si X es un complejo CW con k n-células $H_n(X)$ es generado por a lo más k elementos, ya que si $H_n(X^n, X^{n-1})$ es abeliano libre con k generadores, el subgrupo $\mathrm{Ker}(d_n)$ es generado por a lo más k elementos y por lo tanto el cociente $\mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$ también.

3. Si X es un complejo CW y es tal que tomando un par de células, estas no se encuentran en dimensiones adyacentes. Entonces $H_n(X)$ es abeliano libre con base en correspodencia uno a uno con las n-células de X, esto se debe a que $d_n = 0$.

Teorema 4.3.6. *Sea X un complejo CW, entonces $S_\bullet(X)$ es homotopicamente equivalente a $C_\bullet(X)$.*

Demostración. Primero notemos que los complejos de cadenas $C_\bullet(X)$ y $S_\bullet(X)$ son acotados inferiormente y por el Teorema 4.3.5, tenemos las hipótesis del Teorema 2.2.4. Solo hay que aclarar que función es la que induce los isomorfismos en homologías y será la equivalencia homotópica, en este caso consideramos la inclusión $i : C_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X)$.

■

Vease la definción de un espacio contraíble en 4.1.6

Definición 4.3.8. Sea X un espacio topológico, decimos que X es localmente contraíble si para todo $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que U_x es contraíble.

Observación 4.3.1. Si X es localmente contraíble entonces X es localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo.

Para el siguiente teorema, vease la demostración en [Hat02, 522].

Teorema 4.3.7. *Sea X un complejo CW, entonces X es localmente contraíble.*

Corolario 4.3.8. *Sea X un complejo CW, entonces X tiene cubriente universal $\widetilde{X}$.*

Demostración. Si X es un complejo CW entonces es localmente arco-conexo y semilocalemente simplemente conexo y por el Teorema 4.2.4 tenemos que existe el cubriente universal $\widetilde{X}$. ■

4.4 Espacios finitamente dominados

Definiremos el concepto de un espacio topológico finitamente dominado, así como unas propiedades importantes de ellos, haremos uso de algunos resultados y definiciones enunciadas en el apéndice A.

Definición 4.4.1. Sea X un espacio topológico conexo, decimos que X es finitamente dominado si existen K complejo CW finito y funciones $X \xrightarrow{s} K$, $K \xrightarrow{r} X$ tales que $r \circ s \simeq Id_X$.

Teorema 4.4.1. *Sea X un espacio finitamente dominado, entonces X es homotópicamente equivalente a un complejo CW numerable de dimensión finita.*

Demostración. Sea X un espacio finitamente dominado por K y sean $r : K \longrightarrow X$, $s : X \longrightarrow K$ tales que $r \circ s \simeq Id_X$, tenemos que X es un retracto por deformación de $X \times [0, \infty)$, por lo que $X \simeq X \times [0, \infty)$. Luego $X \times [0, \infty) \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{Id_X}$ y $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{Id_X} \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{ros}$. Ahora utilizando A.4, tenemos que $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{ros} \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{sor}$, por lo que tenemos las equivalencias

$$X \simeq X \times [0, \infty) \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{Id_X} \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{ros} \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{sor}.$$

Por el Lema 4.3.3, M_{sor} es un complejo CW y es finito, por lo que $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{sor}$ es un complejo CW numerable de dimensión finita. ■

Teorema 4.4.2. ***(Truco de Mather)***
Sea X un espacio topológico, entonces X es finitamente dominado si y sólo si $X \times S^1$ es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito.

Demostración. Sea X finitamente dominado por K y sean $r : K \longrightarrow X$, $s : X \longrightarrow K$ tales que $r \circ s \simeq Id_X$, tenemos que $X \times S^1 \simeq T_{Id_X}$ y $T_{Id_X} \simeq T_{ros}$. Por la proposición A.6, $T_{ros} \simeq T_{sor}$ y así

$$X \times S^1 \simeq T_{sor},$$

donde T_{sor} es un complejo CW por el Lema 4.3.3 y es finito pues K lo es.
Supongamos ahora que $X \times S^1$ es homotópicamente equivalentea un complejo CW finito K, entonces

$$r : K \simeq X \times S^1 \xrightarrow{\pi} X, \quad \text{y} \quad s : X \xrightarrow{i} X \times S^1 \simeq K$$

son tales que $r \circ s \simeq Id_X$, por lo tanto X es finitamente dominado.

