



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Licenciatura en Matemáticas

Acciones de Grupos Discretos en la Geometría
Riemanniana

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Genaro Hernández Mada

Director de Tesis: Dr. Yury Vorobev

Hermosillo, Sonora, México, 4 de Septiembre de 2009

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Q A 6 7 1

. H 8 7

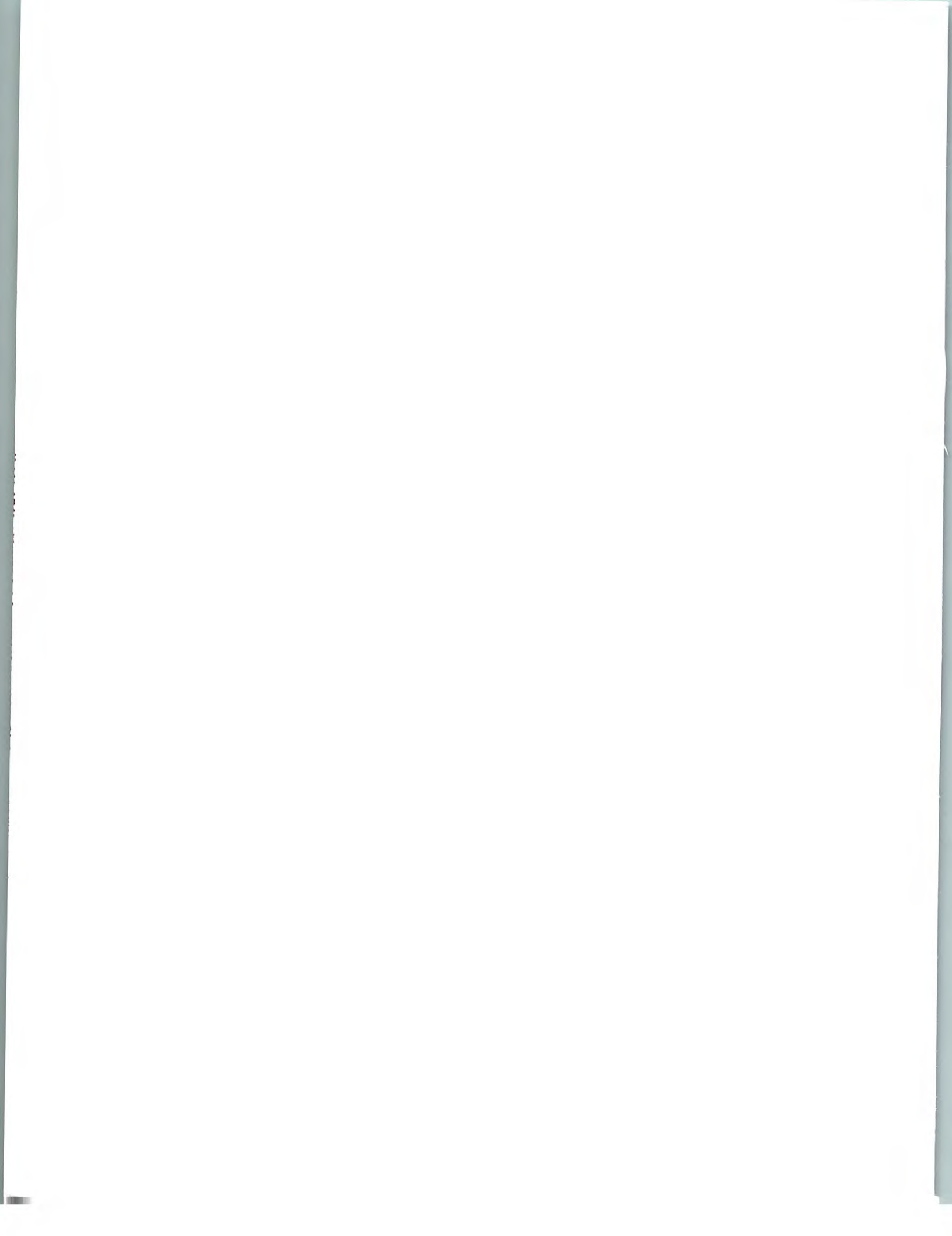
R I S 7 1 7 3 2

Dr. Yury Vorobev
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

SINODALES Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Dr. Martín Gildardo García Alvarado
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.



A mis padres:

Genaro Hernández Salazar

María del Carmen Mada Córdova

A mi hermana:

Reyna Yanet Hernández Mada

A Norma

Agradecimientos

Se otorga un agradecimiento a las entidades que hicieron posible el desarrollo de este trabajo. En primer lugar al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, que me apoyó en todo momento. Más particularmente, a mi director de tesis Dr. Yury Vorobev y a los sinodales Dr. Guillermo Dávila Rascón, Dr. Rubén Flores Espinoza y Dr. Martín Gildardo García Alvarado, por sus valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar mucho este trabajo, así como por facilitarme materiales que fueron de gran ayuda para el estudio realizado. También se agradece al Dr. Guillermo Dávila Rascón por su ayuda con el manejo de \LaTeX .

También se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la elaboración de este trabajo, como parte del proyecto “Mecanismos de Promedios para Sistemas de Evolución Clásicos y Cuánticos”, con clave 55463, del cual el Dr. Yury Vorobev es responsable.

La elaboración de este trabajo no hubiera sido posible tampoco sin las valiosas enseñanzas de todos mis profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, así como de los compañeros estudiantes. A todos ellos un sincero agradecimiento.

Finalmente agradezco a Dios, ya que creo que es quien más me ha ayudado.

Índice general

Introducción	1
1 Preliminares Algebraicos	3
1.1 Conceptos Básicos de Teoría de Grupos	3
1.2 Acciones de Grupos	5
1.3 Generadores y Relaciones	8
2 Acciones de Grupos Discretos sobre Espacios Topológicos	11
2.1 Espacios Cociente	12
2.1.1 Conceptos Básicos	12
2.1.2 Ejemplos	14
2.1.3 Funciones en Espacios Cociente	22
2.2 El Grupo Fundamental	23
2.2.1 Homotopía y Producto de Lazos	23
2.2.2 El Grupo Fundamental de un Espacio Cociente	29
2.2.3 Ejemplos	35
3 Clasificación de Superficies Localmente Euclidianas	39
3.1 Isometrías y Superficies Localmente Euclidianas	39
3.2 Clasificación de isometrías de \mathbb{R}^2	40
3.3 Teorema de Killing-Hopf	47
3.3.1 Superficies Cociente	48
3.3.2 La Función Lápiz y el Grupo de Isometrías Recubridoras	55
4 Variedades Diferenciables y Acciones de Grupos Discretos	59
4.1 Variedades Diferenciables	59
4.1.1 Estructura Diferenciable	59
4.1.2 Funciones Diferenciables y Difeomorfismos	64
4.1.3 Inmersiones, Encajes y Subvariedades	67

4.1.4	Haz Tangente	72
4.2	Particiones de la Unidad	76
4.3	Acciones de Grupos Discretos sobre Variedades	84
5	Variedades Riemannianas y Acciones de Grupos Discretos	91
5.1	Variedades Riemannianas	91
5.1.1	Métricas Riemannianas	92
5.1.2	Derivada Covariante y Geodésicas	101
5.1.3	Geodésicas en \mathbb{S}^2	108
5.2	Estructuras Riemannianas y Geodésicas en Variedades Cociente	110
5.3	Ejemplos	113
5.3.1	Cilindro	113
5.3.2	Banda de Möbius	115
5.3.3	Toro	115
5.3.4	Botella de Klein	117
5.3.5	Espacio Proyectivo	117
5.4	Relación con el Teorema de Killing-Hopf	118
	Conclusiones	120
	Bibliografía	122

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar un estudio detallado sobre la construcción de variedades riemannianas mediante la acción de grupos discretos sobre una variedad dada. La construcción formal se hace mediante el espacio de órbitas y se hace un desarrollo de sus propiedades topológicas, diferenciales y riemannianas.

Al inicio de nuestra formación en Geometría se estudian las propiedades del plano y el espacio tridimensional (según Euclides). Una pregunta que podemos hacernos es si los teoremas de la geometría son válidos en el espacio en el que vivimos. Es claro que no se pueden verificar experimentalmente estos resultados en todo el espacio, pero sí puede hacerse en un subconjunto acotado, por ejemplo en una bola de radio r . Si dentro de cualquier bola de radio r se satisfacen todos los resultados de la geometría elemental, no es claro que pase lo mismo a nivel global. Podemos preguntarnos entonces qué posibles formas puede tener el universo para tener tal propiedad local.

El problema descrito en el párrafo anterior fue considerado por W.K. Clifford ¹ en el siglo XIX. Él encontró una relación de dicho problema con las acciones de grupos. Un mayor interés surgió al encontrar que los grupos discretos guardaban una relación con la cristalografía ²(Para mayor información de esta relación se recomienda la referencia [17] de la bibliografía).

Un concepto que facilita el estudio de este problema es el de variedad riemanniana, que es el objeto de estudio de la Geometría Riemanniana. La relación que tienen es que lo que se busca son variedades riemannianas que se construyen como espacios de órbitas en una variedad ya dada, por medio de la acción de un grupo. Este enfoque nos permite generalizar a espacios de dimensión mayor.

En los libros de Geometría Riemanniana normalmente no se hace un estudio exhaustivo de las variedades que se obtienen mediante la acción de un grupo sobre una variedad dada. Esta es una de las principales aportaciones de este trabajo, ya que esta construcción permite estudiar propiedades de variedades de gran importancia, como lo son el cilindro, la banda de Möbius, el toro, la botella

¹William Kingdon Clifford (1845-1879) fue un matemático y filósofo inglés que tuvo importantes contribuciones en Geometría y sus interacciones con el Álgebra. En particular, introdujo lo que actualmente se conoce como Álgebra Geométrica.

²La Cristalografía es la rama de la Física que estudia los cristales.

de Klein y el espacio proyectivo.

El estudio de la geometría riemanniana normalmente se hace utilizando herramientas de matemáticas avanzadas, como lo son los tensores. En este trabajo se pretende utilizar solamente herramientas que se obtienen en cursos básicos de licenciatura. En particular, se requieren conocimientos de Topología, Cálculo Vectorial, Análisis Matemático y Ecuaciones Diferenciales. También es recomendable tener experiencia con la geometría diferencial clásica, es decir, con el estudio de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 .

En los cursos básicos de Geometría Diferencial de licenciatura normalmente no se utilizan herramientas del Álgebra abstracta. En este trabajo no sólo se utilizan, sino que juegan un papel de vital importancia. En el primer capítulo se presentan las nociones básicas de Álgebra abstracta que se utilizan en el trabajo. En particular, se estudian los conceptos básicos de teoría de grupos, acciones de grupos y generadores y relaciones.

En el capítulo 2 se estudian acciones de grupos discretos sobre espacios topológicos. Una variedad es en primera instancia un espacio topológico, por lo que conviene estudiar la construcción de una topología en el conjunto de órbitas de una acción de grupo, la cual recibe el nombre de topología cociente. Se presenta esta construcción con algunos ejemplos básicos, los cuales serán tratados a lo largo de todo el texto. Posteriormente se hace un desarrollo de lo que es el grupo fundamental de un espacio topológico, así como el cálculo de éste para espacios cociente.

En el capítulo 3 se presenta un teorema de clasificación de superficies localmente euclidianas, el cual puede enunciarse y demostrarse utilizando solamente la teoría del capítulo 2. Como puede observarse, este teorema tiene gran relación con el problema con el que se iniciamos. Primeramente se presentan los conceptos básicos para poder enunciarlo, como lo son el concepto de isometría y de superficie localmente euclidiana. Posteriormente se hace un estudio sobre las isometrías de \mathbb{R}^2 , ya que la demostración del teorema depende fuertemente de esto. Finalmente se enuncia y demuestra el teorema de clasificación, conocido como Teorema de Killing-Hopf.

En el capítulo 4 se estudian acciones de grupos discretos sobre variedades diferenciables. Normalmente, en un curso básico de Geometría Diferencial no se estudia la noción de variedad diferenciable, por lo que primeramente se estudia ésta, así como sus conceptos asociados. Después se presenta un estudio sobre particiones de la unidad, ya que es de gran importancia para el estudio de variedades riemannianas. Finalmente se estudian las acciones de grupos sobre variedades, donde se estudiarán estructuras diferenciables y orientabilidad en variedades cociente.

En el capítulo 5 se hace un desarrollo similar al del capítulo 4 con variedades riemannianas. Primeramente se presenta la noción de variedad riemanniana, así como sus conceptos asociados. Posteriormente se estudian estos conceptos en variedades cociente, así como los ejemplos que se han trabajado en los capítulos anteriores. Finalmente se menciona la relación que tiene el estudio de variedades riemannianas cociente con el teorema de Killing-Hopf.

Capítulo 1

Preliminares Algebraicos

En este capítulo se presentan conceptos básicos que serán útiles en los desarrollos posteriores. Primeramente se estudian conceptos básicos de Teoría de Grupos. Después, se estudian acciones de grupos y algunas nociones relacionadas. Por último, se consideran los generadores y relaciones en un grupo.

1.1 Conceptos Básicos de Teoría de Grupos

En esta sección se presentan los conceptos básicos de la teoría de grupos, tales como la definición de grupo, subgrupo, subgrupo normal y homomorfismo de grupos.

Definición 1.1. Un conjunto no vacío G se dice ser un *grupo* si en él está definida una operación binaria, llamada producto y denotada por \cdot , la cual cumple las siguientes propiedades:

1. Si $a, b \in G$, entonces $a \cdot b \in G$.
2. Si $a, b, c \in G$, entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. Existe un elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.
4. Para todo $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Un primer ejemplo de grupo es un conjunto de un sólo elemento $\{e\}$ con una operación trivial $e \cdot e = e$. Este grupo recibe el nombre de grupo trivial. Otro ejemplo es el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} con la operación de suma. En general, el producto cartesiano

$$\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

forma un grupo con la operación de suma componente a componente. Otro ejemplo de grupo es el conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, con la operación de suma módulo n .

Con el objetivo de tener una notación más simple, denotaremos el producto de dos elementos $a \cdot b$ como simplemente ab , a menos que haya que hacer énfasis en cuál es la operación del grupo. Además, definiremos $a^0 := e$, $a^1 := a$, y para $n \geq 2$ definiremos $a^n := a^{n-1}a$. Con estas notaciones, puede demostrarse que $a^m a^n = a^{m+n}$ y $(a^m)^n = a^{mn}$.

Es importante notar que la operación en el grupo no es necesariamente conmutativa. Es decir, en general no se puede concluir que $ab = ba$. Si en un grupo G , la operación es conmutativa, diremos que G es un grupo *abeliano*. Un ejemplo de grupo abeliano es \mathbb{Z} , con la operación de suma usual. Un ejemplo de grupo no abeliano es el conjunto de funciones biyectivas de un conjunto con tres elementos, con la operación de composición. A este ejemplo se le denota usualmente como S_3 . En general, dado un conjunto X , el conjunto de funciones biyectivas de X en X forma un grupo con la operación de composición y se denota por $S(X)$. Cuando X es un conjunto finito con n elementos, $S(X)$ se denota por S_n .

Si un subconjunto H de un grupo G es, a su vez, un grupo con la operación ya definida en G , diremos que H es un *subgrupo* de G . Es claro que la propiedad 2 de la definición 1.1 se cumple para cualquier subconjunto de G , por lo que sólo basta verificar las otras propiedades para verificar si H es un subgrupo de G . El conjunto de todos los enteros pares es un subgrupo de \mathbb{Z} , ya que el 0 es par y la suma de dos pares es par. En cambio, el conjunto de todos los enteros impares no es un subgrupo de \mathbb{Z} , pues 0 no es impar.

Dado un subgrupo H y un elemento $g \in G$, los conjuntos

$$gH := \{gh | h \in H\}, \quad Hg := \{hg | h \in H\},$$

se llaman una clase lateral izquierda, o clase lateral derecha, de H , respectivamente.

Definición 1.2. El número de clases laterales izquierdas de H se llama el índice de H respecto a G .

La siguiente definición es muy importante en la teoría de grupos y la siguiente proposición muestra una manera en la que se relacionan este concepto con el de índice de un grupo.

Definición 1.3. Dado un grupo G y un subgrupo H , diremos que H es un subgrupo normal si para cada $h \in H$ y $g \in G$, se tiene que $ghg^{-1} \in H$.

Es claro de la definición que si G es un grupo abeliano, entonces cualquier subgrupo de G es un subgrupo normal. Por ejemplo, el conjunto de los enteros impares es un subgrupo normal de \mathbb{Z} .

Al considerar funciones entre grupos, es importante estudiar aquellas que preservan la estructura algebraica, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.4. Sean G y H grupos, con las operaciones \cdot y $*$, respectivamente. Una función $\phi : G \rightarrow H$ se dice ser un homomorfismo si para cualesquier $g_1, g_2 \in G$, se satisface

$$\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2).$$

Cuando la función ϕ además es biyectiva, diremos que ϕ es isomorfismo y que los grupos G y H son isomorfos.

La idea de dos grupos isomorfos es que no hay una diferencia algebraica esencial entre ellos, ya que hay una correspondencia biyectiva que respeta las operaciones en ambos grupos.

Asociado a un homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow H$ está el concepto de núcleo o kernel, denotado por $\ker \phi$ el cual se define como

$$\ker \phi := \{g \in G : \phi(g) = e_H\},$$

donde e_H representa el elemento neutro de H . El estudiar el núcleo de un homomorfismo ϕ puede dar información acerca de las propiedades de ϕ , como muestra el siguiente lema.

Lema 1.1. Sean G y H grupos y $\phi : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Si $\ker \phi = \{e_G\}$, donde e_G representa al neutro de G , entonces ϕ es una función inyectiva.

Demostración

Primero demostraremos que $\phi(e_G) = e_H$. En efecto, pues para todo $g \in G$ se tiene que $\phi(g)e_H = \phi(ge_G) = \phi(g)\phi(e_G)$, lo que implica que $e_H = \phi(e_G)$.

Ahora supongamos que $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Entonces $\phi(g_1g_2^{-1}) = e_H$. Por nuestra suposición, $g_1g_2^{-1} = e_G$, de donde $g_1 = g_2$ y concluimos que la función ϕ es inyectiva.

□

Hay muchos otros resultados concernientes a homomorfismos, subgrupos y subgrupos normales. Aquí presentamos solamente lo que nos será de utilidad en el desarrollo del trabajo, pero se recomiendan las referencias [6] y [11] de la bibliografía para profundizar más en estos temas.

1.2 Acciones de Grupos

En esta sección se presenta el concepto de acción de grupo, así como otras nociones relacionadas, las cuales serán útiles en el desarrollo de todo el trabajo. Al igual que en el caso de la sección anterior, se ha incluido solamente lo que será de utilidad en el desarrollo del trabajo. Para profundizar más en el tema de acciones de grupo se recomienda la referencia [6] de la bibliografía.

Definición 1.5. Sean G un grupo y X un conjunto. Diremos que $\theta : G \times X \rightarrow X$ es una acción de G sobre X (por la izquierda) si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Si $e \in G$ es el elemento identidad, entonces $\theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$.
- Si $g_1, g_2 \in G$, entonces $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1g_2, x)$ para todo $x \in X$.

Esta definición es válida para cualquier conjunto X , el cual puede ser de naturaleza muy variada. Por ejemplo, S_n actúa sobre el conjunto $A = \{1, \dots, n\}$ de manera natural. Recordemos que S_n es el conjunto de funciones biyectivas $\phi : A \rightarrow A$, por lo que podemos definir la acción por medio de $\theta(\phi, n) = \phi(n)$. Es claro que esta definición satisface las propiedades de una acción de grupo. En este ejemplo el conjunto A no tiene por qué estar dotado con estructura algebraica. Cuando esto sucede se pueden definir otro tipo de acciones. Por ejemplo si G es un grupo, podemos definir la acción de G sobre G por medio de

$$\theta(g_1, g_2) = g_1 g_2 g_1^{-1} \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Esta acción es conocida como *conjugación*. Es fácil verificar que esta definición satisface las propiedades de acción de grupo. Otro ejemplo es la acción de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R}^2 definido de la siguiente manera

$$\theta(n, (x, y)) = (x + n, y) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Estos ejemplos muestran que el conjunto X sobre el que actúa un grupo G puede ser de naturaleza muy distinta. En el capítulo 2 se estudiarán más ejemplos de acciones de grupos, en el caso particular en el que el conjunto sobre el que se actúa es un espacio topológico.

Cabe mencionar que en este trabajo solamente estudiaremos acciones por la izquierda, por lo que cuando hablemos de un grupo que actúa sobre un conjunto, nos estaremos refiriendo a una acción por la izquierda. Sin embargo, puede hacerse un desarrollo similar para acciones por la derecha, las cuales se definen de manera análoga.

Nótese que para cada $g \in G$, podemos definir la función $\theta_g : X \rightarrow X$ de manera que $\theta_g(x) = \theta(g, x)$. A continuación se presenta un resultado muy útil sobre estas funciones.

