"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Niveles de Whitney en Hiperespacios de Continuos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Gabriela Lugo Alcántar

Director de Tesis: M.C. Carlos A. Robles Corbalá

Hermosillo, Sonora, México, 2021

SINODALES

M.C. Carlos A. Robles Corbalá

Dra. Martha Guzmán Partida

Dr. Rafael Ramos Figueroa

Dr. Genaro Hernández Mada

Índice general

Introducción

La topología es una rama de las matemáticas que se ha desarrollado de forma vertiginosa en un sin número de líneas de investigación, una de éstas está encaminada al estudio de la topología de familias de subespacios de un espacio topológico arbitrario X, familias a las que llamaremos hiperespacios.

La teoría de los hiperespacios tiene sus inicios en el siglo XX con los trabajos de F. Hausdorff (1868-1942) y L. Vietoris (1891-2002).

Los hiperespacios que más estudiaremos son 2^X y $C(X)$. Dado un espacio topológico X, el hiperespacio 2^X es el conjunto de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X. Así mismo, el hiperespacio $C(X)$ es el conjunto que consta de los subconjuntos no vacíos y cerrados, y que además son conexos de X, éste es considerado como un subespacio de 2^X.

Una pregunta que surge es, si X es un espacio topológico, cuál es la mejor topología que se le puede dotar a 2^X, en el sentido de que las propiedades topológicas de X sean heredadas a 2^X y viceversa. Esta interrogante fue trabajada por L. Vietoris, quien construye una base para la topología conocida hoy como la topología de Vietoris, la cual fue introducida en 1922. En [8] nos dicen que si 2^X es considerado con ésta topología entonces se cumple que:

1. X es compacto si y sólo si 2^X es compacto.
2. Si X es regular entonces 2^X es un espacio de Hausdorff.
3. Si X es T_1 y 2^X es de Hausdorff entonces X es regular.

Cuando X es un espacio métrico, al hiperespacio 2^X se le puede dotar de la métrica de Hausdorff, la cual fue introducida por F. Hausdorff en 1914.

Así que, en el caso de que X es un espacio métrico compacto, al conjunto 2^X se le puede dotar de dos topologías: la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Sin embargo, F. Hausdorff muestra que ambas topologías coinciden, lo cual hace posible estudiar a 2^X y sus subespacios como espacios métricos o bien con una estructura topológica usando como base a los conjuntos vietóricos.

Una de las primeras preguntas que surgió fue determinar la conexidad de estos hiperespacios, esto derivó en estudiar hiperespacios de espacios métricos, compactos y conexos, es decir, continuos. De hecho se prueba que si X es un continuo entonces 2^X y $C(X)$ son continuos.

Dentro de los continuos tenemos a los continuos descomponibles y a los continuos indescomponibles, estos últimos siendo más difíciles de encontrar. El primer continuo indescomponible fue construido por L. E. Brouwer en 1910. En 1917, K. Yoneyama describe los Lagos de Wada (en honor al profesor Takeo Wada), este espacio está formado por la unión de tres abiertos conexos disjuntos en el plano con una frontera común entre los tres, dicha frontera resultó ser un continuo indescomponible. S. Mazurkiewicz es el primero en usar la palabra indescomponible en continuos. En 1920, B. Knaster construye al pseudo-arco, el primer ejemplo de un continuo hereditariamente indescomponible.

La teoría de hiperespacios de continuos empezó a avanzar en sus inicios gracias a la escuela polaca debido a que Knaster, Kuratowski y Sierpiński se dedicaron a cultivar la teoría de los continuos y casi al mismo tiempo empezaron a estudiar también los hiperespacios de continuos. Esta área de la topología se ha desarrollado en varios países destacando Polonia, República Checa, Estados Unidos, Japón y México.

Visualizar la forma que tienen los hiperespacios de un continuo resulta útil pero en ocasiones es complicado hacerlo. Por ejemplo Borsuk en 1949 afirmó en un artículo que $F_3(S^1)$ era homeomorfo a $S^1 \times S^2$, tiempo después R. Bott corrige a Borsuk y muestra que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 . De manera relativamente cerca, en 2010, se mostró que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 usando la Conjetura de Poincaré, resultado que ya es teorema por los resultados de G. Perelman de 2006.

Podemos mencionar tres momentos cruciales en el desarrollo de esta área. Un primer momento importante llega en 1942 con la tesis doctoral de J. L. Kelley intitulada “Hyperspaces of a continuum”, es una de las obras más importantes en la teoría de los hiperespacios. Kelley les dió una estructura sistemática a los resultados ya existentes hasta ese momento. Además, introdujo una variedad de tópicos y nuevos resultados en esta teoría, así como herramientas para el desarrollo de esta área. Con el trabajo de Kelley, la teoría de los hiperespacios se convirtió en una forma importante de obtener información sobre la estructura de un espacio topológico X mediante el estudio de las propiedades de sus hiperespacios.

El segundo momento llega con el trabajo de S. B. Nadler Jr. con su libro “Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions” en 1978 donde Nadler plasmó todo lo conocido hasta el momento, y tiempo después llega un tercer momento importante al completar este último trabajo con A. Illanes y S. B Nadler Jr publicando el libro “Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances”, el cuál era el libro más completo sobre el tema en 1999.

En este trabajo de tesis vamos a estudiar los Niveles de Whitney del hiperespacio de subcontinuos de X, es decir, el hiperespacio $C(X)$. Un continuo es un espacio métrico, conexo y compacto con más de un punto.

Este trabajo consta de seis capítulos que describimos a continuación:

Con la intención de hacer autosuficiente este trabajo, agregamos un primer capítulo donde damos algunos conceptos básicos de espacios topológicos, así como de conexidad y compacidad, con el fin de familiarizarnos más con los conceptos que se utilizan a lo largo de este trabajo. Cabe decir al lector, que se incluyen las referencias de donde se puede encontrar la demostración de cada resultado en caso de que lo necesite.

En el segundo capítulo damos una introducción de los continuos, con el fin de comprender mejor el desarrollo de esta tesis. Se estudia la construcción de algunas clases de continuos como los indescomponibles, también se da una prueba de que existe un continuo que contiene copias topológicas de todos los continuos, llamado el cubo de Hilbert.

En el tercer capítulo se presenta lo que sustenta este trabajo, se estudian a los hiperespacios de un continuo, dotamos de una métrica al hiperespacio 2^X llamada la métrica de Hausdorff y hacemos una discusión de sus propiedades, así mismo trabajamos algunos subconjuntos y sucesiones de 2^X con el fin de probar la conexidad y compacidad de 2^X y $C(X)$. Además, introducimos otra manera de dar una topología a 2^X sin utilizar la métrica de Hausdorff.

Las funciones que se pueden inducir en hiperespacios de continuos, las estudiamos en el capítulo cuatro, así como una función muy interesante llamada la función unión.

El capítulo cinco, esta dedicado a las funciones de Whitney, que denotamos normalmente como μ, las cuales son esenciales para medir el tamaño de los elementos en 2^X. Se muestra la existencia de las funciones de Whitney, así como la construcción de otras funciones de Whitney.

Finalizamos este trabajo con el capítulo seis, estudiamos a los Niveles de Whitney para el hiperespacio de subcontinuos de un espacio X, estos son un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ para $t \in [0, 1]$. Se demuestra que los niveles de Whitney son subcontinuos del hiperespacio $C(X)$. Para llegar a este último resultado introducimos un concepto importante, que es el de arcos ordenados.

Finalmente, se presentan los Niveles de Whitney para el intervalo $[0, 1]$, para la circunferencia y para el triodo.

Además, incluimos dos apéndices donde probamos el teorema de Tychonoff y el criterio M de Weierstrass. Este primer teorema prueba que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto con la topología producto y el segundo es un criterio que utilizamos con frecuencia para probar que las funciones de Whitney son continuas y están bien definidas.

Capítulo 1

Preliminares

Para que la lectura de este trabajo sea autosuficiente, empezamos con un primer capítulo donde mencionaremos algunos conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Vamos a omitir las demostraciones de los resultados que se presentan, sin embargo, daremos la referencia de donde se pueden consultar. Si el lector ya esta familiarizado con espacios topológicos se puede omitir este capítulo.

1.1. Espacios topológicos

En esta sección mostraremos algunas definiciones y resultados de espacios topológicos, los cuales serán necesarios para comprender los capítulos posteriores.

Definición 1.1.1. Una colección τ de subconjuntos de X, es llamada una topología en X si τ satisface:

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ entonces $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

iii) Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$

Un conjunto X para el que se ha definido la topología τ se llama espacio topológico y se representa por (X, τ). A los elementos de τ se les llama conjuntos abiertos de X.

Un ejemplo importante de una topología nos lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. Todo espacio métrico (X, d) induce una topología en X a saber:

$$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E \text{ es unión de bolas abiertas }\}$$

El teorema 1.3 en [1] pág.14 prueba que en efecto τ_d es una topología en X.

El siguiente concepto es de gran utilidad para el análisis de ciertas propiedades topológicas.

Definición 1.1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que A es vecindad del punto x si y sólo si existe $B \in \tau$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Denotaremos $\epsilon(x) = \{U \subseteq X$: U es vecindad de X $\}$ al sistema de vecindades del punto $x \in X$.

Observemos que, un subconjunto $A \subset X$, es abierto en X si y sólo si A es una vecindad de cada uno de sus puntos.

Naturalmente, dado un espacio topológico y un subconjunto $A \subset X$, diremos que A es un conjunto cerrado en X si y sólo si $X \setminus A$ es abierto en X.

Definición 1.1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Diremos que x es un punto de acumulación de A si y sólo si para toda $u \in \epsilon(x)$, se cumple que $u \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Y denotamos a A' como el conjunto de puntos de acumulación de A.

Con el siguiente teorema podemos ver que en un espacio topológico, un subconjunto es cerrado si contiene a sus puntos de acumulación.

Teorema 1.1.5. Sea A subconjunto de un espacio topológico (X, τ). A es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$.

La prueba de este teorema se puede encontrar en [1] proposición 2.4 pág.54.

La cerradura de un conjunto $A \subset X$, se define como la intersección de todos los cerrados que contienen a A y se denota como

$$\overline{A} = \bigcap\{C \subseteq X : C \text{ es cerrado y } A \subseteq C\}.$$

Algunas de sus propiedades son las siguientes

1. $A \subseteq \overline{A}$.
2. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.
3. Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
4. A es cerrado en X si y sólo si $A = \overline{A}$.
5. $\overline{A} = A \cup A'$

La prueba de las primeras cuatro propiedades se encuentra en la proposición 2.6 pág.56 de [1] y de la propiedad cinco se encuentra en [2] teorema 17.6 pág.111.

Otro concepto importante es el de punto interior, diremos que x es punto interior de A si y sólo si existe $u \in \tau$ tal que $x \in u \subseteq A$ y al conjunto de los puntos interiores los denotaremos A°.

Observemos que algunas propiedades básicas del interior son las siguientes y su prueba la podemos encontrar en [1] proposición 2.9 pág.58.

i) A° es un conjunto abierto.

ii) Es el máximo abierto contenido en A.

iii) A es abierto si y sólo si $A = A^\circ$.

Por otra parte, dado un espacio topológico X y un subconjunto $A \subset X$, se define la frontera de A como los puntos que no son interiores de A, ni interiores de $X \setminus A$. Esto lo denotamos:

$$Fr(A) = (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ)$$

Equivalente podemos decir que que $x \in Fr(A)$ si y sólo si para toda $u \in \epsilon(x)$, $u \cap A \neq \emptyset$ y $u \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Dado un subconjunto de un espacio topológico, podemos generar una topología de la siguiente manera:

Teorema 1.1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Entonces $\tau_Y = \{Y \cap A : A \in \tau\}$ es una topología en Y, llamada la topología relativa.

La demostración de este teorema se encuentra en [1] pág.31 proposición 1.31.

1.2. Continuidad y homeomorfismos en espacios topológicos

Se presentarán en esta sección algunos conceptos básicos e importantes como es la definición de continuidad y de homeomorfismos.

Definición 1.2.1. Sea $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y una función $f : X \to Y$. Diremos que f es continua en $x_0 \in X$ si para toda $A \in \tau_Y$ con $f(x_0) \in A$ existe $B \in \tau_X$ tal que $x_0 \in B$ y $f(B) \subset A$.

Además, f es continua en X, si lo es en cada punto x de X.

Dada una función f entre espacios topológicos X e Y, contamos con los siguientes criterios equivalentes para probar que una función es continua y su prueba la podemos encontrar en [1] teorema 3.4 pág.85.

a) f es continua.

b) para cualquier abierto u de Y entonces $f^{-1}(u)$ es abierto en X.

c) Para cualquier cerrado F de Y entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

d) Para toda $A \subseteq X$ entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

e) Para toda $B \subseteq Y$ entonces $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Además, tenemos algunos ejemplos de funciones continuas y como se pueden construir más funciones continuas de un espacio topológico a otro.

Consideremos a X, Y y Z espacios topológicos:

(a) Función constante.

Si $f : X \to Y$ envía todo punto de X a un mismo punto $y_0 \in Y$, entonces f es continua.

(b) Inclusión.

Si A es un subespacio de X, la función inclusión $j : A \to X$ es continua.

(c) Composición.

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ es continua.

(d) Restricción de dominio.

Si $f : X \to Y$ es continua y A un subespacio de X, entonces la función restringida $f|_A : A \to Y$ es continua.

(e) Restricción o extensión del recorrido.

Sea $f : X \to Y$ continua. Si Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$ entonces la función $g : X \to Z$ obtenida al restringir el rango de f es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función $h : X \to Z$, obtenida al extender el recorrido de f es continua.

(f) Formulación local de continuidad.

La función $f : X \to Y$ es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f|_{U_\alpha}$ es continua para cada α.
La prueba de que los ejemplos anteriores son funciones continuas la podemos encontrar en [2] teorema 18.2 pág.122.

Otra forma más de construir funciones continuas es la que se conoce como el lema del pegado, cuya demostración se encuentra en [2] teorema 18.3 pág.123 y nos dice lo siguiente:

Sea (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos y $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sea $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para $x \in A \cap B$ entonces la función $h : X \to Y$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es una función continua.

A continuación se presenta un concepto fundamental de la topología, que es, el de homeomorfismo y espacios homeomorfos, éstos nos ayudan a identificar a los objetos topológicos que son equivalentes.

Definición 1.2.2. Sea (X, τ_X),(Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función biyectiva $f : X \to Y$ es llamada un homeomorfismo si y sólo si f y su inversa f^{-1} son funciónes continuas.

Equivalentemente podemos decir que X es homeomorfo a Y si y sólo si existe $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ continuas tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.

Consideremos X e Y espacios topológicos y f una función de X a Y. Diremos que f es una función abierta si para todo conjunto abierto A de X, $f(A)$ es un conjunto abierto en Y. Además, f es llamada función cerrada si para todo conjunto cerrado C en X, $f(C)$ es conjunto cerrado en Y.

Con estos conceptos tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) f^{-1} es continua.
b) f es abierta.
c) f es cerrada.

Y como consecuencia del teorema anterior dejamos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.4. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) f es un homeomorfismo.
b) f es abierta.
c) f es cerrada.

La prueba de este último teorema y su respectivo corolario se encuentran en [1] proposición 3.19 pág.92.

1.3. Espacios topológicos conexos

En esta sección mencionaremos algunos resultados de conexidad en espacios topológicos. Se presentan las propiedades básicas sobre espacios conexos, así como, la conexidad local y conexidad por trayectorias.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par de abiertos disjuntos no triviales U,V tal que $X = U \cup V$. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación de X, es decir, no existe ningún par de conjuntos abiertos disjuntos no vacíos U y V en X tal que $X = U \cup V$.

Una manera equivalente de ver que un espacio X es conexo es, probando que los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y X.

A continuación veamos algunos resultados que nos dicen como construir espacios conexos a partir de espacios conexos.

Un primer teorema sobre conexidad es el siguiente y su prueba se encuentra en [2] lema 23.2 pág.170.

Teorema 1.3.2. Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y Y es un subespacio conexo de X, entonces $Y \subseteq C$ o bien, $Y \subseteq D$.

Teorema 1.3.3. La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [2] en el teorema 23.3 pág.170.

El siguiente teorema establece que el espacio que hay entre un espacio conexo y su cerradura es un espacio conexo y la prueba la podemos encontrar en [2] teorema 23.4 pág.170.

Teorema 1.3.4. Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B también es conexo.

Un teorema que usaremos con frecuencia es el siguiente, que nos muestra que la conexidad se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 1.3.5. La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.

Su demostración la podemos encontrar en [2] teorema 23.5 pág.170.

Un teorema que ayuda a construir espacios conexos es el siguiente:

Teorema 1.3.6. El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.

La demostración se encuentra en [2] teorema 23.6 pág.171.

Además, el producto arbitrario de espacios conexos es conexo con la topoogía producto.

Una definición importante es la de conexidad por caminos o tambien llamada conexidad por trayectorias, la cual se enuncia a continuación.

Definición 1.3.7. Dados dos puntos x, y del espacio X, un camino en X que une a x con y es una función continua $f : [a, b] \to X$, de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$.

Un espacio X se dice que es conexo por caminos si cada par de puntos de X se puede unir mediante un camino en X.

Observemos que todo espacio conexo por caminos es conexo pero el recíproco no es cierto y esto lo demuestra el siguiente ejemplo conocido como el peine y la pulga.

Consideremos el subconjunto $X \subseteq \mathbb{C}$ dado por $X = A \cup B$ donde

$$A = \{i\} \text{ (pulga) y}$$
$$B = [0, 1] \cup \{(\tfrac{1}{n}) + yi : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \text{ (peine).}$$

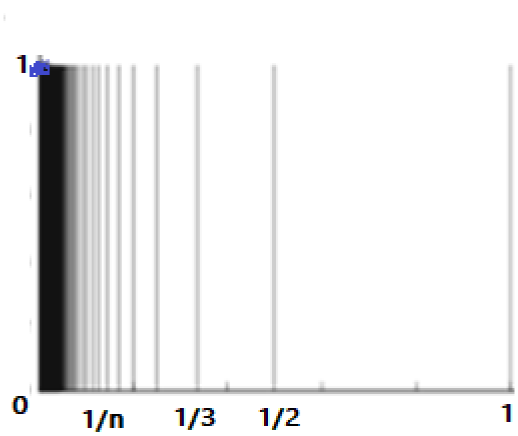


Figura 1.1: Peine y pulga

Este ejemplo muestra que no todo espacio conexo es conexo por caminos porque toda función continua que inicia en la pulga es una función constante, de tal manera que la pulga no puede ser conectada con ningún otro punto del espacio.

Un teorema que será usado con frecuencia es el siguiente, el cual es importante porque nos ayuda a tener una caracterización de los conexos en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.8. Un conjunto no vacío A en $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, es un intervalo.

La prueba de este teorema se puede ver en [1] proposición 8.5 pág. 268.

Por otro lado, otro concepto importante es la conexidad local.

Definición 1.3.9. Un espacio X es localmente conexo en x si para cada abierto U de x, existe un abierto conexo V de x tal que $x \in V \subseteq U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo.

Además, diremos que un espacio X es localmente conexo por caminos en x si para cada abierto U de x existe un abierto conexo por caminos V de x tal que $V \subseteq U$. Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo por caminos .

1.4. Espacios topológicos compactos

En esta sección se presentan las propiedades más relevantes de la compacidad en espacios topológicos.

Una colección $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos del espacio X es una cubierta de X si

$$X \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda .$$

Si $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ también es una cubierta de X entonces $\mathcal{A}'$ es una subcubierta de X. Además, si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{A}$ de X son abiertos entonces $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X.

Definición 1.4.1. Un espacio X se dice que es compacto si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Teorema 1.4.2. Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y sólo si, cada cubierta de Y por abiertos de X contiene una subcubierta finita que cubre a Y.

La prueba de este teorema la podemos ver en [2] lema 26.1 pág.187.

Podemos ver con el siguiente teorema que la compacidad se preserva cuando consideramos subespacios cerrados.

Teorema 1.4.3. Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

La prueba se puede encontrar en [2] en teorema 26.2 pág.187.

Además, si el espacio es Hausdorff tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.4.4. Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

La prueba se encuentra en [2] teorema 26.3 pág.188.

También, la compacidad es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas como lo dice el siguiente teorema, cuya prueba la podemos encontrar en [2] teorema 26.5 pág.189.

Teorema 1.4.5. La imagen de un espacio compacto bajo una función continua es un espacio compacto.

A continuación veamos un teorema que nos ofrece una herramienta para verificar si una función es un homeomorfismo.

Teorema 1.4.6. Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

La demostración se puede ver en [2] teorema 26.6 pág.189.

Teorema 1.4.7. El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.

La prueba de este teorema se encuentra en [2] teorema 26.7 pág.190.

Además, el teorema de Tychonoff nos garantiza que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto con la topología producto. En el apéndice A anexamos la prueba de este resultado.

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersección finita si cada subfamilia finita $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir $\cap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Con lo anterior podemos dar una caracterización de espacios compactos con el siguiente teorema que se encuentra en [2] teorema 26.9 pág.193.

Teorema 1.4.8. Un espacio X es compacto si y sólo si, para cada familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacia.

Tenemos un resultado destacado debido a Heine–Borel, que nos caracteriza a los compactos en $\mathbb{R}^n$ a saber, cuya prueba se puede ver en [1] corolario 7.12 pág.227.

Teorema 1.4.9. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si, A es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$.

Diremos que un espacio es compacto por punto límite si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite y diremos que es sucesionalmente compacto si para cada sucesión de puntos de X, $\{x_n\}$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente en X.

En el siguiente teorema podemos ver algunas equivalencias de compacidad que se cumplen cuando nuestro espacio topológico es metrizable.

Teorema 1.4.10. Sea X un espacio metrizable. Entonces las siguientes son equivalentes:

(a) X es compacto.
(b) X es compacto por punto límite.
(c) X es sucesionalmente compacto.

La demostración de este teorema se encuentra en [2] teorema 28.2 pág.204.

Los espacios topológicos compactos tienen propiedades muy agradables, dentro de ellas tenemos las siguientes.

Teorema 1.4.11 (Número de Lebesgue)**.** Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta del espacio métrico X. Si X es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto X con diámetro menor que δ, existe un elemento de $\mathcal{A}$ conteniéndolo.

Al número δ se le llama número de Lebesgue. La prueba del teorema anterior la podemos encontrar en [2] lema 27.5 pág.199.

Teorema 1.4.12. Sea $f : X \to Y$ una función continua del espacio compacto (X, d_X) al espacio (Y, d_Y) . Entonces f es uniformemente continua.

La prueba de este teorema se puede ver en [2] teorema 27.6 pág.200.

Además los espacios compactos tienen una propiedad sumamente importante que es que son separables, es decir, que tienen un subconjunto denso y númerable.

Teorema 1.4.13. Sea X un espacio compacto entonces X tiene un subconjunto denso y numerable.

Demostración:
Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Sea $\{B(\frac{1}{n}, x) : x \in X\}$ una cubierta abierta para X. Como X es compacto entonces existen puntos $x_1, x_2, ..., x_{k_n} \in X$ tal que $\{B(\frac{1}{n}, x_i) : i = 1, 2, .., k_n\}$ es una subcubierta abierta finita, es decir,

$$X = \cup_{i=1}^{k} B(\tfrac{1}{n}, x_i).$$

Así para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $D_n = \{x_1, x_2, ..., x_{k_n}\} \subset X$ y tomamos $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, de esta forma D es a lo más numerable.

Ahora veamos que D es denso en X.

Sea $y \in X$ arbitrario, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Para ver que D es denso en X, mostremos que existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $D_n \cap B(\epsilon, y) \neq \emptyset$.

Supongamos lo contario, es decir, dado $\epsilon > 0$

$$D_n \cap B(\epsilon, y) = \emptyset \ \forall k_n > N,$$

entonces

$$\{x_1, x_2, ..., x_{k_n}\} \cap B(\epsilon, y) = \emptyset,$$

de aquí que $x_i \notin B(\epsilon, y)$ para toda $i = 1, ..., k_n$ entonces $d(x_i, y) \geq \epsilon$. Pero $\epsilon > \frac{1}{N} > \frac{1}{k_n}$ entonces $d(x_i, y) > \frac{1}{k_n}$, y de aquí que $y \notin B(\frac{1}{n}, x_i)$ y

$$y \notin \cup_{i=1}^{k_n} B(\tfrac{1}{n}, x_i)$$

lo cual contradice el hecho de que $\{B(\frac{1}{n}, x_i) : i = 1, ..., k_n\}$ es una subcubierta finita para X.

Así para $\epsilon > 0$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $D_n \cap B(\epsilon, y) \neq \emptyset$ entonces

$$D \cap B(\epsilon, y) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, D es denso y numerable. ∎

Capítulo 2

Continuos

Este trabajo de tesis está en el contexto de los Hiperespacios de un continuo, es por ello que, en este capítulo, presentaremos ejemplos de algunos continuos sin llegar a hacer un estudio pleno de ellos.

2.1. Definición y ejemplos de continuos

En esta sección daremos la definición de los espacios continuos y presentaremos algunos ejemplos. Así como también veremos una de las técnicas para obtener continuos usando la intersección anidada.

Definición 2.1.1. Un continuo X es un espacio métrico, compacto y conexo con más de un punto.

Definición 2.1.2. Si X es un continuo y $Y \subset X$ es a su vez un continuo, diremos que Y es un subcontinuo de X.

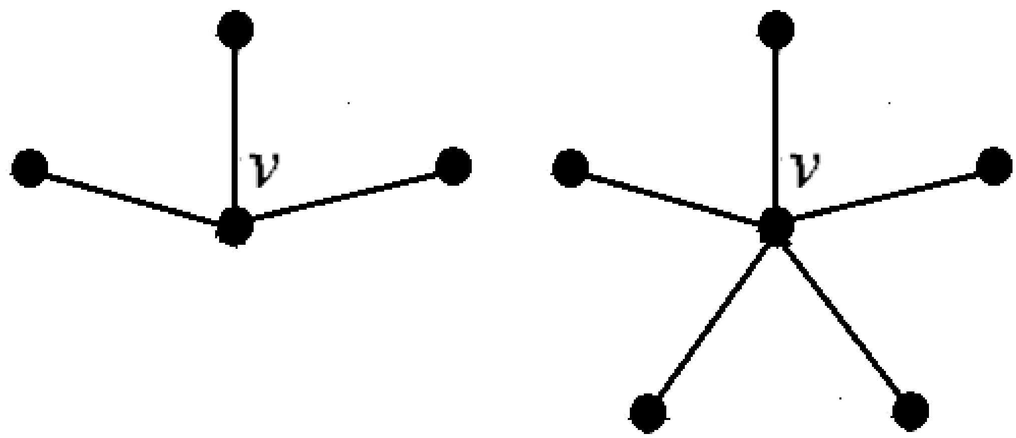
Ejemplo 2.1.3. Veamos los siguientes ejemplos.

(1) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo y también lo son cualquier copia topológica de este intervalo, a los cuales les llamamos arcos.

(2) Otros continuos muy sencillos son: la circunferencia, el disco (relleno), o lo que es lo mismo la 2-celda $[0, 1]^2$. Así mismo las n-celdas $[0, 1]^n$ también son continuos.