■

4.5 Obstrucción de finitud de Wall: versión topológica

Antes de enunciar el Teorema de Obstrucción de finitud de Wall, enunciaremos dos teoremas importantes pero no los demostraremos, sus demostraciones pueden encontrarse en [Hat02, 346,366]

Teorema 4.5.1. ***(Whitehead)***
Sean X,Y complejos CW conexos, si $f : X \longrightarrow Y$ induce isomorfismos $f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ para todo n, entonces f es una equivalencia homotópica.

Definición 4.5.1. Sea X un espacio topológico, decimos que X es n-conexo si

$$\pi_1(X) \simeq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Teorema 4.5.2. ***(Hurewicz)***
Sea X un espacio topológico $(n-1)$-conexo con $n \geq 2$, entonces

$$\pi_n(X) \simeq H_n(X).$$

Corolario 4.5.3. *Sean X, Y complejos CW simplemente conexos, si $f : X \longrightarrow Y$ induce isomorfismos $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ para todo n, entonces f es una equivalencia homotópica.*

Teorema 4.5.4. ***(Obstrucción de finitud de Wall)***
Sea X un espacio topológico finitamente dominado, entonces existe un invariante $\sigma(X) \in \widetilde{K_0}(\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)])$ tal que X es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito si y sólo si $\sigma(X) = 0$.

Veamos un bosquejo de una de las direcciones de la demostración, supongamos que X es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito. Si X es un espacio topológico

finitamente dominado dominado por un complejo CW finito Y, por el Teorema 4.4.1, X es homotópicamente equivalente a un complejo CW, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que X es un complejo CW y podemos modificar a Y a un complejo CW K de manera que tenga el mismo grupo fundamental que X.
Ahora, como X, K son complejos CW, existen sus cubrientes universales $\widetilde{X}, \widetilde{K}$ y por la propiedad del levantamiento de homotopías ([Hat02, 60]) tenemos el diagrama de cubrientes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\simeq"', "Id_X"] & K \arrow[r] & X. \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\simeq"', "Id_{\widetilde{X}}"] & \widetilde{K} \arrow[r] & \widetilde{X}, \end{tikzcd}$$

que es conmutativo hasta homotopía, vimos que las funciones en espacios inducen funciones en complejos de cadenas singulares, por lo que tenemos el siguiente diagrama también conmutativo hasta homotopía

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(\widetilde{X}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\simeq"', "Id_{\widetilde{X}\#}"] & S_\bullet(\widetilde{K}) \arrow[r] & S_\bullet(\widetilde{X}). \end{tikzcd}$$

Usando el Teorema 4.3.6, podemos conectar el diagrama de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & C_\bullet(\widetilde{K}) \arrow[d, shift left] & \\ S_\bullet(\widetilde{X}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\simeq"', "Id_{\widetilde{X}\#}"] & S_\bullet(\widetilde{K}) \arrow[r] \arrow[u, shift left] & S_\bullet(\widetilde{X}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_\bullet(\widetilde{X}) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrrr, bend right, "\simeq"', "Id_{\widetilde{X}\#}"] & S_\bullet(\widetilde{K}) \arrow[r] & C_\bullet(\widetilde{K}) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & S_\bullet(\widetilde{K}) \arrow[r] & S_\bullet(\widetilde{X}). \end{tikzcd}$$