Lema 1.2. *Si G actúa sobre X , entonces la función tal que $g \mapsto \theta_g$, es un homomorfismo de G en $S(X)$. Inversamente, un homomorfismo $\phi : G \rightarrow S(X)$ determina una acción de G sobre X .*

Demostración

Primero veamos que efectivamente, cada θ_g es un elemento de $S(X)$. Si $\theta_g(x) = \theta_g(y)$, entonces $\theta(g^{-1}, \theta_g(x)) = \theta(g^{-1}, \theta_g(y))$, por lo que $\theta(g^{-1}g, x) = \theta(g^{-1}g, y)$ y se sigue que $x = y$, de donde θ_g es inyectiva para cada g . Ahora, para ver que es suprayectiva, notemos que dado $x \in X$, se tiene que $\theta_g(\theta(g^{-1}, x)) = x$. Por lo tanto, θ_g es un elemento de $S(X)$.

Ahora veamos que la función tal que $g \mapsto \theta_g$ es un homomorfismo de G en $S(X)$. En efecto, si $g_1, g_2 \in G$, entonces para cada $x \in X$, $\theta_{g_1 g_2}(x) = \theta(g_1 g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x)) = (\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2})(x)$. Por lo tanto, $g_1 g_2 \mapsto \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$ la función es un homomorfismo.

Supongamos ahora que $\phi : G \rightarrow S(X)$ es un homomorfismo. Definimos la función $\theta : G \times X \rightarrow X$ tal que $\theta(g, x) = \phi(g)(x)$. Veamos que esta función resulta ser una acción de grupo. Como ϕ es homomorfismo, entonces $\phi(e)$ es la función identidad, por lo que $\theta(e, x) = \phi(e)(x) = x$. Por último:

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \phi(g_1)(\phi(g_2)(x)) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)(x) = \phi(g_1 g_2)(x) = \theta(g_1 g_2, x).$$

□

En lugar de escribir $\theta(g, x)$ ó $\theta_g(x)$, es más fácil escribir simplemente gx . Utilizaremos esta notación a lo largo de todo el trabajo. Ahora definiremos algunos conceptos que son importantes al estudiar acciones de grupos.

Definición 1.6. Sea G un grupo que actúa en un conjunto X y supongamos que $x \in X$. La órbita de x es el conjunto

$$Gx := \{gx | g \in G\}.$$

Si $Gx = \{x\}$, diremos que x es un punto fijo de G . Si $Gx = X$, diremos que G es transitivo en X .

De la misma manera en la que se define la órbita de un elemento $x \in X$, puede definirse la órbita de un subconjunto A de X por:

$$GA := \bigcup_{a \in A} Ga.$$

Notemos que si G es transitivo en X , es decir, si existe $x_0 \in X$ tal que $Gx_0 = X$, entonces $Gx = X$ para todo $x \in X$. En efecto, dado $x \in X$, para cualquier $z \in X$ existe $g_0 \in G$ tal que $g_0x_0 = z$ y $g_1 \in G$ tal que $g_1x_0 = x$, o equivalentemente $x_0 = g_1^{-1}x$. Luego,

$$(g_0g_1^{-1})x = g_0(g_1^{-1}x) = z.$$

Por lo tanto, $X \subset Gx$ para cada $x \in X$. La prueba de la otra contención es trivial.

Definición 1.7. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X y sea $x \in X$. El estabilizador de x , denotado por G_x , es el conjunto $\{g \in G | gx = x\}$.

El estabilizador de un elemento x es un subgrupo de G , pues claramente el neutro $e \in G$ pertenece a G_x y si $g_1, g_2 \in G_x$, entonces $g_2(g_1x) = g_2(x) = x$, por lo que $g_2g_1 \in G_x$. Análogamente, $g_1g_2 \in G_x$.

Definición 1.8. Sea G un grupo que actúa en un conjunto X . Diremos que G actúa libremente en X (o que la acción de G es libre) si $gx = x$ implica que $g = e$.

Las definiciones y resultados anteriores son válidos para grupos en general. Sin embargo, de aquí en adelante nos restringiremos a grupos que tengan una cantidad a lo más numerable de elementos, a menos que se especifique lo contrario. Estos grupos reciben el nombre de *grupos discretos*. Cuando sea necesario, consideraremos también a estos grupos con la topología discreta.

1.3 Generadores y Relaciones

En ocasiones es posible encontrar un subconjunto S de un grupo G , tal que cualquier elemento de G puede expresarse en términos de los elementos de S , por medio de productos de éstos y sus inversos. En este caso, diremos que S es un *conjunto de generadores para G* y que G está generado por S , lo cual denotaremos como $G = \langle S \rangle$. Por ejemplo, el grupo \mathbb{Z} con la operación suma es generado por el número 1, por lo que podemos escribir $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

Dado un grupo G , pueden construirse subgrupos de G por medio de generadores. Más aún, dado cualquier subconjunto $S \subset G$, el conjunto de todos los productos de potencias de elementos de S es un subgrupo de G . En el caso particular cuando S tiene un sólo elemento x , el grupo $\langle x \rangle$ recibe el nombre de *subgrupo cíclico generado por x* . En general, un subgrupo N de G se dice ser cíclico si existe $x \in G$ tal que $N = \langle x \rangle$. Por ejemplo, \mathbb{Z} es un ejemplo de grupo cíclico.

Cuando un grupo G admite un conjunto finito S de generadores, diremos que G está *finitamente generado*. El grupo aditivo \mathbb{Z} es claramente un ejemplo de grupo finitamente generado. Más aún, cualquier grupo cíclico también lo es. Un ejemplo de grupo que no es finitamente generado es el grupo P de polinomios con coeficientes enteros, con la operación suma. En efecto, supongamos que S es un conjunto finito de generadores para P y sea N el máximo de los grados de los elementos de S . Luego, el polinomio $p(t) = t^{N+1}$ no pertenece a $\langle S \rangle$, que es una contradicción.

En general, una ecuación que involucre a los generadores de un grupo G y al elemento neutro se llama una *relación* en G . Si existe un conjunto de relaciones, digamos R_1, R_2, \dots, R_n , tales que cualquier otra relación puede obtenerse a partir de ellas, entonces diremos que el conjunto de generadores S , junto con las relaciones R_1, \dots, R_n forman una *presentación* del grupo G . Esto lo denotaremos como:

$$G = \langle S | R_1, \dots, R_n \rangle.$$

Por ejemplo, recordemos que S_3 es el grupo de funciones biyectivas de un conjunto de tres elementos, digamos $\{1, 2, 3\}$. Consideremos los elementos $s, t \in S_3$ tales que:

$$s(1) = 2, s(2) = 3, s(3) = 1, \quad t(1) = 2, t(2) = 1, t(3) = 3.$$

No es difícil ver que estos dos elementos generan a S_3 y que una presentación para este grupo es:

$$S_3 = \langle s, t | s^3 = t^2 = id, ts = s^2t \rangle,$$

donde *id* representa la función identidad en $\{1, 2, 3\}$. En la sección 2.1.2 será de utilidad el representar a un grupo por medio de sus generadores y relaciones, cuando se construya a la botella de Klein como un espacio cociente.

Cabe mencionar que a pesar de que las presentaciones son una manera sencilla de describir un grupo, hay muchas sutilezas que hay que considerar cuando se quiere construir un grupo a partir de un conjunto de generadores y un conjunto de relaciones. Estas sutilezas no serán tratadas

detalladamente en este trabajo, pero en la referencia [6] de la bibliografía pueden encontrarse todos estos detalles.

Capítulo 2

Acciones de Grupos Discretos sobre Espacios Topológicos

En este capítulo se hace un estudio detallado sobre acciones de grupo, las cuales fueron definidas en la sección 1.2, cuando el conjunto sobre el cual se actúa es un espacio topológico. En particular, estudiaremos cómo pueden construirse espacios topológicos, a partir de uno dado, usando la acción de un grupo. Posteriormente se hace un desarrollo de lo que es el grupo fundamental de un espacio topológico qué relación guarda este concepto con el grupo que se utilizó para construir el espacio.

Recordemos que si un grupo G actúa sobre un conjunto, o más particularmente, sobre un espacio topológico X , entonces para cada $g \in G$, podemos definir la función $\theta_g : X \rightarrow X$, de manera que para cada $x \in X$, $\theta_g(x) = gx$. Cuando esta función sea continua para todo $g \in G$, diremos que la acción θ es continua. La siguiente proposición muestra que esta condición es suficiente para que las funciones θ_g sean homeomorfismos, por lo que es una propiedad deseable al estudiar acciones de grupos sobre espacios topológicos.

Proposición 2.1. *Si X es un espacio topológico y G actúa sobre X , de manera que la acción θ es continua, entonces cada función θ_g (como se definieron anteriormente) es un homeomorfismo.*

Demostración

Como ya sabemos que cada θ_g es biyectiva, sólo hay que demostrar que su inversa es continua. Notemos que $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = \theta_e = i_X$, donde i_X es la función identidad en X . De la misma manera, $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = \theta_e = i_X$, por lo que $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$, que por hipótesis es continua.

□

De aquí en adelante, cuando hablemos de acciones de grupos sobre espacios topológicos, consideraremos únicamente acciones continuas, por lo que las funciones θ_g serán homeomorfismos.

2.1 Espacios Cociente

Las acciones de grupo son de utilidad para construir nuevos espacios topológicos. En esta sección se hace un desarrollo de la construcción de algunos de estos espacios mediante una acción de un grupo discreto Γ sobre un espacio topológico dado X . En la primera parte se estudian los conceptos básicos para la construcción de estos espacios, mientras que en la segunda parte se estudian ejemplos, algunos de los cuales serán estudiados más a profundidad a lo largo del trabajo.

2.1.1 Conceptos Básicos

Se ha mencionado que un beneficio importante que tienen las acciones de grupos sobre espacios topológicos es que permiten construir nuevos espacios. Para esto nos auxiliaremos de lo que se conoce como espacio cociente.

Consideremos un espacio topológico X y \sim una relación de equivalencia en X . Denotamos por $[x] := \{y | x \sim y\}$ la clase de equivalencia de x . De manera análoga, si $A \subset X$,

$$[A] := \bigcup_{a \in A} [a].$$

Denotaremos por X/\sim al conjunto de clases de equivalencia. Esto define una función $\pi : X \rightarrow X/\sim$ tal que $\pi(x) = [x]$, la cual se conoce como *proyección natural*.

En el conjunto X/\sim , definimos una topología en la que los abiertos son todos los subconjuntos U de X/\sim tales que $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X . Se puede verificar que efectivamente, esto es una topología, la cual recibe el nombre de *topología cociente*. Con la topología cociente, se sigue directamente que la proyección natural es una función continua. Al conjunto X/\sim con la topología definida de la manera anterior le llamaremos *espacio cociente de X y \sim* .

Supongamos que β es una base para la topología de X y π es la proyección natural. Entonces el conjunto

$$\tilde{\beta} = \{\pi(U) | U \in \beta\}$$

resulta ser una base para la topología cociente. En efecto, pues si \tilde{U} es un abierto en X/\sim , entonces $\pi^{-1}(\tilde{U})$ es un abierto en \mathbb{R}^2 , por lo que

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{i \in I} B_i,$$

para cierto conjunto de índices I y $B_i \in \beta$ para cada $i \in I$. Luego,

$$\pi(\pi^{-1}(\tilde{U})) = \pi\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right).$$

Como π es suprayectiva, entonces la última ecuación es equivalente a:

$$\tilde{U} = \bigcup_{i \in I} \pi(B_i),$$

lo que demuestra que $\tilde{\beta}$ es una base para la topología cociente.

Proposición 2.2. *Sea G un grupo que actúa sobre un espacio topológico X . Definimos la relación \sim en X de manera que $x \sim y$ si existe $g \in G$ tal que $x = gy$. Entonces \sim es relación de equivalencia.*

Demostración

Claramente, $x \sim x$, pues $x = ex$. Ahora, si $x \sim y$, entonces existe $g \in G$ tal que $x = gy$. Luego, $g^{-1}x = g^{-1}(gy) = (g^{-1}g)y = ey = y$, por lo que $y \sim x$. Por último, si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $x = g_1y$ y $y = g_2z$. De aquí se sigue que $x = g_1(g_2z) = (g_1g_2)z$, por lo que $x \sim z$.

□

Denotaremos por X/G al espacio cociente, dado por la relación de equivalencia de la proposición anterior. En ocasiones, a X/G se le llama el espacio órbita de la acción. Este nuevo espacio tiene propiedades deseables cuando la acción del grupo cumple ciertas características, como el ser una acción propia.

Definición 2.1. Un grupo discreto Γ se dice actuar propiamente sobre un espacio topológico X (o que la acción de Γ es propia) si siempre que $x, y \in X$ no están en una misma órbita, entonces existen vecindades U, V de x, y , respectivamente, tales que $U \cap \Gamma V = \emptyset$.

Definición 2.2. Un espacio topológico X es de Hausdorff si para cualesquiera puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos U, V tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Claramente, la propiedad de ser de Hausdorff es una propiedad deseable en un espacio topológico. El siguiente teorema muestra que una condición necesaria y suficiente para que un espacio de la forma X/Γ sea de Hausdorff es que la acción de Γ sobre X sea propia. Esto deja en claro la importancia de considerar acciones propias.

Teorema 2.1. *Un grupo discreto Γ actúa propiamente sobre un espacio topológico X si y sólo si X/Γ es de Hausdorff.*

Demostración

Supongamos que Γ actúa propiamente sobre un espacio topológico X y sean $\pi(x), \pi(y) \in X/\Gamma$ distintos. Como la acción es propia, existen vecindades U, V de x, y respectivamente, tales que $U \cap \Gamma V = \emptyset$.

Supongamos que $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$. Entonces existen $u \in U, v \in V$ tales que $\Gamma u = \Gamma v$, lo que implica que existe un $g \in \Gamma$ tal que $u = gv$. Es decir, $u \in U \cap \Gamma V$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$.

Veamos que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos en X/Γ . En efecto, pues

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \Gamma U = \bigcup_{g \in \Gamma} \theta_g(U),$$

y $\theta_g(U)$ es abierto para cada g , pues θ_g es homeomorfismo. De manera análoga para $\pi(V)$. Como $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos ajenos que contienen a $\pi(x)$ y $\pi(y)$ respectivamente, concluimos que X/Γ es de Hausdorff.

Supongamos ahora que X/Γ es de Hausdorff y sean $x, y \in X$ en órbitas distintas. Entonces $\pi(x) \neq \pi(y)$, por lo que existen abiertos \tilde{U}, \tilde{V} en X/Γ , tales que $\pi(x) \in \tilde{U}$, $\pi(y) \in \tilde{V}$ y $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$. Sean $U = \pi^{-1}(\tilde{U}), V = \pi^{-1}(\tilde{V})$. Por la definición de la topología cociente, U y V son abiertos en X . Además, $x \in U, y \in V$.

Por último, notamos que $U \cap \Gamma V = U \cap V = \pi^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \emptyset$. Por lo tanto, la acción es propia. \square

Con el teorema 2.1, podemos demostrar que algunos espacios cociente, que pueden resultar familiares, son de Hausdorff. El objetivo de la siguiente sección es presentar algunos de estos ejemplos. El lector interesado en conocer otro tipo de propiedades de los espacios de órbitas puede consultar la referencia [1] de la bibliografía.

2.1.2 Ejemplos

Cilindro

Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y $\Gamma = \mathbb{Z}$. Definimos la acción de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

$$n(x, y) = (x + n, y) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Una manera de visualizar al espacio cociente \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} es mediante lo que se conoce como *región fundamental*. Entenderemos por región fundamental una parte representativa del espacio (\mathbb{R}^2 en este caso) que contiene al menos un representante de cada órbita y que tiene a lo más un representante de cada órbita en su interior.

En este caso, una región fundamental es la banda $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Podemos notar que solamente en la frontera hay puntos que pertenecen a la misma órbita. Entonces debemos “pegar” los puntos que pertenecen a la misma órbita. El resultado es un cilindro.

Nuestro objetivo ahora es ver que la acción que definimos es una acción propia. De esta manera estaremos demostrando que el cilindro es un espacio de Hausdorff. Supongamos que la acción no es propia, es decir, que existen puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, en órbitas distintas, tales que siempre que se tomen vecindades U, V de x y y respectivamente, se satisface que $U \cap \Gamma V \neq \emptyset$. Esto implica que existen sucesiones $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}, (y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$, tales que $x^{(n)} \rightarrow x, y^{(n)} \rightarrow y$, y una sucesión $(k_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ tal que

$$x^{(n)} = k_n y^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que para cada n , $x^{(n)} = (x_1^n, x_2^n), y^{(n)} = (y_1^n, y_2^n)$. Entonces

$$(x_1^n, x_2^n) = (y_1^n + k_n, y_2^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $x_1^n \rightarrow x_1$ y $y_1^n \rightarrow y_1$, entonces $k_n \rightarrow x_1 - y_1$, pero $k_n \in \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}$, lo cual contradice que x y y están en órbitas distintas. Es importante notar que la convergencia de $(k_n)_{n=1}^\infty$ es con la topología de \mathbb{R} . Por lo tanto, hemos concluido que la acción es propia y concluimos que el cilindro es un espacio de Hausdorff, el cual se denota usualmente por la letra C .

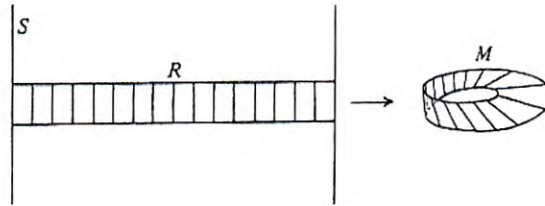
Banda de Möbius

Consideremos nuevamente $X = \mathbb{R}^2$ y $\Gamma = \mathbb{Z}$. Se define la acción de Γ sobre \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

$$n(x, y) = (x + n, (-1)^n y) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En este caso, una región fundamental es también la banda $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Podemos notar que la situación es similar al caso del cilindro, con la diferencia que la manera en la que se “pegan” los extremos de la banda no es la misma. En este caso, debe “torcerse” al pegar, lo que da como resultado algo que no puede existir en el espacio tridimensional sin intersectarse, conocido como banda de Möbius.

Una parte representativa de este espacio, que se obtiene al pegar y torcer un rectángulo (en lugar de la banda infinita), como muestra la siguiente figura, sí puede visualizarse en el espacio tridimensional. En la figura, S es la región fundamental de la banda de Möbius, R un rectángulo y M es una parte representativa.



En ocasiones, a esta parte de representativa se le llama banda de Möbius acotada. Es importante señalar que en la figura se está considerando un sistema coordenado de manera que la primer coordenada es horizontal y la segunda coordenada es vertical. Esta convención se usará en el resto del trabajo para todas las figuras en \mathbb{R}^2 .

Para ver que la acción que define a la banda de Möbius es una acción propia, supongamos que no lo es. De manera similar que en el caso del cilindro, existen puntos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ en órbitas distintas y sucesiones $(x^{(n)})_{n=1}^\infty, (y^{(n)})_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$, $(k_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Z}$ tales que

$$(x_1^n, x_2^n) = (y_1^n + k_n, (-1)^{k_n} y_2^n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $x^{(n)} = (x_1^n, x_2^n)$, $y^{(n)} = (y_1^n, y_2^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Nuevamente, obtenemos que $k_n \rightarrow x_1 - y_1 =: k$, de donde

$$(x_1^n, x_2^n) \rightarrow (y_1 + k, (-1)^k y_2),$$

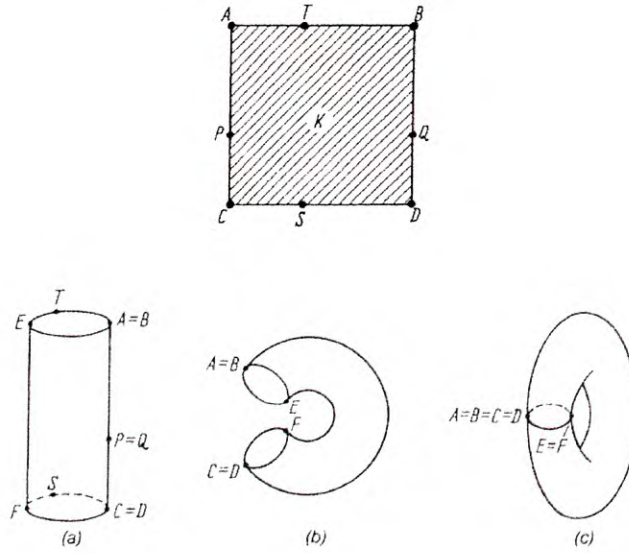
pero $(x_1^n, x_2^n) \rightarrow (x_1, y_1)$, lo que contradice que x y y están en órbitas distintas. Por lo tanto, la acción es propia y concluimos que la banda de Möbius es un espacio de Hausdorff, el cual se denota usualmente con la letra M .

Toro

Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definimos la acción de Γ sobre \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

$$(m, n)(x, y) = (x + m, y + n) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En este caso, una región fundamental es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Podemos notar que en los lados opuestos del cuadrado se tienen elementos de las mismas órbitas, de manera que para pegarlos primero se forma un cilindro y después se pegan sus extremos para formar un toro, como se muestra en las siguientes figuras. En la primera de ellas se presenta la región fundamental con algunos puntos de referencia, para ver cómo se hace el pegado, el cual se ilustra en la segunda figura.