(3) Gráficas finitas. Son aquellos continuos que son una unión finita de arcos tales que cada dos de ellos se intersectan sólo en un número finito de puntos. Algunas gráficas finitas

son: el intervalo $[0,1]$, la circunferencia y los n-odos simples. Estos últimos son una unión de de n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto, llamado vértice del n-odo. En la siguiente figura podemos ver dos ejemplos de n-odos simples.



(a) 3-odo (b) 5-odo

Figura 2.1: n-odos simples

(4) Si $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ entonces $X = \overline{W}$ es un continuo llamado la curva senoidal del topólogo.

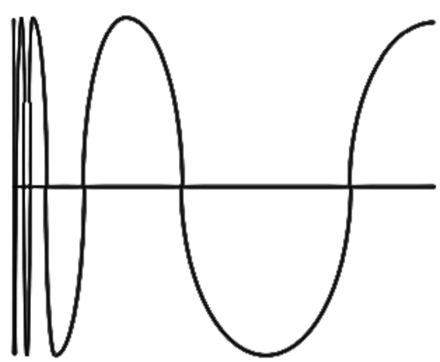


Figura 2.2: Curva senoidal del topólogo

Si además consideramos un arco Z del punto $(1,-1)$ al punto $(1, sen(1))$, de manera que $X \cap Z = \{(0,-1),(1, sen(1))\}$. Entonces $\mathcal{V} = X \cup Z$ es un continuo llamado el círculo de Varsovia.

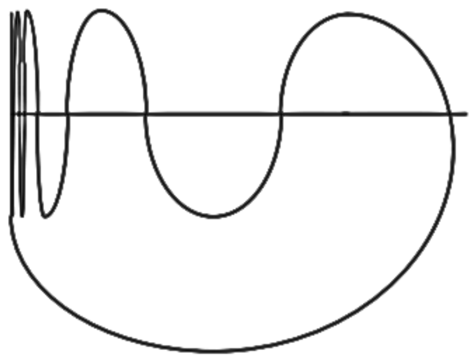
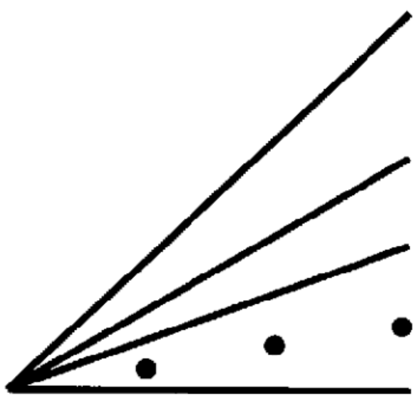
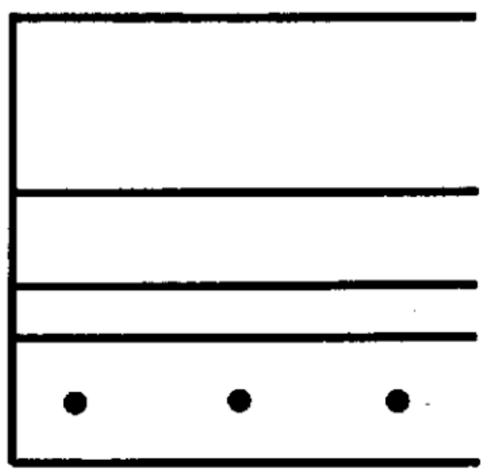


Figura 2.3: Círculo de Varsovia

(5) También podemos obtener continuos con la unión de una infinidad de segmentos tal que lo que nos resulte sea compacto. Dos ejemplos de este tipo son la escoba y el peine, los cuales podemos observar en la siguente figura. Notemos que en cada uno de estos continuos hay una infinidad de segmentos que se aproximan al eje horizontal inferior.



(a) Escoba (o abanico armónico)



(b) Peine

Figura 2.4

(6) También podemos encontrar a los árboles, que son gráficas finitas que no contienen circunferencias. Una generalización de los árboles son las dendritas, que son continuos localmente conexos que no contienen circunferencias.

Una de las dendritas mas simples (que no es un árbol), es la que solo tiene un punto de ramificación pero tiene una infinidad de segmentos saliendo de él y se denota F_ω.

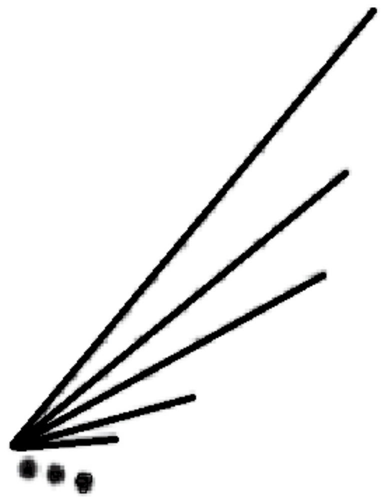


Figura 2.5: Dendrita F_ω

Otro continuo importante es la dendrita de Gehmann. Esta dendrita se construye empezando en la parte superior de la que salen dos segmentos, en cuyos extremos inferiores se colocan otros dos segmentos más pequeños. Este proceso se repite una infinidad de veces y al final del proceso se toma la cerradura de la unión de todos estos segmentos. Notemos que el conjunto de puntos que se añaden al tomar la cerradura constituye un conjunto de Cantor, la demostración de este hecho no se incluye en este trabajo, ya que queremos dedicarnos a estudiar hiperespacios.

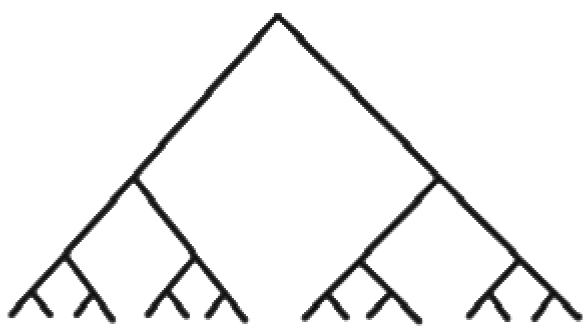


Figura 2.6: Dentrita de Gehmann

Otra dendrita interesante es la llamada D_4. Se construye empezando con una cruz, luego usando cada uno de los segmentos de la cruz se construye otra cruz más pequeña. Debemos ser cuidadosos en los pasos para realizar este proceso, pues en cada uno nos debemos fijar en todos los segmentos que unen a dos puntos de ramificación del dibujo del paso anterior y con él se construye una cruz más pequeña. Al final, al igual que en la dendrita de Gehmann, se toma la cerradura de la unión de todas las cruces así construidas.

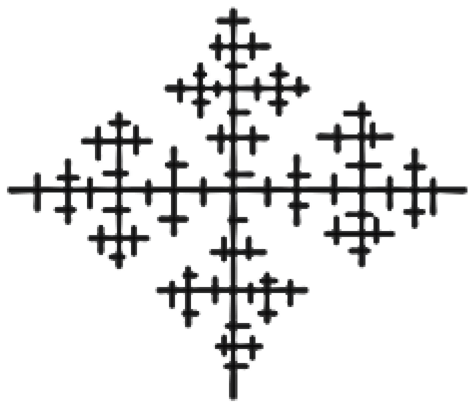


Figura 2.7: Dendrita D_4

Finalmente presentamos la dendrita D_ω, la cual se construye de forma análoga a D_4, pero ahora empezamos con F_ω y a la mitad de cada uno de los segmentos de esta dendrita se coloca una copia de F_ω. En el siguiente paso se coloca otra copia de F_ω en el punto medio de cada uno de los segmentos que quedaron en el paso anterior. Continuamos este proceso una cantidad numerable de veces y al final se toma nuevamente la cerradura de la unión de todos los segmentos. Los primeros pasos de esta construcción se muestran en la siguiente figura.

Figura 2.8: Dendrita D_ω

Una de las técnicas más importantes para obtener otros ejemplos interesantes de continuos es el uso de intersecciones anidadas, pero antes veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$X_n = [-1, 1] \times [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}] \setminus \{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \times \{0\}\}$$

Observemos que cada X_n es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero

$$\cap_{n=1}^{\infty} X_n = [-1, -\tfrac{1}{2}] \times \{0\} \cup [\tfrac{1}{2}, 1] \times \{0\}$$

el cual no es conexo.

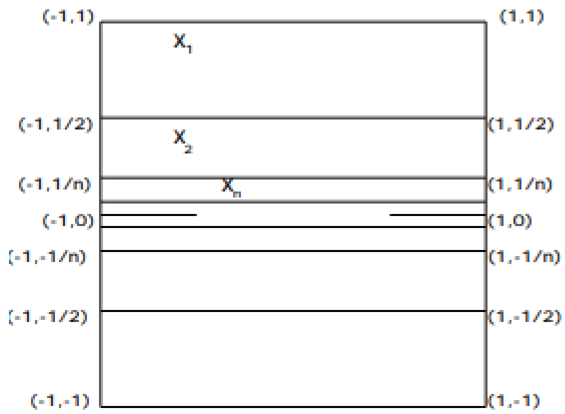


Figura 2.9

Con el ejemplo anterior podemos notar que la intersección anidada de conjuntos conexos no necesariamente es conexa. Pero si le agregamos la hipótesis de compacidad a cada uno de los intersectados se obtienen buenos resultados, lo cual se mostrará en el siguiente teorema, el cual nos proporciona una manera útil de construir continuos.

Teorema 2.1.5. Si X es un continuo y $A_1, A_2, ...$ son subcontinuos anidados ($A_{n+1} \subset A_n$, para $n \in \mathbb{N}$), entonces el conjunto $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ...$ es un subcontinuo de X .

Demostración:
El conjunto A es cerrado ya que es intersección de cerrados y también es compacto pues $A \subset X$ y X es compacto. Al ser A_n compactos son cerrados. Así $X \setminus A_n$ son abiertos.

Por las leyes De Morgan tenemos

$$X \setminus A = X \setminus (A_1 \cap A_2 \cap ...) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \cup ...$$

Si $A = \emptyset$ la familia $\{X \setminus A_1, X \setminus A_2, ...\}$ es una cubierta abierta de X y como X es compacto debe haber una subcubierta finita $X \setminus A_{n_1}, X \setminus A_{n_2}, ..., X \setminus A_{n_m}$ que cubre a X. Podemos suponer que $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$. De modo que

$$X = (X \setminus A_{n_1}) \cup (X \setminus A_{n_2}) \cup ... \cup (X \setminus A_{n_m}) = X \setminus (A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap ... \cap A_{n_m}).$$

Lo que implica que $A_{n_m} = \emptyset$ lo cual no puede ser pues A_{n_m} es un subcontinuo y por definición debe ser no vacío. Lo que demuestra que $A \neq \emptyset$.

Ahora debemos probar que A es conexo. Supongamos que no lo es, entonces A se puede escribir como $A = K \cup L$ donde K y L son cerrados ajenos y no vacíos. Como X es normal existen abiertos U y V de X tal que $K \subset U$ y $L \subset V$. Entonces

$$(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \cup ... = X \setminus A = X \setminus (K \cup L) \supset X \setminus (U \cup V).$$

De modo que $\{X \setminus A_1, X \setminus A_2, ...\}$ es una cubierta abierta del conjunto cerrado y por ende compacto $X \setminus (U \cup V)$. Procediendo como anteriormente existe un número natural n_m tal que $X \setminus (U \cup V) \subset X \setminus A_{n_m}$ ó $A_{n_m} \subset U \cup V$.

Así que A_{n_m} es un conjunto conexo que esta contenido en la unión de dos conjuntos abiertos ajenos U y V. Esto sólo puede ocurrir si $A_{n_m} \subset U$ ó $A_{n_m} \subset V$. Pero $K \subset A \subset A_{n_m}$ y $K \subset U$ lo que nos da que A_{n_m} intersecta a U y $L \subset A \subset A_{n_m}$ y $L \subset V$, lo que nos lleva a que A_{n_m} también intersecta a V. Lo cual no puede ser pues $U \cap V = \emptyset$. Por lo que A es conexo.

Por lo tanto A es subcontinuo de X. ■

El teorema anterior ayuda a construir continuos como podemos ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1.6. .

(1) La Curva Universal de Sierpinski.

Empezamos dividiendo el cuadrado $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ en nueve cuadrados congruentes y tomamos

$$S_1 = S_0 \setminus (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \times (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$

Analogamente, dividimos cada uno de los restantes ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes y llamamos S_2 al continuo que se obtiene al quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales. Continuando de esta manera, definimos S_3, S_4,etc. Sea

$$\mathcal{S} = \cap_{n=1}^{\infty} S_n$$

entonces $\mathcal{S}$ es un continuo.

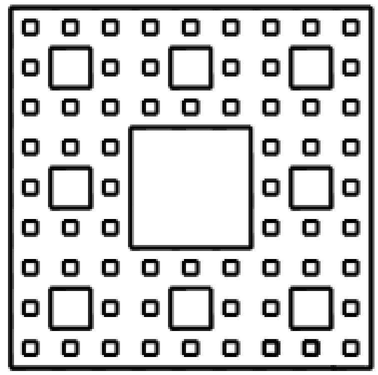


Figura 2.10: Curva Universal de Sierpinski

(2) La Curva Universal de Menger.

Consideremos primero el cubo $M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividamos cada una de las caras de M en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de cada cuadrado central, esto nos da un continuo M_1. Dividamos cada uno de los restantes cuarenta y ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de los cuadrados centrales, de esta manera obtenemos un continuo M_2. Repetimos este proceso para obtener continuos M_n. La curva universal de Menger es, por definición

$$\mathcal{M} = \cap_{n=1}^{\infty} M_n$$

Y por el teorema anterior sabemos que $\mathcal{M}$ es un continuo.

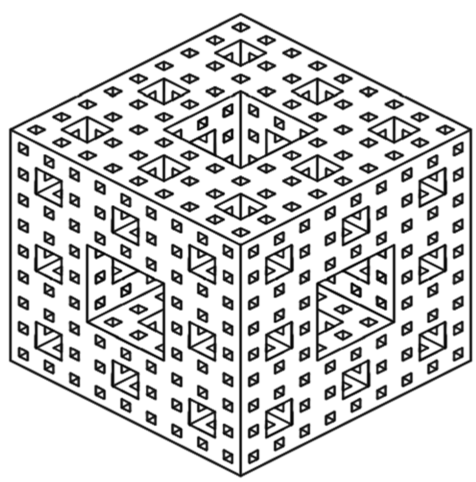


Figura 2.11: Curva Universal de Menger

(3) Selenoide diádico.

Se construye comenzando con un toro sólido, lo siguiente es considerar un toro sólido contenido en el primero y que además le dé dos vueltas a éste. Posteriormente consideramos otro toro sólido que esté metido en el segundo y le dé dos vueltas a éste. Continuando con este proceso podemos construir una cadena anidada de toros sólidos, cuya intersección es un continuo, como nos asegura el teorema anterior. Además este es un continuo indescomponible, de los cuales hablaremos un poco más en la sección 2.3.

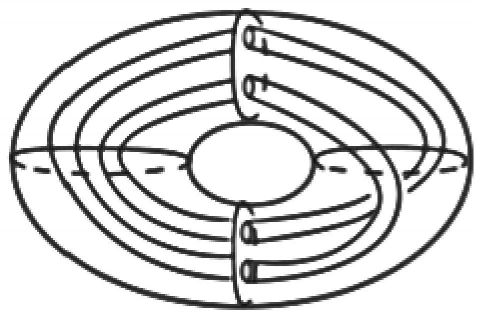


Figura 2.12: Selenoide diádico

2.2. El cubo de Hilbert y su propiedad universal

En esta sección probaremos el hecho de que existe un continuo muy particular llamado el cubo de Hilbert que tiene la propiedad de que en él cabe cualquier continuo.

El cubo de Hilbert se define como el producto topológico de una cantidad numerable de copias del intervalo $[0,1]$. Es decir, se considera el producto $\mathbb{Q}_H = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$ con la topología producto. Notemos que como $\mathbb{Q}_H$ es producto de conexos y compactos, $\mathbb{Q}_H$ es conexo y compacto. A $\mathbb{Q}_H$ también le podemos dar una métrica definida como

$$d((x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

De manera que $\mathbb{Q}_H$, en efecto, es un continuo.

Ahora veamos que $\mathbb{Q}_H$ contiene copias topológicas de todos los continuos.

Teorema 2.2.1. Si X es un continuo, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{Q}_H$ tal que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

Demostración:
Tomemos una métrica d para X tal que $d(p,q) \leq 1$ para cualquier $p, q \in X$. Sea $\{p_1, p_2, ...\}$ un subconjunto denso y numerable de X. Definimos $f : X \to \mathbb{Q}_H$ como:

$$f(p) = (d(p, p_1), d(p, p_2), ...).$$

Dadas $p, q \in X$ y dadas $i \in \mathbb{N}$, $d(p, p_i) \leq d(p, q) + d(q, p_i)$, de modo que $d(p, p_i) - d(q, p_i) \leq d(p, q)$. Similarmente, $d(q, p_i) - d(p, p_i) \leq d(p, q)$. De manera que

$$|d(p, p_i) - d(q, p_i)| \leq d(p, q)$$

Esto implica que cada una de las funciones $p \rightarrow d(p, p_i)$ es continua. Esto es, que cada una de las funciones coordenadas de la función f es continua, lo cual implica que la función f también es continua.

Ahora veamos que f es inyectiva. Tomemos puntos $p, q \in X$ tal que $p \neq q$.

Sea $\epsilon = \frac{d(p,q)}{2} > 0$. Como $\{p_1, p_2, ...\}$ es un subconjunto denso de X, existen $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \epsilon$. Como

$$d(p, p_n) + d(p_n, q) \geq d(p, q) = 2\epsilon > d(p, p_n) + \epsilon,$$

tenemos que

$$d(p_n, q) > \epsilon.$$

De modo que

$$d(p, p_n) < \epsilon < d(q, p_n).$$

Así que

$$d(p, p_n) \neq d(q, p_n).$$

Y sabemos que

$$f(p) = (d(p, p_1), d(p, p_2), ..., d(p, p_n), ...)$$
$$f(q) = (d(q, p_1), d(q, p_2), ..., d(q, p_n), ...)$$

Esto muestra que $f(p) \neq f(q)$. Por lo tanto ya tenemos que f es inyectiva.

Como toda función continua e inyectiva cuyo dominio es un espacio compacto y el contradominio es un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo en su imagen, así tenemos que f es un homeomorfismo en su imagen. ■

2.3. Continuos indescomponibles

Una clase de continuos como ya mencionamos un poco anteriormente son los llamados continuos indescomponibles, los cuales no son muy fáciles de encontrar.

A un continuo se le llama **Continuo indescomponible** cuando no se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios.

Un ejemplo de un continuo indescomponible muy interesante es el llamado arco iris de Knaster. Veamos a continuación como se construye este continuo.

Tomemos el conjunto de Cantor usual C, contenido en el intervalo $[0,1] \times \{0\}$ (esto es para considerar a C contenido en el plano), con centro en el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ contruimos todas las semicircunferencias contenidas en el semiplano superior que pasa por alguno de los puntos del conjunto C. Con esto se obtiene una cantidad no numerable de circunferencias, a la unión de todas ellas le llamaremos A_1. El conjunto A_1 no es conexo y de hecho tiene una cantidad no numerable de componentes, cada una de las semicircunferencias es una componente. Para conectarlo un poco más, consideremos ahora todas las semicircunferencias con centro en el punto $(\frac{5}{6}, 0)$, contenidas en el semiplano inferior y que pasa por alguno de los puntos del conjunto $(C \cap [\frac{2}{3}, 1]) \times \{0\}$. Llamaremos A_2 a la unión de todas estas semicircunferencias. El conjunto $A_1 \cup A_2$ ya es más conexo que A_1 pero todavía tiene una cantidad no numerable de componentes.

Ahora repetimos la operación pero con semicircunferencias centradas en el punto $(\frac{5}{18}, 0)$, que pasan por alguno de los puntos del conjunto $(C \cap [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]) \times \{0\}$ y que estan contenidas en el semiplano inferior. A la unión de éstas le llamamos A_3.

Repetimos este mismo proceso para las semicircunferencias con centro en

$$(\tfrac{5}{54}, 0), (\tfrac{5}{162}, 0), ..., (\tfrac{5}{2 \cdot 3^n}, 0), ...$$

y que pasan por los conjuntos

$$(C \cap [\tfrac{2}{27}, \tfrac{1}{9}]) \times \{0\}, (C \cap [\tfrac{2}{81}, \tfrac{1}{27}]) \times \{0\}, ..., (C \cap [\tfrac{2}{3^n}, \tfrac{1}{3^{n-1}}]) \times \{0\}, ...$$

para obtener conjuntos $A_4, A_5, A_6, ...A_n, ...$

Finalmente, el arcoiris de Knaster se define como

$$K = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n \cup ...$$

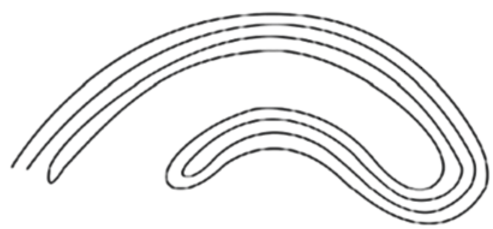


Figura 2.13: Continuo arco iris de Knaster

Capítulo 3

Hiperespacios

En este capítulo se estudiarán a los hiperespacios y algunas de sus propiedades. Este capítulo consta de cinco secciones en donde definiremos algunos hiperespacios, dotaremos de una métrica a 2^X y veremos algunas propiedades de 2^X y $C(X)$, así como la convergencia, conexidad y compacidad.

3.1. Definición de $\mathbf{2^X}$, $\mathbf{C(X)}$, $\mathbf{F_1(X)}$ y $\mathbf{F_n(X)}$

Los **Hiperespacios** son ciertas familias de subconjuntos de un continuo, con alguna característica particular.

Los hiperespacios más comunes de un continuo X son:

El hiperespacio de cerrados de X

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío }\}$$

El hiperespacio de subcontinuos de X

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo }\}$$

El hiperespacio de singulares de X

$$F_1(X) = \{\{x\} \in 2^X : x \in X\}$$

En general tenemos al hiperespacio

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos }\}$$

Como podemos notar, los espacios $C(X)$ y $F_n(X)$ se definen como subespacios de 2^X. Como 2^X contiene a los demás hiperespacios, para darle una métrica a todos ellos bastará con dársela a 2^X.

En la siguiente sección estudiaremos la métrica en 2^X, conocida como la métrica de Hausdorff.

3.2. Métrica de Hausdorff en $\mathbf{2^X}$ y propiedades

A los espacios de la sección 3.1 se les da una métrica como ya se mencionó, pero antes de presentarla veamos la definición de algunos subconjuntos especiales de X, que nos serán útiles posteriormente.

Definición 3.2.1. Sea X un continuo. Dado $\epsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$ definimos:

(1) El diámetro de A

$$diam(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}.$$

(2) La bola de radio ϵ con centro en x

$$B_d(\epsilon, x) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}.$$

(3) La nube de radio ϵ con centro en A

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \epsilon\}.$$

Notemos que $N(\epsilon, A) = \cup_{a\in A} B_d(\epsilon, a)$ por lo que es un abierto en X.

Otra observación importante e inmediata es que para $A, B \in 2^X$ se cumple que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$.

Ahora si ya estamos listos para definir la métrica en 2^X.

Definición 3.2.2. Dados $A, B \in 2^X$, se define la métrica de Hausdorff para 2^X como:

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$$

Veamos en el siguiente teorema que en efecto H es una métrica.

Teorema 3.2.3. *H es una métrica para 2^X.*

Demostración:
a) Está bien definida.

Sean $A, B \in 2^X$. Como $A \neq \emptyset$ existe $a_0 \in A$. Como B es cerrado y $B \subseteq X$ y X es compacto, B es compacto, por lo que B es acotado, es decir, existe $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ tal que $B \subseteq B(\delta, x_0)$. Sea $\epsilon = d(x_0, a_0) + \delta > 0$. Entonces

$$B \subset B(\epsilon, a_0) \subseteq N(\epsilon, A)$$

En efecto, si $b \in B$ entonces

$$d(a_0, b) \leq d(a_0, x_0) + d(x_0, b) < d(a_0, x_0) + \delta = \epsilon$$

por lo tanto

$$B \subseteq N(\epsilon, A).$$

Análogamente, como $B \neq \emptyset$ existe $b_0 \in B$. Como $A \neq \emptyset$ y A es cerrado con $A \subseteq X$ y X es compacto, entonces A es compacto por lo que A es acotado, es decir, existe $x_1 \in X$, $\delta_1 > 0$ tal que

$$A \subseteq B(\delta_1, x_0).$$

Sea $\epsilon_1 = d(x_1, b_0) + \delta_1 > 0$. Así

$$A \subseteq B(\epsilon_1, b_0) \subseteq N(\epsilon_1, B).$$

Sea $\epsilon_2 = \max\{\epsilon, \epsilon_1\}$ entonces

$$B \subseteq N(\epsilon, A) \subseteq N(\epsilon_2, A)$$

y

$$A \subseteq N(\epsilon_1, B) \subseteq N(\epsilon_2, B),$$

por lo tanto tenemos que

$$\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(\epsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\epsilon, A)\} \neq \emptyset$$

y está acotado inferiormente por cero, así que por el axioma del ínfimo existe

$$\inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(\epsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\epsilon, A)\}.$$

Por lo tanto, $H(A, B)$ está bien definida.

b) Claramente, para toda $A, B \in 2^X$ tenemos que $H(A, B) \geq 0$ ya que es ínfimo de números positivos.

c) Para toda $A, B \in 2^X$ se cumple $H(A,B) = H(B,A)$ ya que A y B juegan papeles simétricos.

d) $H(A,B) = 0$ si y sólo si, $A = B$.

($\Leftarrow$) Si $A = B$ entonces

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(\epsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\epsilon, A)\} = 0$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $H(A,B) = 0$. Por demostrar que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Sea $b \in B$. Como A es cerrado, probemos que $b \in \overline{A}$ y así $B \subseteq \overline{A} = A$. Ahora para probar que $b \in \overline{A}$ tomemos $\delta > 0$ y veamos que $B(\delta, b) \cap A \neq \emptyset$.

Como

$$\delta > 0 = H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(\epsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\epsilon, A)\}.$$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\delta > \epsilon$ y $b \in B \subseteq N(\epsilon, A) \subseteq N(\delta, A)$.

Esto es,

$$b \in N(\delta, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A, d(x,a) < \delta\}$$

entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \delta$. De aquí que,

$$a \in B(\delta, b) \cap A,$$

luego

$$B(\delta, b) \cap A \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $b \in \overline{A}$ y así $B \subseteq \overline{A} = A$ entonces $B \subseteq A$. Análogamente $A \subseteq B$. Por lo tanto, $A = B$

e) La desigualdad del triángulo, $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$.

Para esto, primero probemos lo siguiente:

Sea X un continuo, A, B y $C \in 2^X$ y $\epsilon, \delta > 0$. Si $A \subseteq N(\epsilon, C)$ y $C \subseteq N(\delta, B)$ entonces $A \subseteq N(\epsilon + \delta, B)$.