Donde este último es un diagrama de $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$-módulos proyectivos debido a la acción natural del grupo fundamental en el cubriente universal. De hecho $C_\bullet(\widetilde{K})$ es de módulos libres, nos falta ver que los módulos de $C_\bullet(\widetilde{K})$ son finitamente generados para poder concluir que $S_\bullet(\widetilde{X})$ es finitamente dominado como complejo de cadenas por $C_\bullet(\widetilde{K})$.
El que K sea un complejo CW finito no implica que su cubriente universal sea un complejo CW finito, tomemos por ejemplo S^1 con su cubriente universal $\mathbb{R}$, pero no es dificil notar que $C_\bullet(\widetilde{K})$ es finitamente generado como $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$-módulo (de hecho generado por la células de K en cada dimensión).
Por el Teorema 3.2.10, el complejo de cadenas $S_\bullet(\widetilde{X})$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de libres si y sólo si $\chi(S_\bullet(\widetilde{X})) = 0 \in \widetilde{K_0}(\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)])$.
Entonces, si X es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito, $S_\bullet(\widetilde{X})$ es

homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de tipo finito de $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$-módulos libres y así su característica de Euler es cero, definimos de esta manera la característica de Euler de X y tenemos una implicación del teorema.

La otra implicación requiere algo más de trabajo y lenguaje, el cual ya quedaría fuera de nuestro alcance, es necesario definir aún más cosas y hacer uso de los teoremas de Whitehead y Hurewicz.

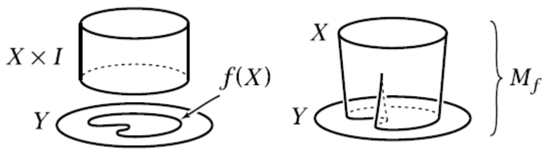
A | El cilindro, toro y telescopio

Definiremos y veremos algunas propiedades del cilindro, el toro y telescopio de una función, estos nos serán de utilidad para demostrar que si X es un espacio topológico finitamente dominado, entonces X es homotópicamente equivalente a un complejo CW de dimensión finita y para demostrar el truco de Mather. Consultese [aFS00].

Definición A.1. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, definimos el cilindro de f mediante

$$M_f = ((X \times [0,1]) \cup Y))/((x,1) \sim f(x)),$$

o bien



Veamos ahora algunas propiedades del cilindro de una función

Proposición A.2. Sean X, Y, Z espacios topológicos,

a) Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua, entonces M_f es homotópicamente equivalente a Y relativo a Y.

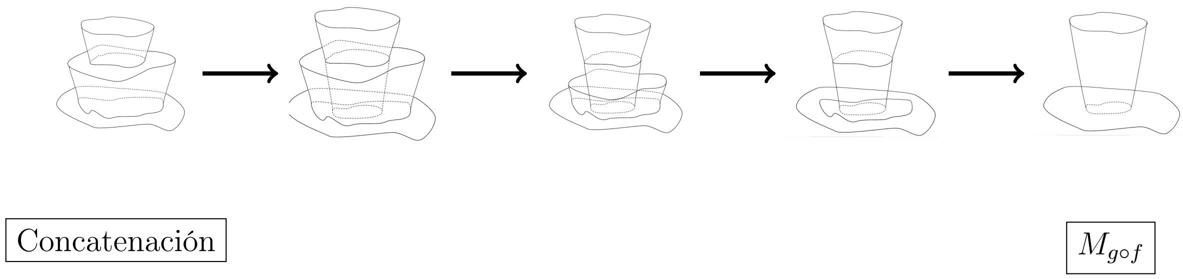
b) Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones homotópicas, entonces M_f es homotópicamente equivalente a M_g relativo a $X \cup Y$.

c) Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funciones continuas y $g \circ f, h : X \longrightarrow Z$ funciones homotópicas, entonces M_h es homotópicamente equivalente, relativo a $X \cup Z$, a la concatenación de los cilindros M_f y M_g.

Demostración. Para el primer inciso, notemos que Y es un retracto de deformación de M_f mediante la retracción que contrae el cilindro suavemente hacia Y. Entonces Y y M_f son homotópicamente equivalentes.