Veamos que la acción que define al toro es una acción propia. Supongamos que no lo es. Entonces existen puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ en órbitas distintas y sucesiones $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}, (y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2, ((k_n, j_n))_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ tales que $x^{(n)} \rightarrow x, y^{(n)} \rightarrow y$ y

$$x^{(n)} = (k_n, j_n)y^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando la misma notación para las sucesiones en \mathbb{R}^2 que en los ejemplos anteriores, obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$(x_1^n, x_2^n) = (y_1^n + k_n, y_2^n + j_n).$$

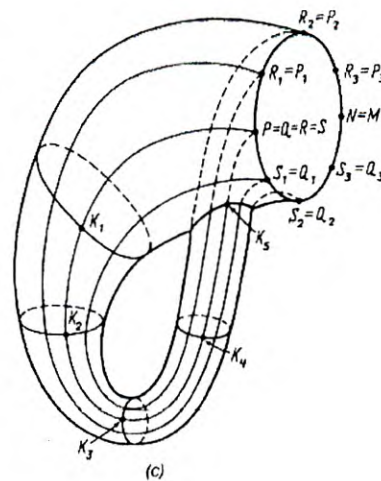
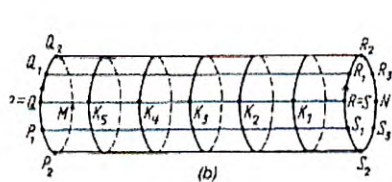
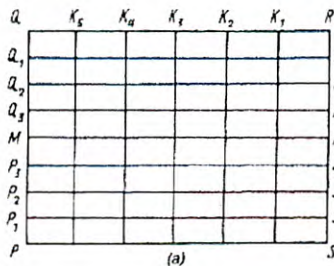
Esto implica que $k_n \rightarrow x_1 - y_1$, y $j_n \rightarrow x_2 - y_2$, pero $(k_n)_{n=1}^\infty, (j_n)_{n=1}^\infty$ son sucesiones en \mathbb{Z} , por lo que $x_1 - y_1$ y $x_2 - y_2$ deben ser enteros, lo cual contradice que x y y están en órbitas distintas. Por lo tanto, la acción es propia y concluimos que el toro es un espacio de Hausdorff. La notación usual para este espacio es \mathbb{T}^2 .

Botella de Klein

Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y $\Gamma = \langle u, v | uvv^{-1}v = e \rangle$. Definimos la acción de Γ sobre X de la siguiente manera:

$$e(x, y) = (x, y), \quad u(x, y) = (x + 1, -y), \quad v(x, y) = (x, y + 1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Los demás elementos del grupo actúan de manera natural, en términos de la acción de u y de v . En este caso, una región fundamental es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Podemos notar que tenemos una combinación de lo que pasa en el caso del toro y lo que pasa en el caso de la banda de Möbius. A continuación se muestra la región fundamental con algunos puntos de referencia para posteriormente ilustrar cómo se hace el pegado.



El espacio obtenido, al igual que la banda de Möbius, no puede existir en el espacio tridimensional sin intersectarse. Se le llama Botella de Klein, en honor a Felix Klein, quien fue el primero en estudiarla.

Para ver que la acción que define a la Botella de Klein es propia, primero analicemos cómo es la órbita de algún punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Notemos que la acción de un elemento $h \in \Gamma$ sobre (x, y) es la acción de un cierto número de veces u y un cierto número de veces v (o sus inversos) en algún orden. La órbita de (x, y) puede quedar descrita de la siguiente manera:

$$\Gamma(x, y) = \{(x + 2n, y + m) : m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x + 2n + 1, -y + m) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esto se debe a que la acción de un elemento de Γ sobre (x, y) difiere en un vector de coordenadas enteras de (x, y) o $(x, -y)$. Recíprocamente, un elemento cualquiera del conjunto descrito puede obtenerse mediante la acción de un producto de u y v . Por ejemplo, primero aplicando la acción de u el número necesario de veces y posteriormente la de v , el número de veces que haga falta.

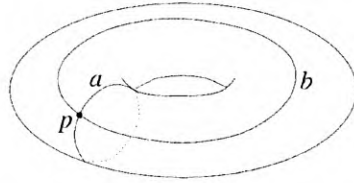
Para probar que la acción que define a la botella de Klein es una acción propia, primero probaremos que la órbita de un punto (x, y) no puede tener puntos de acumulación. Supongamos que existe una sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma(x, y)$ tal que $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto x_0 . Es claro que existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $x^{(k)}$ pertenece a uno y sólo uno de los conjuntos:

$$\{(x + 2n, y + m) : m, n \in \mathbb{Z}\}, \{(x + 2n + 1, -y + m) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

En cualquiera de los casos, concluimos que x_0 debe pertenecer al mismo conjunto que $x^{(k)}$ para $k \geq N$. Sin embargo, ninguno de estos conjuntos puede tener puntos de acumulación, ya que todos los elementos están separados entre sí por una distancia mayor o igual que 1. Por lo tanto, concluimos que $\Gamma(x, y)$ no puede tener puntos de acumulación.

Consideremos ahora dos puntos $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$. Como las respectivas órbitas no tienen puntos de acumulación, entonces existe $g \in \Gamma$ tal que la distancia r entre (x, y) y $g(z, w)$ es la mínima posible. Si tomamos U como la bola con centro (x, y) y radio $\frac{r}{2}$ y a V como la bola con el mismo radio y centro en (z, w) , entonces $U \cap \Gamma V = \emptyset$. Por lo tanto, la acción es propia y la botella de Klein es un espacio de Hausdorff, el cual se denota usualmente por \mathbb{K} .

Una manera alternativa de definir la botella de Klein es utilizando al toro construido en esta sección, el cual denotaremos por \mathbb{T}^2 . Primero definiremos una función $\sigma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, de la siguiente manera: para cada punto $p \in \mathbb{T}^2$, consideramos dos circunferencias perpendiculares que pasan por p y que le dan una vuelta al toro, como muestra la figura:



Sea y la antípoda de p respecto a una de estas circunferencias; luego, consideramos las dos circunferencias que pasan por y y que le dan una vuelta al toro de la misma manera; definimos $\sigma(x)$ como la antípoda de y respecto a la circunferencia que le da vuelta al toro en dirección perpendicular a la que se usó para definir y .

Esta función σ cumple la propiedad de que σ^2 es la función identidad en el toro \mathbb{T}^2 . Esto nos permite definir una relación de equivalencia en \mathbb{T}^2 de la siguiente manera: $x \sim y$ si $x = \sigma(y)$ o $x = y$. En este caso, una región fundamental es la mitad del toro; para visualizar el espacio cociente deben pegarse los dos extremos de la misma manera que en la construcción anterior se pegaban los extremos del cilindro.

Podemos notar también que esta última construcción puede hacerse mediante la acción de $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ de manera que $0x = x$ y $1x = \sigma(x)$. El espacio cociente $\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2$ es la botella de Klein; como ya sabíamos que \mathbb{T}^2 es un espacio de Hausdorff, obtenemos una prueba alternativa de que la botella de Klein también lo es.

Espacio Proyectivo

Consideremos ahora $X = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Definimos la acción de Γ sobre X de la siguiente manera:

$$0(x, y, z) = (x, y, z), \quad 1(x, y, z) = -(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{S}^2.$$

El espacio cociente X/Γ en este caso se llama espacio proyectivo y es el conjunto de estudio en Geometría Proyectiva. Cabe mencionar que a este espacio también suele llamársele espacio proyectivo 2-dimensional; a lo largo del trabajo nos referiremos a él como simplemente espacio proyectivo.

Para ver que la acción que define al espacio proyectivo es una acción propia, notemos que \mathbb{S}^2 es un espacio de Hausdorff, por ser un subconjunto de \mathbb{R}^3 . Si $x, y \in \mathbb{S}^2$ son puntos en órbitas distintas, entonces existen vecindades U, V_1, V_2 de $x, y, -y$, respectivamente, tales que $U \cap V_1 = U \cap V_2 = \emptyset$. Sea $V = V_1 \cap (-V_2)$. Es claro que $U \cap \Gamma V = \emptyset$, por lo que la acción es propia y el espacio proyectivo es un espacio de Hausdorff.

Los cinco ejemplos anteriores son ejemplos de acciones propias sobre espacios de Hausdorff. El siguiente ejemplo muestra que el espacio X no necesita ser de Hausdorff para que X/Γ lo sea, siempre y cuando la acción de Γ sea propia.

Una Acción Propia Sobre un Espacio No de Hausdorff

Sean $X = \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ y definimos la acción de Γ sobre X de la misma manera que para el cilindro:

$$n(x, y) = (x + n, y) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ahora definiremos una nueva topología \mathcal{T} para \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{x \in A} \Gamma x : A \subset X \right\}.$$

Es fácil comprobar que \mathcal{T} es una topología, con la cual X resulta ser un espacio no de Hausdorff pues si $x, y \in X$ están en la misma órbita, cualquier abierto que contenga a uno debe contener al otro.

Además, con esta topología, la función θ_n es continua para cada n , pues $\theta_n^{-1}(U) = U$ para todo abierto U .

Veamos que \mathbb{Z} actúa propiamente. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ en órbitas distintas y tomamos $U = \mathbb{Z}x$ y $V = \mathbb{Z}y$. Notamos que $\mathbb{Z}V = V$ y como $\mathbb{Z}x \neq \mathbb{Z}y$, entonces $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, \mathbb{Z} actúa propiamente.

El espacio cociente puede visualizarse como un cilindro, pero dotado con la topología discreta. Como un espacio discreto siempre es de Hausdorff, concluimos que X/\mathbb{Z} es de Hausdorff, lo que coincide con el teorema 2.1.

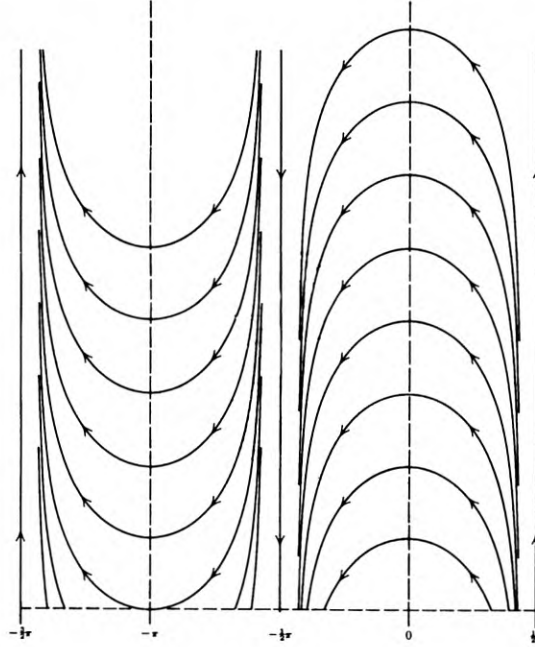
Una Acción No Propia

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} x.$$

Las curvas integrales son $y = \sec x + C$ y $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Una parte del diagrama de fase se muestra en la siguiente figura:



Definimos la acción de \mathbb{Z} a \mathbb{R}^2 de manera que si $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}^2$, entonces $n \cdot x$ sea la posición al tiempo $t = n$ de un punto que se mueve en \mathbb{R}^2 , de acuerdo al sistema inicial y que al tiempo $t = 0$ estaba en el punto x . Es conocido que la función θ_n es continua para cada n .

Veremos que si $u = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ y $v = (\frac{\pi}{2}, 0)$, entonces no pueden existir vecindades U, V de u, v , respectivamente, tales que $U \cap \mathbb{Z}V = \emptyset$.

Notemos que para todo $\epsilon > 0$, los puntos $A = (\frac{\pi}{2} - \epsilon, 0)$ y $B = (-\frac{\pi}{2} + \epsilon, 0)$ están sobre la misma curva solución. Además, el tiempo que le tomaría a una partícula situada en B para llegar hasta A es el tiempo que le llevaría a su proyección sobre el eje x . De la primera ecuación del sistema, obtenemos que este tiempo es:

$$I_\epsilon = \int_{-\frac{\pi}{2} + \epsilon}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right).$$

Es claro que $I_\epsilon \rightarrow \infty$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, por lo que para todo $\epsilon > 0$ existe al menos un $\delta < \epsilon$ tal que $2 \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) \in \mathbb{Z}$ y si $n = 2 \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$n \left(-\frac{\pi}{2} + \delta, 0\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \delta, 0\right).$$

Esto implica que la imagen bajo θ_n del disco de radio ϵ con centro en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ y el disco de radio ϵ y centro en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ no son ajenos. Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, concluimos que la acción no es propia.

Por el argumento anterior, en el espacio cociente no pueden existir abiertos U, V que sean

vecindades de $\Gamma(-\frac{\pi}{2}, 0)$ y $\Gamma(\frac{\pi}{2}, 0)$ y que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, el espacio cociente no es de Hausdorff en este caso.

2.1.3 Funciones en Espacios Cociente

Dado un espacio topológico X y un grupo discreto Γ que actúa propiamente sobre X , consideremos una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Nos interesa saber si es posible utilizar f para definir una nueva función

$$\tilde{f} : X/\Gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

que también sea continua. La manera natural de hacerlo es la siguiente:

$$\tilde{f}(\Gamma x) := f(x) \quad \forall x \in X.$$

Sin embargo, es claro que esta definición no sirve para cualquier función f . Por ejemplo, si f es inyectiva y Γx tiene más de un representante, \tilde{f} no estaría bien definida.

Dada la observación anterior, una primera condición para la función f es que sea invariante bajo la acción de Γ , es decir, nos restringiremos a funciones f que satisfagan, para cada $x \in X$,

$$f(gx) = f(x) \quad \forall g \in \Gamma.$$

Con esta restricción, la función \tilde{f} está bien definida. Por lo tanto, si queremos definir una función en el espacio X/Γ , a partir de una definida en el espacio X , es suficiente con que ésta sea invariante bajo la acción de Γ . Sin embargo, nos interesa que además la nueva función sea continua. El siguiente teorema nos dice que no hay que poner más restricciones a la función f .

Teorema 2.2. *Sean X un espacio topológico, Γ un grupo discreto que actúa propiamente sobre X y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para cada $x \in X$ y $g \in \Gamma$, se cumple que $f(gx) = f(x)$. Entonces existe una función $\tilde{f} : X/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que, para cada $x \in X$:*

$$\tilde{f}(\Gamma x) = f(x).$$

Demostración

Sea U un abierto de \mathbb{R} . Como f es continua, entonces $V = f^{-1}(U)$ es un abierto en X y sabemos que ΓV también lo es. Ahora, notemos que

$$\tilde{f}^{-1}(U) = \bigcup_{x \in V} \{\Gamma x\},$$

y que

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{x \in V} \{\Gamma x\}\right) = \Gamma V,$$

donde $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ es la proyección natural. Por lo tanto, podemos concluir que la función \tilde{f} también es continua.

□

Nótese que en la demostración no se utiliza que la función f toma valores en \mathbb{R} , sino que podría tomar valores en un espacio topológico abstracto y la demostración seguiría siendo válida. El teorema se enunció de esta manera por la importancia especial que tienen las funciones con valores reales.

2.2 El Grupo Fundamental

El grupo fundamental es una herramienta muy útil para estudiar propiedades de espacios topológicos. En esta sección se hará un desarrollo teórico del grupo fundamental de un espacio topológico X , para posteriormente estudiarlo en espacios cociente de la forma X/Γ . Finalmente, se hará un análisis de los grupos fundamentales de los espacios estudiados en la sección 1.2.2.

2.2.1 Homotopía y Producto de Lazos

Empezaremos este estudio introduciendo el concepto de homotopía.

Definición 2.3. Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : Y \rightarrow X$ funciones continuas. Diremos que f es homotópica a g si existe una función continua

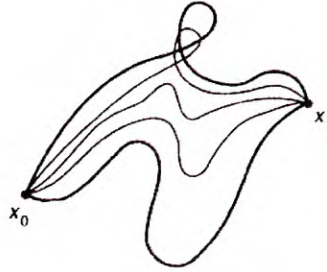
$$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X.$$

donde $Y \times [0, 1]$ está dotado con la topología producto, tal que $f(y) = H(y, 0)$ y $g(y) = H(y, 1)$ para cada $y \in Y$.

A la función H en la definición anterior se le llama *homotopía entre f y g* . La idea de una homotopía entre f y g es transformar continuamente a f en g . En particular, nos interesa estudiar homotopía de trayectorias. Recordemos que dado un espacio topológico X , una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ se llama *trayectoria* o *curva* en X .

Definición 2.4. Diremos que dos trayectorias en X son homotópicas si se puede deformar continuamente una en la otra, es decir, que cumplan la definición 2.3, pero además la homotopía H satisfaga que $H(0, t) = f(0)$ y $H(1, t) = f(1)$ para cada $t \in [0, 1]$.

Esto significa que todas las trayectorias “intermedias” tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 , como lo indica la siguiente figura.



Con esta noción de homotopía, a la cual llamaremos *homotopía de trayectorias*, definimos una relación \sim en el conjunto de trayectorias de un espacio topológico X : $f \sim g$ si f y g son homotópicas. De aquí en adelante, cuando hablemos de dos trayectorias homotópicas, será en el sentido que acabamos de definir. En la referencia [1] de la bibliografía pueden encontrarse ejemplos de funciones homotópicas con visualizaciones geométricas.

Proposición 2.3. *La relación \sim definida anteriormente es una relación de equivalencia*

Demostración

Es claro que $f \sim f$ para cualquier trayectoria f . En este caso, la homotopía es la función $H(x, t) = f(x)$ para cada $x, t \in [0, 1]$.

Ahora supongamos que f, g son trayectorias en X tal que $f \sim g$, es decir, que existe una homotopía $F(x, t)$ entre f y g . Es claro entonces que la función $G(x, t) := F(x, 1 - t)$ es una homotopía entre g y f .

Por último, supongamos que f, g, h son trayectorias tales que $f \sim g$ y $g \sim h$. Sean F la homotopía entre f y g y G la homotopía entre g y h . Definimos la función $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La función H transforma f en g en la primera parte, mientras que en la segunda transforma g en h , de manera que en el intervalo $[0, 1]$ se transforma continuamente f en h . Por lo tanto, H es una homotopía entre f y h y concluimos que $f \sim h$.

□

La clase de equivalencia de una trayectoria f , bajo esta relación de equivalencia, se llama la *clase de homotopía de f* y la denotaremos por $[f]$.

También puede definirse un producto de dos trayectorias. Sin embargo, esta definición no es válida para dos trayectorias cualesquiera, sino para dos trayectorias f y g tal que $f(1) = g(0)$.

Es decir, que el punto inicial de una sea el punto final de la otra. La idea es que la trayectoria producto recorra a f y después a g .

Definición 2.5. Si $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ son trayectorias tales que $f(1) = g(0)$, definimos el producto $f * g$ como la trayectoria dada por la siguiente ecuación

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos que el producto $f * g$ es una trayectoria que empieza en el mismo punto que f y termina en el mismo punto que g . Además, la operación $*$ induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de trayectorias, de la siguiente manera:

$$[f] * [g] := [f * g].$$

En efecto, supongamos que f' es homotópica a f y g' es homotópica a g . Sean F una homotopía entre f y f' y G una homotopía entre g y g' . Definimos la función $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$H(x, t) := \begin{cases} F(2x, t) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2x - 1, t) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta resulta ser una homotopía entre $f * g$ y $f' * g'$, de manera que la operación entre clases de homotopía está bien definida, es decir, no depende de la elección de los representantes.

Los siguientes lemas muestran una manera de generar nuevas homotopías de trayectorias y una propiedad algebraica del producto de trayectorias. Sus demostraciones son directas, pero serán de utilidad para probar las proposiciones 2.4 y 2.5, que son propiedades muy importantes de la operación $*$.

Lema 2.1. Sean X y Y espacios topológicos. Si F es una homotopía de trayectorias de X entre f y g y $h : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $h \circ F$ es una homotopía de trayectorias entre $h \circ f$ y $h \circ g$.

Lema 2.2. Sean X y Y espacios topológicos y $k : X \rightarrow Y$ una función continua. Si f y g son trayectorias en X , tales que $f(1) = g(0)$, entonces $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$.

Proposición 2.4. Sean $x_0, x_1 \in X$ y e_{x_0}, e_{x_1} las trayectorias constantes $e_{x_0} \equiv x_0, e_{x_1} \equiv x_1$. Entonces para cualquier trayectoria f en X cuyo punto inicial es x_0 y cuyo punto final es x_1 , se cumple

$$[f] * [e_{x_1}] = [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

Además, existe otra trayectoria f' cuyo punto inicial es x_1 y cuyo punto final es x_0 tal que $[f] * [f'] = [e_{x_0}]$ y $[f'] * [f] = [e_{x_1}]$.