Sea $a \in A \subseteq N(\epsilon, C)$ entonces existe $c \in C$ tal que $d(c,a) < \epsilon$. Como $c \in C \subseteq N(\delta, B)$ entonces existe $b \in B$ tal que $d(c,b) < \delta$.

Debemos probar que existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \epsilon + \delta$. Usando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \epsilon + \delta$$

Por lo tanto, $a \in N(\epsilon + \delta, B)$. Entonces,

$$A \subseteq N(\epsilon + \delta, B).$$

Ahora si probemos la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned}
H(A,C) + H(C,B) &= \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(\epsilon, C) \text{ } y \text{ } C \subseteq N(\epsilon, A)\} \\
&+ \inf\{\delta > 0 : C \subseteq N(\delta, B) \text{ } y \text{ } B \subseteq N(\delta, C)\} \\
&= \inf\{\epsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\epsilon, C), C \subset N(\epsilon, A), \\
&\quad C \subseteq N(\delta, B), B \subseteq N(\delta, C)\} \\
&\geq \inf\{\epsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\epsilon + \delta, B) \text{ } y \text{ } B \subseteq N(\epsilon + \delta, A)\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : A \subseteq N(\lambda, B) \text{ } y \text{ } B \subseteq N(\lambda, A)\} \\
&= H(A, B).
\end{aligned}$$

De esta forma ya tenemos que,

$$H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B).$$

Por lo tanto, H es una métrica para 2^X . ■

A continuación, en los siguientes teoremas se muestran propiedades importantes de la métrica de Haudorff las cuales serán de gran utilidad para probar teoremas posteriores.

Teorema 3.2.4. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X y $A \in 2^X$ tal que $A \subseteq U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subseteq U$.

Demostración:
Si $U = X$ cualquier δ sirve. Supongamos que $U \neq X$. Sea

$$\delta = \inf\{d(a,x) : a \in A, x \in X \setminus U\}.$$

Afirmamos que $\delta > 0$, pues si $\delta = 0$ como d es una función continua y $A \times (X \setminus U)$ es cerrado en $X \times X$ entonces $A \times (X \setminus U)$ es un compacto y no vacío, así que existe un elemento $(a,x) \in A \times (X \setminus U)$ tal que $d(a,x) = 0$, y de aquí que $a = x$ lo cual es una contradicción ya que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Por lo tanto $\delta > 0$.

Probemos ahora que $N(\delta, A) \subseteq U$. Sea $x \in N(\delta, A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \delta$.

Si suponemos que $x \notin U$ entonces por definición de δ tendríamos que $\delta \leq d(a,x)$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, si $x \in U$ entonces $N(\delta, A) \subseteq U$. ■

Teorema 3.2.5. Si $\delta < \epsilon$ entonces $N(\delta, B) \subseteq N(\epsilon, B)$.

Demostración:
Sea $x \in N(\delta, B)$ entonces existe $b \in B$ tal que $d(x,b) < \delta < \epsilon$ y de aquí que existe $b \in B$ tal que $d(x,b) < \epsilon$. Por lo tanto $x \in N(\epsilon, B)$. ■

Notemos que con la métrica de Haudorff pasamos de medir en 2^X a probar contenciones de subconjuntos de X y también es importante para probar continuidad de funciones en hiperespacios, como muestra de su utilidad veamos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.6. Sea $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \epsilon$ si y sólo si, $A \subseteq N(\epsilon, B)$ y $B \subseteq N(\epsilon, A)$.

Demostración:
Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{E}(A,B) = \{\delta > 0 : A \subseteq N(\delta, B) \text{ y } B \subseteq N(\delta, A)\}.$$

($\Rightarrow$) Como $H(A,B) < \epsilon$ entonces $\text{ínf}\, \mathcal{E}(A,B) < \epsilon$. Sea $\delta \in \mathcal{E}(A,B)$ tal que $\text{ínf}\, \mathcal{E}(A,B) \leq \delta < \epsilon$. Por definición $A \subseteq N(\delta, B)$ y $B \subseteq N(\delta, A)$. Pero como $\delta < \epsilon$ sabemos que $N(\delta, B) \subseteq N(\epsilon, B)$. Por lo tanto

$$A \subseteq N(\delta, B) \subseteq N(\epsilon, B)$$

y análogamente

$$B \subseteq N(\delta, A) \subseteq N(\epsilon, A).$$

Por lo tanto, $A \subseteq N(\epsilon, B)$ y $B \subseteq N(\epsilon, A)$.

($\Leftarrow$) Probemos que existe $\rho \in (0, \epsilon)$ tal que $A \subseteq N(\rho, B)$ y $B \subseteq N(\rho, A)$.

Primero veamos que el conjunto $\{N(\delta, B) : \delta \in (0, \epsilon)\}$ es una cubierta abierta de A. Para ello consideremos el elemento $a \in A$. Tenemos que $A \subseteq N(\epsilon, B)$ entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \epsilon$, tomemos $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que $d(a,b) < \delta$. Esto nos dice que $a \in N(\delta, B)$ con esto tenemos que

$$A \subset \cup_{\delta \in (0,\epsilon)} N(\delta, B).$$

Como A es compacto, podemos obtener una subcubierta finita de A

$$\{N(\delta_i, B) : \delta_i \in (0, \epsilon), i \in \{1, 2, .., n\}\}.$$

Sea $\delta_0 = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ entonces $A \subseteq N(\delta_0, B)$.

De manera análoga existe $\eta \in (0, \epsilon)$ tal que $B \subseteq N(\eta, A)$. Entonces el número $\rho = \text{máx}\{\delta_0, \eta\}$ satisface que $\rho \in (0, \epsilon)$, luego $A \subseteq N(\rho, B)$ y $B \subseteq N(\rho, A)$. Así que $\rho \in \mathcal{E}(A,B)$.

Por lo tanto, $H(A,B) \leq \rho < \epsilon$. ■

El siguiente teorema nos muestra una manera equivalente de ver a la métrica de Haudorff.

Teorema 3.2.7. Si se define $D : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como:

$$D(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}$$

Entonces $D(A, B) = H(A, B)$.

Demostración:
Sea $r = D(A, B)$. Supongamos que $r \neq H(A, B)$. Tenemos dos casos:

i) $H(A, B) < r$

Por teorema 3.2.6 $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Como A es compacto y d es una función continua, sabemos que existe un elemento $a_0 \in A$ tal que

$$d(a_0, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Como $A \subset N(r, B)$, existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) < r$. De modo que tenemos lo siguiente:

$$\sup\{d(a, B) : a \in A\} = d(a_0, B) \leq d(a_0, b_0) < r$$

Y de manera similar

$$\sup\{d(b, A) : b \in B\} = d(b_0, A) \leq d(b_0, a_0) < r$$

Por definición

$$D(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\} < r = D(A, B)$$

lo cual es una contradicción.

ii) $H(A, B) > r$

Tomemos $s > 0$ tal que $r < s < H(A, B)$. Verifiquemos que $A \subset N(s, B)$.

Consideremos $a \in A$. Como B es compacto, existe un elemento $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) = d(a, B)$. Por tanto

$$d(a, b_a) = d(a, B) \leq \sup\{d(x, B) : x \in A\} \leq D(A, B) = r < s.$$

De esta manera tenemos que, para el elemento a, existe $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) < s$. Así $A \subset N(s, B)$ y de manera similar $B \subset N(s, A)$. Entonces $H(A, B) < s$ lo cual es una contradicción ya que $H(A, B) > s$.

Por lo tanto $H(A, B) = r$. ■

3.3. Subconjuntos y sucesiones de $\mathbf{2^X}$

En este capítulo vamos a generar conjuntos abiertos o cerrados en 2^X a partir de conjuntos abiertos o cerrados en X, además veremos propiedades de las sucesiones en 2^X.

Teorema 3.3.1. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Entonces el conjunto definido por:

$$\mathcal{C}(U) = \{B \in 2^X : B \subset U\}$$

es abierto en 2^X.

Demostración:
Sea $B \in \mathcal{C}(U)$. Por definición $B \subset U$. Y por el teorema 3.2.4 existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, B) \subset U$. A continuación se mostrará que $B_H(\delta, B) \subset \mathcal{C}(U)$.

Sea $C \in B_H(\delta, B)$. Como $H(C, B) < \delta$ entonces $C \subset N(\delta, B) \subset U$ de esta manera $C \in \mathcal{C}(U)$. Con esto tenemos que dado un elemento $B \in \mathcal{C}(U)$, existe el abierto $B_H(\delta, B)$ de 2^X tal que $B_H(\delta, B) \subset \mathcal{C}(U)$, así que $\mathcal{C}(U)$ es un abierto en 2^X. ■

Teorema 3.3.2. Sea $E \in 2^X$. Entonces el conjunto definido por

$$\mathcal{D}(E) = \{B \in 2^X : B \cap E \neq \emptyset\}$$

es un cerrado en 2^X.

Demostración:
Si $E = X$ entonces $\mathcal{D}(E) = \mathcal{D}(X) = 2^X$, el cual es cerrado en 2^X.

Supongamos que $E \neq X$. Como E es cerrado en X, $X \setminus E$ es abierto no vacío de X. Por el teorema anterior $\mathcal{C}(X \setminus E) = \{A \in 2^X : A \subset X \setminus E\}$ es abierto en 2^X de modo que $2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus E)$ es cerrado en 2^X. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X \setminus E) &= \{A \in 2^X : A \subset X \setminus E\} = \{A \in 2^X : A \cap E = \emptyset\} \\ &= 2^X \setminus \{A \in 2^X : A \cap E \neq \emptyset\} = 2^X \setminus \mathcal{D}(E) \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{D}(E) = 2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus E)$ es cerrado en 2^X. ■

Veamos ahora un criterio que nos permite conocer el comportamiento de sucesiones en 2^X.

Teorema 3.3.3. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \subset B$.

(b) $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

(c) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración:
(a) Dado $m \in \mathbb{N}$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{1}{2^{m+1}}$ y $H(B, B_n) < \frac{1}{2^{m+1}}$ para todo $n \geq N_m$. Así tenemos que

$$A \subset N(\tfrac{1}{2^{m+1}}, A_{N_m})$$

y

$$B_{N_m} \subset N(\tfrac{1}{2^{m+1}}, B).$$

Por hipótesis, $A_{N_m} \subset B_{N_m}$. Esto nos lleva por la observación en la prueba del inciso e) del teorema 3.2.3 a que

$$A_{N_m} \subset N(\tfrac{1}{2^{m+1}}, B).$$

Consideremos un elemento $a \in A$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, existen elementos $x \in A_{N_m}$ y $b_m \in B$ tales que $d(x, a) < \frac{1}{2^{m+1}}$ y $d(x, b_m) < \frac{1}{2^{m+1}}$. Utilizando la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$d(a, b_m) \leq d(a, x) + d(x, b_m) < \tfrac{1}{2^{m+1}} + \tfrac{1}{2^{m+1}} = \tfrac{1}{2^m}.$$

De esta manera tenemos la sucesión $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de B, que así formada, converge al elemento a. Como B es cerrado concluimos que $a \in B$, así que $A \subset B$, que es lo que queríamos probar.

(b) Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$ y $H(B, B_n) < \epsilon$ si $n \geq N$.

Sea $n \geq N$. Por lo anterior tenemos que

$$A \subset N(\epsilon, A_n) \text{ y } B \subset N(\epsilon, B_n).$$

Por tanto,

$$A \cup B \subset N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n) = N(\epsilon, A_n \cup B_n).$$

De manera similar, se obtiene que

$$A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A \cup B).$$

Así tenemos que $H(A \cup B, A_n \cup B_n) < \epsilon$. Con esto ya hemos probado que $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$.

(c) Supongamos, por el contrario, que $A \cap B = \emptyset$. Como X es normal, existen dos abiertos ajenos de X, U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Por el teorema 3.2.4, también existe un número $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$ y $N(\delta, B) \subset V$. Por la convergencia de las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \delta$ y $H(B, B_n) < \delta$ para cada $n \geq N$. De esta manera tenemos que $A_n \subset N(\delta, A)$ y $B_n \subset N(\delta, B)$ para cada $n \geq N$. Por tanto

$$A_n \cap B_n \subset N(\delta, A) \cap N(\delta, B) \subset U \cap V = \emptyset$$

para cada $n \geq N$. Lo cual nos lleva a una contradicción ya que, por hipotesis, $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto , $A \cap B \neq \emptyset$. ■

Como una consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.4. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X tal que $\lim B_n = B$, donde $B \in 2^X$. Si $A \in 2^X$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \subset B$

(b) $\lim(A \cup B_n) = A \cup B$

(c) Si $A \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$

(d) Si $B_n \subset A$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $B \subset A$

Demostración:
Basta aplicar el teorema anterior a la sucesión constante $\{A\}_{n=1}^{\infty}$ y a la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Teorema 3.3.5. Sea F un cerrado no vacío de X. Entonces el subconjunto

$$\mathcal{E}(F) = \{B \in 2^X : F \subset B\}$$

es un cerrado en 2^X.

Demostración:
Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{E}(F)$ que converge a un elemento $B \in 2^X$. Por definición de $\mathcal{E}(F)$ tenemos que $F \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por el corolario 3.3.4 $F \subset B$. Así que $B \in \mathcal{E}(F)$. Por lo tanto $\mathcal{E}(F)$ es cerrado en 2^X. ■

Teorema 3.3.6. Sea E un cerrado no vacío de X. Entonces el subconjunto

$$\mathcal{C}(E) = \{B \in 2^X : B \subset E\}$$

es un cerrado en 2^X.

Demostración:
Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{C}(E)$ que converge a un elemento $B \in 2^X$. Entonces $B_n \subset E$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y por el corolario 3.3.4 obtenemos que $B \subset E$. Así $B \in \mathcal{C}(E)$, lo que nos dice que $\mathcal{C}(E)$ es un subconjunto cerrado de 2^X. ■

Teorema 3.3.7. Sea U un abierto no vacío de X. Entonces el subconjunto

$$\mathcal{D}(U) = \{B \in 2^X : B \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto en 2^X.

Demostración:
La prueba es clara si $U = X$. Supongamos que $U \neq X$.

Como U es abierto en X, $X \setminus U$ es cerrado no vacío de X. Por el teorema anterior $\mathcal{C}(X \setminus U)$ es cerrado en 2^X. Notemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(U) &= \{B \in 2^X : B \cap U \neq \emptyset\} = 2^X \setminus \{B \in 2^X : B \cap U = \emptyset\} \\ &= 2^X \setminus \{B \in 2^X : B \subset X \setminus U\} = 2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus U)\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{D}(U)$ es un abierto en 2^X. ■

Lema 3.3.8. Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de 2^X y F un cerrado de X.

(a) Si $A \cap F \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{A}$, entonces $cl_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(F)$

(b) Si $F \subset A$ para toda $A \in \mathcal{A}$, entonces $cl_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}(F)$

(c) Si $A \subset F$ para toda $A \in \mathcal{A}$, entonces $cl_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(F)$

Demostración:
(a) Notemos que $\mathcal{A} \subset \{A \in 2^X : A \cap F \neq \emptyset\} = \mathcal{D}(F)$.

Como F es cerrado de X, por el teorema 3.3.2 $\mathcal{D}(F)$ también es cerrado.

Por lo tanto $cl_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(F)$.

(b) Sea $\mathcal{E}(F) = \{B \in 2^X : F \subset B\}$ y F un cerrado de X.

Notemos que $\mathcal{A} \subset \{A \in 2^X : F \subset A\} = \mathcal{E}(F)$ que es un cerrado por el teorema 3.3.5.

Por lo tanto $cl_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}(F)$

(c) Recordemos que $\mathcal{C}(F) = \{A \in 2^X : A \subset F\}$.

Notemos que $\mathcal{A} \subset \{A \in 2^X : A \subset F\} = \mathcal{C}(F)$ el cual es un cerrado por el teorema 3.3.6.

Por tanto $cl_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(F)$ ■

Teorema 3.3.9. Sea Z un subcontinuo de X. Si existe una sucesión de subcontinuos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tales que $Z = \cap_{n=1}^{\infty} Z_n$, entonces $C(Z) = \cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$.

Demostración:
Veamos que $C(Z) \subset \cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$.

Consideremos $A \in C(Z)$ y $m \in \mathbb{N}$. Como $A \subset Z = \cap_{n=1}^{\infty} Z_n \subset Z_m$, así $A \in C(Z_m)$. Como m es un número natural cualquiera, tenemos que $A \in \cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$. Con esto obtenemos que $C(Z) \subset \cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$.

Ahora veamos que $\cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n) \subset C(Z)$.

Sea $A \in \cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$ entonces $A \in C(Z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De manera que $A \subset Z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto $A \subset \cap_{n=1}^{\infty} Z_n = Z$ así que como $A \subset Z$, $A \in C(Z)$. De modo que $\cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n) \subset C(Z)$.

Por lo tanto, $C(Z) = \cap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$. ■

Teorema 3.3.10. Sea $\epsilon > 0, A \in 2^X$ y $x \in X$. Entonces $A \in B_H(\epsilon, \{x\})$ si y sólo si $A \subset B_d(\epsilon, x)$.

Demostración:
Supongamos que $A \in B_H(\epsilon, \{x\})$. Por el teorema 3.2.6 obtenemos que $A \subset N(\epsilon, \{x\}) = B_d(\epsilon, x)$.

Ahora supongamos que $A \subset B_d(\epsilon, x) = N(\epsilon, \{x\})$. Consideremos un elemento $a_0 \in A$ entonces $d(a_0, x) < \epsilon$. Lo cual nos dice que $\{x\} \subset N(\epsilon, A)$ y utilizando de nuevo el teorema 3.2.6 obtenemos que $H(A, \{x\}) < \epsilon$. ■

3.4. Topología de Vietoris

Una manera alternativa de dotar de una estructura topológica a 2^X sin utilizar a la métrica de Hausdorff es como lo veremos a continuación.

Definición 3.4.1. Sean $S_1, S_2, ..., S_n$ subconjuntos de X. Definimos el subconjunto vietórico generado por $S_1, S_2, ..., S_n$ como

$$< S_1, ..., S_n >= \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^n S_i \text{ y } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para toda } i\}.$$

Teorema 3.4.2. Sean $U_1, ..., U_n$ subconjuntos abiertos de X. Consideremos la familia de subconjuntos de 2^X dada por

$$\mathcal{B} = \{< U_1, ..., U_n >: n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, ..., U_n \text{ son abiertos de } X\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es una base para la topología τ_v llamada topología de Vietoris. Además, τ_v es la misma topología dada por la métrica de Hausdorff.

Demostración:
Para la demostración de este teorema necesitamos probar las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. $\cup\mathcal{B} = 2^X$.

Dado $A \in 2^X$, por definición de 2^X tenemos que $A \subset X$, de manera que $A \in < X >$. Así que $2^X \subset < X >$. Por lo tanto tenemos las siguientes contenciones

$$2^X \subset < X > \subset \cup\mathcal{B}$$

Como $\mathcal{B}$ es un subconjunto de subconjuntos de 2^X tenemos que

$$\cup\mathcal{B} \subset 2^X$$

Por lo tanto $\cup\mathcal{B} = 2^X$.

Afirmación 2. Sean $\mathcal{U} =< U_1, ..., U_n >$ y $\mathcal{V} =< V_1, ..., V_m >$ elementos de $\mathcal{B}$. Sea $U = \cup_{i=1}^n U_i$ y $V = \cup_{i=1}^m V_i$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cap \mathcal{V} &= < U_1, ..., U_n > \cap < V_1, ..., V_m > \\ &= < U_1 \cap V, ..., U_n \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U > \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se tiene por lo siguiente, notemos que

$$U \cap V = (U \cap V_1) \cup ... \cup (U \cap V_m) \cup (V \cap U_1) \cup ... \cup (V \cap U_n)$$

Fijemos $j \in \{1, ..., m\}$. Si $A \subset U$ y $A \cap V_j \neq \emptyset$ entonces $A \cap V_j \subset U \cap V_j$, lo cual implica que $A \cap (U \cap V_j) = A \cap V_j \neq \emptyset$. También tenemos que si $A \cap (V_j \cap U) \neq \emptyset$ entonces $A \cap V_j \neq \emptyset$.

De manera similar se prueba que para $i \in \{1, ..., n\}$ si $A \subset V$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ entonces $A \cap (V \cap U_i) = A \cap U_i \neq \emptyset$ y si $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$ entonces $A \cap U_i \neq \emptyset$.

De modo que por lo anterior tenemos que, $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ si y sólo si $A \in< U_1 \cap V, ..., U_n \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U >$.

Esta afirmación prueba que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Así la afirmación 1 y 2 muestran que $\mathcal{B}$ es base para la topología τ_v en 2^X.

Afirmación 3. La topología de Vietoris τ_v es equivalente a la topología generada por la métrica de Hausdorff τ_H en 2^X.

Sea $< U_1, ..., U_n >$ un abierto básico de τ_v. Observemos que

$$< U_1, ..., U_n >= \mathcal{C}(\cup_{i=1}^n U_i) \cap (\cap_{i=1}^n \mathcal{D}(U_i))$$

donde $\mathcal{C}(\cup_{i=1}^n U_i)$ y $\mathcal{D}(U_i)$ son los conjuntos definidos en los teoremas 3.3.1 y 3.3.8 y por los mismos teoremas sabemos que estos conjuntos son abiertos en 2^X con la topología τ_H. Por lo tanto $< U_1, ..., U_n >$ es abierto en τ_H.

Sea $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, como A es compacto, existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que

$$A \subset B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_1) \cup ... \cup B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_n).$$

Así que $A \in< B(\frac{\epsilon}{2}, a_1), ..., B(\frac{\epsilon}{2}, a_n) >$. Probemos que $< B(\frac{\epsilon}{2}, a_1), ..., B(\frac{\epsilon}{2}, a_n) >\subset B_H(\epsilon, A)$.

Consideremos $B \in< B(\frac{\epsilon}{2}, a_1), ..., B(\frac{\epsilon}{2}, a_n) >$. Por definición de los abiertos en τ_v

$$B \subset B_d(\tfrac{\epsilon}{2}, a_1) \cup ... \cup B_d(\tfrac{\epsilon}{2}, a_n) = N(\tfrac{\epsilon}{2}, \{a_1, ..., a_n\}) \subset N(\tfrac{\epsilon}{2}, A).$$

Por lo que $B \subset N(\epsilon, A)$.

Sea $a \in A$, de manera que existe $j = 1, ..., n$ tal que $a \in B_d(\frac{\epsilon}{2}, a_j)$. Y por definición del abierto $< B_d(\frac{\epsilon}{2}, a_1), ..., B_d(\frac{\epsilon}{2}, a_n) >$ tenemos que

$$B \cap B_d(\tfrac{\epsilon}{2}, a_j) \neq \emptyset.$$

Tomemos un elemento $b \in B \cap B_d(\frac{\epsilon}{2}, a_j)$. Por lo tanto

$$d(a,b) \leq d(a,a_j) + d(a_j,b) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así $A \subset N(\epsilon, B)$ y por lo tanto $H(A,B) < \epsilon$.

De esta manera $< B_d(\frac{\epsilon}{2}, a_1), ..., B_d(\frac{\epsilon}{2}, a_n) > \subset B_H(\epsilon, A)$. Con esto ya hemos visto que los básicos de τ_H son abiertos en τ_v.

De modo que hemos probado que $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos en 2^X que genera la misma topología dada por la métrica de Hausdorff. ■

3.5. Conexidad y Convergencia en $\mathbf{2^X}$

Primero veamos que el hiperespacio 2^X es conexo, para ello nos apoyaremos en los siguientes teoremas.

Teorema 3.5.1. El conjunto $F(X) = \cup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en 2^X.

Demostración:
Debemos probar que todas las bolas alrededor de todos los elementos de 2^X intersectan a $F(X)$.

Tomemos un elemento cualquiera $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Como el conjunto A es cerrado metido en un compacto, A es compacto y notemos que $\{B(\epsilon, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A, y existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que

$$A \subset B(\epsilon, a_1) \cup B(\epsilon, a_2) \cup ... \cup B(\epsilon, a_n) = N(\epsilon, \{a_1, ..., a_n\})$$

Por otra parte, como $\{a_1, ..., a_n\} \subset A \subset N(\epsilon, A)$, podemos concluir que $H(A, \{a_1, ..., a_n\}) < \epsilon$. De manera que $\{a_1, ..., a_n\} \in B(\epsilon, A) \cap F(X)$. Por lo tanto $F(X)$ es denso en 2^X. ■

Teorema 3.5.2. Sea X^n el producto topológico de n copias del continuo X por si mismo. Sea $g : X^n \to F_n(X)$ la función definida por

$$g(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$$

Entonces g es continua y suprayectiva.

Demostración:
Consideremos la métrica para X^n dada por

$$D((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \text{máx}\{d(x_1,y_1),...,d(x_n,y_n)\}$$

Probemos que g es continua. De hecho, mostraremos directamente que es uniformemente continua.

Tomemos $\epsilon > 0$ y elementos $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in X^n$ tales que

$$D((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \text{máx}\{d(x_1,y_1),...,d(x_n,y_n)\} < \epsilon.$$

Entonces $d(x_i,y_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1,...,n\}$. De modo que

$$\{x_1,...,x_n\} \subset N(\epsilon,\{y_1,...,y_n\}) \text{ y } \{y_1,...,y_n\} \subset N(\epsilon,\{x_1,...,x_n\}).$$

Así tenemos que

$$H(g(x_1,...,x_n),g(y_1,...,y_n)) = H(\{x_1,...,x_n\},\{y_1,...,y_n\}) < \epsilon$$

Por lo tanto g es uniformemente continua.

Para ver que g es suprayectiva, basta con observar que cada elemento de $F_n(X)$ se puede escribir de la forma $\{x_1,...,x_n\}$, pues si empezamos con un conjunto de menos de n elementos, bastará con repetir algunos y esto no cambia el conjunto. ∎

Teorema 3.5.3. El hiperespacio 2^X es conexo.

Demostración:
Dada $n \in \mathbb{N}$, $F_1(X) \subset F_n(X)$ y el conjunto $F_n(X)$ es conexo ya que, por el teorema 3.5.2 $F_n(X)$ es la imagen del conjunto X^n bajo una función continua y por el teorema 1.3.5 tenemos que $F_n(X)$ es conexo.

De manera que el conjunto $F(X) = \cup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es unión de conjuntos conexos con intesección común y por el teorema 1.3.3, dicho conjunto es conexo. Y como su cerradura es 2^X, concluimos que 2^X es conexo. ∎

A continuación probaremos que 2^X es un espacio compacto, pero primero veamos cómo se define la convergencia en 2^X y para ello necesitaremos lo siguiente.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X, definimos:

$$\text{lím inf}\, A_n = \{x \in X : \forall\epsilon > 0, B(\epsilon,x) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para casi toda n (salvo un número finito) }\}.$$

$$\text{lím sup}\, A_n = \{x \in X : \forall\epsilon > 0, B(\epsilon,x) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para una infinidad de n's }\}.$$

Ejemplo 3.5.4. .