Ahora, sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones homotópicas, es decir existe una homotopía h de f a g, la homotopía de M_f a M_g viene inducida por h, deformando suavemente $f(X)$ a $g(X)$ y así deformando los cilindros.

Por último veamos que el cilindro de la composición es un retracto de deformación de el cilindro concatenado, así son homotópicamente equivalentes relativo a $X \cup Z$ y por el punto anterior, la concatenación es homotópicamente equivalente a M_h. Veamos el retracto con una serie de dibujos,



$\blacksquare$

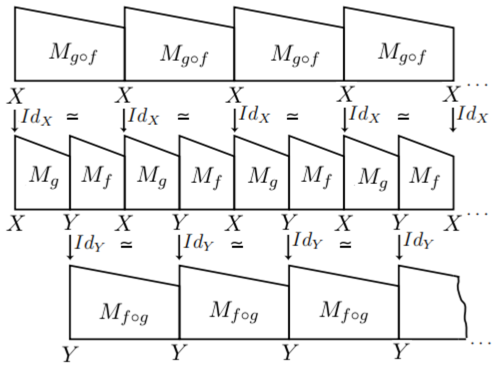
Definición A.3. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \longrightarrow X$ continua, definimos el telescopio de f mediante

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} M_f = \bigcup_{i=0}^{\infty} X \times [i, i+1]/((x, i+1) \sim (f(x), i+2)).$$

Proposición A.4. Sean X, Y espacios topológicos y sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ continuas, entonces

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{g\circ f} \simeq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_{f\circ g}.$$

Demostración. Notemos que $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{g\circ f}$ es homotopicamente equivalente a una concatenación infinita y alternada de M_g y M_f, la cual también puede pensarse como una concatenación infinita y alternada de M_f y M_g. Esencialmente estamos aociando de maneras distintas un producto infinito, veamos esto mediante un dibujo



■

Definición A.5. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \longrightarrow X$ continua, definimos el toro de f mediante

$$T_f = (X \times [0,1])/((x,0) \sim (f(x),1))$$

Proposición A.6. Sean X, Y espacios topológicos y sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ continuas, entonces $T_{f\circ g}$ y $T_{g\circ f}$ son homotópicamente equivalentes.

Demostración. Definimos $f' : T_{g\circ f} \longrightarrow T_{f\circ g}$ mediante $f'(x,t) = (f(x),t)$ y $g' : T_{f\circ g} \longrightarrow T_{g\circ f}$ mediante $g'(x,t) = (g(x),t)$, así $f' \circ g' : T_{f\circ g} \longrightarrow T_{f\circ g}$ es tal que $f' \circ g'(x,t) = (f \circ g(x),t)$ y por la definición de $T_{f\circ g}$ es claro que $f' \circ g' \simeq Id_{T_{f\circ g}}$. Realizamos un argumento análogo para $T_{g\circ f}$.

■

Bibliography

[aFS00] Ranicki A. and Ferry S. A survey of wall's finiteness obstruction. *ArXiv Mathematics e-prints*, 2000. 90, 97

[Cha05] Fernando Chamizo. *5. Grupo Fundamental.* UAM, 2004-2005. 71

[Cis01] José Luis Cisneros. Grupo fundamental y espacios cubrientes. *Escuela de Verano en Topología y Geometría*, 2001. 71

[Han] Soren Hansen. *CW complexes.* `www.math.ksu.edu/~hansen/CWcomplexes.pdf`. 87

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. 71, 78, 80, 81, 85, 90, 92, 94, 95

[LP05] Emilio Lluis Puebla. Álgebra homológica, cohomología de grupos y k-teoría algebraica clásica. *Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana, Serie: Textos*, 5, 2005. 21

[Ran85] Andrew Ranicki. The algebraic theory of finiteness obstruction. *Mathematica Scandinavica*, 57:105–126, 1985. 1

[Ros96] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-Theory and Its Applications*. 1996. 28

[Wal65] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for cw-complexes. *Annals of Mathematics*, 81(1):56–69, 1965. 1