Demostración

Consideremos la trayectoria $e_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que es constante igual a 0, y sea $i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función identidad, que también es una trayectoria en $[0, 1]$. La función H , definida de la siguiente manera:

$$H(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{t}{2} \\ \frac{2x-t}{2-t} & \text{si } \frac{t}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía de trayectorias entre i y $e_0 * i$. Ahora, si f es una trayectoria en X cuyo punto inicial es x_0 y cuyo punto final es x_1 , entonces la función $f \circ H$ es una homotopía de trayectorias entre $f \circ i$ y $f \circ (e_0 * i)$. Notemos que $f \circ i = f$ y, por el lema 2.2,

$$f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f,$$

por lo que las trayectorias f y $e_{x_0} * f$ son homotópicas y por lo tanto, $[f] = [e_{x_0}] * [f]$.

De manera análoga se demuestra que $[f] = [f] * [e_{x_1}]$, considerando la función constante igual a 1, en lugar de la función constante igual a 0.

Ahora, supongamos que $i' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función $i'(t) = 1 - t$, que es una trayectoria en $[0, 1]$, cuyo punto inicial es 1 y cuyo punto final es 0. Esto implica que $i * i'$ es una trayectoria que empieza y termina en 0, al igual que e_0 . La función \tilde{H} definida como

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} tx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ t(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

es una homotopía de trayectorias entre e_0 e $i * i'$, por lo que $f \circ \tilde{H}$ es una homotopía de trayectorias entre $f \circ e_0$ y $f \circ (i * i')$. Es claro que $f \circ e_0 = e_{x_0}$ y por el lema 2.2, $f \circ (i * i') = (f \circ i) * (f \circ i')$. Por lo tanto, existe una trayectoria $f' := f \circ i'$ tal que $f * f'$ es homotópica a e_{x_0} , por lo que $[f] * [f'] = [e_{x_0}]$.

De manera análoga se demuestra que $[f'] * [f] = [e_{x_1}]$.

□

Proposición 2.5. *Si la operación $[f] * ([g] * [h])$ está definida, entonces $([f] * [g]) * [h]$ también lo está y son iguales.*

Demostración

Para esta demostración consideraremos el producto de dos trayectorias $f * g$ de la siguiente manera: en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ es la función lineal con pendiente positiva que lleva el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ en el intervalo $[0, 1]$, compuesta con f ; en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ es la función lineal con pendiente positiva que lleva el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ en el intervalo $[0, 1]$, compuesta con g .

Ahora notemos que los productos $f * (g * h)$ y $(f * g) * h$ están bien definidos cuando $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$. En este caso, podemos definir un producto triple de la siguiente manera: escogemos dos números $a < b \in (0, 1)$, y en el intervalo $[0, a]$ que sea la función lineal con pendiente positiva

que lleva el intervalo $[0, a]$ en $[0, 1]$, compuesta con f ; en el intervalo $[a, b]$ que sea la función lineal con pendiente positiva que lleva el intervalo $[a, b]$ en $[0, 1]$, compuesta con g ; y en el intervalo $[b, 1]$ que sea la función lineal con pendiente positiva que lleva el intervalo $[b, 1]$ en $[0, 1]$ compuesta con h .

La definición anterior claramente depende de la elección de los puntos a, b , pero veamos que la clase de homotopía no. En efecto, sea $k_{a,b}$ la trayectoria definida en el párrafo anterior y $c < d \in (0, 1)$. Sea $p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función que restringida a cada uno de los intervalos $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, 1]$ es la función lineal con pendiente positiva que lleva a los intervalos $[0, c]$, $[c, d]$, $[d, 1]$, respectivamente. Es claro entonces que $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$.

Luego, se puede comprobar que existe una homotopía de trayectorias H entre p y la función identidad en $[0, 1]$, por lo que $k_{c,d} \circ H$ es una homotopía de trayectorias entre $k_{a,b}$ y $k_{c,d}$.

Por último, solamente hay que notar que el producto $(f * g) * h$ es $k_{a,b}$ cuando $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{4}$, mientras que el producto $f * (g * h)$ es $k_{c,d}$ cuando $c = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, las trayectorias $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$ son homotópicas.

□

Nuestro objetivo es definir una estructura algebraica asociada a un espacio topológico X . Como el producto de trayectorias que definimos no está definido para cualesquiera dos trayectorias, debemos restringirnos a cierto tipo de trayectorias. Ya se ha mencionado que el producto de dos trayectorias cualesquiera no siempre está bien definido, por lo que debemos restringirnos a cierta clase de trayectorias, las cuales definimos a continuación.

Definición 2.6. Una trayectoria f tal que $f(0) = f(1) = x_0$, es decir, que su punto inicial y punto final son x_0 , se llama lazo basado en x_0 , o lazo con base en x_0 . El punto x_0 se llama punto base de f .

En el conjunto de lazos basados en x_0 , la relación de equivalencia que definimos sigue siendo relación de equivalencia y el producto siempre está bien definido. Más aún, de las proposiciones 2.4 y 2.5, se sigue el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *El conjunto de clases de homotopía de lazos basados en un punto x_0 fijo, forma un grupo con la operación $*$.*

A este grupo le llamaremos *grupo fundamental de X basado en x_0* y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$. La notación de subíndice 1 se debe a que el grupo fundamental es uno de los llamados *grupos de homotopía*. En este trabajo solamente consideraremos al grupo fundamental, pero el lector interesado en conocer sobre los grupos de homotopía en general puede consultar las referencias [5] y [16].

Es importante notar la dependencia del grupo fundamental en el punto base, es decir, que si elegimos dos puntos bases distintos, el grupo fundamental puede no ser el mismo. También es

importante notar que es necesario considerar clases de homotopía, ya que cuando probamos la asociatividad probamos que $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$ son homotópicos, pero es claro que no son el mismo lazo. Nuestro siguiente objetivo es estudiar bajo qué condiciones el grupo fundamental no depende de la elección del punto base.

Teorema 2.4. *Si X es conexo por trayectorias, entonces $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos para cualesquiera puntos base $x_0, x_1 \in X$.*

Demostración

Supongamos que X es un espacio topológico conexo por trayectorias y consideremos dos puntos $x_0, x_1 \in X$. Sea α una trayectoria cuyo punto inicial es x_0 y cuyo punto final es x_1 . Definimos la función

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1),$$

por medio de la ecuación

$$\hat{\alpha}([f]) = [\alpha]^{-1} * [f] * [\alpha].$$

Nótese que este producto está bien definido, por lo que la función $\hat{\alpha}$ está bien definida. Probaremos que $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos. Primeramente,

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = ([\alpha]^{-1} * [f] * [\alpha]) * ([\alpha]^{-1} * [g] * [\alpha]) = [\alpha]^{-1} * [f] * [g] * [\alpha] = \hat{\alpha}([f] * [g]),$$

por lo que $\hat{\alpha}$ es homomorfismo.

Para ver que es isomorfismo, veamos que existe la función inversa. Sean $\beta(t) := \alpha(1 - t)$ y $\hat{\beta}$ definida de manera análoga a $\hat{\alpha}$. Para cada elemento $[g] \in \pi_1(X, x_1)$, tenemos que

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([g])) = [\alpha]^{-1} * ([\alpha] * [g] * [\alpha]^{-1}) * [\alpha] = [g].$$

Luego, para cada elemento $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [\alpha] * ([\alpha]^{-1} * [f] * [\alpha]) * [\alpha]^{-1} = [f].$$

Por lo tanto, $\hat{\beta}$ es la función inversa de $\hat{\alpha}$, lo cual implica que $\hat{\alpha}$ es biyectiva y concluimos que es un isomorfismo. □

El teorema anterior nos muestra que la condición de ser conexo por trayectorias es suficiente para que el grupo fundamental sea determinado solamente por el espacio X y no por el punto base que escojamos. Cuando un espacio topológico X sea conexo por trayectorias, denotaremos a su grupo fundamental como simplemente $\pi_1(X)$, ya que no hay dependencia del punto base.

El grupo fundamental de un espacio topológico brinda información acerca de éste. Por ejemplo,

supongamos que el grupo fundamental de un espacio X conexo por trayectorias es el grupo trivial. En este caso, podemos concluir que cualquier lazo basado en x_0 puede transformarse continuamente en el lazo trivial. Geométricamente, esto puede interpretarse como que el espacio X no tiene hoyos o agujeros, ya que si los tuviera un lazo que le “diera una vuelta” al agujero, no podría transformarse continuamente en el lazo trivial. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.7. Un espacio topológico X se dice ser simplemente conexo si es conexo por trayectorias y su grupo fundamental $\pi_1(X)$ es el grupo trivial.

La definición anterior jugará un papel clave para calcular el grupo fundamental de algunos espacios cociente. El lector interesado en conocer más aplicaciones del grupo fundamental, así como más de sus propiedades puede consultar las referencias [7] y [14] de la bibliografía.

2.2.2 El Grupo Fundamental de un Espacio Cociente

En la sección 2.1 estudiamos espacios de la forma X/Γ , donde Γ es un grupo discreto que actúa propiamente sobre un espacio topológico X . Ahora estudiaremos condiciones bajo las cuales el grupo fundamental de un espacio de tal forma pueda calcularse de manera sencilla. Para esto utilizaremos un concepto muy utilizado para calcular grupos fundamentales de distintos espacios, llamado espacio recubrido, el cual definimos a continuación.

Definición 2.8. Sean X, Y espacios topológicos y $p : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Diremos que p es una función recubridora si cada punto $y \in Y$ tiene una vecindad abierta U tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha,$$

donde I es un conjunto de índices y V_α son abiertos en X , ajenos por parejas y tales que para cada $\alpha \in I$, la restricción $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo de V_α en U . En este caso, diremos que U está regularmente cubierto por p y que X es un espacio recubridor para Y .

Nótese que si una función $p : X \rightarrow Y$ es una función recubridora, entonces p es un homeomorfismo local entre X y Y . Es decir, cada punto $x \in X$ tiene una vecindad en la cual la restricción de p es homeomorfismo. Para profundizar en el tema de funciones y espacios recubridores se recomienda la referencia [15] de la bibliografía.

Recordemos que nuestro objetivo es calcular grupos fundamentales de espacios cociente. Para esto, buscaremos condiciones bajo las cuales la proyección natural $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ es una función recubridora, lo cual nos permitirá calcular el grupo fundamental fácilmente para estos espacios. La siguiente definición será de gran utilidad en el resto del trabajo.

Definición 2.9. Sean X un espacio topológico y Γ un grupo discreto que actúa sobre X . Diremos que Γ actúa discontinuamente sobre X (o que la acción de Γ sobre X es discontinua) si para cada

$x \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y el conjunto

$$\{g \in \Gamma \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$$

es finito.

Es importante mencionar que una acción discontinua, en este sentido, no significa que la acción no es continua. El concepto de una acción discontinua se puede enunciar también como que para cada $x \in X$, la órbita Γx no tiene puntos de acumulación. Esta caracterización será de gran utilidad.

Cuando el espacio X sobre el que actúa Γ es un espacio de Hausdorff, la propiedad de ser una acción discontinua cumple una propiedad más fuerte que la que la define, como nos indica el siguiente lema.

Lema 2.3. *Si Γ actúa libre y discontinuamente sobre un espacio de Hausdorff X , entonces para cada $x \in X$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y si $h_1, h_2 \in \Gamma$ son tales que $h_1U \cap h_2U \neq \emptyset$, entonces $h_1 = h_2$.*

Demostración

Como la acción de Γ es discontinua, existe un abierto U_0 tal que $x \in U_0$ y el conjunto

$$A = \{g \in \Gamma \mid gU_0 \cap U_0 \neq \emptyset\}$$

es finito, digamos que $A = \{e, g_1, \dots, g_n\}$. Como la acción es libre, tenemos que $g_i x \neq x$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Como el espacio X es de Hausdorff, para cada $i = 1, \dots, n$, existen abiertos U_i, V_i ajenos, tales que $x \in U_i$, $g_i x \in V_i$ y los V_i 's son ajenos por parejas. Sea

$$U = U_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(g_i U_i \cap V_i) \right),$$

y supongamos que $h_1, h_2 \in \Gamma$ son tales que $h_1U \cap h_2U \neq \emptyset$. Entonces existen $y, z \in U$ tales que $h_1y = h_2z$, es decir, y y z están en la misma órbita. Por la construcción de U , se sigue que h_1 y h_2 deben pertenecer a A ; nuevamente, por la construcción de U , se tiene que $h_1 = h_2$. Por lo tanto, U es el abierto requerido.

□

El lema anterior nos permitirá demostrar la siguiente proposición, la cual presenta condiciones suficientes para que la proyección natural sea una función recubridora.

Proposición 2.6. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y Γ un grupo discreto que actúa libre y discontinuamente sobre X . Entonces la proyección natural $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ es una función recubridora.*

Demostración

Sabemos que π es continua y suprayectiva. Además, π es abierta, pues si U es un abierto en X , entonces

$$\pi(U) = \bigcup_{g \in \Gamma} \theta_g(U),$$

que es unión de conjuntos abiertos y por lo tanto es abierto.

Sean $\pi(x) \in X/\Gamma$ y V un abierto en X , con las características del lema anterior para x . Definimos la función $P_g : gV \rightarrow \pi(V)$ por medio de la ecuación $P_g(gv) = \pi(v) = \pi(gv)$, la cual es claramente sobreyectiva.

Veamos que P_g también es inyectiva. En efecto, si $y_1, y_2 \in V$ son tales que $\pi(gy_1) = \pi(gy_2)$, entonces existe $h \in \Gamma$ tal que $hgy_1 = gy_2$, por lo que

$$hgV \cap gV \neq \emptyset.$$

De aquí se sigue que $hg = g$, o equivalentemente $h = e$, lo cual implica que $y_1 = y_2$. Luego, P_g es inyectiva y como además es sobreyectiva, entonces es biyectiva.

Consideremos ahora el abierto $\tilde{U} = \pi(V)$, que claramente contiene a $\pi(x)$. Como la función $P_g : gV \rightarrow \pi(V)$ es biyectiva para cada $g \in \Gamma$, entonces

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{g \in \Gamma} P_g^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in \Gamma} gV.$$

Notemos que esto último es una unión de abiertos ajenos por parejas y que además, la restricción de π a cada gV es P_g , que es biyectiva. Por último, como P_g es restricción de π , también es continua y abierta, es decir, es homeomorfismo. Por lo tanto, π es una función recubridora. □

Ahora introduciremos otro concepto que será de gran utilidad en el cálculo de los grupos fundamentales de espacios cociente.

Definición 2.10. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $p : X \rightarrow Y$ una función. Si $f : Z \rightarrow Y$ es una función continua, diremos que $\tilde{f} : Z \rightarrow X$ es un levantamiento de f si hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Cuando la función p de la definición anterior es una función recubridora y $Z = [0, 1]$, es decir, cuando la función f es una trayectoria en Y , entonces el levantamiento \tilde{f} es único, salvo por el punto inicial. Para probar esto, necesitaremos el siguiente lema, conocido como el lema del número de Lebesgue.

Lema 2.4. Sean (X, d) un espacio métrico compacto, I un conjunto de índices y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta para X . Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto $B \subset X$ con diámetro menor que δ , existe un $\alpha \in I$ tal que $B \subset A_\alpha$.

Demostración

Primero notemos que si X es un elemento de la cubierta, entonces el resultado se sigue trivialmente para cualquier $\delta > 0$. Supongamos entonces que todos los elementos de la cubierta están contenidos propiamente en X . Como X es compacto, existe una subcubierta finita para X , digamos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos los conjuntos C_i como

$$C_i = X - A_i.$$

Luego, definimos la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, por medio de la ecuación

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i).$$

Nótese que la función f está bien definida, pues los conjuntos C_i 's son cerrados y $f(x)$ representa la distancia promedio de x a los conjuntos C_i 's. Además, $f(x) > 0$ para cada x , pues existe un índice $1 \leq j \leq n$ tal que $x \in A_j$. Como A_j es abierto, existe un $r > 0$ tal que la bola con centro x y radio r está totalmente contenida en A_j , por lo que $d(x, C_j) > r$ y $f(x) \geq \frac{r}{n} > 0$.

Como la función distancia a un conjunto cerrado fijo es continua, entonces la función f es continua y como X es compacto, se sigue que f alcanza su valor mínimo $\delta > 0$. Este es el número de la conclusión del lema. En efecto, pues si $B \subset X$ tiene diámetro menor que δ , entonces para cualquier punto $x_0 \in B$, se tiene que $B \subset B_\delta(x_0)$, donde $B_\delta(x_0)$ representa la bola de radio δ con centro x_0 . Luego,

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m),$$

donde $d(x_0, C_m) = \max\{d(x_0, C_1), \dots, d(x_0, C_n)\}$. De aquí se sigue que la bola de radio δ con centro en x_0 está contenida en $A_m = X - C_m$ y por lo tanto, B también lo está. □

El número δ de la conclusión del lema anterior recibe el nombre de *número de Lebesgue*.

Proposición 2.7. Sean $p : X \rightarrow Y$ una función recubridora, $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$, tales que $p(x_0) = y_0$. Entonces cualquier trayectoria $f : [0, 1] \rightarrow Y$ cuyo punto inicial es y_0 tiene un único levantamiento \tilde{f} , tal que su punto inicial es x_0 .

Demostración

Para cada $y \in Y$, sea U_y una vecindad abierta de y que esté regularmente cubierta por p . Consideremos las cubiertas abiertas $\{U_y\}_{y \in Y}$ de Y y $\{f^{-1}(U_y)\}_{y \in Y}$ de $[0, 1]$. Como $[0, 1]$ es compacto, por el lema del número de Lebesgue, podemos encontrar una partición

$$\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\},$$

del intervalo $[0, 1]$, de manera que para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$, $f([t_i, t_{i+1}])$ esté contenido en algún U_y .

Encontraremos ahora un levantamiento \tilde{f} para f , para el que empezaremos definiendo $\tilde{f}(0) = x_0$. Luego, para cada intervalo de la forma $[t_i, t_{i+1}]$, supongamos que \tilde{f} ya está definida en el intervalo $[0, t_i]$ y que U es un abierto regularmente cubierto tal que $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U$. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la cubierta abierta de $p^{-1}(U)$ de la definición de función recubridora, de manera que la restricción $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ es un homeomorfismo, donde V_0 es un elemento de la cubierta tal que $\tilde{f}(t_i) \in V_0$. En general, para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, definimos \tilde{f} por medio de la ecuación

$$\tilde{f}(t) = (p|_{V_0})^{-1}(f(t)).$$

Notemos que, como $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ es un homeomorfismo, entonces \tilde{f} es continua en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Además, como empezamos definiendo $\tilde{f}(0)$, podemos definir \tilde{f} en todo el intervalo $[0, 1]$ mediante este procedimiento.

Como \tilde{f} es continua en cada intervalo de la forma $[t_i, t_{i+1}]$, concluimos que \tilde{f} es continua en $[0, 1]$. De la construcción de \tilde{f} , es claro que $p \circ \tilde{f} = f$, por lo que \tilde{f} es un levantamiento de f . Ahora veamos que es el único cuyo punto inicial es x_0 . Supongamos que \tilde{f}' es otro levantamiento de f tal que $\tilde{f}'(0) = x_0$. De manera similar a la primera parte de la demostración, supongamos que \tilde{f} y \tilde{f}' coinciden en el intervalo $[0, t_i]$.

Sabemos que, como \tilde{f}' es un levantamiento de f , debe transformar el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ en un subconjunto de $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$, donde los V_α son abiertos y ajenos por parejas. Además, $\tilde{f}'([t_i, t_{i+1}])$ es conexo, por lo que debe estar totalmente contenido en algún V_α .

Como $\tilde{f}'(t_i) = \tilde{f}(t_i)$, que está en V_0 , entonces $\tilde{f}'([t_i, t_{i+1}]) \subset V_0$. Por lo tanto, para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\tilde{f}'(t)$ debe ser un punto de V_0 que esté en $p^{-1}(f(t))$. Por lo tanto, necesariamente, $\tilde{f}'(t) = \tilde{f}(t)$ para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Finalmente, como estábamos suponiendo que \tilde{f}' tenía a x_0 como punto inicial, entonces $\tilde{f}'(0) = \tilde{f}(0)$, por lo que podemos concluir que \tilde{f} y \tilde{f}' coinciden en todo el intervalo $[0, 1]$.

□

La proposición anterior asegura que si Γ es un grupo que actúa libre y discontinuamente sobre un espacio de Hausdorff X , entonces para cada trayectoria y, más particularmente, cada lazo en X/Γ , existe un único levantamiento en X , salvo por el punto inicial. Esto nos permitirá demostrar el siguiente teorema, el cual presenta una manera de calcular el grupo fundamental de espacios cociente.

Teorema 2.5. *Sean X un espacio de Hausdorff simplemente conexo y Γ un grupo discreto que actúa libre y discontinuamente sobre X . Entonces $\pi_1(X/\Gamma)$ es isomorfo a Γ .*

Demostración

Primeramente veamos que el grupo fundamental de X/Γ no depende de la elección del punto base,

por lo que la notación usada es correcta. Esto se sigue de que dados dos puntos $\pi(x), \pi(y) \in X/\Gamma$, existe una trayectoria γ que tiene como punto inicial a x y como punto final a y . Como la proyección natural π es continua, entonces $\pi \circ \gamma$ es una trayectoria en X/Γ que tiene como punto inicial a $\pi(x)$ y como punto final a $\pi(y)$. Por lo tanto, X/Γ es conexo por trayectorias y su grupo fundamental no depende de la elección del punto base.