1) Sea $X = [0,3] \times [0,1]$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ como

$$A_n = \begin{cases} [1,3] \times \{\frac{1}{n}\} & \text{si n es impar} \\ [0,2] \times \{\frac{1}{n}\} & \text{si n es par} \end{cases}$$

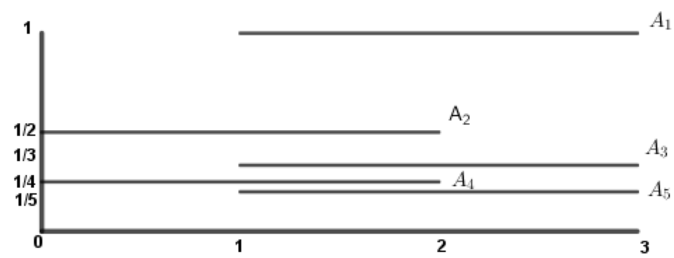


Figura 3.1

Entonces $\liminf A_n = [1,2] \times \{0\}$ y $\limsup A_n = [0,3] \times \{0\}$.

2) Sea $X = [0,3] \times [0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ como

$$A_n = \begin{cases} [2,3] \times \{\frac{1}{n}\} & \text{si n es impar} \\ [0,1] \times \{\frac{1}{n}\} & \text{si n es par} \end{cases}$$

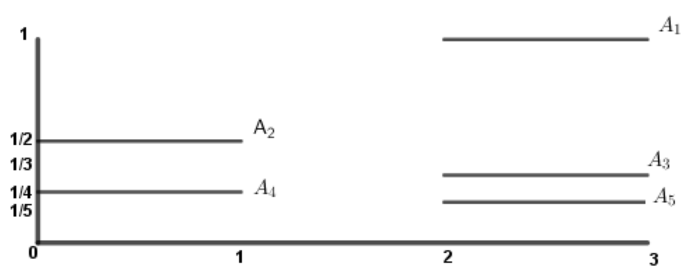


Figura 3.2

Entonces $\liminf A_n = \emptyset$ y $\limsup A_n = ([0,1] \cup [2,3]) \times \{0\}$.

3) Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ definida por

$$A_n = [0,1] \times \{\tfrac{1}{n}\}$$

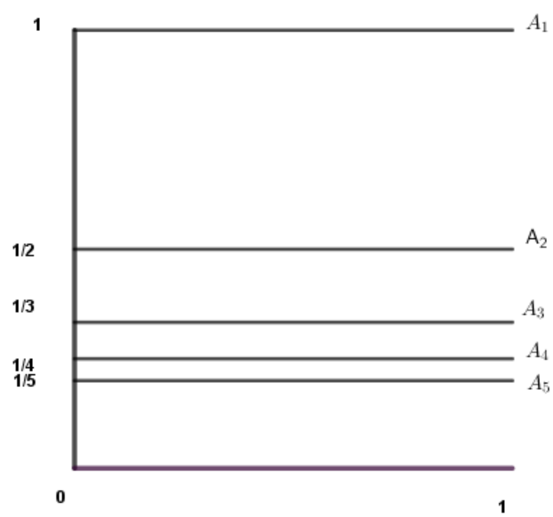


Figura 3.3

Entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = [0,1] \times \{0\}$.

Veamos ahora algunas propiedades del límite inferior y el límite superior.

Teorema 3.5.5. Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en 2^X. Entonces:

i) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

ii) $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ son conjuntos cerrados.

iii) $\limsup A_n \neq \emptyset$ para toda $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$.

Demostración:
(i) Sea $x \in \liminf A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todos los n's salvo un número finito $\}$. Por demostrar que $x \in \limsup A_n$.

Como $x \in \liminf A_n$ entonces para toda $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n salvo un número finito de $n's$, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \ \forall n > N.$$

De esta manera $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, entonces $x \in \limsup A_n$. Por lo tanto, $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

(ii) Probemos que $\overline{\limsup A_n} \subseteq \limsup A_n$ y así $\limsup A_n = \overline{\limsup A_n}$.

Y de esta forma $\limsup A_n$ es cerrado en X.

Sea $x \in \overline{\limsup A_n}$ y sea $\epsilon > 0$, por definición de cerradura tenemos que

$$\limsup A_n \cap B(\epsilon, x) \neq \emptyset$$

De modo que existe $z \in \limsup A_n \cap B(\epsilon, x)$ como $z \in B(\epsilon, x)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B(\delta, z) \subseteq B(\epsilon, x) \quad (1)$$

Tomemos $\delta = \epsilon - d(z, x)$, así se satisface (1).

Ahora como $z \in \limsup A_n$ entonces para $\delta > 0$, $B(\delta, z) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Por lo tanto, $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's pues $B(\delta, z) \subseteq B(\epsilon, x)$, y por lo tanto $x \in \limsup A_n$.

Así,

$$\overline{\limsup A_n} \subseteq \limsup A_n \subseteq \overline{\limsup A_n}.$$

Por lo tanto, $\limsup A_n$ es cerrado en X.

Análogamente se prueba que $\liminf A_n$ es cerrado. Sea $x \in \overline{\liminf A_n}$ y sea $\epsilon > 0$ entonces

$$\liminf A_n \cap B(\epsilon, x) \neq \emptyset$$

de aquí que existe un z tal que $z \in B(\epsilon, x)$ y $z \in \liminf A_n$, así existe $\delta = \epsilon - d(z, x) > 0$ tal que

$$B(\delta, z) \subseteq B(\epsilon, x).$$

Ahora, $z \in \liminf A_n$ entonces para toda $\delta > 0$, $B(\delta, z) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n (salvo un número finito), de aquí que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n. Por lo tanto $x \in \liminf A_n$.

Así

$$\overline{\liminf A_n} \subseteq \liminf A_n \subseteq \overline{\liminf A_n}.$$

Por lo tanto, $\liminf A_n$ es cerrado.

(iii) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$, así $A_n \neq \emptyset$ y cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $a_n \in A_n \subseteq X$ para cada $n \in \mathbb{N}$ así tenemos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, que es compacto. Entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ que converge, es decir, existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = x.$$

Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_{n_k}, x) < \epsilon \ \forall k \geq K$, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{n_k} \in B(\epsilon, x) \ \forall k \geq K.$$

Así, para toda $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. De aquí que $x \in \limsup A_n$. Por lo tanto, $\limsup A_n \neq \emptyset$ para toda $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$. ■

Una manera de caracterizar a los elementos del límite superior y del límite inferior de una sucesión de 2^X nos lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.5.6. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$.

a) $x \in \liminf A_n$, si y sólo si, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$ y $x_n \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k} \ \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$.

Demostración:
a) $(\Leftarrow)$ Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ y $x_n \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ como $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon \ \forall n \geq N$ y $x_n \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Así para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(\epsilon, x) \ \forall n \geq N$ con $x_n \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí que $x_n \in B(\epsilon, x) \cap A_n \ \forall n \geq N$. Esto es

$$x \in \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para casi toda n }\} = \liminf A_n.$$

Por lo tanto, $x \in \liminf A_n$.

$(\Rightarrow)$ Sea $x \in \liminf A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in A_n$ de tal forma que

$$d(x, x_n) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\}$$

donde d es la métrica de X. Notemos que los $x_n's$ estan bien definidos para toda $n \in \mathbb{N}$ pues para $x \in X$ fijo $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = d(x, y)$ es continua y A_n es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces f alcanza un mínimo en A_n, esto es, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A_n$ tal que

$$f(x_n) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\}.$$

Ahora probemos que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ en X. Sea $\epsilon > 0$, como $x \in \liminf A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para casi toda n }\}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ $\forall n \geq N$. Así para cada $n \geq N$ existe $a_n \in A_n$ y $a_n \in B(\epsilon, x)$, es decir, $d(x, a_n) < \epsilon$ pero

$$d(x, x_n) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\} \leq d(x, a_n) < \epsilon,$$

de aquí que para cada $n \geq N$ $d(x, x_n) < \epsilon$. Por lo tanto $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

b) $(\Leftarrow)$ Supongamos que existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k} \ \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$.

Por demostrar que $x \in \limsup A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's $\}$.

Como $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \epsilon$ $\forall k \geq K$, es decir, $x_{n_k} \in B(\epsilon, x)$, de esta manera

$$x_{n_k} \in B(\epsilon, x) \cap A_{n_k} \ \forall k \geq K.$$

Así para toda $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$.

Por los tanto $x \in \limsup A_n$

($\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \limsup A_n$, así para toda $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$.

Ahora tomemos $\epsilon = 1$, $B(1, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, tomemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in B(1, x) \cap A_{n_1}$ entonces $d(x, x_{n_1}) < 1$ y $x_{n_1} \in A_{n_1}$.

Tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}$, $B(\frac{1}{2}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, tomemos $n_2 > n_1$ tal que $B(\frac{1}{2}, x) \cap A_{n_2} \neq \emptyset$ y así existe $x_{n_2} \in B(\frac{1}{2}, x)$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$, es decir, $d(x, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$.

Inductivamente existen naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. ■

Teorema 3.5.7. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a $A \in 2^X$ si y sólo si, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que para $n \to \infty$ $A_n \to A$ en 2^X con la métrica de Hausdorff. Por demostrar que $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. Sabemos que $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$, así es suficiente probar que:

(1) $A \subseteq \liminf A_n$ y

(2) $\limsup A_n \subseteq A$

de esta forma $A \subseteq \liminf A_n \subseteq A$ entonces $\liminf A_n = A$ y $A \subseteq \limsup A_n \subseteq A$ entonces $\limsup A_n = A$.

Demostración de (1). Sea $a \in A$. Debemos probar que $a \in \liminf A_n$.

Sea $\epsilon > 0$ como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con la métrica de Hausdorff entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$ si $n \geq N$.

Notemos que

$$H(A, A_n) = \inf\{\lambda > 0 : A \subseteq N(\lambda, A_n) \text{ y } A_n \subseteq N(\lambda, A)\} < \epsilon$$

entonces para $n \geq N$, $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$, así para $a \in A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ tenemos $a \in N(\epsilon, A_n)$, de aquí que existe $x_n \in A_n$ tal que $d(x_n, a) < \epsilon$ si $n \geq N$, luego para $\epsilon > 0, A_n \cap B(\epsilon, a) \neq \emptyset$ para una infinidad de n's ($n \geq N$). Así $a \in \liminf A_n$. Por lo tanto $A \subseteq \liminf A_n$.

Demostración de (2). Supongamos lo contrario, es decir, $\lim\sup A_n \nsubseteq A$. Así existe $x \in \lim\sup A_n$ tal que $x \notin A$. Como A es cerrado entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(\epsilon, x) \cap A = \emptyset.$$

Ahora como $x \in \lim\sup A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's $\}$. Entonces dicho $\epsilon > 0$ cumple que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ entonces para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(A_n, A) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ para } n \geq N,$$

es decir, $A \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$ para $n \geq N$, tomemos $M \geq N$ tal que

$$B(\tfrac{\epsilon}{2}, x) \cap A_M \neq \emptyset$$

y sea $z \in B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_M$ entonces $d(x, z) < \frac{\epsilon}{2}$ y $z \in A_M \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$.

Así $d(x, z) < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $a \in A$ tal que $d(a, z) < \frac{\epsilon}{2}$, de aquí que

$$d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

entonces $d(x, a) < \epsilon$ para $a \in A$, luego $B(\epsilon, x) \cap A \neq \emptyset$ con lo cual llegamos a una contradicción. Por lo tanto $\lim\sup A_n \subseteq A$.

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ entonces $\lim\inf A_n = A = \lim\sup A_n$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\lim\inf A_n = \lim\sup A_n$. Por demostrar que $A_n \to A$ en 2^X si $n \to \infty$.

Sea $A = \lim\sup A_n$ así $A \neq \emptyset$ y A es cerrado, es decir, $A \in 2^X$. Probemos que $A_n \to A$ con la métrica de Hausdorff. Sea $\epsilon > 0$ probemos que:

(a) existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ $\forall n \geq M_1$.

(b) existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$ $\forall n \geq M_2$.

Demostración de (a). Observemos que la familia $\{B(\frac{\epsilon}{2}, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta para A, y como A es cerrado no vacío contenido en el compacto X entonces A es compacto, entonces existe una subcubierta finita, esto es, existe $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_m \in A$ tal que

$$A \subseteq B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_1) \cup B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_2) \cup ... \cup B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_m),$$

es decir,

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{m} B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_i).$$

Ahora como $A = \lim\inf A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todas las $n's$ salvo un número finito $\}$ y $a_i \in A$ $\forall i = 1, .., m$. Luego $B(\lambda, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n, y para cada $\lambda > 0$, así para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_i$ entonces $B(\frac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$.

Sea $M_1 = \max\{N_1, ..., N_m\}$. Así dada $n \geq M_1$ y $i \in \{1, .., m\}$ entonces

$$B(\tfrac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n \neq \emptyset.$$

Afirmación: $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ $\forall n \geq M_1$. En efecto, sea $n \geq M_1$ y $a \in A = \cup_{i=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, a_i)$ entonces existe $i_0 \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $a \in B(\frac{\epsilon}{2}, a_{i_0})$, es decir, $d(a, a_{i_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Además para los $n \geq M_1$ existe $x \in B(\frac{\epsilon}{2}, a_{i_0}) \cap A_n$. Luego

$$d(a, x) \leq d(a, a_{i_0}) + d(a_{i_0}, x) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así $d(a, x) < \epsilon$ entonces $a \in N(\epsilon, A_n)$ para $n \geq M_1$. Por lo tanto $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ $\forall n \geq M_1$.

Demostración de (b). Supongamos que (b) es falso esto es, $\forall N \in \mathbb{N}$ existen $n's \geq N$ tal que $A_n \nsubseteq N(\epsilon, A)$. Así para

$$\begin{aligned} N = 1 &\text{ existe } n_1 \geq 1 \text{ tal que } A_{n_1} \nsubseteq N(\epsilon, A). \\ N = n_1 + 1 &\text{ existe } n_2 \geq n_1 \text{ tal que } A_{n_2} \nsubseteq N(\epsilon, A). \\ N = n_2 + 1 &\text{ existe } n_3 \geq n_2 \text{ tal que } A_{n_3} \nsubseteq N(\epsilon, A). \end{aligned}$$

Así de manera inductiva, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ tal que

$$A_{n_k} \nsubseteq N(\epsilon, A) \; \forall k \in \mathbb{N}$$

luego para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n_k} \in A_{n_k} \setminus N(\epsilon, A) \subseteq X$ como X es compacto, existe $x_0 \in X$ y una subsucesión $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x_0$. Observemos que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_{n_{k_i}} \in X \setminus N(\epsilon, A)$ y $X \setminus N(\epsilon, A)$ es un conjunto cerrado en X entonces $\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x_0 \in X \setminus N(\epsilon, A)$, entonces $x_0 \notin A$.

Ahora, $\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x_0$ y $\{A_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ entonces por la caracterización de $\limsup A_n$ que se dio en el teorema anterior se tiene que $x_0 \in \limsup A_n = A$ entonces $x_0 \in A$ lo cual nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subseteq N(\epsilon, A) \; \forall n \geq M_2.$$

Ahora ya probados (a) y (b) hacemos $N = \max\{M_1, M_2\}$ entonces para $n \geq N$ $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$, entonces $H(A, A_n) < \epsilon$ si $n \geq N$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con la métrica de Hausdorff. ■

3.6. Compacidad de $\mathbf{2^X}$ y $\mathbf{C(X)}$

Definición 3.6.1. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d), diremos que es una sucesión de Cauchy, si y sólo si, para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces , $d(a_n, a_m) < \epsilon$.

El siguiente teorema será útil para probar la completez del hiperespacio 2^X. Probaremos que el espacio 2^X es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy en 2^X converge a un elemento en 2^X.

Teorema 3.6.2. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en el hiperespacio 2^X del continuo X. Entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a un $A_0 \in 2^X$.

Demostración:
Por el teorema 3.5.5 el único candidato para $\lim_{n\to\infty} A_n$ es $A_0 = \limsup A_n$ que es un conjunto no vacío y cerrado en X es decir, $A_0 \in 2^X$.

Ahora

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_0 \text{ si y sólo si, } \liminf A_n = A_0 \text{ y } \limsup A_n = A_0.$$

Para ver que $\lim_{n\to\infty} A_n = A_0$ con la métrica de Hausdorff es suficiente ver que $\limsup A_n \subseteq \liminf A_n$.

Sea $x \in \limsup A_n$. Por demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$ y así $x \in \liminf A_n$ y por tanto $\limsup A_n \subseteq \liminf A_n$. Observemos que como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy entonces dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(A_n, A_m) < \tfrac{\epsilon}{2} \ \forall n, m \geq N.$$

Ahora, como $x \in \limsup A_n$ entonces $B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Tomemos $M_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 \geq N$ que satisfaga que $B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_{M_0} \neq \emptyset$. Así dado $n \geq N$ cualquiera $H(A_{M_0}, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ pues $M_0, n \geq N$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Por lo tanto

$$A_{M_0} \subseteq N(\tfrac{\epsilon}{2}, A_n) \ \forall n, M_0 \geq N$$

Ahora bien, sea $y \in A_{M_0} \cap B(\frac{\epsilon}{2}, x)$ entonces $y \in A_{M_0} \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $y \in B(\frac{\epsilon}{2}, x)$ $\forall n, M_0 \geq N$ entonces existe $z \in A_n$ tal que $d(y, z) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n, M_0 \geq N$. De aquí que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \ \forall n, M_0 \geq N.$$

Así $z \in B(\epsilon, x)$ y de aquí que

$$B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \ \forall n \geq N.$$

Por lo que $x \in \liminf A_n$. Por lo tanto $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} A_n = A_0$ con la métrica de Hausdorff. ■

Veamos el siguiente lema, el cual es necesario para probar que 2^X es compacto.

Lema 3.6.3. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión en 2^X. Dado $\epsilon > 0$, $J \subseteq \mathbb{N}$, J infinito entonces existe $J_1 \subseteq J$ infinito tal que $H(A_n, A_r) \leq \epsilon$ para todo $n, r \in J_1$.

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$, $J \subseteq \mathbb{N}$, con J infinito. Como X es compacto existe $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_m \in X$ tal que

$$X = B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_1) \cup ... \cup B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_m) = \cup_{i=1}^{m} B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_i).$$

Para cada $n \in J$ definamos

$$k_n = \{i \in \{1, 2, ..., m\} : A_n \cap B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset\}.$$

Observemos que las $k_n' s$ estan bien definidas por la compacidad de X.

Ahora, sea $H = \{F : F \subseteq \{1, 2, ..., m\}\}$ entonces H es un conjunto finito y tiene 2^m elementos.

Consideremos la función $f : J \to H$ tal que $f(n) = k_n$ por la compacidad de X, f esta bien definida, además $J = \cup\{f^{-1}(\{k\}) \subseteq J : k \in H\}$, esto es,

$$J = \cup_{k \in H} f^{-1}(\{k\}) \text{ con } f^{-1}(\{k\}) \subseteq J \ \forall k \in H.$$

Ahora bien, como J es infinito y $J = \cup_{k \in H} f^{-1}(\{k\})$ es unión finita entonces existe $k \in H$ tal que $f^{-1}(\{k\})$ es infinito.

Definimos $J_1 = f^{-1}(\{k\})$ para el $k \in H$ que existe.

Así $f^{-1}(\{k\}) = J_1$ es infinito y $J_1 = f^{-1}(\{k\}) \subseteq \cup_{k \in H} f^{-1}(\{k\}) = J$, es decir, J_1 es infinito y $J_1 \subseteq J \subseteq \mathbb{N}$.

Afirmación: $H(A_n, A_r) \leq \epsilon$ para toda $n, r \in J_1$. En efecto, sea $G = \{x_i \in X : i \in k\}$ es cerrado y no vacío ya que X es compacto, esto es, $G \in 2^X$. Sea $n \in J_1 = f^{-1}(\{k\})$ con $k \in H$. Veamos que dado $n \in J_1$ se tiene que $H(A_n, G) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Si $n \in J_1$ entonces $f(n) = k$, es decir, $f(n) = k_n = k$, esto es, $k_n = \{i \in \{1, 2, ..., m\} : A_n \cap B(\frac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset\} = k$ y $G = \{x_i \in X : i \in k\}$. Por lo que

$$G = \{x_i \in X : A_n \cap B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset\}.$$

Así si $x_i \in G$ entonces $A_n \cap B(\frac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset$ entonces existe $a \in A_n$ tal que $d(a, x_i) < \frac{\epsilon}{2}$ y de aquí que $x_i \in N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$.

Por lo tanto

$$G \subseteq N(\tfrac{\epsilon}{2}, A_n) \qquad (1)$$

Ahora sea $x \in A_n \subseteq X = \cup_{i=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, x_i)$ entonces existe $i_0 \in \{1, 2, .., m\}$ tal que $x \in B(\frac{\epsilon}{2}, x_{i_0})$. Luego

$$A_n \cap B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_{i_0}) \neq \emptyset$$

entonces $x_{i_0} \in G$ y $d(x, x_{i_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto

$$A_n \subseteq N(\tfrac{\epsilon}{2}, G) \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$H(A_n, G) < \tfrac{\epsilon}{2}\ \forall n \in J_1.$$

Como G es arbitrario para $n, r \in J_1$ tenemos

$$H(A_n, A_r) \leq H(A_n, G) + H(G, A_r) \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto $H(A_n, A_r) \leq \epsilon$ para toda $n, r \in J_1$. ■

Teorema 3.6.4. Sea X un continuo, entonces 2^X es compacto.

Demostración:
Por el teorema 3.6.2, es suficiente probar que si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en 2^X entonces existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Construyamos la sucesión de Cauchy, por el lema anterior existe $J_1 \subseteq \mathbb{N}$, J_1 infinito tal que

$$H(A_n, A_r) \leq 1\ \forall n, r \in J_1,$$

ahora podemos encontrar un subconjunto infinito J_2 de J_1 tal que

$$H(A_n, A_r) \leq \tfrac{1}{2}\ \forall n, r \in J_2 \subseteq J_1.$$

Procediendo inductivamente, podemos obtener una sucesión $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que $J_1 \supseteq J_2 \supseteq ... \supseteq ...$ tales que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$H(A_n, A_r) \leq \tfrac{1}{k}\ \forall n, r \in J_n.$$

Para construir la subsucesión tomemos $n_1 \in J_1$. Como J_2 es infinito existe $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$. Escogemos $n_3 \in J_3$ tal que $n_2 < n_3$. Como los $J_k's$ son infinitos, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ tal que $n_k \in J_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Probemos ahora que la subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimedeana existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Afirmamos que si $s, r \geq k$ entonces $H(A_{n_s}, A_{n_r}) < \epsilon$.

Sea $s, r \geq k$ entonces $J_s, J_r \subseteq J_k$ con $n_s \in J_s$ y $n_r \in J_r$. Por tanto $n_s, n_r \in J_k$ y por la elección de J_k tendremos

$$H(A_{n_s}, A_{n_r}) < \tfrac{1}{k} < \epsilon\ \forall s, r \geq k.$$

Por lo tanto $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de Cauchy y por el teorema de completez 3.6.2 tenemos que es convergente en 2^X. Por lo tanto 2^X es compacto. ■

Teorema 3.6.5. $C(X) = \{A \in 2^X :$ A es conexo $\}$ es compacto.

Demostración:
Como $C(X) \subseteq 2^X$ y 2^X es compacto es suficiente probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X.

Sea $A \in \overline{C(X)}$. Como $A \in 2^X$, A es no vacío y cerrado en X, para probar que $A \in C(X)$ falta probar que A es conexo y así $\overline{C(X)} \subseteq C(X)$ y por tanto $C(X)$ es cerrado en 2^X.

Ahora como $A \in \overline{C(X)}$ entonces existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con la métrica de Haudorff.

Supongamos que A no es conexo entonces

$$A = H \cup K$$

donde $H \cap K = \emptyset$ y H, K son cerrados no vacíos en X y por lo tanto compactos.

Sea

$$\epsilon = \min\{d(h,k) : h \in H, k \in K\}$$

entonces como $H \cap K = \emptyset$ y H, K son compactos entonces $\epsilon > 0$. Ahora como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con la métrica de Haudorff entonces para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N$ de modo que $A \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$ y como $A = H \cup K$ entonces

$$A_n \subseteq N(\tfrac{\epsilon}{2}, H) \cup N(\tfrac{\epsilon}{2}, K) \; \forall n \geq N$$

y también

$$K \subseteq A \subseteq N(\tfrac{\epsilon}{2}, A_n) \; \forall n \geq N.$$

Como $A_n \in C(X)$, es decir, A_n es conexo, podemos suponer sin perdida de generalidad que $A_n \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, H)$. Aplicando la observación de la prueba del inciso (e) del teorema 3.2.3 obtenemos que

$$N(\tfrac{\epsilon}{2}, A_n) \subseteq N(\epsilon, H),$$

Así tenemos que

$$K \subseteq N(\epsilon, H)$$

lo cual contradice la elección de $\epsilon = \min\{d(h,k) : h \in H, k \in K\}$.

Así A es conexo y $C(X)$ es cerrado en 2^X. Por lo tanto $C(X)$ es compacto.

■

Capítulo 4

Funciones inducidas en 2^X y $C(X)$

Existen ciertas funciones importantes que involucran a los hiperespacios de continuos, como son las funciones inducidas y la función unión, las cuales se presentarán a continuación en este capítulo.

Teorema 4.0.1. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Se define la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ como:

$$2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

Entonces:

(a) 2^f está bien definida.

(b) 2^f es continua.

(c) $2^f|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$.

(d) 2^f es inyectiva si y sólo si f es inyectiva.

(e) 2^f es suprayectiva si y sólo si f es suprayectiva.

Demostración:
(a) Tenemos que X y Y son continuos métricos, de modo que X es compacto y Y es de Hausdorff, lo cual por los teoremas 1.4.4 y 1.4.3, nos dice que f es una función cerrada y por lo tanto $f(A) \in 2^Y$.

(b) Sea $\epsilon > 0$. Por el teorema 1.4.12 tenemos que f es uniformemente continua de modo que existe $\delta > 0$ tal que si $a, b \in X$ son tales que $d(a,b) < \delta$ entonces $d(f(a), f(b)) < \epsilon$. Tomemos $A, B \in 2^X$ tales que $H(A,B) < \delta$.

Probemos que $H(f(A), f(B)) < \epsilon$. Como $H(A,B) < \delta$ entonces $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$.

Fijemos $a \in A$. Entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$ lo cual implica que $d(f(a), f(b)) < \epsilon$. De este modo $f(A) \subset N(\epsilon, f(B))$ y de manera análoga tenemos que $f(B) \subset N(\epsilon, f(A))$. Por lo tanto $H(f(A), f(B)) < \epsilon$.

(c) Sea $A \in C(X)$. Por (a) tenemos que $f(A)$ es cerrado y como f es continua por el teorema 1.3.5 $f(A)$ es conexo, así que $f(A) \in C(Y)$.

(d) ($\Rightarrow$) Supongamos que 2^f es inyectiva.

Consideremos $a, b \in X$ tales que $f(a) = f(b)$. Esto nos dice que

$$2^f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = 2^f(\{b\}).$$

Y como 2^f es inyectiva $\{a\} = \{b\}$. De modo que $a = b$, por lo que f es inyectiva.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es inyectiva.