Ahora fijamos $x_0 \in X$ y consideramos un lazo γ_1 en X/Γ que tiene a $y_0 = \pi(x_0)$ como punto base. Por la proposición 2.7, existe un único levantamiento de γ_1 en X , cuyo punto inicial es x_0 . Sea x_1 el punto final de este levantamiento. Notemos que $\pi(x_0) = \pi(x_1)$, por lo que existe un $g_1 \in \Gamma$ tal que $x_1 = g_1 x_0$. Como la acción de Γ es libre, concluimos que g_1 es único.

Definimos la función $\phi : \pi_1(X/\Gamma, y_0) \rightarrow \Gamma$, como $\phi(\gamma_1) = g_1$. Por las observaciones anteriores, la función ϕ está bien definida. Además, es inmediato que es sobreyectiva, pues dado $h \in \Gamma$, existe una trayectoria f que tiene como punto inicial a x_0 y como punto final a hx_0 . La trayectoria $\pi \circ f$ es un lazo con base en y_0 y es tal que $\phi(\pi \circ f) = h$.

Ahora veremos que ϕ es un homomorfismo de grupos. Sean γ_1, γ_2 lazos en X/Γ con base en y_0 y f_1, f_2 , sus respectivos levantamientos en X cuyo punto inicial es x_0 y $g_1 = \phi(\gamma_1), g_2 = \phi(\gamma_2)$. Definimos la función $g_1 f_2 : [0, 1] \rightarrow X$, por medio de la ecuación:

$$(g_1 f_2)(t) = g_1(f_2(t)).$$

Nótese que $g_1 f_2$ es una trayectoria en X cuyo punto inicial es el punto final de f_1 , es decir, $g_1 x_0$. Es claro, además, que $g_1 f_2$ es un levantamiento de γ_2 , pero cuyo punto inicial es $g_1 x_0$. El punto final de $g_1 f_2$ es $g_1(f_2(1)) = g_1(g_2 x_0) = (g_1 g_2)x_0$. Ahora, la función f definida de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 f_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es un levantamiento para $\gamma_1 * \gamma_2$ cuyo punto inicial es x_0 . Esto puede verificarse fácilmente usando la definición de levantamiento. Como el punto final de $g_1 f_2$ es $(g_1 g_2)x_0$, entonces $\phi(\gamma_1 * \gamma_2) = g_1 g_2 = \phi(\gamma_1)\phi(\gamma_2)$. Por lo tanto, ϕ es homomorfismo de grupos.

Para probar que ϕ es inyectivo, supongamos que γ es un lazo con base en y_0 y tal que $\phi(\gamma) = e$. Esto significa que el levantamiento de γ con base en y_0 es un lazo en X con base en x_0 , pero como X es simplemente conexo, la clase de γ debe ser la clase del lazo identidad, por lo que $\ker \phi$ es el conjunto que consta solamente del elemento neutro en $\pi_1(X, y_0)$. Esto prueba, por el lema 1.1, que ϕ es un isomorfismo de grupos.

□

El teorema anterior establece una manera sencilla de calcular grupos fundamentales de espacios cociente de la forma X/Γ , cuando éstos se definen por medio de una acción libre y discontinua de un grupo discreto. Si se cumplen las hipótesis del teorema, el grupo fundamental es simplemente el grupo que actúa sobre X .

2.2.3 Ejemplos

En esta sección utilizaremos el teorema 2.5, para calcular los grupos fundamentales de los espacios estudiados en la sección 2.1.2.

Cilindro

En la sección 2.1.2, vimos que la acción de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R}^2 que define al cilindro es una acción libre y propia. Veamos ahora que también es una acción discontinua. En efecto, si (x, y) es un punto cualquiera de \mathbb{R}^2 , entonces la órbita $\mathbb{Z}(x, y)$ es el conjunto formado por los elementos de la sucesión $((x + n, y))_{n=1}^{\infty}$, la cual no puede tener un punto de acumulación, pues toda subsucesión

$$((x + n_k, y))_{k=1}^{\infty} \subset ((x + n, y))_{n=1}^{\infty}$$

es no acotada.

Como $\Gamma = \mathbb{Z}$ actúa libre y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 , de la manera en la que se definió el cilindro en la sección 2.1.2, concluimos que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^2/\Gamma)$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Esto significa que el grupo fundamental del cilindro tiene un generador de orden infinito. No es difícil darse cuenta que éste es el lazo que le da una “vuelta” al cilindro.

Notemos que un generador del grupo fundamental puede visualizarse en el espacio recubridor (\mathbb{R}^2) como un segmento de recta que une a un punto con otro punto de su misma órbita, por ejemplo un segmento de recta horizontal, o cualquier otra trayectoria homotópica. En la región fundamental (una banda en este caso) puede hacerse el mismo análisis.

Banda de Möbius

Veamos que la acción de $\Gamma = \mathbb{Z}$ que define a la banda de Möbius es una acción discontinua. Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la órbita $\Gamma(x, y)$ es el conjunto formado por los elementos de la sucesión $((x + n, (-1)^n y))_{n=1}^{\infty}$. Al igual que en el ejemplo anterior, cualquier subsucesión no puede estar acotada y por lo tanto, tampoco puede ser convergente. Por lo tanto, $\Gamma(x, y)$ no puede tener puntos de acumulación y concluimos que la acción de Γ sobre \mathbb{R}^2 es discontinua.

Podemos entonces deducir que el grupo fundamental de la banda de Möbius es isomorfo a \mathbb{Z} , al igual que el del cilindro. En este caso, el generador del grupo fundamental se ve igual en la región fundamental: como un segmento de recta que une a dos puntos de la misma órbita. En la banda de Möbius, también se ve como un lazo que da una vuelta alrededor de ella, el cual puede visualizarse fácilmente en una banda de Möbius, considerándola como un subconjunto de \mathbb{R}^3 .

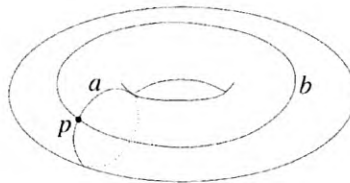
Toro

Para verificar que la acción de $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sobre \mathbb{R}^2 , que define al toro es una acción discontinua, notemos que dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la órbita $\Gamma(x, y)$ es el conjunto

$$\{(x + m, y + n) | m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Este conjunto no puede tener puntos de acumulación, ya que cualesquiera dos elementos de este conjunto están separados por una distancia mayor o igual a 1.

Como la acción de Γ sobre \mathbb{R}^2 que define al toro es discontinua, entonces el grupo fundamental del toro es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto significa que tiene dos generadores a, b de orden infinito, los cuales pueden visualizarse en el toro como muestra la siguiente figura.



En el espacio recubridor (\mathbb{R}^2), estos generadores se ven como un segmento de recta horizontal y un segmento de recta vertical. De la misma manera que en los casos anteriores, puede hacerse el análisis en una región fundamental.

Botella de Klein

Recordemos que para probar que la acción de

$$\Gamma = \langle u, v | uvv^{-1}v = e \rangle,$$

sobre \mathbb{R}^2 , que se usó para definir a la botella de Klein, es una acción propia, primero probamos que la órbita de un punto (x, y) no podía tener puntos de acumulación. Esto significa que la acción es discontinua. Sin embargo, en este caso no es claro que la acción también es libre.

Sean $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $g \in \Gamma$, con $y \neq 0$ y $g \neq e$, tales que $gx = x$. Sabemos que g debe tener una representación en términos de u, v y sus inversos. Notemos que si $gx = x$, entonces para cada u en la representación de g , también debe estar u^{-1} . De manera que debe aparecer el producto $uv^n u^{-1}$ o $u^{-1}v^n u$ donde n es algún entero. Supongamos que hay un producto de la forma $uv^n u^{-1}$. Notemos que la acción que le produciría este producto al punto (x, y) es

$$uv^n u^{-1}(x, y) = uv(x - 1, -y) = u(x - 1, -y + n) = (x, y - n),$$

por lo que g no puede ser igual a $uv^n u^{-1}$ y debe contener a v^n ó $uv^{-n} u^{-1}$. En el último caso, el producto da la identidad e , por lo que debe aparecer v^n en la representación de g . Tenemos

entonces dos casos: $uv^n u^{-1} v^n$ ó $v^n uv^n u^{-1}$. Sin embargo,

$$uv^n u^{-1} v^n = (uvu^{-1} \cdot uvu^{-1} \cdots uvu^{-1})v \cdot v \cdots v = e,$$

ya que $uvu^{-1}v = e$. Por esta misma relación, sabemos que $uv = v^{-1}u$, lo cual implica que $v^{-1}u^{-1} = u^{-1}v$, por lo que $vu^{-1}vu = e$ y $vu = uv^{-1}$. De esta última relación se concluye que $vuvu^{-1} = e$. Por lo tanto,

$$v^n uv^n u^{-1} = v \cdots v (uvu^{-1} uvu^{-1} \cdots uvu^{-1}) = e.$$

Por lo tanto, podemos concluir que el grupo fundamental de la botella de Klein es isomorfo al grupo Γ , el cual es no abeliano. En el espacio recubridor podemos visualizar a los generadores del grupo fundamental como curvas que unen a algún punto (x, y) con $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Recordemos que en la sección 2.1.2 construimos a la botella de Klein como un espacio cociente de la forma

$$\mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2,$$

donde \mathbb{T}^2 era el toro y \mathbb{Z}_2 el grupo aditivo de los enteros módulo 2. Cabe mencionar que, a partir de esta construcción, no podemos concluir que el grupo fundamental de la botella de Klein es isomorfo a \mathbb{Z}_2 , porque \mathbb{T}^2 no es simplemente conexo (su grupo fundamental no es trivial).

Espacio Projectivo

Es bien conocido que \mathbb{S}^2 es un espacio de Hausdorff simplemente conexo (para una demostración de este hecho, puede consultarse la referencia [15] de la bibliografía). La acción sobre \mathbb{S}^2 que define al espacio proyectivo es una acción discontinua porque el grupo \mathbb{Z}_2 es un grupo finito. Por lo tanto, el grupo fundamental del espacio proyectivo es isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

Tenemos entonces que el grupo fundamental del espacio proyectivo es un grupo finito con solamente dos elementos, es decir, es generado por un elemento de orden 2. Este generador puede visualizarse en el espacio recubridor (\mathbb{S}^2 en este caso) como alguna curva (una geodésica, por ejemplo) que una a un punto fijo $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ con su antípoda.

El teorema 2.5 también nos permite demostrar que, a diferencia del cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein, el espacio \mathbb{S}^2 no es de la forma \mathbb{R}^2 / Γ , donde Γ es un grupo que actúa libre y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 . En efecto, de ser así, $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \Gamma$, pero sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{e\}$, de donde concluiríamos que \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^2 son homeomorfos, lo cual es falso.

En la referencia [15] de la bibliografía puede encontrarse el cálculo del grupo fundamental de otros espacios, así como una manera alternativa de calcular el grupo fundamental del toro, el cilindro y el espacio proyectivo.

Capítulo 3

Clasificación de Superficies

Localmente Euclidianas

En el capítulo anterior consideramos acciones de grupo que aprovechan las propiedades topológicas de un espacio X , como lo es el ser de Hausdorff, el ser simplemente conexo, etc. Es importante mencionar que en los ejemplos que se han considerado, el espacio X tiene una propiedad más, que es la de ser un espacio métrico.

En este capítulo nos centraremos en el estudio de los ejemplos en los que se considera al espacio X como \mathbb{R}^2 y en los que el grupo Γ actúa por medio de isometrías. En este caso, podemos obtener un teorema de clasificación de superficies, conocido como el teorema de Killing-Hopf. Primeramente se presentan los conceptos de isometría y superficie localmente euclidiana para posteriormente enunciar y demostrar dicho teorema.

3.1 Isometrías y Superficies Localmente Euclidianas

Como se mencionó anteriormente, en el capítulo 2 se estudiaron acciones sobre un ejemplo de espacio métrico. Las funciones entre espacios métricos que preservan la distancia son de gran importancia y reciben el nombre de isometrías, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 3.1. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos. Una isometría es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y))$$

para cada par de puntos $x, y \in X$.

Recordemos que nuestro objetivo es demostrar un teorema de clasificación de superficies, por lo que es conveniente establecer lo que entenderemos por superficie.

Definición 3.2. Un espacio de Hausdorff X se llama superficie si tiene una base numerable y para cada $x \in X$ existen un abierto U tal que $x \in U$ y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, que es un homeomorfismo sobre su imagen.

En otras palabras, una superficie es un espacio de Hausdorff con una base numerable tal que todo punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 . La idea es que localmente X se ve como \mathbb{R}^2 .

El cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein, que estudiamos en la sección 2.1.2 son ejemplos de superficies, como veremos en la sección 3.3.1. En la misma sección veremos que estas superficies cumplen además otras propiedades, las cuales definiremos a continuación.

Primeramente, al dotar a una superficie con una métrica podemos tratarlas como espacios métricos, con la cual pueden tener propiedades similares a las del plano euclidiano.

Definición 3.3. Diremos que una superficie S con una métrica d es localmente euclidiana si para cada punto $x \in S$ existe un $r > 0$ tal que la bola con centro x y radio r :

$$B_r(x) := \{y \in S \mid d(x, y) < r\},$$

es isométrica a un disco en \mathbb{R}^2 . Esto es, que existe una isometría que transforma uno en el otro.

Esta definición indica que la superficie S tiene propiedades muy similares a las del plano euclidiano (localmente). La referencia [17] de la bibliografía presenta un estudio de algunas de estas propiedades.

Una propiedad deseable de un espacio métrico es la de ser completo.

Definición 3.4. Un espacio métrico X se dice ser completo si para cada sucesión de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, existe un elemento $x_0 \in X$ tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 .

Un ejemplo de espacio métrico no completo es $S = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Por ejemplo, la sucesión definida para cada n como $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$ es una sucesión de Cauchy pero no converge a ningún punto de S . Más aún, este es un ejemplo de superficie localmente euclidiana, pero no completa.

3.2 Clasificación de isometrías de \mathbb{R}^2

El teorema de clasificación de superficies que haremos depende fuertemente en la construcción de superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde Γ es un grupo discreto que actúa por medio de isometrías sobre \mathbb{R}^2 . Por esta razón, es conveniente estudiar las isometrías de \mathbb{R}^2 , considerándolo con la distancia euclidiana, la cual se define para cada par de puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ por:

$$d(x, y) := \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_1 - x_1)^2}.$$

En esta sección se presenta este estudio. El lector interesado en profundizar en el estudio de isometrías de \mathbb{R}^2 o en generalizar a isometrías del espacio tridimensional encontrará un análisis

detallado en las referencias [13] y [17] de la bibliografía.

En el conjunto de isometrías de \mathbb{R}^2 , podemos definir el producto de dos elementos f, g como la composición $f \circ g$. El objetivo de esta sección es llegar a que el conjunto de isometrías de \mathbb{R}^2 forma un grupo con el producto definido. Primeramente estudiaremos algunos ejemplos de isometrías que serán de importancia en el desarrollo de esta sección.

Una *traslación* es una isometría en \mathbb{R}^2 determinada por un vector (a, b) . Está definida de la siguiente manera:

$$(x, y) \mapsto (x, y) + (a, b) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A esta le llamaremos *traslación por (a, b)* y la denotaremos por $t_{(a,b)}$. Se puede demostrar, mediante operaciones sencillas, que es una isometría, que tiene inversa y su inversa es $t_{(-a,-b)}$.

Una *reflexión en el eje x* está definida por:

$$(x, y) \mapsto (x, -y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La denotaremos por \bar{r} . De igual forma, \bar{r} es una isometría, tiene inversa y su inversa es ella misma.

Una *rotación alrededor del origen en un ángulo θ* está definida por:

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta).$$

A esta la denotaremos por r_θ . Nuevamente, r_θ es isometría, tiene inversa y su inversa es $r_{-\theta}$.

En general, una *rotación alrededor de un punto (a, b) en un ángulo θ* , la definiremos como

$$t_{(a,b)} r_\theta t_{(a,b)}^{-1}.$$

Intuitivamente, el efecto de esta transformación es trasladar el plano, para que el origen sea el punto (a, b) , rotar alrededor del origen y regresar con una traslación en (a, b) . De la definición, es claro que una rotación es isometría.

Puede demostrarse, usando identidades trigonométricas básicas, que el producto de dos rotaciones alrededor de un punto P en ángulos θ_1 y θ_2 es una rotación alrededor de P en el ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

Una *reflexión alrededor de una recta L* , la cual corta al eje y en el punto $(0, b)$ y forma un ángulo θ con el eje x , la definiremos como

$$t_{(0,-b)}^{-1} r_{-\theta}^{-1} \bar{r} r_{-\theta} t_{(0,-b)}.$$

Intuitivamente, lo que hace esta transformación es trasladar el plano para que la recta L pase por el origen; luego, rotar para que L coincida con el eje x ; reflejar respecto a éste; y regresar a la recta L a su posición original. Es claro que una reflexión es una isometría.

Cabe mencionar que la manera en que se definen las reflexiones respecto a una recta y rotaciones alrededor de un punto representan el hacer una elección adecuada de los ejes x y y , para

posteriormente aplicar una de las primeras isometrías que definimos. Esto quiere decir que cuando hagamos referencia a alguna rotación o reflexión, podemos elegir los ejes de manera adecuada para utilizar la rotación alrededor del origen o la reflexión respecto al eje x .

El siguiente teorema muestra que las isometrías que hemos definido hasta este punto son en realidad productos de reflexiones.

Proposición 3.1. *Una traslación o rotación es producto de dos reflexiones. Además, el producto de dos reflexiones es una rotación o una traslación.*

Demostración

Primero veamos que una traslación dada es el producto de dos reflexiones. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la traslación es de la forma $t_{(0,b)}$. (Por ejemplo, escogiendo los ejes de manera adecuada). Veamos que $t_{(0,b)}$ es el producto de las reflexiones \bar{r} y $t_{(0,\frac{b}{2})}\bar{r}t_{(0,-\frac{b}{2})}$. En efecto, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} ((t_{(0,b/2)}\bar{r}t_{(0,-b/2)})\bar{r})(x, y) &= (t_{(0,b/2)}\bar{r}t_{(0,-b/2)})(x, -y) = (t_{(0,b/2)}\bar{r})(x, -y - \frac{b}{2}) \\ &= t_{(0,b/2)}(x, y + \frac{b}{2}) = (x, y + b) = t_{(0,b)}(x, y). \end{aligned}$$

Ahora veamos que una rotación es el producto de dos reflexiones. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la rotación es de la forma r_θ . Veamos que r_θ es el producto de las reflexiones \bar{r} y $r_{\frac{\theta}{2}}\bar{r}r_{-\frac{\theta}{2}}$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \left(\left(r_{\frac{\theta}{2}}\bar{r}r_{-\frac{\theta}{2}} \right) \bar{r} \right) (x, y) &= \left(r_{\frac{\theta}{2}}\bar{r}r_{-\frac{\theta}{2}} \right) (x, -y) = \left(r_{\frac{\theta}{2}}\bar{r} \right) \left(x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2}, -x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= r_{\frac{\theta}{2}} \left(x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2}, x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\ &= \left(x \cos^2 \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - x \sin^2 \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, x \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - y \sin^2 \frac{\theta}{2} + x \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + y \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Usando identidades trigonométricas básicas, se puede comprobar que la última expresión es exactamente $r_\theta(x, y)$.

Ahora supongamos que que \bar{r}_l y \bar{r}_m son reflexiones respecto a las rectas l y m , respectivamente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que m es el eje x , por lo que $\bar{r}_m = \bar{r}$. Se tienen dos casos: cuando l intersecta a m y cuando no se intersectan.

En el primer caso podemos suponer que se intersectan en el origen, de manera que forman un ángulo α y $\bar{r}_l\bar{r}$ es de la forma $r_\alpha\bar{r}r_{-\alpha}\bar{r}$. Por el cálculo hecho en la primera parte de la demostración, es claro que $\bar{r}_l\bar{r} = r_{2\alpha}$. En este caso, el producto es una rotación.

En el segundo caso tenemos que l es paralela a m y $\bar{r}_l\bar{r}_m$ es de la forma $t_{(0,d)}\bar{r}t_{(0,-d)}$, donde d es la ordenada donde l corta al eje y . Por el cálculo hecho en la primera parte de la demostración, tenemos que $\bar{r}_l\bar{r} = t_{(0,2d)}$. En este caso, el producto es una traslación.

□

La proposición anterior muestra que el estudio de rotaciones y traslaciones puede ser reducido al estudio de reflexiones y productos de dos de éstas. Como ya hemos visto, una reflexión queda determinada por una recta. El siguiente lema nos muestra que el producto de dos reflexiones no depende de la elección de las rectas que las determinan, sino que solamente depende del ángulo que formen éstas entre sí (en el caso que se intersecten en un mismo punto), o bien, de la separación entre ellas (en el caso que sean paralelas).

Lema 3.1. *Sean \bar{r}_l y \bar{r}_m reflexiones respecto a l y m , respectivamente. Supongamos que \bar{r}_l y \bar{r}_m son tales que $\bar{r}_l\bar{r}_m$ es una rotación. Si además, l' y m' son rectas que forman el mismo ángulo (dirigido) que l y m , que se intersectan en el mismo punto, entonces $\bar{r}_l\bar{r}_m = \bar{r}_{l'}\bar{r}_{m'}$. Análogamente, si $\bar{r}_l\bar{r}_m$ es una traslación y l' y m' son rectas paralelas a l y m que están separadas la misma distancia (dirigida) que éstas, entonces $\bar{r}_l\bar{r}_m = \bar{r}_{l'}\bar{r}_{m'}$.*

Demostración

En el primer caso, supongamos que m es el eje x y l pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje x . Entonces

$$\bar{r}_l\bar{r}_m = r_\theta\bar{r}r_{-\theta} \cdot \bar{r} = r_{2\theta}.$$

Ahora, supongamos que l' y m' son líneas que pasan por el origen, que forman ángulos $\phi + \theta$ y ϕ con el eje x , respectivamente. De esta manera, $\bar{r}_{l'} = r_{\theta+\phi}\bar{r}r_{-\theta-\phi}$ y $\bar{r}_{m'} = r_\phi\bar{r}r_{-\phi}$. Entonces

$$\bar{r}_{l'}\bar{r}_{m'} = (r_{\theta+\phi}\bar{r}r_{-\theta-\phi}) \cdot (r_\phi\bar{r}r_{-\phi}) = r_\phi \cdot (r_\theta\bar{r}r_{-\theta}) \cdot r_{-\phi} = r_\phi r_{2\theta} r_{-\phi} = r_{2\theta} = \bar{r}_l\bar{r}_m.$$

Para el segundo caso, sean m el eje x y l la recta $y = b$. Supongamos que m' es $y = c$ y l' es $y = b + c$. Luego,

$$\bar{r}_{l'}\bar{r}_{m'}(x, y) = \bar{r}_{l'}(x, -y + 2c) = (x, y + 2b) = \bar{r}_l(x, -y) = \bar{r}_l\bar{r}_m(x, y),$$

lo que concluye la demostración. □

Proposición 3.2. *El conjunto de traslaciones y rotaciones es cerrado bajo el producto.*

Demostración

De la definición de una traslación, es claro que el producto de dos traslaciones es una traslación. Para analizar el producto de dos rotaciones, las expresaremos como productos de reflexiones.

Supongamos que la primera rotación es $\bar{r}_l\bar{r}_m$. Por el lema anterior, podemos expresar la segunda rotación como $\bar{r}_n\bar{r}_l$, donde n es otra recta. Entonces el producto de estas dos rotaciones es

$$\bar{r}_n\bar{r}_l \cdot \bar{r}_l\bar{r}_m = \bar{r}_n\bar{r}_m,$$

que sabemos que es una rotación o una traslación.

De manera similar se prueba que el producto de una rotación por una traslación es una rotación o una traslación.

□

La proposición anterior es un primer paso hacia la demostración de que el conjunto de las isometrías de \mathbb{R}^2 forma un grupo. El siguiente paso es demostrar que cualquier isometría puede ser expresada como producto de a lo más tres reflexiones. Para esto, los siguientes lemas resultan útiles.

Lema 3.2. Sean a, b, c puntos no colineales en \mathbb{R}^2 y A, B, C puntos tales que $d(a, b) = d(A, B)$, $d(b, c) = d(B, C)$, y $d(a, c) = d(A, C)$. Entonces existe una única isometría f tal que $f(a) = A$, $f(b) = B$ y $f(c) = C$.

Demostración

Sea t la traslación que transforma al punto a en A . Consideremos una rotación r alrededor de A tal que $rt(b) = B$. Por último, como rt es isometría, solamente quedan dos opciones: que $rt(c) = C$, o que exista una reflexión \bar{r} por la recta AB tal que $\bar{r}rt(c) = C$. En el primer caso, rt es la isometría buscada, mientras que en el segundo, es $\bar{r}rt$.

Para probar la unicidad, primero notemos que si a, b, c son puntos no colineales, entonces $f(a), f(b), f(c)$ también lo son, pues de lo contrario se verificaría la igualdad en la desigualdad del triángulo para los puntos $f(a), f(b), f(c)$, pero como f es isometría, también se verificaría para a, b, c , lo cual contradiría que a, b, c son no colineales.

Ahora veamos que dado un punto $p \in \mathbb{R}^2$, no existe $q \neq p \in \mathbb{R}^2$ tal que $d(p, a) = d(q, a)$, $d(p, b) = d(q, b)$ y $d(p, c) = d(q, c)$. En efecto, pues si se cumplieran las tres igualdades tendríamos que a, b y c están sobre la mediatriz del segmento pq , lo cual contradice que a, b, c son puntos colineales.

Sean $x \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera y g una isometría tal que $g(a) = A$, $g(b) = B$, y $g(c) = C$. Como f y g son isometrías, entonces

$$d(f(x), f(a)) = d(x, a) = d(g(x), g(a)) = d(g(x), f(a)),$$

$$d(f(x), f(b)) = d(x, b) = d(g(x), g(b)) = d(g(x), f(b)),$$

$$d(f(x), f(c)) = d(x, c) = d(g(x), g(c)) = d(g(x), f(c)).$$

Como $f(a), f(b)$ y $f(c)$ son no colineales, entonces $f(x) = g(x)$.

□

Lema 3.3. Sean $a \neq b \in \mathbb{R}^2$ y f la reflexión respecto a la mediatriz de ab . Entonces $f(a) = b$ y $f(b) = a$.

Demostración

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la mediatriz de ab es el eje x , es decir, $a = (0, \alpha)$ y $b = (0, -\alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. De esta manera, es claro que $f(a) = b$ y $f(b) = a$.

□

Proposición 3.3. *Cualquier isometría de \mathbb{R}^2 es producto de una, dos o tres reflexiones.*

Demostración

Sean f una isometría de \mathbb{R}^2 y $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ puntos no colineales. Consideraremos los diferentes casos que pueden presentarse.

Si $a = f(a)$, $b = f(b)$ y $c = f(c)$, por el lema 3.2, f debe ser la identidad. Supongamos entonces que alguno de ellos no coincide con su imagen bajo f , digamos c . En este caso, tenemos que $a = f(a)$ y $b = f(b)$. Por el lema 3.3, la reflexión respecto a ab debe transformar c en $f(c)$, por lo que f es en realidad esta reflexión.

Supongamos ahora que $b \neq f(b)$ y $a = f(a)$. Sea g la reflexión respecto a la mediatriz de $bf(b)$. Por el lema 3.3, $g(b) = f(b)$. Además, como $d(a, b) = d(f(a), f(b)) = d(a, f(b))$, entonces a está sobre la mediatriz de $bf(b)$ y $g(a) = a$. Si $g(c) = c$, entonces $f = g$ y f es una reflexión. Si $g(c) \neq c$, sea h la reflexión respecto a la recta $f(a)f(b)$. Claramente, $(hg)(a) = a$ y $(hg)(b) = h(f(b)) = f(b)$. Como $d(f(c), f(a)) = d(c, a) = d(g(c), g(a)) = d(g(c), f(a))$ y $d(f(c), f(b)) = d(c, b) = d(g(c), g(b)) = d(g(c), f(b))$ entonces $f(a)f(b)$ es la mediatriz de $f(c)g(c)$, por lo que $(h \circ g)(c) = h(g(c)) = f(c)$. Por lo tanto, $hg = f$ y f es el producto de dos reflexiones.

Para el caso donde ninguno de los tres puntos a, b, c coincide con su imagen bajo f , se utiliza un procedimiento similar. Se considera la acción de la reflexión g respecto a la mediatriz de $af(a)$; después la reflexión h respecto a la mediatriz de $g(b)f(b)$; y finalmente, la reflexión i respecto a la mediatriz de $(hg)(c)f(c)$. En el peor de los casos, $f = ihg$, que es el producto de tres reflexiones.

□

La proposición anterior a veces es llamada Teorema de las Tres Reflexiones. Ahora ya podemos probar que el conjunto de isometrías de \mathbb{R}^2 forma un grupo.

Teorema 3.1. *El conjunto de isometrías $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ forma un grupo bajo el producto y el conjunto de productos de un número par de reflexiones $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ es un subgrupo de índice 2.*

Demostración

El producto es cerrado, pues composición de isometrías es isometría. La asociatividad del producto y la existencia de un elemento neutro en $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ son inmediatas. La existencia de inversos se sigue del hecho que cada reflexión tiene un elemento inverso: $\bar{r}_l^{-1} = \bar{r}_l$. De esta manera, como cada isometría se puede expresar como producto de una, dos o tres reflexiones, cada isometría tiene inverso y será también producto de una, dos o tres reflexiones.

Para probar la segunda parte del teorema, primero veamos que si $f, g \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$, entonces $fg \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$. Sabemos que f y g son producto de un número par de reflexiones, digamos $2n$ y $2m$, por lo que fg será el producto de $2(n + m)$ reflexiones. Esto demuestra que $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ es un subgrupo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

Por último, veamos que $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ es un subgrupo de índice 2. Esto lo haremos demostrando que la clase lateral $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \cdot \bar{r}$ no es $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$, o equivalentemente, que $\bar{r} \notin \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$.

Supongamos que $\bar{r} \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$. De la proposición 3.1, podemos ver que $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ consiste de traslaciones y rotaciones. Entonces \bar{r} sería una traslación o una rotación, lo cual es falso. Esto último se puede ver de varias maneras, por ejemplo, notando que el conjunto de puntos fijos de una traslación (no trivial) es el conjunto vacío y el conjunto de puntos fijos de una rotación es un punto, mientras que el de una reflexión es una recta.

Por lo tanto, existen al menos dos clases laterales de $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$, pero la clase $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)\bar{r}$ es en realidad el complemento de $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$. En efecto, dado un producto de una cantidad impar de reflexiones, por el lema 3.1 podemos reacomodar las rectas de manera que el producto sea de la forma $r_{l_1} \cdots r_{l_{2n}} \cdot \bar{r}$.

De lo anterior, concluimos que $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ e $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \cdot \bar{r}$ son las únicas clases laterales, y el índice de $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ es 2. □

Sabemos que el grupo $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ consiste en elementos que son, o bien reflexiones, o productos de dos o tres de éstas. Además, sabemos que el producto de dos reflexiones es una traslación o una rotación. Para terminar la descripción del grupo de isometrías de \mathbb{R}^2 , debemos estudiar cómo actúa un producto de tres reflexiones.

Una primera descripción que podemos hacer es que pueden ser producto de una traslación y una reflexión, o de una rotación y una reflexión. Sin embargo, veremos que este último caso no puede darse, y que el primero puede restringirse aún más.

Sea l una recta en \mathbb{R}^2 . Llamaremos una *reflexión con traslado respecto al eje l* al producto de la reflexión respecto a l y una traslación en la dirección de l . Por ejemplo, una reflexión con traslado respecto al eje x es la isometría tal que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto (x + a, -y),$$

para algún $a \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.4. *Un producto de tres reflexiones $\bar{r}_l \bar{r}_m \bar{r}_n$ es una reflexión con traslado.*

Demostración

Analizaremos varios casos. Primero supongamos que l , m y n concurren en un punto $p \in \mathbb{R}^2$. Entonces $\bar{r}_m \bar{r}_n$ es una rotación alrededor de p . Pero $\bar{r}_m \bar{r}_n = \bar{r}_{m'} \bar{r}_{n'}$ para cualesquiera rectas m', n' tales que se intersectan en p y forman el mismo ángulo que m y n . En particular, podemos escoger $m' = l$, y entonces

$$\bar{r}_l \bar{r}_m \bar{r}_n = \bar{r}_l \bar{r}_l \bar{r}_{n'} = \bar{r}_{n'},$$

que es trivialmente una reflexión con traslado.

Ahora supongamos que l , m y n son paralelas. En este caso, $\bar{r}_m \bar{r}_n$ es una traslación y

$\bar{r}_m \bar{r}_n = \bar{r}_{m'} \bar{r}_{n'}$ para cualesquiera rectas m', n' tales que estén separadas la misma distancia que m y n . En particular, podemos escoger $m' = l$, de manera que

$$\bar{r}_l \bar{r}_m \bar{r}_n = \bar{r}_l \bar{r}_l \bar{r}_{n'} = \bar{r}_{n'},$$

que es nuevamente una reflexión con traslado.

Por último, supongamos que las tres rectas son tales que n no pasa por la intersección p de l y m . En este caso, $\bar{r}_l \bar{r}_m$ es una rotación alrededor de p y $\bar{r}_l \bar{r}_m = \bar{r}_{l'} \bar{r}_{m'}$ para cualesquiera rectas l', m' que se intersectan en p y que forman el mismo ángulo que l y m . En particular, podemos escoger m' perpendicular a n , en un punto q , de manera que $\bar{r}_{m'} \bar{r}_n$ es una rotación alrededor de q y $\bar{r}_{m'} \bar{r}_n = \bar{r}_{m''} \bar{r}_{n'}$ para cualesquiera rectas m'', n' que se intersectan en q formando el mismo ángulo que m' y n (que es de 90°). Podemos escoger n' perpendicular a l' en un punto r . Por lo tanto,

$$\bar{r}_l \bar{r}_m \bar{r}_n = \bar{r}_{l'} \bar{r}_{m'} \bar{r}_n = \bar{r}_{l'} \bar{r}_{m''} \bar{r}_{n'},$$

donde n' es perpendicular tanto a m'' como a l' , por lo que $\bar{r}_{l'} \bar{r}_{m''}$ es una traslación en la dirección de n' . Por definición, $\bar{r}_{l'} \bar{r}_{m''} \bar{r}_{n'}$ resulta ser una reflexión con traslado.

Análogamente para los casos en los que m o n es la recta que no pasa por la intersección de las otras dos.

□

La proposición anterior nos permite hacer una clasificación más detallada de los elementos del grupo de isometrías de \mathbb{R}^2 , obteniendo el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Cada isometría de \mathbb{R}^2 es una rotación, una traslación o una reflexión con traslado.*

3.3 Teorema de Killing-Hopf

El teorema de Killing-Hopf enfatiza la importancia de algunos de los ejemplos que estudiamos en la sección 2.1.2 al tratarlos como espacios métricos. A continuación enunciamos este teorema.

Teorema 3.3. *Sea S una superficie localmente euclidiana, completa y conexa por trayectorias. Entonces S es homeomorfa a uno de los siguientes:*

- \mathbb{R}^2 .
- Un cilindro.
- Una banda de Möbius.
- Un toro.
- Una botella de Klein.

El objetivo de las siguientes secciones es el dar una demostración detallada de este teorema. Es importante notar que la construcción del cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein, que se hizo en la sección 2.1.2 se hizo mediante la acción libre, propia y discontinua de un grupo Γ sobre \mathbb{R}^2 , de manera que cada función θ_g era una isometría. En la sección 3.3.1, se demuestra que con esta construcción, podemos definir una métrica en cada uno de estos espacios, la cual genera la misma topología de la sección 2.1.2, con la cual estas superficies resultan ser localmente euclidianas, completas y conexas por trayectorias. Más aún, veremos que el cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein son las únicas superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde la acción de Γ es libre, propia, discontinua y de manera que cada función θ_g es una isometría.

En la sección 3.3.2 veremos que si una superficie es localmente euclidiana, completa y conexa por trayectorias entonces debe ser de la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde Γ es un grupo que actúa libre, propia y discontinuamente, por medio de isometrías. Esto último, usando la clasificación de isometrías de \mathbb{R}^2 , concluirá la demostración del teorema.

3.3.1 Superficies Cociente

En esta sección veremos que los espacios de la sección 2.1.2 son superficies localmente euclidianas, completas y conexas por trayectorias, lo cual probará una primera parte del teorema de Killing-Hopf. Primeramente veamos que las acciones de grupo sobre \mathbb{R}^2 determinan una manera de construir superficies, como superficies cociente.

Teorema 3.4. *Sea Γ un grupo que actúa propiamente sobre \mathbb{R}^2 . Entonces \mathbb{R}^2/Γ es una superficie.*

Demostración

Por el teorema 2.1, sabemos que X/Γ es de Hausdorff. Probaremos que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 . En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^2/\Gamma$ y \tilde{U} algún abierto que contenga a x . Si $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$ es la proyección natural, entonces $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$ es abierto en \mathbb{R}^2 . Además, $\pi|_U$ es un homeomorfismo sobre \tilde{U} , lo que implica que \tilde{U} es homeomorfo a U . Por último, por la sección 2.1.1, sabemos que \mathbb{R}^2/Γ tiene una base numerable y por lo tanto, \mathbb{R}^2/Γ es una superficie. □

Del teorema anterior se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *El cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein son superficies.*

Las superficies anteriores tienen la particularidad de que se puede definir una métrica en ellas, la cual puede conservar propiedades del espacio euclidiano, de manera que sobre las superficies pueden definirse conceptos como longitud de segmentos de recta, ángulos, etc. Esta particularidad se debe a que para cada $g \in \Gamma$, la función θ_g es una isometría. Por el lema 1.2 y gracias a que la acción es libre, esto significa que el grupo Γ se puede pensar como un grupo de isometrías. El

homomorfismo mencionado en el lema 1.2 es en realidad un isomorfismo cuando la acción es libre.

En los casos ya mencionados (cilindro, banda de Möbius, toro y botella de Klein), el grupo Γ lo podemos pensar como un grupo de isometrías generado por uno o dos elementos. Sean a_1, a_2, a_3 las isometrías de \mathbb{R}^2 definidas de manera que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_1(x, y) = (x + 1, y), \quad a_2(x, y) = (x, y + 1), \quad a_3(x, y) = (x + 1, -y).$$

No es difícil convencerse que para el cilindro, $\Gamma = \langle a_1 \rangle$; para la banda de Möbius, $\Gamma = \langle a_3 \rangle$; para el toro, $\Gamma = \langle a_1, a_2 \rangle$; y para la botella de Klein, $\Gamma = \langle a_2, a_3 \rangle$.

En general, consideremos un grupo discreto Γ que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 , de manera que cada función θ_g es una isometría. Definimos $D : \mathbb{R}^2/\Gamma \times \mathbb{R}^2/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, de manera que para cada $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$D(\Gamma x, \Gamma y) = \min \{d(u, v) | u \in \Gamma x, v \in \Gamma y\},$$

donde d es la distancia euclidiana de \mathbb{R}^2 .

La función D se podría definir de manera equivalente como:

$$D(\Gamma x, \Gamma y) := \min \{d(x, gy) | g \in \Gamma\}.$$

En efecto, veamos que el mínimo en la última definición siempre existe. Supongamos, por el contrario, que para cada $g \in \Gamma$, existe otro $g' \in \Gamma$ tal que $d(x, g'y) < d(x, gy)$. Entonces existiría una sucesión $(d(x, g_n y))_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$, estrictamente decreciente, por lo que debe converger a algún número $r \geq 0$. Luego, existiría un punto $z \in \mathbb{R}^2$, que es punto de acumulación de $(g_n y)_{n=1}^{\infty}$, lo cual contradice que la acción de Γ es discontinua. Por lo tanto, siempre existe el número $\min \{d(x, gy) | g \in \Gamma\}$. Este no depende de la elección del representante de Γx , pues si $x' \in \Gamma x$, entonces existe $h \in \Gamma$ tal que $x' = hx$. Luego,

$$\min_{g \in \Gamma} d(x', gy) = \min_{g \in \Gamma} d(hx, h(h^{-1}gy)) = \min_{g \in \Gamma} d(x, h^{-1}gy) = \min_{g' \in \Gamma} d(x, g'y).$$

Esto prueba que las dos definiciones de la función D son equivalentes, es decir, para cada par de órbitas $\Gamma x, \Gamma y$, tienen el mismo valor. La siguiente proposición nos muestra que las superficies que hemos construido pueden ser consideradas como espacios métricos, gracias a la función D .

Proposición 3.5. *La función D es una métrica para \mathbb{R}^2/Γ .*

Demostración

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Claramente, $D(\Gamma x, \Gamma y) = D(\Gamma y, \Gamma x) \geq 0$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^2$. Luego, si $\Gamma x = \Gamma y$, se sigue directamente de la definición de D que $D(\Gamma x, \Gamma y) = 0$. Inversamente, si $D(\Gamma x, \Gamma y) = 0$, existen $g, h \in \Gamma$ tales que $d(gx, hy) = 0$, por lo que $gx = hy$, lo que implica que $\Gamma x = \Gamma y$.

Por último, sean $X \in \Gamma x, Y \in \Gamma y, Z \in \Gamma z$ tales que $d(X, Y) = D(\Gamma x, \Gamma y)$, $d(Y, Z) = D(\Gamma y, \Gamma z)$. Tenemos entonces que

$$D(\Gamma x, \Gamma z) \leq d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z) = D(\Gamma x, \Gamma y) + D(\Gamma y, \Gamma z),$$

que es la desigualdad del triángulo. □

Nuestro objetivo ahora será demostrar que si consideramos al cilindro, a la banda de Möbius, al toro y a la botella de Klein, definidas en la sección 2.1.2, con la métrica definida en esta sección, cada una resulta ser una superficie localmente euclidiana.