Tomemos $A, B \in 2^X$ tales que $2^f(A) = 2^f(B)$. Lo cual nos dice que

$$f(A) = f(B).$$

Sea $a \in A$ entonces $f(a) \in f(A) = f(B)$. De manera que existe $b \in B$ tal que $f(a) = f(b)$. Y como f es inyectiva $a = b$. Así que $a \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. Y de la misma forma $b \in A$, por lo que $B \subset A$. Así $A = B$ por lo tanto 2^f es inyectiva.

(e) ($\Rightarrow$) Supongamos que 2^f es suprayectiva. Sea $a \in X$ y $b \in Y$. Como 2^f es una función suprayectiva se cumple que para toda $B \in 2^Y$ existe $A \in 2^X$ tal que $2^f(A) = B$.

Por definición de 2^f tenemos que

$$B = 2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

así tenemos que para toda $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto f es suprayectiva.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que f es suprayectiva. Consideremos $A \in 2^X$ y $B \in 2^Y$ y sean $a \in A$ y $b \in B$. Como f es suprayectiva tenemos que para toda $b \in Y$ existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$.

Y por definición tenemos que

$$2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\} = b \; \forall b \in B$$

Por lo que $2^f(A) = f(A) = B$. Por lo tanto 2^f es suprayectiva. ∎

A la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ anteriormente definida es llamada función inducida por f.

Ahora a la restricción $2^f|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$ vista en el teorema anterior la denotaremos $C(f)$.

Lema 4.0.2. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre continuos, entonces $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es un homeomorfismo y $C(f^{-1}) = C(f)^{-1}$.

Demostración:
Como f es continua e inyectiva, por el teorema anterior obtenemos que $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es una función bien definida, continua e inyectiva.

Notemos que $C(f^{-1})(A) = f^{-1}(A) = \{f^{-1}(a) : a \in A\}$ es un continuo de X, para toda $A \in C(Y)$ pues $f^{-1} : Y \to X$ tambien es continua por ser f un homeomorfismo.

Además por el teorema anterior tenemos que $C(f^{-1}) : C(Y) \to C(X)$ es una función continua. Verifiquemos ahora que $C(f^{-1}) = C(f)^{-1}$.

Sea $A \in C(Y)$ cabe destacar que

$$C(f)(C(f^{-1})(A)) = C(f)(\{f^{-1}(a) : a \in A\}) = \{f \circ f^{-1}(a) : a \in A\}.$$

Por tanto $C(f) \circ C(f^{-1}) = Id \in C(Y)$.

De igual manera tenemos que

$$\begin{aligned} C(f)(C(f)(A))^{-1} &= C(f)(\{(f(a))^{-1} : a \in A\}) \\ &= C(f)(\{f^{-1}(a) : a \in A\}) \\ &= \{f \circ f^{-1}(a) : a \in A\} \end{aligned}$$

Así $C(f) \circ C(f)^{-1} = Id \in C(Y)$. Esto muestra que $C(f)^{-1} = C(f^{-1})$.

Así que $C(f)$ es una función continua e inyectiva con inversa continua, por lo tanto, es un homeomorfismo. ■

Ya vimos que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo $C(f) : C(X) \to C(Y)$ también lo es, pero hay más, si f cumple esta condición $2^f : 2^X \to 2^Y$ y $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ también son homeomorfismos, lo cual se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 4.0.3. Si X es homeomorfo a Y, entonces:

(a) 2^X es homeormorfo a 2^Y.

(b) $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$.

(c) $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$.

Demostración:
(a) Probemos que $2^f : 2^X \to 2^Y$ es un homeomorfismo.

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, es decir, es una función continua, biyectiva y con inversa continua. Por el teorema 4.0.1 obtenemos que 2^f es una función bien definida, continua y biyectiva.

Además, recordemos que para $A \in 2^X$ tenemos que $2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ entonces $2^{f^{-1}}(A) = f^{-1}(A) = \{f^{-1}(a) : a \in A\}$ también es continua para toda $A \in 2^Y$ pues $f^{-1} : Y \to X$ es una función continua por ser f un homemorfismo, entonces $2^{f^{-1}} : 2^Y \to 2^X$ es una función continua.

Así tenemos que 2^f es continua, biyectiva con inversa continua, por lo tanto es un homeomorfismo.

(b) En el lema 4.0.2 ya se probó que $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es un homeomorfismo.

(c) Probemos que $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ tal que $F_n(f)(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ es un homeomorfismo.

Primero probemos que $F_n(f)$ es una función biyectiva.

Sabemos que $f : X \to Y$ es una función inyectiva. Sean $A, B \in F_n(X)$ tal que $F_n(f)(A) = F_n(f)(B)$ entonces por definición se cumple que $f(A) = f(B)$. Veamos que $A = B$, para ello probemos que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Sea $a \in A$, así $f(a) \in f(A) = f(B)$, es decir, $f(a) \in f(B)$ entonces debe existir $b \in B$ tal que $f(a) = f(b)$ y como f es inyectiva $a = b$, de manera que $a \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. De manera análoga obtenemos que $B \subset A$. Así $A = B$. Por lo tanto $F_n(f)$ es inyectiva.

Veamos ahora que $F_n(f)$ es suprayectiva. Sea $B \in F_n(Y)$, veamos que existe $A \in F_n(X)$ tal que $F_n(f)(A) = B$.

Supongamos que $B = \{b_1, ..., b_n\}$ y $A = \{a_1, ..., a_n\}$, como f es suprayectiva se cumple que para toda $b_i \in Y$ existe $a_i \in X$ tal que $f(a_i) = b_i$, para $i \in \{1, ..., n\}$ entonces para toda $b_i \in B$ existe $a_i \in A$ tal que $F_n(f)(A) = B$. Así $F_n(f)$ es suprayectiva. Por lo tanto $F_n(f)$ es biyectiva.

Ahora probemos que $F_n(f)$ es una función continua.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Como f es continua existe $\delta_j > 0$ con $j \in \{1, ..., n\}$ tal que si $d(x, a_j) < \delta_j$ entonces $d(f(x), f(a_j)) < \epsilon$.

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_n\}$ y $B = \{b_1, ..., b_n\}$. Y supongamos que $H(A, B) < \delta$, de esta manera tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Así tenemos que

$$\{a_1, ..., a_n\} \subset N(\delta, \{b_1, ..., b_n\})$$

y también

$$\{b_1, ..., b_n\} \subset N(\delta, \{a_1, ..., a_n\}).$$

Sea $r \in \{1, ..., n\}$, de manera que $a_r \in N(\delta, \{b_1, ..., b_n\})$ por consiguiente existe $l \in \{1, ..., n\}$ tal que $d(a_r, b_l) < \delta$ y de aquí que $d(a_r, b_l) < \delta_r$, luego por la continuidad de f se cumple que $d(f(a_r), f(b_r)) < \epsilon$. Por lo que tenemos que $f(A) \subset N(\epsilon, f(B))$ y por ende $F_n(f)(A) \subset N(\epsilon, F_n(f)(B))$. De manera similar obtenemos que $F_n(f)(B) \subset N(\epsilon, F_n(f)(A))$. Así obtenemos que $H(F_n(f)(A), F_n(f)(B)) < \epsilon$.

Por lo tanto $F_n(f)$ es continua. Además como f^{-1} es continua por ser f un homomorfismo tenemos que $F_n(f^{-1})(A) = f^{-1}(A) = \{f^{-1}(a) : a \in A\}$ también es continua.

De esta forma ya tenemos que $F_n(f)$ es una función biyectiva, continua y con inversa continua por lo tanto es un homeomorfismo. ■

Definición 4.0.4. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que $f : X \to Y$ es una isometría si para $x, y \in X$ se cumple que $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$.

Teorema 4.0.5. La función $f : X \to F_1(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ es una isometría.

Demostración:
Sea $x, y \in X$. Por el teorema 3.2.7 sabemos que para $A, B \in 2^X$ $H(A, B) = D(A, B) = \max\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}$.

Entonces usando el teorema tenemos

$$\begin{aligned} H(f(x), f(y)) &= D(f(x), f(y)) = D(\{x\}, \{y\}) \\ &= \max\{\sup\{d(x, \{y\}) : x \in \{x\}\}, \sup\{d(y, \{x\}) : y \in \{y\}\}\} \\ &= \max\{d(x, y), d(x, y)\} = d(x, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una isometría. ∎

4.1. La función unión

Como ya vimos 2^X es un hiperespacio, así 2^{2^X} es el hiperespacios de cerrados de 2^X. A la función $\cup : 2^{2^X} \to 2^X$ definida en el siguiente teorema, le llamaremos función unión.

Teorema 4.1.1. Sea $\cup : 2^{2^X} \to 2^X$ la función definida por:

$$\cup(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$$

Denotemos a $\cup(\mathcal{A})$ como $\cup\mathcal{A}$. Entonces:

(a) $\cup$ está bien definida.

(b) $\cup$ es continua. Más aún, dado $\epsilon > 0$, si $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$, entonces $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \epsilon$. En donde $\mathcal{H}$ denota la métrica de Hausdorff en 2^{2^X}, inducida por H.

(c) Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de 2^{2^X} y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$ entonces $\cup\mathcal{A}$ es conexo.

Demostración:
(a) Verifiquemos que $\cup\mathcal{A}$ es un cerrado. Sea x un punto limite de $\cup\mathcal{A}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\cup\mathcal{A}$ tal que $\lim x_n = x$.

Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente y supongamos que converge a $A \in \mathcal{A}$.

Aplicando el teorema 3.3.3 a las sucesiones $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y teniendo en cuenta que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ obtenemos que $x \in A$. Como $A \in \mathcal{A}$ concluimos que $x \in \cup\mathcal{A}$, así que $\cup\mathcal{A}$ es un cerrado. Además como $\mathcal{A}$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos $\cup\mathcal{A} \neq \emptyset$. Por lo tanto $\cup\mathcal{A} \in 2^X$.

(b) Sea $\epsilon > 0$ y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$ tales que $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$. Probemos que $\cup\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \cup\mathcal{B})$. Consideremos $a \in \cup\mathcal{A}$. Entonces existe un elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$.

Como $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$ tenemos que $\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \mathcal{B})$. Por tanto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Así $A \subset N(\epsilon, B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Como $B \subset \cup\mathcal{B}$, concluimos que

$$a \in B_d(\epsilon, b) \subset N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, \cup\mathcal{B}).$$

Así $\cup\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \cup\mathcal{B})$ y de manera similar obtenemos que $\cup\mathcal{B} \subset N(\epsilon, \cup\mathcal{A})$. Y como se cumplen estas dos condiciones tenemos que $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \epsilon$.

Por lo tanto $\cup$ es una función continua.

(c) Supongamos que $\cup\mathcal{A}$ no es conexo, es decir, que existen subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H y K de X tal que $\cup\mathcal{A} = H \cup K$.

Por hipotesis, $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. De manera que podemos elegir $A \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Entonces

$$A \subset \cup\mathcal{A} = H \cup K.$$

Como A es conexo podemos suponer sin perdida de generalidad que, $A \subset H$.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{B \in \mathcal{A} : B \subset H\}$$
$$\mathcal{K} = \{B \in \mathcal{A} : B \cap K \neq \emptyset\}$$

Veremos que estos conjuntos forman una separación de $\mathcal{A}$.

(i) Sabemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subconjuntos cerrados en $\mathcal{A}$ como se prueba en los teoremas 3.3.7 y 3.3.2 respectivamente.

(ii) Como estamos suponiendo que $A \subset H$, tenemos que $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

(iii) Veamos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Como $K \neq \emptyset$, podemos considerar $x \in K$. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B$ y, por lo tanto, $B \cap K \neq \emptyset$. Esto nos dice que $B \in \mathcal{K} \subset \cup\mathcal{A}$. De manera que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

(iv) Probemos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Supongamos, por el contrario que, existe $C \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$. Esto nos dice que $C \subset H$ y $C \cap K \neq \emptyset$. Lo que nos lleva a que

$$\emptyset \neq C \cap K \subset H \cap K,$$

lo cual es una contradicción pues estamos suponiendo que $H \cap K = \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

(v) Ahora veamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Consideremos $B \in \mathcal{A}$. Entonces $B \subset \cup\mathcal{A} = H \cup K$. En el caso en que $B \cap K \neq \emptyset$, $B \in \mathcal{K}$.

Para el caso en que $B \cap K = \emptyset$ tenemos que $B \subset H$. Entonces $B \in \mathcal{H}$. De manera que hemos visto que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ y por lo tanto

$$\mathcal{A} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}.$$

De esta forma tenemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ dan una separación de $\mathcal{A}$, que es un conjunto conexo, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\cup\mathcal{A}$ debe ser conexo. ■

Capítulo 5

Funciones de Whitney

5.1. Existencia de funciones de Whitney

Las funciones de Whitney son una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y construyen una herramienta importante para estudiar la estructura de los hiperespacios.

Definición 5.1.1. Una función de Whitney es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

a) $\mu(\{x\}) = 0$, $\forall x \in X$

b) Si $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$

Llamaremos función de Whitney para $C(X)$ a una función continua $\mu : C(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que cumplan las condiciones a) y b).

Tanto 2^X como $C(X)$ son compactos, así que la imagen de una función de Whitney está acotada. Por otra parte, la propiedad b) nos dice que una función de este tipo alcanza su valor máximo en X. Cuando X tiene más de un punto las condiciones a) y b) implican que $\mu(X) > 0$, así que podemos tomar la función de Whitney normalizada $\frac{\mu}{\mu(X)} : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Esta nueva función sigue siendo de Whitney pero ahora tiene dos propiedades adicionales, $\frac{\mu}{\mu(X)}(X) = 1$ y su imagen está contenida en $[0, 1]$. Por lo que podemos pedir desde el principio que las funciones de Whitney satisfagan la siguiente propiedad:

c) $\mu(X) = 1$

Teorema 5.1.2. Existen funciones de Whitney para 2^X.

Demostración:
Sea X un continuo. Como X es un compacto entonces por el teorema 1.4.13 tiene un subconjunto denso y numerable. Sea $D = \{a_1, a_2, ...\}$ un subconjunto denso y numerable de X. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para toda $A \in 2^X$

$$\mu_n(A) = \max\{d(a, a_n) : a \in A\} - \min\{d(a, a_n) : a \in A\}.$$

Notemos que μ_n está bien definida pues $\mu_n(A) < \infty$ y A es cerrado.

Finalmente definamos $\mu : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}.$$

Probemos que μ es una función de Whitney, para ello, probemos primero las siguientes propiedades para las funciones μ_n.

a) Probemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función μ_n es continua.

Sea $\epsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta = \frac{\epsilon}{2}$. Debemos probar que $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definamos para cada $a_n \in D$ fijo los siguientes elementos $a_0, a_* \in A$ y $b_0, b_* \in B$ tal que

$$d(a_n, a_0) = \max\{d(a_n, a) : a \in A\} \qquad d(a_n, a_*) = \min\{d(a_n, a) : a \in A\}$$

$$d(a_n, b_0) = \max\{d(a_n, b) : b \in B\} \qquad d(a_n, b_*) = \min\{d(a_n, b) : b \in B\}$$

Como $H(A, B) < \frac{\epsilon}{2}$ se tiene que $A \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, B)$ y $B \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$, de manera que existe $a \in A$ tal que $d(a, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $x \in A$ tal que $d(x, b_*) < \frac{\epsilon}{2}$.

Luego, $d(a_n, b_0) \leq d(a_n, a) + d(a, b_0) < d(a_n, a_0) + \frac{\epsilon}{2}$.

Entonces

$$d(a_n, b_0) - d(a_n, a_0) < \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} d(a_n, a_*) &= \min\{d(a_n, a) : a \in A\} \\ &\leq d(a_n, x) \\ &\leq d(a_n, b_*) + d(b_*, x) \\ &< d(a_n, b_*) + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

De aquí que

$$d(a_n, a_*) - d(a_n, b_*) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad (2)$$

De manera similar existe $b \in B$ tal que $d(b, a_0) < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $y \in B$ tal que $d(y, a_*) < \frac{\epsilon}{2}$, así tenemos $d(a_n, a_0) \leq d(a_n, b) + d(b, a_0) < d(a_n, b_0) + \frac{\epsilon}{2}$.

Y de aquí que

$$d(a_n, a_0) - d(a_n, b_0) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad (1')$$

Y también

$$\begin{aligned} d(a_n, b_*) &= \text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\} \\ &\leq d(a_n, y) \leq d(a_n, a_*) + d(a_*, y) \\ &< d(a_n, a_*) + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$d(a_n, b_*) - d(a_n, a_*) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad (2')$$

De aquí se sigue que

$$|d(a_n, b_0) - d(a_n, a_0)| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{Por (1) y (1')}$$

$$|d(a_n, a_*) - d(a_n, b_*)| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{Por (2) y (2')}$$

Luego con lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} |(d(a_n, b_0) - d(a_n, b_*)) - (d(a_n, a_0) - d(a_n, a_*))| &= |(d(a_n, b_0) - d(a_n, a_0)) \\ &+ (d(a_n, a_*) - d(a_n, b_*))| \\ &\leq |d(a_n, b_0) - d(a_n, a_0)| + |d(a_n, a_*) - d(a_n, b_*)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Entonces

$$|\mu_n(B) - \mu_n(A)| < \epsilon$$

Por lo tanto, μ_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $x \in X$ entonces $\mu_n(\{x\}) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mu_n(\{x\}) &= \text{máx}\{d(a_n, a) : a \in \{x\}\} - \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in \{x\}\} \\ &= d(a_n, x) - d(a_n, x) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $x \in X$ entonces $\mu_n(\{x\}) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Si $A \subset B$ entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A \subset B$ entonces $\{d(a_n, a) : a \in A\} \subseteq \{d(a_n, b) : b \in B\}$.

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \text{máx}\{d(a_n, a) : a \in A\} &\leq \text{máx}\{d(a_n, b) : b \in B\} \\ \text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\} &\leq \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\text{máx}\{d(a_n, a) : a \in A\} - \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \leq \\ &\quad \text{máx}\{d(a_n, b) : b \in B\} - \text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

d) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente acotada.

Sea $M = diam(X) = \text{máx}\{d(x, y) : x, y \in X\}$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ y para toda $A \in 2^X$ tenemos

$$\text{máx}\{d(a_n, a) : a \in A\} - \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(a_n, a) : a \in A\} \leq M$$

Entonces $\mu_n(A) \leq M$ para toda $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente acotada.

Ahora ya podemos probar que μ es una función de Whitney.

e) μ está bien definida y es continua.

Sabemos por el criterio M de Weierstrass que una serie de funciones continuas uniformemente acotada por una serie convergente esta bien definida y es continua.

f) Si $x \in X$ entonces $\mu(\{x\}) = 0$.

Como $\mu_n(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$ entonces

$$\mu(\{x\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(\{x\})}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n} = 0.$$

Por lo tanto $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.

Para que μ sea una función de Whitney solo falta probar que si $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Por el inciso c) ya tenemos que $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ si $A \subseteq B$. Entonces es suficiente probar que

g) Si $A \subsetneq B$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$.

Sean $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$. Sea $b_0 \in B \setminus A$, como A es cerrado y $b_0 \neq A$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset.$$

Como D es un conjunto denso en X existe $a_n \in D \cap B(\frac{\epsilon}{2}, b_0)$, para este n probemos que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$. En efecto, notemos que

$$\text{máx}\{d(a_n, a) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(a_n, b) : b \in B\}$$

y

$$\text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\} \leq d(a_n, b_0).$$

Además $\text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\epsilon}{2}$ pues en caso contrario si se tuviera que $\text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} < \frac{\epsilon}{2}$ entonces existiría $a \in A$ tal que $d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ y así tendríamos que $d(a, b_0) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. De esta manera $a \in B(\epsilon, b_0) \cap A$ lo cual no puede ser pues ya teníamos que $B(\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset$.

Por tanto, $\text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\epsilon}{2}$.

Además tenemos que $a_n \in D \cap B(\frac{\epsilon}{2}, b_0)$, esto es, $d(a_n, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$\text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\epsilon}{2} > d(a_n, b_0) \geq \text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\}$$

$$\text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\} < \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mu_n(A) &= \text{máx}\{d(a_n, a) : a \in A\} - \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \\
&\leq \text{máx}\{d(a_n, b) : b \in B\} - \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \\
&< \text{máx}\{d(a_n, b) : b \in B\} - \text{mín}\{d(a_n, b) : b \in B\} \\
&= \mu_n(B).
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$

h) Si $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Tomemos n como en g), entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mu_1(A) < \mu_1(B)$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n} &= \frac{\mu_1(A)}{2} + \frac{\mu_2(A)}{2^2} + ... + \frac{\mu_{n-1}(A)}{2^{n-1}} + \frac{\mu_n(A)}{2^n} + \frac{\mu_{n+1}(A)}{2^{n+1}} + ... \\
&< \frac{\mu_1(B)}{2} + \frac{\mu_2(B)}{2^2} + ... + \frac{\mu_{n-1}(B)}{2^{n-1}} + \frac{\mu_n(B)}{2^n} + \frac{\mu_{n+1}(B)}{2^{n+1}} + ... \\
&= \mu(B)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$ es una función de Whitney. ∎

5.2. Construcción de otras funciones de Whitney

A continuación veremos la construcción de otras funciones de Whitney más sofisticadas, su método de demostración será muy similar a la prueba de la sección anterior.

Sea $\Lambda = \{s : s$ es una sucesión finita con más de un punto en $X\}$.
Definamos $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda(s) = \lambda((x_1, x_2, ..., x_n)) = \text{mín}\{d(x_i, x_j) : x_i \neq x_j, i, j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Observemos que se define λ para sucesiones finitas con más de un punto y no para subconjuntos de X. La diferencia consiste en que al tomar sucesiones, estamos dando la oportunidad de que los x_i sean iguales aunque tengan índices diferentes pues son sucesiones finitas; y si esto ocurre entonces $\lambda((x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_n)) = 0$.

Ahora definamos para $n \geq 2$ una función $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$\mu_n(A) = \sup\{\lambda(a_1, ..., a_n) : a_1, ..., a_n \in A\}.$$

Ahora definimos $\mu : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{n\geq 2}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}.$$

Notemos que está bien definida, $\mu_n(A) \in \mathbb{R}$ ya que $\lambda(x_1, ..., x_n) \leq diam(A)$. Además para $n \geq 2$, $\mu_n(A) \leq diam(A)$ entonces la serie $\sum_{n\geq 2}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$ converge.

Demostración:
A continuación se probaran un conjunto de propiedades para μ_n para después probar que μ es una función de Whitney.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se cumple que $\mu_n(A) \geq \mu_{n+1}(A)$.

Sea $A \in 2^X$ y sean dados $a_1, ..., a_n, a_{n+1} \in A$

$$\{d(a_i, a_j) : i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j\} \subsetneq \{d(a_i, a_j) : i, j \in \{1, ..., n+1\}, i \neq j\}.$$

Entonces

$$\text{mín}\{d(a_i, a_j) : i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j\} \geq \text{mín}\{d(a_i, a_j) : i, j \in \{1, ..., n+1\}, i \neq j\}$$

Esto es $\lambda((a_1, ..., a_n)) \geq \lambda((a_1, ..., a_n, a_{n+1}))$ y

$$\mu_n(A) \geq \lambda((a_1, ..., a_n)) \geq \lambda((a_1, ..., a_n, a_{n+1})).$$

Así que $\mu_n(A)$ es cota superior del conjunto que define a $\mu_{n+1}(A)$, es decir, $\{\lambda(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) : a_1, ..., a_{n+1} \in A\}$ esta acotado superiormente por $\mu_n(A)$, de modo que $\mu_{n+1}(A)$ es la menor de las cotas superiores de $\{\lambda(a_1, ..., a_{n+1}) : a_1, ..., a_{n+1} \in A\}$. Por lo tanto $\mu_n(A) \geq \mu_{n+1}(A)$.

b) Si $A \in 2^X$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$.

Sea $A \in 2^X$. Como A es cerrado y no vacío contenido en el compacto X entonces A es compacto. Sea $\epsilon > 0$, como $\{B(\frac{\epsilon}{2}, a) : a \in A\}$ es una cubierta por abiertos de A entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_m \in A$ tal que

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{m} B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_i).$$

Mostremos que $\mu_{n+1}(A) \leq \epsilon$. En efecto, sean $a_1, a_2, ..., a_m, a_{m+1} \in A \subseteq \cup_{i=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, x_i)$ cualesquiera, entonces los $m + 1$ puntos de A estan colocados en $m-$ *vecindades* de manera que existen $i, j, k \in \{1, 2, .., m\}$ con $i \neq j$ tal que

$$a_i, a_j \in B(\tfrac{\epsilon}{2}, x_k).$$

Entonces

$\lambda((a_1, ..., a_m)) \leq d(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_k) + d(a_k, a_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Esto es

$$\lambda((a_1, ..., a_m)) < \epsilon$$

y como $\lambda((a_1, ..., a_m, a_{m+1})) \leq \lambda((a_1, ..., a_m)) < \epsilon$. Tenemos

$$\lambda((a_1, ..., a_m, a_{m+1})) < \epsilon \ \forall a_1, a_2, ..., a_m, a_{m+1} \in A$$

y como $\mu_{m+1}(A) = \sup\{\lambda((a_1, ..., a_m, a_{m+1})) : a_1, .., a_{m+1} \in A\}$ entonces

$$\mu_{m+1}(A) \leq \epsilon$$

pero por a) ya tenemos que $\mu_n(A) \leq \epsilon$ para toda $n \geq m + 1$, lo cual nos dice que, las μ_n son decrecientes.

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$

c) Si A es finito con m elementos entonces $\mu_{m+1}(A) = \mu_{m+2}(A) = ... = 0$.

Por b) es suficiente probar que $\mu_{m+1}(A) = 0$.

Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ un conjunto con m elementos. Sean $a_1, a_2, ..., a_{m+1} \in A$ cualesquiera, como los a_i son $m+1$ puntos tomados de un conjunto de m elementos entonces existen $i, j \in \{1, 2, .., m, m + 1\}$ tal que $i < j$ y $a_i = a_j$. Así que

$$0 \leq \lambda((a_1, a_2, ..., a_{m+1})) \leq d(a_i, a_j) = 0$$

entonces

$$\lambda((a_1, a_2, ..., a_{m+1})) = 0 \ \forall a_1, a_2, ..., a_{m+1} \in A.$$

Por lo tanto $\mu_{m+1}(A) = 0$

d) $\mu_n(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$ y $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Esto es inmediato por c), así que $\mu_n(\{x\}) = 0$ para toda $n \geq 2$.

e) μ_n es continua para toda $n \geq 2$.

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera y sean $A, B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \epsilon$.

Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ arbitrarios, como $A \subseteq N(\epsilon, B)$ entonces existen $b_1, b_2, ..., b_n \in B$ tal que $d(a_i, b_i) < \epsilon$ para toda $i = 1, .., n$. Así si $i \neq j$,

$$d(a_i, a_j) \leq d(a_i, b_i) + d(b_i, b_j) + d(b_j, a_j) < 2\epsilon + d(b_i, b_j)$$

entonces

$$d(a_i, a_j) < 2\epsilon + d(b_i, b_j).$$

Por definicion de λ tenemos que para toda $i \neq j$

$$\lambda((a_1, a_2, ..., a_n)) < d(a_i, a_j) < 2\epsilon + d(b_i, b_j).$$

Entonces

$$\lambda((a_1, a_2, ..., a_n)) < \lambda((b_1, b_2, ..., b_n)) + 2\epsilon \leq \mu_n(B) + 2\epsilon.$$

De modo que $\mu_n(A) \leq \mu_n(B) + 2\epsilon$, y de aquí que

$$\mu_n(A) - \mu_n(B) \leq 2\epsilon \qquad (1)$$

como A y B juegan papeles simétricos tenemos que

$$\mu_n(B) - \mu_n(A) \leq 2\epsilon \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que

$$|\mu_n(A) - \mu_n(B)| \leq 2\epsilon.$$

Por lo tanto μ_n es continua.

f) Si $A \subset B$ entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \geq 2$.

Notemos que si $A \subset B$ entonces

$$\{\lambda((a_1, a_2, ..., a_n)) : a_1, .., a_n \in A\} \subseteq \{\lambda((b_1, b_2, ..., b_n)) : b_1, b_2, ..., b_n \in B\}$$

$$\begin{aligned}\mu_n(A) &= \sup\{\lambda((a_1,a_2,...,a_n)) : a_1,a_2,..,a_n \in A\}\\ &\leq \sup\{\lambda((b_1,b_2,...,b_n)) : b_1,...,b_n \in B\} = \mu_n(B)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \geq 2$.

g) $\{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$ es uniformemente acotada.

En efecto, como $\mu_n(A) \geq \mu_{n+1}(A)$ para $n \geq 2$ y $A \in 2^X$ tenemos que $\mu_n(A) \leq \mu_2(A)$. Y como $A \subseteq X$, por f) tenemos

$$\mu_n(A) \leq \mu_2(A) \leq \mu_2(X)$$

Entonces

$$\mu_n(A) \leq \mu_2(X).$$

Por lo tanto $\{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$ es uniformemente acotada.

h) Si $\#(A) \geq n \geq 2$ entonces $\mu_n(A) > 0$.

Si $\#(A) \geq 2$ entonces podemos tomar n puntos $a_1,...,a_n \in A$ distintos entre si, entonces

$$\lambda((a_1,a_2,...,a_n)) = \text{mín}\{d(a_i,a_j) : i \neq j\} > 0,$$

De modo que

$$\mu_n(A) \geq \lambda((a_1,a_2,...,a_n)) > 0.$$

Por lo tanto $\mu_n(A) > 0$.

i) Si $A \subsetneq B$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_m(A) < \mu_m(B)$.

Caso 1: Si A es finito.

Supongmos que $\#(A) = n$, entonces por c) $\mu_{n+1}(A) = 0$. Ahora como $A \subsetneq B$ entonces $\#(B) \geq n+1$ y por h) $\mu_{n+1}(B) > 0$.

Por tanto $\mu_{n+1}(A) = 0 < \mu_{n+1}(B)$.

Caso 2: Si A es infinito.

Si A es infinito por h) tenemos que $\mu_n(A) > 0$ para toda $n \geq 2$. Como $A \subsetneq B$, sea $b_0 \in B \setminus A$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset$.

Por b) tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n(A) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Ahora como $\mu_N(A) > 0$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$ entonces existe $r > N$ tal que $\mu_r(A) < \mu_N(A)$. Definimos

$$m = \text{mín}\{r > N : \mu_r(A) < \mu_N(A)\}$$

así $\mu_m(A) < \mu_N(A)$ y $m-1 \geq N$. Si suponemos que $\mu_{m-1}(A) < \mu_N(A)$ y $m-1 > N$, tendríamos que

$$m-1 \in \{r > N : \mu_r(A) < \mu_N(A)\}$$

pero tendríamos que $m < m-1$ lo cual es una contradicción. Ahora sabemos que $\mu_{m-1}(A) < \mu_N(A)$, de manera que si $\mu_{m-1}(A) \leq \mu_N(A)$ tendríamos que $\mu_{m-1}(A) = \mu_N(A)$.

Ahora como $\mu_m(A) < \mu_N(A)$ y $\mu(A)$ es un supremo, existen $a_1, ..., a_N \in A$ tal que $\mu_m(A) < \lambda((a_1, a_2, ..., a_N)) \leq \mu_N(A) < \epsilon$.

Por definición de λ existen $i \neq j$ tal que

$$\lambda((a_1, a_2, ..., a_j, a_i, ..., a_N)) = d(a_i, a_j) < \epsilon.$$

Como $B(\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset$ entonces para toda $k \in \{1, 2, .., N\}$ se tiene que $a_k \notin B(\epsilon, b_0)$, esto es, $d(b_0, a_k) \geq \epsilon$. Por lo que

$$\begin{aligned} \lambda((a_1, a_2, ..., a_N, b_0)) &= \text{mín}\{\{d(a_s, a_t) : s \neq t\} \cup \{d(a_s, b_0) : s \in \{1, 2, ..., N\}\}\} \\ &= d(a_i, a_j) \end{aligned}$$

Así tenemos que,

$$\begin{aligned} \mu_{m+1}(A) &\leq \mu_m(A) < \lambda((a_1, a_2, ..., a_N)) = d(a_i, a_j) \\ &= \lambda((a_1, a_2, ..., a_N, b_0)) \leq \mu_{m+1}(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_{m+1}(A) < \mu_{m+1}(B)$.

Ahora probemos que μ es una función de Whitney.

j) De e) y g) se tiene que μ está bien definida y es continua.

k) Por d) se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.

l) Por f) e i) se tiene que dados $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ y entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto μ es una función de Whitney. ∎

Ahora veamos el siguiente ejemplo de una función de Whitney.

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mu_n : 2^X \to [0, \infty)$ dada por

$$\mu_n(A) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : \text{existen puntos } p_1, ..., p_n \in X \text{ tales que } A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})\}.$$

Probemos que la función $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ dada por

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$$

es una función de Whitney.

Demostración:
a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función μ_n es continua.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in 2^X$. Sea $\eta > 0$ y tomemos $\delta = \frac{\eta}{2}$. Veamos que si $H(A,B) < \delta$ entonces $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \eta$.

Sea $A, B \in 2^X$ tales que $H(A,B) < \delta$. Notemos que B es compacto. Sea $\epsilon > 0$ como $\{B(\epsilon, x) : x \in B\}$ es una cubierta abierta de B entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $p_1, ..., p_n \in B$ tal que

$$B \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(\epsilon, p_i) = N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\}).$$

Afirmemos que $\mu_n(A) \leq \delta + \epsilon$; para ello veremos que $A \subset N(\epsilon + \delta, \{p_1, ..., p_n\})$. En efecto, como $H(A,B) < \delta$ tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, así existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$ y para tal $b \in B$ existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $d(b, p_j) < \epsilon$. Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$d(a, p_j) \leq d(a,b) + d(b, p_j) < \delta + \epsilon$$

Por lo que obtenemos

$$A \subset N(\delta + \epsilon, \{p_1, ..., p_n\}).$$

Y en consecuencia $\mu_n(A) \leq \delta + \epsilon$ y de aquí que $\mu_n(A) - \delta \leq \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ que cumpla la definición de $\mu_n(B)$, así tenemos

$$\mu_n(A) - \delta \leq \mu_n(B).$$

Notemos que $\mu_n(A) - \eta < \mu_n(A) - \delta$ pues $2\delta = \eta$, luego

$$\mu_n(A) - \eta < \mu_n(A) - \delta \leq \mu_n(B)$$

$$\mu_n(A) - \mu_n(B) < \eta$$

De manera análoga obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\mu_n(B) - \mu_n(A) < \eta$$

Finalmente se cumple que

$$|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \eta.$$

Por lo tanto μ_n es continua.

b) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ esta uniformemente acotada.

Sea $M = diam(X) + 1$ entonces para cualquier $A \in 2^X$ y cualquier subconjunto $\{p_1, ..., p_n\}$ de n puntos en X se tiene que

$$A \subset X = N(M, \{p_1, ..., p_n\}).$$

Así tenemos que $\mu_n(A) \leq M$ para cualquier $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente acotada.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu_{n+1} \leq \mu_n(A)$.

Para cada $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $\epsilon > 0$ y $p_1, ..., p_n \in X$ tales que $A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})$. Tomemos $p_{n+1} \in X \setminus \{p_1, .., p_n\}$ entonces

$$A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\}) \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n, p_{n+1}\}).$$

Así tenemos que

$$\{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_n \in X \textit{ tal que } A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\}) \subset$$
$$\{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_{n+1} \in X \textit{ tal que } A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_{n+1}\})$$

Entonces por definición de $\mu_n(A)$ se cumple que $\mu_{n+1}(A) \leq \mu_n(A)$.

d) Si $A \in 2^X$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$.

Sea $A \in 2^X$, como A es cerrado contenido en un compacto X, A es compacto. Sea $\epsilon > 0$ como $\{B(\epsilon, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A entonces existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_N \in A$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^{N} B(\epsilon, a_i) = N(\epsilon, \{a_1, ..., a_N\})$. Y por definición de $\mu_N(A)$ tenemos que

$$\mu_N(A) \leq \epsilon$$

y por c) tenemos que para toda $n \geq N$

$$\mu_n(A) \leq \mu_N(A) \leq \epsilon$$

Por lo que obtenemos que $\mu_n(A) \leq \epsilon$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$

e) Si $A \subset B$ entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $\epsilon > 0$ y $p_1, ..., p_n \in X$ tales que $B \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})$. Como $A \subset B$ entonces

$$A \subset B \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\}).$$

Luego tenemos

$$\{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_n \in X \textit{ tales que } A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})\} \subset$$
$$\{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_n \in X \textit{ tales que } B \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})\}.$$

Así tenemos que

$$\mu_n(A) = \inf\{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_n \in X \textit{ tales que } A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})\} \leq$$
$$\inf\{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_n \in X \textit{ tales que } B \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_n\})\} = \mu_n(B).$$

Por lo tanto $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

f) Si A es finito con n elementos entonces $\mu_n(A) = 0$.

Supongamos que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ es un conjunto con n elementos entonces para cada $\epsilon > 0$ tenemos que $A \subset N(\epsilon, \{a_1, ..., a_n\})$, luego por definición de $\mu_n(A)$ se tiene que $\mu_n(A) = 0$.

Además notemos que para cada $k \geq n$, tenemos que $0 \leq \mu_k(A) \leq \mu_n(A) = 0$ por lo que $\mu_k(A) = 0$ para toda $k \geq n$.

g) $\mu_n(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.

Esto es inmediato por el inciso f).

h) Si $\#(A) \geq n \geq 2$ entonces $\mu_{n-1}(A) > 0$.

Sea $\{a_1, ..., a_n\} \subset A$ y tomemos $\alpha = \text{mín}\{d(a_i, a_j) : 1 \leq i, j \leq n \text{ con } i \neq j\}$ y notemos que $\alpha > 0$.

Supongamos que $\mu_{n-1}(A) < \frac{\alpha}{4}$, así existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{\alpha}{4}$, usando la definición de $\mu_n(A)$ existe un conjunto finito $\{p_1, ..., p_n\} \subset X$ tal que $A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_{n-1}\})$ y existen i, j, k con $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ y $1 \leq k \leq n-1$ tales que $a_i, a_j \in B(\epsilon, x_k)$, así

$$\begin{aligned} d(a_i, a_j) &\leq d(a_i, x_k) + d(x_k, a_j) \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &< \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} \\ &= \frac{\alpha}{2} < \alpha \end{aligned}$$

con lo que tenemos una contradicción por la definición de α. De manera que, $\mu_{n-1}(A) \geq \frac{\alpha}{4} > 0$. Por lo tanto $\mu_{n-1}(A) = 0$.

i) Si $A \subsetneq B$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_m(A) < \mu_m(B)$.

Caso 1: Si A es finito.

Supongamos que $\#(A) = n$ entonces por f) $\mu_n(A) = 0$ y como $A \subsetneq B$, $\#(B) \geq n+1$ y por h) $\mu_n(B) > 0$. Así que $\mu_n(A) = 0 < \mu_n(B)$. Por lo que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$.

Caso 2: Si A es infinito.

Sea $\epsilon > 0$ y $b_0 \in B \setminus A$, por d) sabemos que $\text{lím}_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, así $\mu_N(A) < \epsilon$ y como A es infinito por h) $\mu_n(A) < 0$ entonces existe $r < N$ tal que $\mu_r(A) < \mu_N(A)$. Así definimos

$$m = \text{mín}\{r > N : \mu_r(A) < \mu_N(A)\}$$

de manera que $\mu_m(A) < \mu_N(A)$ para $m > N$.

Si suponemos que $\mu_{m-1}(A) < \mu_N(A)$ con $m-1 > N$ tendríamos que

$m-1 \in \{r > N : \mu_r(A) < \mu_N(A)\}$ pero de aquí tendríamos que $m < m-1$ lo cual no puede ser. De esta forma se tiene que si $m-1 \geq N$ entonces $\mu_{m-1}(A) = \mu_N(A)$ y $\mu_m(A) < \mu_{m-1}(A)$ con $m > m-1$.

$$\begin{aligned} \mu_m(A) < \mu_{m-1}(A) &\leq \{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_{m-1} \in X, A \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_{m-1}\})\} \\ &\leq \{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_{m-1}, b_0 \in X, B \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_{m-1}, b_0\})\} \end{aligned}$$

Pero notemos que

$$\mu_m(B) \leq \{\epsilon > 0 : \exists p_1, ..., p_{m-1}, b_0 \in X, B \subset N(\epsilon, \{p_1, ..., p_{m-1}, b_0\})\}.$$

Por lo tanto $\mu_m(A) < \mu_m(B)$.

Ahora si veamos que μ es una función de Whitney.

j) Por a) y b) tenemos que μ_n es continua y uniformemente acotada y notemos que

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2^n}$$

así que es una sucesión convergente. Por lo tanto por el criterio M de Weierstrass μ es continua y esta bien definida.

k) Por g) tenemos que $\mu_n(\{x\}) = 0$ y de aquí tenemos que $\mu(\{x\}) = 0$.

l) Por i) finalmente tenemos que si $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto μ es una función de Whitney. ■

Ahora que ya sabemos que existen las funciones de Whitney, veamos algunas propiedades que estas funciones cumplen.

Teorema 5.2.1. El producto de funciones de Whitney es una función de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney. Y sea $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(A) = \mu_1(A)\mu_2(A)...\mu_n(A).$$

Veamos que μ es una función de Whitney.

1) μ es continua

Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, μ_n son funciones de Whitney asi que cada μ_n es continua y sabemos que el producto de funciones continuas es continua, y por lo tanto, μ es continua.

2) $\mu(\{x\}) = 0$ $\forall x \in X$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mu_n(\{x\}) = 0$ por ser funciones de Whitney, asi

$$\mu(\{x\}) = \mu_1(\{x\})\mu_2(\{x\})...\mu_n(\{x\}) = 0.$$

3) Si $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Sean $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$, como μ_n son funciones de Whitney tenemos que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$, así se cumple que

$$\mu(A) = \mu_1(A)\mu_2(A)...\mu_n(A) < \mu_1(B)\mu_2(B)...\mu_n(B) = \mu(B).$$

Así tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto μ es una función de Whitney. ■

Teorema 5.2.2. El máximo de funciones de Whitney es una función de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney. Y sea $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ definida para $A \in 2^X$ por

$$\mu(A) = \text{máx}\{\mu_n(A)\}.$$

Veamos que μ es una función de Whitney.

1) μ es una función continua.

Sea

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \{A \in 2^X : \mu_1(A) \geq \mu_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} \\
&= \{A \in 2^X : (\mu_1 - \mu_n)(A) \geq 0\} \\
&= (\mu_1 - \mu_n)^{-1}([0, \infty)) \\
Z_2 &= \{A \in 2^X : \mu_2(A) \geq \mu_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}-\{2\}} \\
&= \{A \in 2^X : (\mu_2 - \mu_n)(A) \geq 0\} \\
&= (\mu_2 - \mu_n)^{-1}([0, \infty)) \\
&. \\
&. \\
&. \\
Z_n &= \{A \in 2^X : \mu_n(A) \geq \mu_{n-1}(A)\}_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \{A \in 2^X : (\mu_n - \mu_{n-1})(A) \geq 0\} \\
&= (\mu_n - \mu_{n-1})^{-1}([0, \infty))
\end{aligned}$$

Y sea $Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_n = 2^X$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, μ_n son funciones de Whitney por lo que son funciones continuas así resulta que $(\mu_1 - \mu_n)_{n \in \mathbb{N}-\{1\}}, (\mu_2 - \mu_n)_{n \in \mathbb{N}-\{2\}}, ..., (\mu_n - \mu_{n-1})$ son funciones continuas.

Además si restringimos la función μ a cada Z_n tenemos

$$\mu|_{Z_1} : Z_1 \to \mathbb{R} \text{ es tal que } \mu|_{Z_1}(A) = \mu_1(A) \text{ para } A \in Z_1$$

$$\mu|_{Z_2} : Z_2 \to \mathbb{R} \text{ es tal que } \mu|_{Z_2}(A) = \mu_2(A) \text{ para } A \in Z_2$$

$$\mu|_{Z_n} : Z_n \to \mathbb{R} \text{ es tal que } \mu|_{Z_n}(A) = \mu_n(A) \text{ para } A \in Z_n$$

Y por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu|_{Z_n}$ son continuas.

Ahora, si $A \in \cap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ entonces $\mu_1(A) = \mu_2(A) = ... = \mu_n(A)$.

Así $\mu|_{Z_1}(A) = \mu|_{Z_2}(A) = ... = \mu|_{Z_n}(A)$.

Definimos $F : 2^X \to \mathbb{R}$ para cada $A \in 2^X$ por

$$F(A) = \begin{cases} \mu|_{Z_1}(A) & \text{si } A \in Z_1 \\ \mu|_{Z_2}(A) & \text{si } A \in Z_2 \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \mu|_{Z_n}(A) & \text{si} A \in Z_n \end{cases}$$

Y por el lema del pegado F es continua. Y como para cada $A \in 2^X$ tenemos que $F(A) = \mu(A)$ resulta que μ es continua.

2) $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in X$.

$$\mu(\{x\}) = \text{máx}\{\mu_n(\{x\})\} = 0$$

ya que $\mu_n(\{x\}) = 0 \ \forall x \in X$ y $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Sean $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Si $\mu(A) = \mu_1(A)$ entonces

$$\mu(A) = \mu_1(A) < \mu_1(B) \leq \text{máx}\{\mu_n(B)\} = \mu(B).$$

Si $\mu(A) = \mu_2(A)$ entonces

$$\mu(A) = \mu_2(A) < \mu_2(B) \leq \text{máx}\{\mu_n(B)\} = \mu(B).$$

Así si $\mu(A) = \mu_n(A)$ entonces

$$\mu(A) = \mu_n(A) < \mu_n(B) \leq \text{máx}\{\mu_n(B)\} = \mu(B).$$

Por tanto $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto μ es una función de Whitney. ■

Teorema 5.2.3. El mínimo de funciones de Whitney es una función de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney. Y sea $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ definida para $A \in 2^X$ por

$$\mu(A) = \text{mín}\{\mu_n(A)\}.$$

Veamos que μ es una función de Whitney.

1) μ es una función continua.

Esto se prueba de manera similar al inciso 1) en el teorema anterior.

2) $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in X$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu_n(\{x\}) = 0$ entonces

$$\mu(\{x\}) = \text{mín}\{\mu_n(\{x\})\} = 0.$$

3) Sean $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Como las μ_n son funciones de Whitney se cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mu_n(A) < \mu_n(B)$.

Si $\mu(B) = \mu_n(B)$ para $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\mu(B) = \mu_n(B) > \mu_n(A) \geq \text{mín}\{\mu_n(A)\} = \mu(A).$$

Por tanto $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto μ es una función de Whitney. ■

Teorema 5.2.4. Combinaciones lineales con coeficientes positivos de funciones de Whitney es una función de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney. Veamos que si los coeficientes $\alpha_i > 0$ y $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ para $A \in 2^X$ dada por

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(A)$$

entonces μ es una función de Whitney.

1) μ es una función continua.

Sea $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ μ_n es una función continua existe $\delta > 0$ tal que si $H(A, B) < \delta$ entonces $|\mu_i(A) - \mu_i(B)| < \frac{\epsilon}{\alpha_i}$ para $i = 1, .., n$. Si $B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|\mu(A) - \mu(B)| &= |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(A) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(B)| \\
&= |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mu_i(A) - \mu_i(B))| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\mu_i(A) - \mu_i(B)| \\
&< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\epsilon}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon = n\epsilon
\end{aligned}$$

Así tenemos que $|\mu(A) - \mu(B)| < n\epsilon$. Por lo tanto μ es una función continua.

2) $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in X$.

$$\mu(\{x\}) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(\{x\}) = 0$$

ya que $\mu_i(\{x\}) = 0$ para cada $i = 1, .., n$.

3) Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ entonces $\mu_i(A) < \mu_i(B)$ para cada $i = 1, .., n$. Por hipotesis tenemos $\alpha_i > 0$ entonces $\alpha_i \mu_i(A) < \alpha_i \mu_i(B)$ para $i = 1, .., n$. Entonces

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(A) < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(B)$$

Así $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo tanto μ es una función de Whitney. ■

Teorema 5.2.5. Si μ es una función de Whitney para 2^X y $A \in 2^X$ entonces la función $v : 2^X \to [0, 1]$ dada por

$$v(B) = (\mu(A \cup B)\mu(B))^{\frac{1}{2}}$$

es también una función de Whitney.

Demostración:
1) Veamos que v es una función continua.

i) Probemos que la función $g : 2^X \to 2^X$ definida para cada $A_0 \in 2^X$ por

$$g(A_0) = A_0 \cup A$$

es continua.

Sea $A_0 \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Y supongamos que $\delta = \epsilon$. Ahora sea $B \in 2^X$ tal que $H(A_0, B) < \delta$. Veamos que $H(g(A_0), g(B)) = H(A_0 \cup A, B \cup A) < \epsilon$.

Primero veamos que $A_0 \cup A \subset N(\epsilon, B \cup A)$. Sea $x \in A_0 \cup A$, $x \in A_0$ o $x \in A$. Si $x \in A_0$, como $A_0 \subset N(\epsilon, B)$, entonces existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ luego $x \in N(\epsilon, B)$. Por tanto $x \in N(\epsilon, B \cup A)$. Si $x \in A$, tenemos que $x \in N(\epsilon, B \cup A)$. De esta manera

$$A_0 \cup A \subset N(\epsilon, B \cup A)$$

De manera análoga

$$B \cup A \subset N(\epsilon, A_0 \cup A).$$

Así se cumple que $H(A_0 \cup A, B \cup A) < \epsilon$. Por lo tanto g es continua.

Sea $\mu_1 : 2^X \to \mathbb{R}$ definida para cada $A_0 \in 2^X$ por

$$\mu_1(A_0) = \mu(A_0 \cup A).$$

Notemos que $\mu_1 = \mu \circ g$ y sabemos que composición de funciones continuas es continua. Por lo tanto μ_1 es continua.

Ahora sea $\mu_2 : 2^X \to \mathbb{R}$ definida para cada $A_0 \in 2^X$ por

$$\mu_2(A_0) = \mu_1(A_0)\mu(A_0)$$

y como el producto de funciones continuas es continua μ_2 es continua.

Así podemos ver a la función $v(A_0) = (\mu_2(A_0))^{\frac{1}{2}}$ y así v es continua.

2) $v(\{x\}) = (\mu_2(\{x\}))^{\frac{1}{2}} = (\mu_1(\{x\})\mu(\{x\}))^{\frac{1}{2}} = 0$ ya que μ es una función de Whitney y $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in X$.

3) Sea $A_0, B \in 2^X$ tales que $A_0 \subsetneq B$ entonces $\mu(A_0) < \mu(B)$.

Además notemos que $A \cup A_0 \subset A \cup B$. Entonces

$$v(A_0) = (\mu(A \cup A_0)\mu(A_0))^{\frac{1}{2}} < (\mu(A \cup B)\mu(B))^{\frac{1}{2}} = v(B).$$

Por lo tanto $v(A_0) < v(B)$ si $A_0 \subsetneq B$.

Por lo tanto v es una función de Whitney. ∎

Notemos también que $\mu(B) = v(B)$ si $B = \{x\}$ y si $A \subset B$.

Esto se puede ver claramente pues μ y v son funciones de Whitney y se cumple que $\mu(\{x\}) = v(\{x\}) = 0$ para $x \in X$.

Además notemos que

$$\begin{aligned}
\mu(B) = v(B) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mu(B) = (\mu(A \cup B)\mu(B))^{\frac{1}{2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad (\mu(B))^2 = \mu(A \cup B)\mu(B) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\mu(B)^2}{\mu(B)} = \mu(A \cup B) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu(B) = \mu(A \cup B) \\
&\Longleftrightarrow \quad B = A \cup B
\end{aligned}$$

y esto pasa si $A \subset B$.

Capítulo 6

Niveles de Whitney

6.1. Arcos Ordenados

El objetivo principal de esta sección es mostrar la existencia de un concepto importante que hay en los Hiperespacios: los arcos ordenados. Para probar la existencia de arcos ordenados, introduciremos algunas definiciones y teoremas.

Definición 6.1.1. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. La componente $C(p)$ de p en X es

$$C(p) = \cup\{D \subset X : D \text{ es conexo y } p \in D\}.$$

Y se define a la casi componente $Q(p)$ de p en X como

$$Q(p) = \cap\{E \subset X : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in E\}.$$

Teorema 6.1.2. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y compacto. Para cada $p \in X$ la componente $C(p)$ en X es igual a la casi componente $Q(p)$ en X.

Demostración:
Sea $p \in X$.

(i) Es claro que $C(p) \subset Q(p)$, pues de haber un $x \in C(p)$ tal que $x \notin Q(p)$ existiría un subconjunto A de X, abierto y cerrado tal que $p \in A$ y $x \notin A$. De esta forma $A \cap C(p)$ sería un abierto y cerrado propio y no vacío en $C(p)$, lo cual contradice la conexidad de $C(p)$.

(ii) Para demostrar que $Q(p) \subset C(p)$ es suficiente ver que $Q(p)$ es conexo. Supongamos que $Q(p)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos no vacíos, cerrados y ajenos K y L de X tal que $Q(p) = K \cup L$. Como los espacios compactos y de Hausdorff son normales, existen dos abiertos ajenos U y V de X tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. Como $p \in Q(p)$, podemos suponer que $p \in K$.

El conjunto $Z = X \setminus (U \cup V)$ es compacto y

$$\begin{aligned} Z = X \setminus (U \cup V) \subset X \setminus (K \cup L) = X \setminus Q(p) \\ = X \setminus \cap\{E \subset X : \text{E es cerrado y abierto en } X \text{ y } p \in E\} \\ = \cup\{X \setminus E : E \text{ es cerrado y abierto en } X \text{ y } p \in E\}. \end{aligned}$$

De manera que $\{X \setminus E : E$ es cerrado y abierto en X y $p \in E\}$ es una cubierta abierta del compacto Z por lo que existen $m \in \mathbb{N}$ y subconjuntos abiertos y cerrados $E_1, E_2, ..., E_m \in X$ tales que $p \in E_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y

$$X \setminus (U \cup V) \subset (X \setminus E_1) \cup ... \cup (X \setminus E_m) = X \setminus (E_1 \cap ... \cap E_m)$$

De aquí que

$$E_1 \cap ... \cap E_m \subset U \cup V.$$

Sea $E = E_1 \cap ... \cap E_m$, entonces E es abierto y cerrado en X y $p \in E \subset U \cup V$. Notemos que $E \cap U = E \cap (X \setminus V)$ lo cual nos dice que $E \cap U$ es un abierto y cerrado en X y como $p \in E \cap K \subset E \cap U$, por la definición de $Q(p)$ tenemos que $Q(p) \subset E \cap U$. Pero entonces $L \subset (E \cap U) \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $L \neq \emptyset$. Así obtenemos que $Q(p)$ es conexo y concuimos que $C(p) = Q(p)$. ∎

Teorema 6.1.3. Sea X un espacio topológico Hausdorff y compacto. Sea K una componente de X y F un subconjunto cerrado de X tal que $F \cap K = \emptyset$. Entonces existe un subconjunto abierto y cerrado L de X tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$.

Demostración:
Sea $p \in K$, por el teorema 6.1.2 tenemos que $Q(p) = K$. Para cada $x \in F$ ocurre que $x \notin K$, así que, por la definición de $Q(p)$ existe un abierto y cerrado V_x de X tal que $p \in V_x$ y $x \notin V_x$.

Definimos $Y_x = X \setminus V_x$, entonces Y_x es abierto y cerrado en X y además, $p \notin Y_x$ y $x \in Y_x$. El conjunto $\{Y_x : x \in F\}$ es una cubierta del compacto F, por lo que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in F$ tales que $F = Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup ... \cup Y_{x_n}$. El conjunto

$$L = X \setminus (Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup ... \cup Y_{x_n}) = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap ... \cap V_{x_n}$$

es abierto y cerrado. Como $p \in V_{x_i}$ para $i \in \{1, ..., n\}$ tenemos que $p \in L$ y además, $K \subset L$ por la definición de casi componente. Finalmente, por construcción, tenemos que $L \cap F = \emptyset$.

∎

A continuación probaremos un teorema muy utilizado conocido como el teorema de golpes en la frontera.

Teorema 6.1.4 (Teorema de golpes en la frontera)**.** Sea X un continuo, U un abierto propio y no vacío de X, y K una componente de $\overline{U}$. Entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.

Demostración:
Supongamos por el contrario que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Apliquemos el teorema 6.1.3 a $\overline{U}$, a la componente K de $\overline{U}$ y al cerrado $Fr(U)$ de $\overline{U}$, entonces existe un subconjunto L abierto y cerrado de $\overline{U}$ tal que $K \subset L$ y $L \cap Fr(U) = \emptyset$. De modo que $L \neq \emptyset$ y $L \subset \overline{U} \setminus Fr(U) = U$, así que $L \neq X$. Como $\overline{U}$ es cerrado en X tambien L lo es. Y como L es abierto en $\overline{U}$ existe un abierto W de X tal que $L \cap \overline{U} = W$ pero como $L \subset U$ entonces $L \cap U = W$ y L es abierto en X, esto contradice la conexidad de X, por lo tanto, $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. ■

El siguiente teorema establece que dados dos subcontinuos contenidos propiamente uno en el otro, siempre podemos encontrar otro subcontinuo entre ellos.

Teorema 6.1.5. Si A y B son continuos de X tales que $A \subsetneq B$ entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.

Demostración:
Sea $p \in B \setminus A$. Como B es normal existe un abierto U de B tal que $A \subset U \subset \overline{U}^B \subset B \setminus \{p\}$ (donde $\overline{U}^B$ es la cerradura de U en B).

Sea C la componente de $\overline{U}^B$ que contiene a A. Notemos que C es conexo y cerrado en X, así que C es un continuo de X. Como $p \notin C$ tenemos que $C \subsetneq B$.

Ahora veremos que $A \subsetneq C$. Sea $Fr_B(U)$ la frontera de U en B. Como U es abierto en B, tenemos que $U \cap Fr_B(U) = \emptyset$. Y como $A \subset U$, tenemos que $A \cap Fr_B(U) = \emptyset$ y por el teorema 6.1.4 obtenemos que, $C \cap Fr_B(U) \neq \emptyset$, así concluimos que $A \neq C$. ■

Teorema 6.1.6. Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subset B$, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.

Demostración:
Notemos que el conjunto

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D\} \cap \{D \in C(X) : D \subset B\}$$

es cerrado en $C(X)$ (porque μ es una función continua y por los teoremas 3.3.5 y 3.3.6) y por tanto compacto, además es diferente del vacío pues $B \in \mathcal{A}$.

Sea $E \in \mathcal{A}$ un elemento donde la función μ alcanza su mínimo, es decir, $\mu(E) \leq \mu(D)$ para todo $D \in \mathcal{A}$.

De manera similar elijamos un elemento F en el conjunto

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}([0,t]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D\} \cap \{D \in C(X) : D \subset E\}$$

tal que $\mu(F)$ sea máximo, esto es, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para todo $D \in \mathcal{B}$.

Si ocurriera que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$ ya terminaríamos pues ya podríamos proponer al conjunto C. Por tanto, podemos suponer que $\mu(F) < t < \mu(E)$ y entonces $F \subsetneq E$. Por el teorema 6.1.5 existe $G \in C(X)$ tal que $A \subset F \subsetneq G \subsetneq E \subset B$ y entonces $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $\mu(G) > t$, entonces $G \in \mathcal{A}$ y por la elección de E tendríamos que $\mu(E) \leq \mu(G)$ lo cual no puede ser. Si $\mu(G) \leq t$ entonces $G \in \mathcal{B}$ y por la elección de F tendríamos que $\mu(G) \leq \mu(F)$, con lo que llegamos a una contradicción. Esto muestra que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$ y con esto terminamos la prueba. ■

Ahora daremos la definición de uno de los conceptos que se tiene en la teoría de Hiperespacios que es la de arcos ordenados.

Definición 6.1.7. Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subset B$, un arco ordenado entre A y B es una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si $0 \leq s < t \leq 1$ entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Finalmente, probemos un resultado básico de la teoria de Hiperespacios de subcontinuos de un continuo X, que nos garantiza la existencia de arcos ordenados.

Teorema 6.1.8. Si A y B son subcontinuos de $C(X)$ con $A \subset B$, entonces existe un arco ordenado de A a B contenido en $C(X)$.

Demostración:
Notemos que para $A = B$ la función constante $\alpha(t) = A$ es un arco ordnado.

Para $A \neq B$ construiremos un arco ordenado a partir de una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$.

Numeremos los racionales de conjunto $E = \mathbb{Q} \cap [\mu(A), \mu(B)]$, utilizando el teorema 6.1.6 podemos construir inductivamente un conjunto $\mathcal{R} = \{A_r : r \in E\}$, donde cada A_r es un subcontinuo de X tal que $\mu(A_r) = r$ y para $r \leq s$, $A \subset A_r \subset A_s \subset B$.

Probemos que la función $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}} : \overline{\mathcal{R}} \to [\mu(A), \mu(B)]$ es un homeomorfismo y utilizaremos su inversa para obtener un arco ordenado.

(i) Notemos que $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}}$ es la restricción de una función continua y, por tanto, $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}}$ es continua.

(ii) Para cada $t \in (\mu(A), \mu(B)]$ existe una sucesión estrictamente decreciente $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = t$. Observemos que si $m < n$ entonces $r_n < r_m$, así $A_{r_n} \subset A_{r_m}$.

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} A_{r_n} = C$, por la continuidad de μ tenemos que, $\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} r_n = t$. Con esto tenemos que para todo $t \in [\mu(A), \mu(B)]$ existe $C \in \overline{\mathcal{R}}$ tal que $\mu(C) = t$, así la función $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}}$ es suprayectiva.

(iii) Probemos que $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}}$ es una función inyectiva. Sean $C, D \in \overline{\mathcal{R}}$ tales que $\mu(C) = \mu(D)$. Tenemos que existe una sucesión $\{A_{r_n}\}$ en $\mathcal{R}$ que converge a C y por la continuidad de μ tenemos que $\mu(C) = \lim_{n\to\infty} r_n$. De la misma manera podemos encontrar una sucesión

$\{A_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $D = \text{lím}_{n\to\infty} A_{s_n}$ y $\mu(D) = \text{lím}_{n\to\infty} s_n$. Como al menos uno de los conjuntos $\{n : r_n \leq s_n\}$ o $\{n : s_n \leq r_n\}$ es infinito, entonces $C \subset D$ o $D \subset C$, pero como μ es una función de Whitney necesariamente $C = D$.

(iv) Como $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}}$ es una función biyectiva y continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff tenemos que $\mu|_{\overline{\mathcal{R}}}$ es un homeomorfismo.

(v) Consideremos un homeomorfismo creciente $\Phi : [0,1] \to [\mu(A), \mu(B)]$. Veremos a continuación que la función $\alpha = (\mu|_{\overline{\mathcal{R}}})^{-1} \circ \Phi : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado.

Dados $s, t \in [0,1]$ tales que $0 \leq s < t \leq 1$ tenemos que $\Phi(s) < \Phi(t)$. Sean $C, D \in \overline{\mathcal{R}}$ tales que $\mu(C) = \Phi(s)$ y $\mu(D) = \Phi(t)$, es decir que, $C = \alpha(s)$ y $D = \alpha(t)$.

Como $\mu(C) < \mu(D)$ sabemos que existen sucesiones $\{A_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{A_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que convergen a C y D, y anteriormente vimos que $C \subset D$ o $D \subset C$, pero la segunda contención no puede ocurrir porque $\mu(C) < \mu(D)$. Por tanto $C \subsetneq D$, es decir, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. Además notemos que $\alpha(0) = (\mu|_{\overline{R}})^{-1}(\Phi(0)) = (\mu|_{\overline{R}})^{-1}(\mu(A)) = A$ y $\alpha(1) = (\mu|_{\overline{R}})^{-1}(\Phi(1)) = (\mu|_{\overline{R}})^{-1}(\mu(B)) = B$. De esta manera concluimos que α es un arco ordenado. ■

6.2. Niveles de Whitney

Ahora que ya sabemos lo que son las funciones de Whitney en 2^X, podemos definir lo que son los niveles de Whitney para $C(X)$.

Definición 6.2.1. Un nivel de Whitney para $C(X)$ es un conjunto de la forma:

$$\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X) : \mu(A) = t\}$$

donde $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0, \mu(X))$ donde $\mu(X) = 1$.

Notemos que si $\mu^{-1}(0) = \{A \in C(X) : \mu(A) = 0\}$ entonces $A = \{x\}$ y si $\mu^{-1}(1) = \{A \in C(X) : \mu(A) = 1\}$ entonces $A = X$.

Una característica importante de los niveles de Whitney para $C(X)$ es que son conexos y por lo tanto, son subcontinuos de $C(X)$. Para probar este hecho necesitamos algunos resultados, los cuales veremos a continuación.

Teorema 6.2.2. Los niveles de Whitney son cerrados en $C(X)$.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney para $C(X)$ y sea $t \in [0,1]$, como μ es una función continua se tiene que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en $C(X)$. ■

Además notemos que como $C(X)$ es compacto y $\mu^{-1}(t) \subset C(X)$ entonces $\mu^{-1}(t)$ es compacto.

Teorema 6.2.3. La unión de los elementos de un nivel de Whitney para $C(X)$ es igual a X.

Demostración:
Como la unión de elementos de $\mu^{-1}(t)$ esta contenida en X, por definición, sólo debemos probar que todo elemento de X pertenece a un elemento de $\mu^{-1}(t)$. Es decir, sea $t \in [0,1)$ y $x \in X$, queremos probar que existe $A \in \mu^{-1}(t)$ tal que $x \in A$. Tomemos un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ que conecta a $\{x\}$ con X. Notemos que la función $\mu \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua y

$$\{x\} = \alpha(0) \subsetneq \alpha(1) = X$$

De modo que

$$0 = \mu(\alpha(0)) < t < \mu(\alpha(1)) = 1$$

Por el teorema del valor intermedio tenemos que existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$ y como α es un arco ordenado, tenemos que $\{x\} = \alpha(0) \subset \alpha(s)$. Y como $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$ conluimos que $X = \cup_{A \in \mu^{-1}(t)} A$. ∎

Teorema 6.2.4. Sea $r \in [0,1)$. Si $A, B \in \mu^{-1}(r)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$ entonces existe una trayectoria en $\mu^{-1}(r)$ que conecta a A con B.

Demostración:
Elijamos $p \in A \cap B$. Sabemos que existen arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ de $\{p\}$ a A y de $\{p\}$ a B respectivamente.

Sea $t \in [0,1]$. Notemos que

$$\alpha(t) \cup \beta(0) = \alpha(t) \cup \{p\} = \alpha(t) \subset \alpha(1) = A$$

y

$$B = \beta(1) \subset \alpha(t) \cup \beta(1)$$

Así tenemos que

$$\mu(\alpha(t) \cup \beta(0)) \leq \mu(A) = r = \mu(B) \leq \mu(\alpha(t) \cup \beta(1))$$

Por la continuidad de μ y β sabemos que existe $s_t \in [0,1]$ tal que $r = \mu(\alpha(t) \cup \beta(s_t))$. Si probamos que la unión $\alpha(t) \cup \beta(s_t)$ no depende del elemento s_t que elegimos, podemos definir $\gamma : [0,1] \to C(A \cup B) \cap \mu^{-1}(t_0)$ por $\gamma(t) = \alpha(t) \cup \beta(s_t)$.

Sean s_t y s'_t elementos distintos de $[0,1]$ tales que $\mu(\alpha(t) \cup \beta(s_t)) = \mu(\alpha(t) \cup \beta(s'_t)) = r$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $s_t < s'_t$ y como β es un arco ordenado, $\alpha(t) \cup \beta(s_t) \subset \alpha(t) \cup \beta(s'_t)$. Si suponemos que la contención es propia tendríamos que

$$r = \mu(\alpha(t) \cup \beta(s_t)) < \mu(\alpha(t) \cup \beta(s'_t)) = r$$

con lo cual llegamos a una contradicción, por lo tanto concluimos que $\alpha(t) \cup \beta(s_t) = \alpha(t) \cup \beta(s'_t)$.

Ahora probemos que γ es continua. Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ una sucesión convergente, digamos que converge a t. Elegimos $\{s_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(\alpha(t_n) \cup \beta(s_{t_n})) = r$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\{s_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, sin perdida de generalidad podemos suponer que converge a s. Por la continuidad de α y β y por el teorema 3.3.3 se tiene que $\gamma(t_n) = \alpha(t_n) \cup \beta(s_{t_n})$ converge a $\alpha(t) \cup \beta(s)$ y, por la continuidad de μ la sucesión $\{\mu(\gamma(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que es la sucesión constante r) converge a $\mu(\alpha(t) \cup \beta(s))$, así que la sucesión $\mu(\alpha(t) \cup \beta(s)) = r$ y por lo tanto $\alpha(t) \cup \beta(s) = \gamma(t)$, es decir, $\gamma(t_n)$ converge a $\gamma(t)$. Por lo tanto γ es continua.

■

Teorema 6.2.5. Si $\mathcal{A} \subset 2^X$ es cerrado y no vacío, entonces $\cup_{A\in\mathcal{A}} A$ es cerrado en X.

Demostración:
Sea $x \in \overline{\cup_{A\in\mathcal{A}} A}$. Sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cup_{A\in\mathcal{A}} A$ que converge a x y, por lo tanto, tenemos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es compacto existe una subsucesión convergente de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $A_0 \in \mathcal{A}$, luego $x \in A_0$ y entonces $x \in \cup_{A\in\mathcal{A}} A$. ■

Teorema 6.2.6. Todo nivel de Whitney para $C(X)$ es conexo.

Demostración:
Sea $t \in [0,1)$, probemos que $\mu^{-1}(t)$ es conexo. Supongamos que $\mu^{-1}(t)$ no es conexo, es decir, que existen conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$.

Notemos que $\cup_{K\in\mathcal{K}} K$ y $\cup_{L\in\mathcal{L}} L$ son no vacíos y por el teorema 6.2.5 son conjuntos cerrados y por el teorema 6.2.3 tenemos

$$X = \cup_{A\in\mu^{-1}(t)} A = \cup_{K\in\mathcal{K}} K \cup \cup_{L\in\mathcal{L}} L$$

Si probamos que $\cup_{K\in\mathcal{K}} K$ y $\cup_{L\in\mathcal{L}} L$ son ajenos tendremos una contradicción y por lo tanto tendremos que $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Supongamos que $\cup_{K\in\mathcal{K}} K \cap \cup_{L\in\mathcal{L}} L \neq \emptyset$ entonces existen $K \in \mathcal{K}$ y $L \in \mathcal{L}$ tales que $K \cap L \neq \emptyset$. Por el teorema 6.2.4 tenemos que existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ que conecta a K con L pero $\alpha([0,1])$ es un conexo contenido en $\mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ y que interseca a estos dos conjuntos, lo cual es una contradicción. De manera que concluimos que $\cup_{K\in\mathcal{K}} K \cap \cup_{L\in\mathcal{L}} L = \emptyset$. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es conexo. ■

Finalmente como ya probamos que los niveles de Whitney son compactos y conexos para $C(X)$, concluimos que los niveles de Whitney son subcontinuos de $C(X)$.

6.3. Ejemplos de niveles de Whitney

(1) Los niveles de Whitney para el intervalo $[0,1]$ son arcos.

Sea $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $t \in [0, \mu([0,1])]$ y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$. Definimos $f : \mathcal{A} \to [0,1]$ por $f([a,b]) = a$. Veamos que f es una función continua en $[x_1, x_2] \in \mathcal{A}$, en efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon$ tal que si $[y_1, y_2] \in \mathcal{A}$ se cumple que $H([x_1, x_2], [y_1, y_2]) < \delta$ entonces

$$[x_1, x_2] \subset N(\delta, [y_1, y_2]) = \cup_{y \in [y_1, y_2]} B(\delta, y)$$

$$[y_1, y_2] \subset N(\delta, [x_1, x_2]) = \cup_{x \in [x_1, x_2]} B(\delta, x)$$

De la primera contención tenemos que para toda $x^* \in [x_1, x_2]$ existe $y \in [y_1, y_2]$ tal que $|x^* - y| < \delta$. Por otro lado, supongamos que $x_1 \leq y_1$ entonces para cada $y \in [y_1, y_2]$ se tiene que $|x_1 - y_1| \leq |x_1 - y|$. Escojamos $y_0 \in [y_1, y_2]$ tal que $|x_1 - y_0| < \delta$ entonces

$$|f([x_1, x_2]) - f([y_1, y_2])| = |x_1 - y_1| \leq |x_1 - y_0| < \delta = \epsilon.$$

De manera análoga se hace para $x_1 > y_1$. Como $[x_1, x_2]$ fue arbitrario, se sigue que f es continua en $\mathcal{A}$.

Para probar que f es inyectiva, tomemos dos elementos $[a,b], [c,d] \in \mathcal{A}$ tales que $f([a,b]) = f([c,d])$ entonces $a = c$ por lo que $[a,b] \subset [c,d]$ o $[c,d] \subset [a,b]$. Y ya que ambos conjuntos estan en $\mathcal{A}$ la contención no puede ser propia pues si $[a,b] \subsetneq [c,d]$ entonces $\mu([a,b]) < \mu([c,d])$ así tenemos que $t < t$ lo cual es una contradicción. Por lo que $[a,b] = [c,d]$. Por lo tanto f es inyectiva.

Notemos que $Im\, f \subset [0,1]$. Además $\mathcal{A}$ es cerrado en $C([0,1])$ el cual es compacto, por lo que $\mathcal{A}$ es compacto y por tanto $Im\, f$ es compacto, así $f : \mathcal{A} \to Im\, f$ es una función cerrada por lo que f es un homeomorfismo.

Sea $b_0 = \max Im\, f$. Veamos que $Im\, f = [0, b_0]$. Como $b_0 = \max Im\, f$ tenemos que $Im\, f \subset [0, b_0]$ y existe un elemento en $\mathcal{A}$ de la forma $[b_0, b] \subset [b_0, 1]$. Queremos probar que $[0, b_0] \subset Im\, f$.

Sea $a \in [0, b_0]$. Consideremos la función $\gamma : [a,1] \to C([0,1])$ dada por $\gamma(s) = [a,s]$. La función γ es continua en $x \in [a,1]$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon$ tal que si $y \in [a,1]$ se cumple que $|x - y| < \delta$. Notemos que

$$x - y \leq |x - y| < \epsilon \qquad y - x \leq |x - y| < \epsilon$$

Esto es equivalente a que

$$x < y + \epsilon \qquad y < x + \epsilon$$

De ambas desigualdades se sigue que

$$[a, x] \subset [a - \epsilon, y + \epsilon] = \cup_{c \in [a,y]} B(\epsilon, c) = N(\epsilon, [a, y])$$

$$[a, y] \subset [a - \epsilon, x + \epsilon] = \cup_{d \in [a,x]} B(\epsilon, d) = N(\epsilon, [a, x])$$

Entonces

$$H(\gamma(x), \gamma(y)) = H([a, x], [a, y]) < \epsilon$$

Como x es arbitrario se sigue que γ es continua en $[a, 1]$.

Observemos que

$$\mu(\gamma(a)) = \mu([a, a]) = \mu(\{a\}) = 0$$
$$\mu(\gamma(1)) = \mu([a, 1]) > \mu([b_0, b]) = t$$

Esto último es porque $[b_0, b] \subset [a, 1]$. Así tenemos que $\mu(\gamma(a)) < t < \mu(\gamma(1))$. Aplicando el teorema de valor intermedio obtenemos que existe $s \in [a, 1]$ tal que $\mu(\gamma(s)) = t$, es decir, $\mu([a, s]) = t$. De manera que existe $[a, s] \in \mathcal{A}$ tal que $f([a, s]) = a$. Por tanto $a \in Im\, f$. Así $[0, b_0] \subset Im\, f$.

Por tanto $Im\, f = [0, b_0]$. De aquí que $f : \mathcal{A} \to [0, b_0]$ es un homeomorfismo por tanto $\mathcal{A}$ es homeomorfo a un arco.

(2) Los niveles de Whitney para una circunferencia S son homeomorfos a S.

Sea $\mu : C(S) \to S$ una función de Whitney. Sea $t \in [0, \mu(S)]$ y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$. Mostraremos que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a S.

Definamos $f : \mathcal{A} \to S$ por $f(A) =$ punto medio de A. Parametrizemos la circunferencia por $h : [0, 2\pi] \to S$ por $h(l) = (\cos l, \sin l)$. Sea $B \in \mathcal{A}$ con $B \neq S$, B un arco con extremos P y Q, lo cual denotaremos por, $B = [P, Q]$, donde $P = h(t_1)$ y $Q = h(t_2)$ con $t_1 < t_2$. Notemos que la longitud de arco B es

$$\mathcal{L}(B) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(-\sin(l))^2 + (\cos(l))^2}\, dl = \int_{t_1}^{t_2} 1\, dl = t_2 - t_1$$

Así

$$f(B) = (\cos(\tfrac{t_2 - t_1}{2}), \sin(\tfrac{t_2 - t_1}{2})).$$

Veamos que f es continua. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $A \neq S$. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A. Por demostrar que $f(A_n)$ converge a $f(A)$, si probamos esto tendremos, que f es una función continua.

Como la longitud del arco A, $\mathcal{L}(A) = t_2 - t_1$, es una función continua tenemos que $\mathcal{L}(A_n)$ converge a $\mathcal{L}(A)$, es decir, $t_2^n - t_1^n$ converge a $t_2 - t_1$, donde $t_2^n - t_1^n$ es la longuitud de A_n para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, obtenemos $f(A_n) = (\cos(\frac{t_2^n - t_1^n}{2}), \sin(\frac{t_2^n - t_1^n}{2}))$ converge a

$(\cos(\frac{t_2-t_1}{2}), \sin(\frac{t_2-t_1}{2})) = f(A)$. Así tenemos que $f(A_n)$ converge a $f(A)$, por tanto, f es continua.

Ahora veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ con $A = [R, S]$ y $B = [P, Q]$ donde $h(t_1) = R$, $h(t_2) = S$ con $t_1 < t_2$ y $h(t_1') = P$, $h(t_2') = Q$ con $t_1' < t_2'$.

Supongamos que $f(A) = f(B)$, así tenemos que $(\cos(\frac{t_2-t_1}{2}), \sin(\frac{t_2-t_1}{2})) = (\cos(\frac{t_2'-t_1'}{2}), \sin(\frac{t_2'-t_1'}{2}))$, luego $\frac{t_2-t_1}{2} = \frac{t_2'-t_1'}{2}$ y claramente $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$, así que los arcos tienen el mismo punto medio y son de igual longitud, de aquí que $[R, S] \subset [P, Q]$ y $[P, Q] \subset [R, S]$. Además como $[R, S], [P, Q] \in \mathcal{A}$ tenemos que $\mu([R, S]) = t = \mu([P, Q])$ por lo que la contención de los arcos no puede ser propia pues tendríamos una contradicción. Así $[R, S] = [P, Q]$, es decir, $A = B$. Por tanto f es inyectiva.

Notemos que $f(\mathcal{A}) \subset S$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, $f(\mathcal{A})$ también es compacto y $f : \mathcal{A} \to f(\mathcal{A})$ es un homeomorfismo. Probemos que $f(\mathcal{A}) = S$, para esto nos hace falta ver que $S \subset f(\mathcal{A})$.

Sea $p \in S$. Sea

$$\beta = \{\{p\}, S\} \cup A(p)$$

donde $A(p) = \{A \in C(S) :$ A es un arco con p como punto medio$\}$.

El conjunto β puede ser parametrizado como un arco ordenado. Sea $\alpha_1 : [0, 1] \to C(S)$ un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S. Definamos $\alpha_2 : \alpha_1 \to \beta$ de la siguiente forma, para $A \in \alpha_1$ existe $t \in [0, 1]$ tal que $\alpha_1(t) = A$ y $\alpha_2(A) = B$ donde $B \in \beta$. Así $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1 : [0, 1] \to C(S)$ es un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S tal que $\alpha([0, 1]) = \beta$.

Notemos que $\mu \circ \alpha : [0, 1] \to S$ es una función continua y $0 = \mu(\alpha(0)) < t < \mu(\alpha(1)) = 1$. Aplicando el teorema del valor intermedio a $\mu \circ \alpha$ obtenemos que existe $s \in [0, 1]$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$. Así $\alpha(s)$ es un arco con p como punto medio tal que $\alpha(s) \in \mathcal{A}$. Por tanto, $p = f(\alpha(s)) \in f(\mathcal{A})$. De modo que $S \subset f(\mathcal{A})$. Así tenemos que $f(\mathcal{A}) = S$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es homeomorfo a S.