Sea Γ un grupo discreto que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 , de manera que cada θ_g es una isometría y denotamos $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$. Notemos que dado un punto $\Gamma x \in S$, siempre existe un punto $x' \neq x$ en la misma órbita de x , tal que la distancia $d(x, x')$ es mínima. Esto es una implicación directa de que la acción de Γ es discontinua. Sea $0 < r < \frac{d(x, x')}{4}$. Veremos que para cada $y \in \mathbb{R}^2$, el disco de radio r , con centro en y , es isométrico a $B_r(\Gamma x)$. En efecto, la proyección natural $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ restringida al disco de radio r con centro en x es una isometría sobre $B_r(\Gamma x)$. Para demostrar esto, consideremos primero el siguiente lema.

Lema 3.4. *Sean r como se definió anteriormente y $B_r(x)$ el disco con centro en x y radio r . Entonces no puede haber dos representantes de una misma órbita en $B_r(x)$.*

Demostración

Supongamos que existe $g \in \Gamma$, $g \neq e$ tal que $y, gy \in B_r(x)$. Entonces

$$d(x, gx) \leq d(x, y) + d(y, gx) < r + r = 2r < \min_{h \in \Gamma} d(x, hx),$$

que es claramente una contradicción. □

Teorema 3.5. *Sea $B_r(x)$ el disco con centro en x y radio r como en el lema anterior. Sean $y \neq z \in B_r(x)$. Entonces $d(y, z) = D(\Gamma y, \Gamma z)$.*

Demostración

Sabemos que existe $g \in \Gamma$ tal que $d(y, gz) = D(\Gamma y, \Gamma z)$. Supongamos que $g \neq e$. Entonces

$$d(x, gz) \leq d(x, y) + d(y, gz) \leq d(x, y) + d(y, z) < r + 2r = 3r.$$

Luego, $d(x, gx) \leq d(x, gz) + d(gz, gx) = d(x, gz) + d(x, z) < 3r + r < \min_{h \in \Gamma} d(x, hx)$, que es una contradicción. Por lo tanto,

$$d(y, z) = \min_{h \in \Gamma} d(y, hz) = D(\Gamma y, \Gamma z).$$

□

El teorema anterior muestra que para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un $r > 0$ tal que el disco con centro x y radio r en \mathbb{R}^2 es isométrico a la bola con radio r y centro Γx en \mathbb{R}^2/Γ . Es decir, que las superficies de

la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde Γ actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 , son superficies localmente euclidianas. En particular, el cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein lo son.

La isometría local entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^2/Γ nos permite definir el concepto de segmento de recta en \mathbb{R}^2/Γ en vecindades lo suficientemente pequeñas. Sean U una bola en \mathbb{R}^2/Γ isométrica a un disco V en \mathbb{R}^2 y $p : V \rightarrow U$ una isometría. Dados dos puntos $x, y \in U$, definimos el segmento de recta xy como la imagen bajo p del segmento $p^{-1}(x)p^{-1}(y)$.

El concepto de segmento de recta en vecindades lo suficientemente pequeñas, a su vez, permite definir el concepto de ángulo en \mathbb{R}^2/Γ . Sean U, V y p como se definieron anteriormente y $x, y, z \in U$. Definimos el ángulo que forman los segmentos xy y xz como el ángulo que forman los segmentos $p^{-1}(x)p^{-1}(y)$ y $p^{-1}(x)p^{-1}(z)$.

Los segmentos “pequeños” que definimos anteriormente, junto con la noción de ángulo nos permite definir segmentos de otros tamaños: como uniones de segmentos pequeños, que forman ángulos de 180° . La propiedad de ser localmente euclidianas garantiza que dado un punto inicial, una longitud y una dirección, el segmento de recta es único.

Es importante notar que hemos desarrollado propiedades que tienen estas superficies con la métrica de las que las hemos dotado. Esta métrica induce una topología en estas superficies (la topología de un espacio métrico). Sin embargo, ya habíamos dotado a estos espacios con una topología (la topología cociente), por lo que estaríamos hablando de objetos distintos si estas topologías fueran distintas. La siguiente proposición muestra que ambas topologías son iguales.

Proposición 3.6. *Sea Γ un grupo discreto de isometrías que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 . Entonces la topología cociente en \mathbb{R}^2/Γ coincide con la topología inducida por la métrica D .*

Demostración

Primero probaremos que la topología cociente es más fina que la topología inducida por la métrica. Sean $\Gamma x \in \mathbb{R}^2/\Gamma$ y B un básico de la topología inducida por la métrica. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\Gamma x) \subset B$. Además, podemos suponer que r es tal que se cumplan las conclusiones del lema 3.4 y del teorema 3.5.

Al escoger r de tal manera, sabemos que la restricción de π a $\pi^{-1}(B_r(\Gamma x))$ es una isometría, por lo que $\pi^{-1}(B_r(\Gamma x)) = B_r(x)$. Como π es suprayectiva, entonces $\pi(B_r(x)) = \pi(\pi^{-1}(B_r(\Gamma x))) = B_r(\Gamma x)$, lo que implica que $B_r(\Gamma x)$ es un básico de la topología cociente.

Ahora probaremos que la topología inducida por la métrica es más fina que la topología cociente. Sean $\Gamma x \in \mathbb{R}^2/\Gamma$ y B' un básico de la topología cociente. Entonces existe un $y \in \mathbb{R}^2$ y $R > 0$ tal que $B' = \pi(B_R(y))$ y $d(x, y) < R$. Sea $r \leq R$ tal que se satisfacen las conclusiones del lema 3.4 y del teorema 3.5 para x y que $\pi(B_r(x)) \subset \pi(B_R(y))$. Entonces π restringida a $\pi(B_r(x))$ es una isometría, por lo que $\pi(B_r(x)) = B_r(\Gamma x) \subset B'$. Esto es suficiente para concluir que la topología inducida por la métrica es más fina que la topología cociente. Por lo tanto, la topología cociente y la topología inducida por la métrica son iguales.

□

Hemos visto que si Γ actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 , de manera que cada θ_g es una isometría, entonces \mathbb{R}^2/Γ es una superficie localmente euclidiana. Se han mencionado cuatro ejemplos de superficies de tal forma: el cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein. Ahora veremos que son las únicas superficies que se pueden obtener de esa manera. Para esto nos será útil pensar en Γ como un grupo de isometrías.

Empecemos por ver que Γ no puede contener cualquier tipo de isometría. Por ejemplo, Γ no puede contener rotaciones ni reflexiones, pues éstas tienen puntos fijos, lo que no permitiría a la acción ser libre. Por consiguiente, Γ sólo puede contener traslaciones o reflexiones con traslado. Los siguientes lemas nos permitirán restringir aún más las posibilidades para Γ .

Lema 3.5. *Sea Γ un grupo discreto de isometrías que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 . Entonces o bien Γ contiene solamente traslaciones, o existe una reflexión con traslado $g \in \Gamma$ tal que todas las reflexiones con traslado en Γ son de la forma tg , para alguna traslación $t \in \Gamma$.*

Demostración

Sea Γ' el conjunto de traslaciones en Γ . Claramente, Γ' es un subgrupo de Γ . Si $\Gamma' = \Gamma$, entonces Γ contiene solamente traslaciones. Supongamos entonces que existe al menos un $g \in \Gamma - \Gamma'$. Sabemos que g debe ser una reflexión con traslado. Además, si $t \in \Gamma'$, necesariamente tg es una reflexión con traslado, pues de no serlo sería una traslación y concluiríamos que g es una traslación, lo cual es falso.

Sea $g' \in \Gamma$ una reflexión con traslado cualquiera. Notemos que $g'g^{-1} \in \Gamma$ es el producto de dos reflexiones con traslado, que es en realidad el producto de seis reflexiones, por lo que $g'g^{-1} \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ y necesariamente $g'g^{-1} \in \Gamma'$.

Como $g' = g'g^{-1}g$ y $g'g^{-1}$ es una traslación, concluimos que una reflexión con traslado cualquiera es de la forma tg , donde t es una traslación.

□

Lema 3.6. *Sea Γ un grupo discreto de isometrías que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 . Entonces Γ está generado por uno o dos elementos.*

Demostración

Supongamos primero que Γ consiste solamente de traslaciones. Sean $x \in \mathbb{R}^2$ y

$$r = \min\{d(x, gx) | g \in \Gamma\}.$$

Sea $h \in \Gamma$ una traslación tal que $r = d(x, hx)$. Las potencias de h son todos los elementos de Γ en la misma dirección que h , pues si $t \in \Gamma$ fuera otra traslación en la dirección de h pero que no es una potencia de h , entonces podemos tomar $m \in \mathbb{Z}$ de manera que $d(tx, h^m x)$ sea mínima.

Es claro que $d(tx, h^m x) < d(x, hx)$, pues tx es algún punto entre $h^m x$ y la siguiente potencia de h

actuando sobre x . Luego, $d(x, t^{-1}h^m x) = d(tx, h^m x) < d(x, hx)$, que contradice la elección de h . Por lo tanto, las potencias de h son las únicas traslaciones en Γ en la misma dirección que h .

Si las potencias de h son todos los elementos de Γ , entonces Γ es generado por un sólo elemento: h . Supongamos entonces que hay otra traslación $t \in \Gamma$ en una dirección distinta a la de h . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $d(x, tx)$ es mínima. Luego, la órbita $\langle h, t \rangle x$ son los vértices de una teselación de \mathbb{R}^2 por paralelogramos iguales.

Veamos que estos vértices son en realidad la órbita de Γ . Supongamos que $s \in \Gamma - \langle h, t \rangle$. Entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $d(sx, h^m t^n x)$ es mínima. Además, como el punto sx está dentro de uno de los paralelogramos de la teselación, la distancia mínima a alguno de los vértices debe ser menor a la longitud del lado más largo del paralelogramo. Esto implica que $d(x, s^{-1}h^m t^n x) = d(sx, h^m t^n x)$ es menor que $d(x, hx)$, o que $d(x, tx)$, lo que contradice la elección de h y t . Por lo tanto, no puede existir $s \in \Gamma - \langle h, t \rangle$. Esto completa la demostración para el caso en que Γ contiene solamente traslaciones.

Supongamos ahora que Γ contiene reflexiones con traslado. Sea $g \in \Gamma$ la reflexión con traslado tal que $d(x, gx)$ es mínima. Usando un argumento similar al caso anterior, podemos demostrar que las potencias de g son todos los elementos de Γ en la dirección de g . Si las potencias de g son todos los elementos de Γ , entonces Γ está generado por un sólo elemento. Supongamos que existe $h \in \Gamma$, que no está en la dirección de g , tal que $d(x, hx)$ es mínima.

Si la dirección de h no es perpendicular a la dirección de g , entonces pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $d(h^m x, g^n x) = d(x, h^{-m} g^n x)$ es menor que $d(x, gx)$, o que $d(x, hx)$, lo cual contradice la elección de g y h . Por lo tanto, la dirección de h debe ser perpendicular a la de g . Además, las potencias de h son todos los elementos de Γ en la misma dirección que h .

Finalmente, si existiera un elemento $k \in \Gamma - \langle g, h \rangle$, existirían $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $d(kx, g^n h^m x)$ es mínima. Por un argumento similar al caso en el que Γ contenía solamente traslaciones, $d(kx, g^n h^m x) = d(x, k^{-1} g^n h^m x)$ es menor que $\max\{d(x, gx), d(x, hx)\}$, lo cual contradice la elección de g y h . Por lo tanto, todos los elementos de Γ deben ser generados por h y g .

□

Hemos demostrado que si Γ actúa libre, propia y discontinuamente, entonces Γ sólo puede contener traslaciones y reflexiones con traslado. Además, debe estar generado por a lo más dos elementos. Por los lemas anteriores, esto nos presenta cuatro casos: que esté generado por una traslación, por una reflexión con traslado, por dos traslaciones, o por una traslación y una reflexión con traslado.

El primer caso (cuando Γ es generado por una traslación) es claro que el espacio cociente es el cilindro, que fue el primer ejemplo estudiado en la sección 2.1.2. Ahí se utilizaba una traslación horizontal como generador, sin embargo, la dirección de la traslación no afecta al espacio cociente resultante pues se puede hacer una elección de los ejes x y y apropiada. También se usaba una traslación en una unidad como generador, sin embargo, esto no es necesario. En el caso en el que el generador no sea una traslación de esta forma, la región fundamental cambia y el espacio cociente

es otro cilindro, el cual es homeomorfo al primero.

El segundo caso (cuando Γ es generado por una reflexión con traslado), el espacio cociente es la banda de Möbius. En la sección 2.1.2, Γ era generado mediante una reflexión con traslado horizontal, de manera que la traslación era en una unidad. Si el generador no es de esta forma, la región fundamental es diferente, pero el espacio cociente es homeomorfo a la banda de Möbius estudiada, siempre y cuando el generador sea una reflexión con traslado.

El tercer caso (cuando Γ es generado por dos traslaciones), se obtiene un toro. En la sección 2.1.2, se utilizaban traslaciones enteras en direcciones perpendiculares. Nuevamente, si las traslaciones no son enteras o no tienen direcciones perpendiculares, se obtiene una región fundamental distinta, pero el espacio cociente es homeomorfo al toro estudiado.

En el último caso, utilizando argumentos similares a los casos anteriores, se obtiene una botella de Klein (o un espacio homeomorfo). Con las observaciones anteriores, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea Γ un grupo discreto de isometrías que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 . Entonces \mathbb{R}^2/Γ es homeomorfo al cilindro, banda de Möbius, toro o botella de Klein.*

Recordemos que las superficies del teorema anterior son superficies localmente euclidianas. Estos ejemplos cumplen otras propiedades deseables en el estudio de espacios métricos, las cuales se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *El cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein son espacios métricos completos y conexos por trayectorias.*

Demostración

Sean S alguna de las superficies en el enunciado de la proposición, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ una sucesión de Cauchy y $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se cumple que $d(x_N, x_n) < \epsilon$. Sea $r_N > 0$ tal que en $B_{r_N}(x_N)$ no hay más de un representante de una órbita y que es isométrica a un disco de radio r_N en \mathbb{R}^2 . Tomamos $r = \min\{\frac{r_N}{2}, \epsilon\}$, de manera que $\overline{B_r(x_N)}$ es isométrica a un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Sea $(x_n)_{n=N}^{\infty} \subset \overline{B_r(x_N)}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ converge en $\overline{B_r(x_N)} \subset S$, por lo que concluimos que S es completo.

Para demostrar que S es conexo por trayectorias, sean $x \neq y \in S$ y $X, Y \in \mathbb{R}^2$ tales que $\pi(X) = x$ y $\pi(Y) = y$. Como \mathbb{R}^2 es conexo por trayectorias, existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(0) = X$ y $\gamma(1) = Y$. Luego, como la proyección natural $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es continua, podemos concluir que la función $\alpha = \pi \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow S$ es continua y además, $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

□

Puede notarse que la demostración anterior es válida en general para superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde Γ actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 . Sin embargo, por el teorema 3.6, no hay diferencia entre enunciarlo en la manera en que se enunció y enunciarlo en la manera más general.

3.3.2 La Función Lápiz y el Grupo de Isometrías Recubridoras

Hemos demostrado que el cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein son superficies localmente euclidianas, completas y conexas por trayectorias. El objetivo de esta sección será demostrar que estas son las únicas superficies localmente euclidianas con estas características, además de \mathbb{R}^2 (el plano euclidiano). Para esto, será suficiente mostrar que una superficie localmente euclidiana con estas características debe ser de la forma \mathbb{R}^2/Γ , y por el teorema 3.6 podremos concluir que son las únicas.

Para lograr este objetivo, nos auxiliaremos de una herramienta llamada *función lápiz*. Sean S una superficie localmente euclidiana, completa y conexas por trayectorias, $x \in S$ y $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Como S es localmente euclidiana, existe $r > 0$ tal que el disco con centro O y radio r en \mathbb{R}^2 es isométrico a la bola con centro en x y radio r en S . Sea $f : B_r(O) \rightarrow B_r(x)$, la isometría entre estos dos conjuntos. Definiremos la función lápiz $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ como una extensión natural de f . Sea $X \in \mathbb{R}^2$ algún punto a una distancia mayor o igual que r de O . Geométricamente, para definir $p(X)$, lo que se hace es tomar un punto X_1 sobre el segmento OX , a una distancia menor que r de O , y extender el segmento $f(OX_1)$ en S , a un segmento de recta más grande, de longitud igual a $d(O, X)$. El siguiente lema muestra propiedades de la función lápiz que serán de utilidad.

Lema 3.7. *La función $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es suprayectiva. Además, para cada $X \in \mathbb{R}^2$, existe $r_X > 0$ tal que p es isometría en $B_{r_X}(X)$.*

Demostración

Primero probaremos que para cada $X \in \mathbb{R}^2$, existe $r_X > 0$ tal que p es isometría en $B_{r_X}(X)$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe un $X \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $r > 0$, p no es una isometría en $B_r(X)$. Sea \mathcal{A} el conjunto de todos los puntos con esta propiedad. \mathcal{A} es un conjunto cerrado, pues si $Y \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{A}$, entonces existe un $r_Y > 0$ tal que p es isometría en $B_{r_Y}(Y)$ y todos los puntos en $B_{r_Y}(Y)$ también cumplen con esta propiedad.

Como \mathcal{A} es cerrado, entonces $\mathcal{A} \cap OX$ es compacto, lo cual implica que debe haber un elemento $P \in \mathcal{A} \cap OX$ que sea el más cercano a O .

Luego, $p(P) \in S$ y S es localmente euclidiana, por lo que existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p(P))$ es isométrico a un disco de \mathbb{R}^2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es el que tiene centro en P . Tenemos entonces una isometría $h : B_\epsilon(P) \rightarrow B_\epsilon(p(P))$. Si h no coincide con p en $OP \cap B_\epsilon(P)$, entonces debe existir una rotación r tal que hr sí coincide. Luego, notemos que para cualquier ángulo θ , existen dos rayos que parten de P y que forman un ángulo θ con OP . Si las imágenes de estos rayos bajo p no coinciden con su respectiva imagen bajo hr , entonces debe existir una reflexión \bar{r} (respecto a la recta OP) tal que sí coincidan. De esta manera, la isometría $f = h\bar{r}r$ coincide con p en cada bola con centro en algún punto de OP y radio suficientemente pequeño para que esté en el interior de $B_\epsilon(P)$. Por nuestra hipótesis, p es una isometría en una vecindad lo suficientemente pequeña de cada punto $Q \in OP \cap B_\epsilon(P)$ distinto de P .

Sea Q uno de estos puntos y supongamos que p y f coinciden en $B_\delta(Q)$, con $\delta > 0$. Por la manera en que se define p , notamos que f y p deben coincidir también en las prolongaciones de los rayos que parten de O y que pasan por $B_\delta(Q)$ (en la parte que está dentro de $B_\epsilon(P)$). Es claro que la unión de todos estos segmentos contiene un disco alrededor de P , por lo que p es isometría en un disco alrededor de $P \in \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción.

Para probar que p es suprayectiva, primero notemos que p transforma cualquier segmento de recta L en \mathbb{R}^2 sobreyectivamente en otro segmento de recta $p(L)$ en S . Éste puede ser dividido en subsegmentos que forman un ángulo de 180° , de tal manera que cada uno esté contenido en un disco que es transformado isométricamente por p . Si p no es suprayectiva, entonces $S - p(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$. Notemos que

$$p(\mathbb{R}^2) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} p(B_{r_x}(x)),$$

donde r_x es tal que p es isometría en $B_{r_x}(x)$. Por lo tanto, $p(\mathbb{R}^2)$ es abierto y $S - p(\mathbb{R}^2)$ es cerrado. Tomamos un punto $v \in S - p(\mathbb{R}^2)$. De la conexidad por trayectorias y la propiedad de ser localmente euclidiana, se sigue que existe una trayectoria poligonal en S , que conecta a $p(O)$ con v .

Como $S - p(\mathbb{R}^2)$ es cerrado, existe un primer punto $w \in S - p(\mathbb{R}^2)$ en la trayectoria poligonal. Sean u el último vértice de la trayectoria poligonal que pertenece a $p(\mathbb{R}^2)$ y $U \in \mathbb{R}^2$ tal que $p(U) = u$. Consideremos un segmento de recta l que parte de U y que se transforma en un subsegmento de uw . Podemos extender l a l' , de manera que $uw \cap p(\mathbb{R}^2) \subset p(l')$. Por la continuidad de p (que es una implicación directa de la propiedad de isometría local), obtenemos que w también pertenece a $p(l')$, lo cual es una contradicción.

□

El lema anterior nos dice que una superficie localmente euclidiana, completa y conexa por trayectorias S , puede ser “cubierta” por \mathbb{R}^2 (el plano euclidiano), vía la función lápiz. Ahora veremos que en realidad S está generada por un grupo de isometrías que actúa libre, propia y discontinuamente sobre \mathbb{R}^2 , de manera que la proyección natural es la función lápiz p . Para esto, nos será útil la siguiente definición.