(3) Niveles de Whitney para el triodo.

Sea T un triodo simple en el plano, construido por tres segmentos convexos de longitud $\frac{1}{3}$.

Sea $\mu : C(T) \to [0, 1]$ una función de Whitney dada por $\mu(A) =$ longitud de A, donde se entiende que si A es un arco contenido en una patita entonces simplemente se toma su longitud y si intersecta a más de una patita entonces se suma la longitud de la intersección de A con cada una de las patitas.

Tomemos $t \in (0, \frac{1}{3})$. Analizaremos como es el conjunto $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$. Primero distingamos a dos clases de continuos:

(a) los que contienen al vértice v.

(b) los que estan contenidos en sólo una de las patitas.

Tomemos un subcontinuo A de la clase (a), es decir, que contiene al vértice v y que además $A \in \mathcal{A}$. Recordemos que A esta determinada por tres cantidades a_1, a_2, a_3, donde a_i son los números que representan las longitudes de la intersección de A con las patitas de

T. Al conjunto A se le asocia la terceta (a_1, a_2, a_3) en el cubo $[0, \frac{1}{3}]^3$. Por la definición de μ tenemos que $\mu(A) =$ longitud de $A = a_1 + a_2 + a_3$. Entonces, pedir que $A \in \mathcal{A}$ es lo mismo que pedir que $a_1 + a_2 + a_3 = t$. Sabemos que los elementos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen esta igualdad constituyen un plano $\mathcal{P}$. Por tanto $A \in \mathcal{P} \cap [0, \frac{1}{3}]^3$.

Como $t < \frac{1}{3}$, esta intersección es un triángulo. Por tanto los elementos de $\mathcal{A}$ que contienen al vértice conforman un triángulo relleno.

Por otra parte, los elementos de $\mathcal{A}$ que estan contenidos en una sola patita de T, son como los elementos de un nivel de Whitney de $C([0, 1])$ y por el ejemplo (1) sabemos que estos se representan por un arco. Por lo tanto al triángulo que habíamos obtenido tenemos que añadirle tres arcos.

Cuando $t \geq \frac{1}{3}$, todos los elementos de $\mathcal{A}$ contienen al vértice v, de modo que $\mathcal{A}$ queda representado solamente por la intersección de un plano con el cubo $[0, \frac{1}{3}]^3$. Dicha intersección puede tener formas diferentes al triángulo pero todas son topológicamente equivalentes al triángulo relleno, por lo que así las representaremos.

Con esto hemos obtenido todos los posibles niveles de Whitney para la función μ. Notemos que podríamos cambiar el triodo T por uno con una patita mas corta que otras, a final tendríamos un espacio topológicamente equivalente a T. En este caso, en el modelo para $\mu^{-1}(t)$ podría eliminarse uno de los arcos que se añadieron al triángulo (o también dos arcos). De aquí ya podemos decir que los posibles niveles para el triodo son los siguientes continuos.

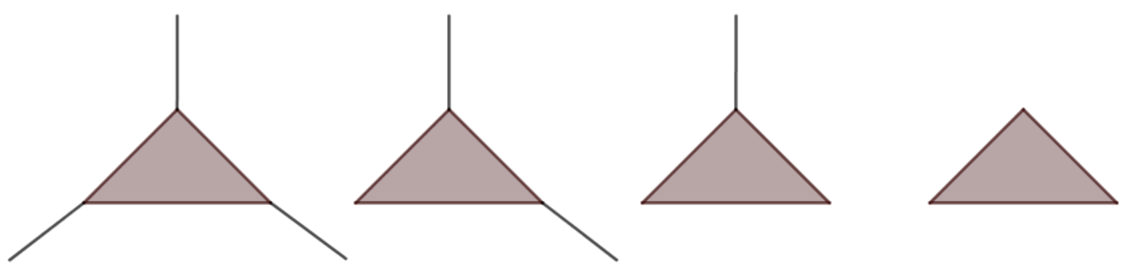


Figura 6.1: Posibles formas topológicas para los niveles de Whitney de un triodo.

Capítulo 7

Conclusiones

Los arcos ordenados son una herramienta que nos ayuda en el estudio de los niveles de Whitney, los cuales son muy importantes ya que nos permiten estudiar a los hiperespacios de un continuo. En este trabajo, nos pudimos dar cuenta que los niveles de Whitney no necesariamente son homeomorfos al continuo dado.

Un resultado importante que obtuvimos acerca de los niveles de Whitney es que éstos son continuos, lo cual no siempre pasa en el caso en que $\mu : 2^X \to [0, 1]$, es por esta razón que nos enfocamos en estudiar a los niveles de Whitney para $C(X)$.

Uno de los principales estudios en la teoría de continuos es estudiar las propiedades topológicas de los continuos. En los niveles de Whitney hay un estudio amplio que trata de las propiedades que un continuo X le hereda a los niveles de Whitney y viceversa.

Consideremos a P una propiedad topológica, diremos que P es una propiedad de Whitney si para cada continuo X con la propiedad P, para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ y para cada $t \in [0, 1)$, se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P.

Ser arco, ser arco conexo y ser localmente conexo son algunos ejemplos de propiedades de Whitney. De hecho, estos resultados nos ayudan a probar que un continuo localmente conexo y no degenerado es arco conexo y también que cualquier abierto conexo de un continuo localmente conexo es arco conexo. Una recopilación de este estudio la podemos encontrar en el Capítulo VIII en [5].

Es importante estudiar a las funciones de Whitney para poder estudiar a los niveles de Whitney. Más aún, una vez conocidos a los niveles de Whitney y sus propiedades podemos entrar a estudiar un concepto más fuerte, los bloques de Whitney para $C(X)$, los cuales son un conjunto de la forma $\mu^{-1}([0, t])$ donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0, 1)$.

Una propiedad importante de los bloques de Whitney es que al igual que los niveles de Whitney, estos son subcontinuos de $C(X)$. Los bloques de Whitney nos permiten analizar más ampliamente el estudio de las propiedades topológicas de un continuo.

Nuevamente consideremos a P una propiedad topológica, diremos que:

1. P es inducida a todos los bloques de Whitney si para cada continuo X con la propiedad P, para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para todo $t \in (0,1)$, se tiene que $\mu^{-1}([0,t])$ posee la propiedad P.

2. P es inducida por los bloques de Whitney si para cada continuo X tal que $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad P, para alguna función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para algún $t \in (0,1)$, se tiene que X posee la propiedad P.

M.E Aguilera prueba en su tesis doctoral [7] algunos resultados importantes de las propiedades que un continuo hereda a los bloques de Whitney y viceversa. Por ejemplo, en el teorema 3.2.5 prueba que la propiedad de ser arco conexo es inducida a todos los bloques de Whitney. Sin embargo, también se sabe que esta propiedad no es inducida por los bloques de Whitney.

Hay propiedades que cumplen ambas condiciones, es decir, que son inducidas a los bloques de Whitney y que también son inducidas por los bloques de Whitney, como es el caso de la conexidad local. M.E Aguilera prueba en el teorema 3.2.10 en [7] que la propiedad de ser localmente conexo es inducida a todos los bloques de Whitney, así mismo en el teorema 3.2.11 del mismo trabajo prueba que la propiedad de ser localmente conexo es inducida por los bloques de Whitney.

Otra propiedad interesante que se induce es la de ser encadenable por continuos. Un continuo X es *encadenable por continuos* si para cada cada $\epsilon > 0$ y cada par de puntos $x \neq y$ en X, existe una sucesión finita de subcontinuos $\{A_1, ..., A_n\}$ de X tal que $diam(A_i) < \epsilon$, $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$. M. E. Aguilera también prueba en [7] que la propiedad de ser encadenable por continuos es inducida a todos los bloques de Whitney. Y nos deja una pregunta abierta que es la siguiente: ¿La propiedad de ser encadenable por continuos será inducida por los bloques de Whitney?

Un resultado más que prueba M. E. Aguilera en su trabajo de tesis es que la propiedad de Kelley es inducida por los bloques de Whitney. Decimos que un continuo X tiene la propiedad de Kelley en un punto $p \in X$ si para toda sucesión de puntos $\{p_n\}$ en X tal que $\lim p_n = p$ y todo subcontinuo A de X tal que $p \in A$, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\lim A_n = A$ y $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Un continuo X tiene la propiedad de Kelley si tiene la propiedad de Kelley en p, para todo elemento $p \in X$.

Además, tenemos propiedades que no son inducidas a los bloques de Whitney. Un ejemplo es la propiedad de grupo fundamental trivial y la de punto fijo. Más aún, para estas propiedades se desconoce si son o no inducidas por los bloques de Whitney.

Como se puede observar aún existen muchas preguntas y problemas sin resolver por lo que queda mucho trabajo por delante en el ámbito de la teoría de los continuos y de sus hiperespacios.

Apéndice A

Teorema de Tychonoff

El teorema de Tychonoff establece que el producto de espacios compactos es compacto con la topología producto. Es un teorema fundamental en la topología. Su prueba requiere de la ayuda de algunos lemas, los cuales presentaremos a continuación.

Definición A.0.1. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersección finita si para cada subcolección finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de $\mathcal{C}$, se tiene que $\cap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Teorema A.0.2. Sea X un espacio topológico. X es compacto si y sólo si cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X que tiene la propiedad de intersección finita, cumple que $\cap_{c \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$

Ideas de la prueba

La primera idea de la prueba consiste en abandonar las cubiertas abiertas y utilizar el teorema 1. Para ver como funciona esta idea, consideremos primero el producto de dos espacios compactos $X_1 \times X_2$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos cerrados de $X_1 \times X_2$ que tiene la propiedad de intersección finita. Ahora consideremos la función proyección $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$.

La colección $\{\pi_1(A) : A \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos de X_1 tiene la propiedad de intersección finita, también el conjunto $\{\overline{\pi_1(A)} : A \in \mathcal{A}\}$ tiene dicha propiedad. Por la compacidad de X_1 se tiene que

$$\cap_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_1(A)} \neq \emptyset,$$

elegimos $x_1 \in \cap_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_1(A)}$. De manera análoga elegimos $x_2 \in \cap_{A \in \mathcal{A}} \overline{\pi_2(A)}$. La conclusión que desearíamos obtener es $x_1 \times x_2 \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A$. Desafortunadamente esto no es necesariamente cierto como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.0.3. .

Sea $X_1 = X_2 = [0,1]$ y $\mathcal{A}$ la colección de todas las regiones elipticas encerradas por elipses que tienen los puntos $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $q = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ como sus focos.

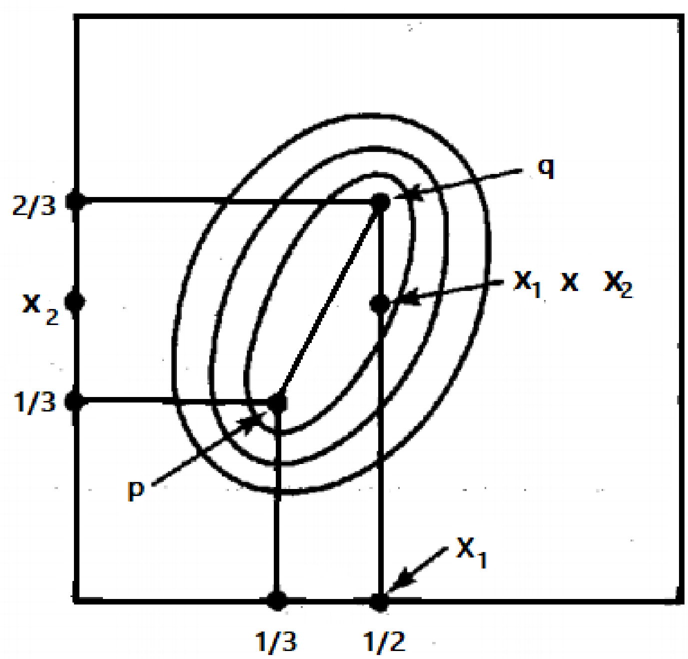


Figura A.1

$\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita. Notese que $\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{\pi_1(A)} = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ y $\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{\pi_2(A)} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, si elegimos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$, entonces

$$x_1 \in \cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{\pi_1(A)} \text{ y } x_2 \in \cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{\pi_2(A)},$$

más sin embargo $x_1 \times x_2 \notin \cap_{A\in\mathcal{A}}A$.

La elección de x_1 y x_2 no fue la adecuada, puesto que si $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, obtenemos $x_1 \times x_2 \in \cap_{A\in\mathcal{A}}A$.

Obtenemos una amplia libertad en elegir x_1 y x_2, lo cual nos permite hacer elecciones inadecuadas.

Ahora veamos la segunda idea de la prueba.

Si extendemos la colección $\mathcal{A}$, conservando la propiedad de intersección finita, esta extensión, nos forzará a elegir a x_1 y x_2 adecuadamente. Por ejemplo extendamos la colección $\mathcal{A}$ del ejemplo anterior o la colección $\mathcal{D}$ que consiste en todas las regiones elipticas cerradas y encerradas por las elipses que tiene un foco en el punto $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y el otro foco en el segmento $\overline{pq}$. Esta colección conserva la propiedad de la intersección finita.

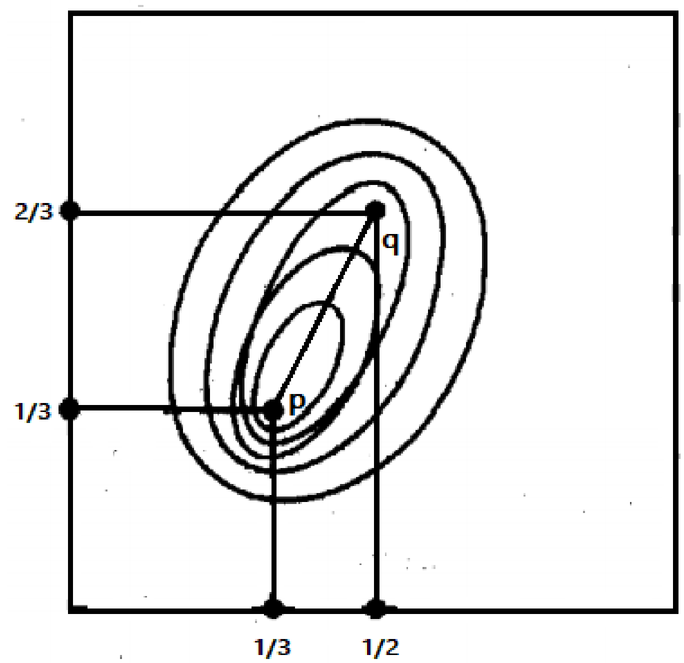


Figura A.2

Véase que $\cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{\pi_1(D)} = \{\frac{1}{3}\}$ y $\cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{\pi_2(D)} = \{\frac{1}{3}\}$, por lo que la única posible elección es $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$, y $x_1 \times x_2 \in \cap_{D\in\mathcal{D}} D$.

Ahora veamos la tercera idea de la prueba que consiste en elegir la extensión $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ como la colección más grande posible que conserve la propiedad de intersección finita. Para probar la existencia de dicha extensión $\mathcal{D}$ usaremos el lema de Zorn.

Lema A.0.4 (Lema de Zorn.)**.** Sea A un conjunto parcialmente ordenado, en el cual cada cadena (subconjuntos totalmente ordenados) tiene una cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.

Lema A.0.5. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita. Además, si $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ conservando dicha propiedad, implica que $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

Con frecuencia, diremos que una colección $\mathcal{D}$ que satisface la conclusión de este lema es maximal con respecto a la propiedad de intersección finita.

Demostración:
El conjunto al cual le aplicaremos el lema de Zorn no es un subconjunto de X, ni una colección

de subconjuntos de X, es un conjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X, y le llamaremos superconjunto de X.

Por hipótesis tenemos una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que tiene la propiedad de intersección finita. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al superconjunto de X que consiste de todas las colecciones $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección finita. Consideraremos como orden parcial estricto en $\mathbb{A}$ la inclusión propia $\subsetneq$. Probemos que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$.

Sea $\mathbb{B}$ una cadena (subconjuntos totalmente ordenados) de $\mathbb{A}$ y sea $\mathcal{C} = \cup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$, mostremos que $\mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathbb{B}$. Ciertamente se tiene que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, ya que cada elemento de $\mathbb{B}$ contiene a $\mathcal{A}$, así $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, por lo que solo falta demostrar que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Sean $C_1, ..., C_n \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es la unión de elementos de $\mathbb{B}$, para cada $i = 1, ..., n$ existe, un elemento $\mathcal{B}_i \in \mathbb{B}$ tal que $C_i \in \mathcal{B}_i$.

El superconjunto $\{\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n\} \subset \mathbb{B}$, por lo que esta totalmente ordenado por la relación de inclusión y puesto que es finito tiene un elemento máximo, es decir, existe k tal que $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_k$ para $i = 1, .., n$. Entonces cada conjunto C_i es un elemento de $\mathcal{B}_k$.

Dado que $\mathcal{B}_k$ tiene la propiedad de intersección finita, se sigue que $\cap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$, por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita. De esta forma $\mathcal{C}$ es cota superior de $\mathbb{B}$ y por el lema de Zorn se concluye que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal. ∎

Lema A.0.6. Sea X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de intersección finita. Entonces:

(a) Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.

(b) Si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$.

Demostración:
(a) Sea B la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$. Mostremos que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces si pasa esto como $\mathcal{D}$ es maximal, esto implicaría que $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ y así $B \in \mathcal{D}$.

Sea $\{\mathcal{E}_1, .., \mathcal{E}_n\} \subseteq \mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}_k \neq B$ para todo $k = 1, .., n$ entonces $\mathcal{E}_k \in \mathcal{D}$ para toda k, por lo que $\cap_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{E}_k = B$ para algún $k = 1, .., n$, entonces $\mathcal{E}_k = \cap_{k=1}^{n} D_k$ y de aquí que $\cap_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k \neq \emptyset$. De aquí se sigue que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita.

b) Dado A, definimos $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Veamos que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita para concluir que $A \in \mathcal{D}$.

Sean $\{\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n\} \subseteq \mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}_k \neq A$ para toda $k = 1, .., n$ entonces $\mathcal{E}_k \in \mathcal{D}$, por lo que $\cap_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k \neq \emptyset$.

De otra manera, si $\mathcal{E}_k = A$ para algun k entonces $\mathcal{E}_k = D_1 \cap ... \cap D_n \cap A$. Y como $D_1 \cap ... \cap D_n \in \mathcal{D}$ y por (a) tenemos que $\mathcal{E}_k \in \mathcal{D}$ y así esta intresección es no vacía, es decir, $\cap_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k \neq \emptyset$ ■

Teorema A.0.7 (Teorema de Tychonoff.). El producto arbitrario de espacios compactos es compacto.

Demostración:
Sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ donde X_α es compacto para cada $\alpha \in J$. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X que tiene la propiedad de intersección finita, probaremos que, $\cap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$.

Por el lema A.0.2 existe una colección $\mathcal{D} = \{D : D \subseteq X\}$ tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de intersección finita. Así será suficiente probar que $\cap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$.

Sea $\alpha \in J$ y $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la proyección usual, $\pi_\alpha(D) = D_\alpha$.

Ahora sea $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathcal{D}\}$ una colección de subconjuntos de X_α, que tiene la propiedad de intersección finita puesto que $\mathcal{D}$ la tiene.

En efecto, supongamos que $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathcal{D}\}$ no tiene la propiedad de intersección finita, entonces existen $D_1, .., D_n \in \mathcal{D}$ tal que $\cap_{i=1}^{n} \pi_\alpha(D_i) = \emptyset$, entonces $\cap_{i=1}^{n} \pi_\alpha(D_i) = \pi_\alpha(D_1 \cap ... \cap D_n)$

$$\pi_\alpha(D_1 \cap ... \cap D_n) = \emptyset$$
$$D_1 \cap ... \cap D_n = \pi_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

lo cual es una contradicción pues $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita y $D_1 \cap ... \cap D_n \neq \emptyset$.

Por la compacidad de X_α se cumple la propiedad de intersección finita, entonces para cada $\alpha \in J$ podemos elegir un punto $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que

$$x_\alpha \in \cap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de X. Veamos que $x \in \overline{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$.

Sea U_β un conjunto abierto en X_β, se tiene que $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un subásico de la topología producto en X, supongamos que $x \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, entonces $x_\beta \in U_\beta$, como $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ se tiene que

$$U_\beta \cap \pi_\beta(D) \neq \emptyset$$

por lo que existe $y_\beta \in X_\beta$ tal que $y_\beta \in U_\beta \cap \pi_\beta(D)$, como $y_\beta \in \pi_\beta(D)$ existe $y \in D$ tal que $\pi_\beta(y) = y_\beta$ y se sigue que $y \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$. Esto implica que para cada $D \in \mathcal{D}$

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D \neq \emptyset.$$

Por el lema A.0.3 (b) obtenemos que $\pi_{\beta}^{-1}(U_{\beta}) \in \mathcal{D}$. Y como cada básico de la topología producto en X es intersección finita de conjuntos $\pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$, se infiere por el lema A.0.3 (a) que cada básico que contiene a x pertenece a $\mathcal{D}$. Por la propiedad de intersección finita de $\mathcal{D}$ se concluye que cada básico que contiene a x intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$, así $x \in \overline{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$, por lo que $\cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{D} \neq \emptyset$. Y por el teorema A.0.1 se concluye que $X = \prod X_{\alpha}$ es compacto. ■

Apéndice B

Criterio M de Weierstrass

El criterio M de Weierstrass permite comprobar la convergencia uniforme de una serie infinita cuyos términos son funciones de variable real o compleja. En este trabajo es de gran ayuda en el capítulo 5 de funciones de Whitney. Antes de presentar el teorema del criterio M de Weierstrass veamos lo siguientes teoremas los cuales serán utiles para la prueba de este criterio.

Definición B.0.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en A a la función f definida en A si para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in A$ y toda $n > N$.

Definición B.0.2. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es uniformemente de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para toda $x \in A$ y toda $m, n > N$.

Teorema B.0.3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas y uniformemente de Cauchy en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces existe una función f en A tal que $f_n \to f$ unifomemente en A.

Demostración:
Para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para $x \in A$ y $m, n > N$. En particular tenemos que $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon$ para $m, n > N$.

Esto nos dice que $f_n(x_0)$ es una sucesión de Cauchy y sabemos que las sucesiones convergentes son sucesiones de Cauchy.

Así para cada $x \in A$ implica que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe y definamos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ahora necesitamos probar que $f_n \to f$ uniformemente en A.

Sea $\epsilon > 0$ y existe N tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} \ \forall x \in A \text{ y } \forall m, n > N \qquad (1)$$

Consideremos $m > N$ y $x \in A$ de (1) tenemos que $f_n(x)$ esta en el intervalo abierto $(f_m(x) - \frac{\epsilon}{2}, f_m(x) + \frac{\epsilon}{2})$ para toda $n > N$, de esta forma tenemos que $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x)$ esta en el intervalo cerrado $[f_m(x) - \frac{\epsilon}{2}, f_m(x) + \frac{\epsilon}{2}]$. Así tenemos que

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon \ \forall x \in A \text{ y } m > N.$$

Por lo tanto $f_m \to f$ uniformemnete en A. ■

Definición B.0.4. Decimos que una serie $\sum a_n$ satisface el criterio de Cauchy si su sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy, es decir, si para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que $n \geq m > N$ entonces $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$

Teorema B.0.5. Si una serie $\sum g_k$ de funciones satisface el criterio de Cauchy uniformemente en un conjunto A, entonces la serie converge uniformemente en A.

Demostración:
Sea $f_n = \sum g_k$, la sucesión $\{f_n\}$ de sumas parciales es uniformemnete de Cauchy en A, de manera que $\{f_n\}$ converge uniformemente en A por el teorema anterior. ■

Teorema B.0.6. El límite uniforme de funciones continuas es continua.

Más prescisamente, sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, supongase que $f_n \to f$ uniformemente en A y supongase que $A = dom(f)$. Si cada f_n es continua en x_0 en A entonces f es continua en x_0. Así si cada f_n es continua en A entonces f es continua en A.

Demostración:
Notemos que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Si n es suficientemente grande, el primer y tercer termino de lado derecho es muy pequeño, desde que $f_n \to f$ uniformemente. Una vez que se selecciona tal n, la continuidad de f_n implica que el término que queda en medio será pequeño y x esta cerca de x_0.

Sea $\epsilon > 0$ existe N tal que $n > N$ entonces para toda $x \in A$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

En particular tenemos que para toda $x \in A$

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

Desde que f_{N+1} es continua en x_0 existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in A$ entonces $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

De esta manera si para $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto f es continua en x_0. ∎

Teorema B.0.7. Consideremos una serie $\sum g_k$ de funciones en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que cada g_k es continua en A y la serie converge uniformemente en A. Entonces la serie $\sum g_k$ representa una función continua en A.

Demostración:
Cada suma parcial $f_n = \sum g_k$ es continua y la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en A. Por lo tanto la función limite es continua por el teorema anterior. ∎

Teorema B.0.8 (Criterio M de Weierstrass.)**.** Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto A, y supongamos que para cada $\{f_n\}$ es uniformemnete acotada, es decir, existe una constante positiva M_n tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in A$. Supongamos también que la serie

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

converge. Entonces la serie

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

esta bien definida y es continua.

Demostración:
Para probar este teorema es suficiente probar lo siguiente:

Sea $\{M_k\}$ una sucesión de números reales no negativos donde $\sum M_k < \infty$. Si se cumple que $|f_k(x)| \leq M_k$ para toda $x \in A$ y toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sum f_k$ converge uniformemente en A.

Sea $\epsilon > 0$, como la serie $\sum M_k$ converge, satisface el criterio de Cauchy por la definición 6.3.3, así que existe un número N tal que para $n \geq m > N$ y esto implica que

$$\textstyle\sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon$$

entonces para $n \geq m > N$ y $x \in A$ tenemos

$$|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon$$

Por lo tanto la serie $\sum f_k$ satisface el criterio de Cauchy uniformemente en A y por el teorema B.0.5 esto muestra que converge uniformemente en A. Además por el teorema B.0.7 tenemos que $f = \sum f_k$ es una función continua en A.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] Casarrubias, F y Tamariz, A. 2012. *Elementos de Topología General.* Aportaciones Matemáticas 37. SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA. México. D.F.

[2] Munkres, J.R. 2002. *Topología.* 2da Edición. Prentice Hall. Madrid, España.

[3] Dugundji, J. 1996. *Topology.* Allyn and Bacon. Boston.

[4] Illanes-Mejía, A. 2004. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas 37. SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA. México. D.F.

[5] Illanes, A y S.B Nadler Jr. 1999. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York.

[6] Nadler Jr, S. 1992. *Continnuum Theory, an Introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 158. New York.

[7] Aguilera-Miranda, M.E. 2013. *Bloques pequeños de Whitney.* Tesis de Doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. México. D.F.

[8] Olano, William y Sánchez, Javier. 2019. *Hiperespacios de continuos: historia, avances y nuevos retos* . Pesquimat, 22(1): 69–78.