Definición 3.5. Una isometría $g \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ se llama isometría recubridora (para p) si $(p \circ g)(P) = p(P)$ para cada $P \in \mathbb{R}^2$.

La idea de una isometría recubridora es que para cada punto $P \in \mathbb{R}^2$, los puntos P y $g(P)$ “cubran” al mismo punto de S . El siguiente lema nos da un candidato para el grupo de isometrías que buscamos.

Lema 3.8. *El conjunto de isometrías recubridoras para p es un subgrupo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración

De la definición de isometría recubridora, es inmediato que la identidad es una isometría recubridora.

Sean g_1, g_2 isometrías recubridoras. Entonces $(p \circ g_1)(P) = p(P) = (p \circ g_2)(P)$ para cada $P \in \mathbb{R}^2$. Luego, $(p \circ (g_1 \circ g_2))(P) = (p \circ g_2)(P) = p(P)$, por lo que $g_1 \circ g_2$ es una isometría recubridora.

Finalmente, si g es una isometría recubridora y g^{-1} es su inversa, entonces $(p \circ g^{-1})(P) = (p \circ g)(g^{-1}(P)) = p(P)$, por lo que g^{-1} también es isometría recubridora.

□

Es claro que si Γ es el grupo de isometrías recubridoras para p , entonces todos los elementos de la órbita ΓP , de un punto P , tienen la misma imagen bajo p . El siguiente lema nos permitirá llegar al resultado final.

Lema 3.9. *Si $p(P) = p(Q)$, entonces $Q = g(P)$ para alguna isometría recubridora g .*

Demostración

Por la propiedad de isometría local en el lema 3.7, existen discos $D(P)$ y $D(Q)$ con centro en P y Q respectivamente, tales que son transformados isométricamente por p en un disco $p(D(P)) = p(D(Q))$ en S . Consideremos la isometría $(p|_{D(Q)})^{-1} \circ p|_{D(P)}$, la cual está definida en $D(P)$ y lo transforma en $D(Q)$. Como $D(P)$ contiene tres puntos no colineales, por el lema 3.2, existe una única isometría $g \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ que coincide con $(p|_{D(Q)})^{-1} \circ p|_{D(P)}$ en esos tres puntos. Ahora veamos que g es una isometría recubridora.

Supongamos que existe un $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $p(X) \neq (p \circ g)(X)$. El conjunto \mathcal{A} de todos los puntos con esta propiedad es cerrado, pues si $(Y_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ es una sucesión que converge a un punto $Y \in \mathbb{R}^2$, entonces $p(Y_k) = (p \circ g)(Y_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de p y pg , concluimos que $p(Y) = (p \circ g)(Y)$, por lo que $Y \in \mathcal{A}$.

Como \mathcal{A} es cerrado, entonces $\mathcal{A} \cap PT$ es un compacto para cualquier segmento de recta PT , por lo que existe un punto $R \in \mathcal{A} \cap PT$ que es el más cercano a P . Consideremos una sucesión $(R_k)_{k=1}^{\infty} \subset (PR)^\circ$, donde $(PR)^\circ$ representa el interior del segmento PR , que converge a R . Por la elección de R , debe cumplirse que

$$p(R_k) = (p \circ g)(R_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, por la continuidad de p y $p \circ g$, obtendremos que $p(R) = (p \circ g)(R)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, g es una isometría recubridora.

□

El lema anterior nos dice que si $p(P) = p(Q)$, entonces P y Q están en la misma Γ -órbita, donde Γ es el grupo de isometrías recubridoras para p . Por lo tanto, hemos demostrado que dada una superficie localmente euclidiana, completa y conexa por trayectorias S , existe un grupo Γ de isometrías tal

que la función p transforma a todos los puntos de una órbita Γx en el mismo punto de S , de manera que la función p se puede pensar como la proyección natural entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^2/Γ .

Cualquier grupo de isometrías actúa libre y propiamente sobre \mathbb{R}^2 . El caso del grupo de isometrías recubridoras para p también actúa discontinuamente, pues si $\Gamma x \subset \mathbb{R}^2$ es una órbita que tiene un punto de acumulación, es decir, que existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty \subset \Gamma$, tal que $g_n(x) \rightarrow y$, entonces por la continuidad de p , obtenemos que

$$(p \circ g_n)(x) = p(x) \rightarrow p(y),$$

lo cual implica que $(p \circ g_n)(x) = p(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto último contradice la propiedad de isometría local de p alrededor de y . Por lo tanto, Γ actúa de manera discontinua.

Hemos probado entonces que una superficie localmente euclidiana, completa y conexa por trayectorias siempre es de la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde Γ es un grupo de isometrías que actúa discontinuamente. Como ya conocíamos todas las superficies de esta forma, el teorema de Killing-Hopf queda demostrado.

En este capítulo se han clasificado las superficies localmente euclidianas, es decir, las que localmente tienen propiedades similares a las del plano euclidiano. Para estudiar con detalle un par de superficies que no son localmente euclidianas, así como profundizar un poco en el desarrollo del teorema de Killing-Hopf y clasificación de superficies, se recomienda la referencia [19] de la bibliografía.

Capítulo 4

Variedades Diferenciables y Acciones de Grupos Discretos

En este capítulo se pretende hacer un desarrollo similar al del capítulo 2, pero en lugar de construir espacios topológicos a partir de otro espacio dado, se hará con variedades diferenciables. En la sección 4.1 se estudian los conceptos generales de las variedades diferenciables que serán útiles en el desarrollo del capítulo. En la sección 4.2 se estudia el concepto conocido como particiones de la unidad y algunas de sus aplicaciones. Finalmente, en la sección 4.3 se presenta un estudio sobre variedades cociente obtenidas mediante acciones de grupos discretos sobre una variedad dada.

4.1 Variedades Diferenciables

En esta sección estudiaremos los conceptos generales que serán necesarios para el desarrollo de todo el capítulo. Primeramente se estudia lo que es una variedad topológica y una variedad diferenciable, así como algunos conceptos asociados a ellas; después, se hace un desarrollo básico de difeomorfismos para finalmente hacer lo mismo sobre el espacio tangente a una variedad en un punto.

4.1.1 Estructura Diferenciable

El concepto de variedad es una generalización de los conceptos de curva y superficie. Una curva es un espacio topológico que localmente se ve como el espacio euclidiano 1-dimensional, mientras que una superficie es un espacio topológico que localmente se ve como el espacio euclidiano 2-dimensional. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1. Un espacio de Hausdorff M se dice ser una variedad (topológica) de dimensión n si tiene una base numerable y para cada $x \in M$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y es homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^n .

Nótese la similaridad de esta definición con la definición 3.2, la cual es un caso particular de esta última, de manera que cualquier superficie es un ejemplo de variedad de dimensión 2, mientras que cualquier curva es una variedad de dimensión 1.

De la definición 4.1, dada una variedad M de dimensión n , para cada punto $p \in M$ existe al menos un abierto U tal que $p \in U$ y un homeomorfismo ϕ de U sobre un abierto de \mathbb{R}^n . A la pareja (U, ϕ) le llamaremos una *vecindad coordinada* de p , o *carta coordinada*, ya que a cada punto $q \in U$ podemos asignarle las n coordenadas de su imagen bajo ϕ . Si además, p pertenece a otra vecindad coordinada (V, ψ) , entonces podemos definir el homeomorfismo

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

el cual establece un cambio de coordenadas de los puntos de $U \cap V$, de manera que podemos obtener fórmulas para cambio de coordenadas de puntos en la intersección de dos cartas coordinadas. A estas funciones se les llama *funciones de transición*. Notemos además que éstas son funciones entre subconjuntos de \mathbb{R}^n , por lo que podemos considerar la diferenciabilidad de estas funciones. Esto motiva las siguientes definiciones.

Definición 4.2. Diremos que las cartas coordinadas (U, ϕ) y (V, ψ) son C^∞ -compatibles si $U \cap V \neq \emptyset$ implica que las funciones $\phi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$ son funciones de clase C^∞ .

Definición 4.3. Una estructura diferenciable (o estructura C^∞) en una variedad topológica M , es una familia $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartas coordinadas tal que

- (a) La colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta para M .
- (b) Dados $\alpha, \beta \in A$, las vecindades coordinadas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son C^∞ -compatibles.
- (c) Si (V, ψ) es C^∞ -compatible con (U_α, ϕ_α) para todo $\alpha \in A$, entonces (V, ψ) pertenece a \mathcal{U} .

Si la colección \mathcal{U} solamente satisface las condiciones (a) y (b), diremos que \mathcal{U} es un atlas coordinado de M .

Definición 4.4. Una variedad diferenciable (o variedad suave) es una variedad topológica M con una estructura diferenciable en M .

Cabe mencionar que por la definición, estas variedades también reciben el nombre de *variedades C^∞* . De manera análoga se puede definir cartas C^p -compatibles, para $p < \infty$ y variedades C^p .

El intentar dar ejemplos de variedades suaves utilizando solamente la definición anterior puede resultar complicado. El siguiente resultado brinda una manera de mostrar algunos ejemplos sencillos de variedades suaves.

Proposición 4.1. *Sea M un espacio de Hausdorff que posee una base numerable. Si $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ es un atlas coordinado de M , entonces existe una única estructura diferenciable en M que contiene a $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$.*

Demostración

Sea \mathcal{U} el conjunto de cartas coordinadas (U, ϕ) que son C^∞ -compatibles con (V_β, ψ_β) para todo $\beta \in B$. Veamos que \mathcal{U} es una estructura diferenciable en M . Primeramente notemos que las propiedades (a) y (c) de la definición 4.3 son inmediatas, por lo que solamente hace falta verificar la propiedad (b).

Sean $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{U}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Sabemos que las funciones $\phi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$, que dan los cambios de coordenadas en $U \cap V$, son homeomorfismos entre subconjuntos de \mathbb{R}^n , por lo que debemos verificar que sean de clase C^∞ . En efecto, pues si $p \in U \cap V$, entonces $p \in V_\beta$ para alguna β , de manera que $W = V_\beta \cap U \cap V$ es un abierto de M que contiene a p y $\phi(W)$ es un abierto en \mathbb{R}^n que contiene a $x = \phi(p)$. Luego, tenemos la igualdad

$$\psi \circ \phi^{-1} = \psi \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ \phi^{-1}$$

en $\phi(W)$. Como $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{U}$, entonces las funciones $\psi \circ \psi_\beta^{-1}$ y $\psi_\beta \circ \phi^{-1}$ son de clase C^∞ , por lo que $\psi \circ \phi^{-1}$ es de clase C^∞ en toda una vecindad de p . Como p era un punto arbitrario de $\phi(U \cap V)$, concluimos que $\psi \circ \phi^{-1}$ es de clase C^∞ en $\phi(U \cap V)$. Análogamente para $\phi \circ \psi^{-1}$ y por lo tanto, \mathcal{U} es una estructura diferenciable.

La unicidad de \mathcal{U} se sigue de que, por la construcción de \mathcal{U} , cualquier otra estructura diferenciable en M que contenga a $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$, debe contener a \mathcal{U} , pero por la propiedad (c) de la definición 4.3, también debe estar contenida en \mathcal{U} .

□

La proposición anterior establece que no es necesario dar la estructura diferenciable completa para asegurar su existencia, sino que puede determinarse mediante un atlas coordinado. De esta manera, podemos dotar al plano euclidiano \mathbb{E}^2 con una estructura diferenciable, ya que es un espacio métrico y por lo tanto es de Hausdorff. Además, es conocido que posee una base numerable. Luego, la elección de dos ejes coordinados establece una isometría $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, por lo que $\{(\mathbb{R}^2, \phi)\}$ es un atlas coordinado para \mathbb{E}^2 . Por la proposición anterior, este atlas determina una estructura diferenciable y concluimos que \mathbb{E}^2 es una variedad suave. Un argumento similar nos permite demostrar que el espacio euclidiano de dimensión n es una variedad suave. Esta es la razón por la que el espacio euclidiano se le asocia siempre con \mathbb{R}^n y en ocasiones no se hace mención de la diferencia conceptual entre ellos.

Usando la misma proposición, podemos probar que para $n \geq 2$,

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

es una variedad diferenciable, considerándolo con la topología relativa de \mathbb{R}^n , por lo que es inmediato que es de Hausdorff y tiene una base numerable. Ahora consideremos, para cada $i = 1, \dots, n$, los conjuntos

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : x_i < 0\},$$

de manera que la colección $\mathcal{U} = \{U_i^+, U_i^-\}_{i=1}^n$ es una cubierta para \mathbb{S}^{n-1} . Luego, las proyecciones $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, definidas de la siguiente manera:

$$\phi_1^\pm(x_1, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$\phi_2^\pm(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_3, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\phi_n^\pm(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

para cada $i = 1, \dots, n$, son homeomorfismos de U_i sobre el conjunto $\{(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} | y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 < 1\}$. Por lo tanto, \mathbb{S}^{n-1} es una variedad de dimensión $n - 1$ y (U_i^\pm, ϕ_i^\pm) es una carta coordenada para $i = 1, \dots, n$. Ahora veamos que las funciones de transición son de clase C^∞ . En efecto, notemos que

$$\phi_1^+ \circ (\phi_2^-)^{-1}(x_1, x_3, \dots, x_n) = (-\sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2 - \dots - x_n^2}, x_3, \dots, x_n),$$

la cual es una función C^∞ en todo su dominio, que es la bola unitaria de dimensión $n - 1$. De manera similar se demuestra que las otras combinaciones son C^∞ , cambiando algunas componentes y algunos signos. Por lo tanto, \mathbb{S}^{n-1} es una variedad suave para $n \geq 2$. En particular, la circunferencia unitaria en el plano o la esfera unitaria en el espacio tridimensional son variedades suaves.

En general, es posible encontrar más de una variedad diferenciable distintas, de manera que la variedad topológica asociada a cada una de ellas sea la misma. Esto es, que la única diferencia entre ellas es la estructura diferenciable. Un ejemplo es $M = \mathbb{R}$, que es una variedad topológica de dimensión 1. Una estructura diferenciable en M es la que define el atlas $\{(M, i)\}$, donde i es la función identidad en \mathbb{R} . Otra estructura diferenciable en M es la que define el atlas $\{(M, f)\}$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que para toda $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$. Es fácil notar que (M, i) y (M, f) no son C^∞ -compatibles, por lo que podemos concluir que las estructuras diferenciables son distintas.

Ahora, si M es una variedad diferenciable y $U \subset M$ un abierto, entonces la colección

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha \cap U, \phi_\alpha|_U)\}_{\alpha \in A},$$

donde $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es la estructura diferenciable en M , es una estructura diferenciable en U . En efecto, pues $\{U_\alpha \cap U\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta para U y además, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, con $\alpha, \beta \in A$,

entonces las funciones

$$\phi_\alpha|_U \circ \phi_\beta^{-1}|_U, \quad \phi_\beta|_U \circ \phi_\alpha^{-1}|_U$$

son de clase C^∞ , porque $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ y $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ lo son. Por lo tanto, U es una variedad diferenciable, llamada *subvariedad abierta de M* .

Otro concepto asociado a las variedades diferenciables es el de orientabilidad, el cual generaliza el concepto de orientabilidad que se conocía para superficies en \mathbb{R}^3 .

Definición 4.5. Sea M una variedad diferenciable. Diremos que M es orientable si admite un atlas coordenado $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ con la propiedad de que si $\alpha, \beta \in A$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces el jacobiano de la función $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ es positivo.

Existen resultados que relacionan la orientabilidad de una variedad con su grupo fundamental, el cual definimos en la sección 2.3. En este trabajo no presentamos resultados de este tipo, pero el lector interesado puede encontrar un estudio sobre esto en la referencia [5] de la bibliografía. Otra definición de orientabilidad, así como su equivalencia con la que hemos presentado, puede encontrarse en las referencias [2] y [20] de la bibliografía.

Si una variedad M no es orientable, diremos que es *no orientable*. Si M es una variedad orientable, un atlas coordenado como el descrito en la definición 4.5 se llama un *atlas orientado en M* y un atlas orientado maximal en M es una *orientación en M* . Diremos también que dos atlas orientados $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ determinan la misma orientación si $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ es de nuevo un atlas orientado en M .

Se puede demostrar, usando un argumento similar al de la proposición 4.1 que un atlas orientado determina una orientación. Por esta razón, en muchas ocasiones solamente se hace referencia a la orientabilidad de una variedad, ya que al considerar un atlas orientado se dota automáticamente a dicha variedad con una orientación.

Claramente \mathbb{R}^n (el espacio euclidiano n -dimensional) es un ejemplo de variedad orientable. Un ejemplo menos trivial es \mathbb{S}^n , para $n \geq 2$. Cuando probamos que era una variedad diferenciable, se consideró un atlas con $2n$ elementos. Ahora consideremos el atlas $\{(U_N, \tilde{\phi}_N), (U_S, \phi_S)\}$, donde $U_N = \mathbb{S}^n - (0, 0, \dots, 0, -1)$, $U_S = \mathbb{S}^n - (0, 0, \dots, 0, 1)$ y

$$\tilde{\phi}_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{1}{1 + x_{n+1}} \right) (-x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{1}{1 - x_{n+1}} \right) (x_1, \dots, x_n).$$

Se puede verificar mediante algunos cálculos que este es un atlas orientado para \mathbb{S}^n , por lo que concluimos que \mathbb{S}^n es una variedad orientable. La función $\tilde{\phi}_N$ resulta de cambiar el signo a la primera componente de la función ϕ_N . El atlas $\{(U_N, \tilde{\phi}_N), (U_S, \phi_S)\}$ también es un atlas coordenado para \mathbb{S}^n , pero no es un atlas orientado. Las funciones $\tilde{\phi}_N$ y ϕ_S se llaman funciones de la *proyección estereográfica*.

La variedad \mathbb{S}^1 también es una variedad orientable y el atlas orientado es el análogo al anterior. Sean $U_N = \mathbb{S}^1 - (0, -1)$, $U_S = \mathbb{S}^1 - (0, 1)$ y las funciones $\tilde{\phi}_N$ y ϕ_S dadas por:

$$\tilde{\phi}_N(x_1, x_2) = \frac{-x_1}{1 + x_2},$$

$$\phi_S(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_2}.$$

De manera similar al caso $n \geq 2$ se puede verificar que $\{(U_N, \tilde{\phi}_N), (U_S, \phi_S)\}$ es un atlas orientado para \mathbb{S}^1 . Por lo tanto, podemos concluir que \mathbb{S}^n es un atlas orientado para todo $n \in \mathbb{N}$. En la sección 4.3 veremos más ejemplos de variedades orientables, así como algunos ejemplos de variedades no orientables.

4.1.2 Funciones Diferenciables y Difeomorfismos

Primeramente definiremos el concepto de función diferenciable, definida en una variedad diferenciable y con valores reales, para posteriormente extenderlo a funciones que tomen valores en otra variedad.

Definición 4.6. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y $W \subset M$ un abierto. Diremos que la función $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ (en W) si cada $p \in W$ pertenece a una carta coordenada (U, ϕ) tal que $f \circ \phi^{-1}$ es de clase C^∞ en $\phi(W \cap U)$.

También pueden definirse funciones C^p , con $p < \infty$. En este trabajo solamente consideraremos funciones C^∞ , por lo que en ocasiones nos referiremos a ellas como funciones diferenciables. Un ejemplo funciones diferenciables son las que dan la i -ésima coordenada de un punto, para $i = 1, \dots, n$, de manera que dada una carta coordenada (U, ϕ) , para cada punto $q \in U$, definimos la función $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$x_i(q) = (\pi_i \circ \phi)(q),$$

donde π_i da la i -ésima componente de cualquier punto en \mathbb{R}^n . Claramente la función x_i es C^∞ para cada $i = 1, \dots, n$, pues la función π_i lo es.

Como consecuencia de la definición 4.6, tenemos que la suma y el producto de dos funciones C^∞ (cuando estén bien definidos) es de nuevo una función C^∞ .

Definición 4.7. Sean M y N variedades suaves de dimensiones n y m , respectivamente, y $W \subset M$ un abierto. Diremos que la función $F : W \rightarrow N$ es una función C^∞ si para cada $p \in W$ existe una carta coordenada (U, ϕ) en M y una (V, ψ) en N , tales que U es vecindad de p , V es vecindad de $F(p)$, $F(U) \subset V$ y la función

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

es de clase C^∞ .

La idea de esta última definición es que, como una variedad puede pensarse localmente como un espacio euclidiano, una función definida en una variedad y que tome valores en otra variedad puede pensarse localmente como una función entre espacios euclidianos.

Es claro que si f es una función C^∞ en un abierto W , entonces f es continua. Además, si $V \subset W$, entonces la restricción $f|_V$ también es una función C^∞ . De la misma manera, si W es la unión de conjuntos abiertos donde f es C^∞ , entonces f es C^∞ en W . También se puede verificar fácilmente que la composición de funciones C^∞ es una función C^∞ . Estas propiedades serán de utilidad en el desarrollo de este capítulo.

Para finalizar esta sección, introduciremos el concepto de difeomorfismo. En espacios topológicos se tiene el de homeomorfismo, el cual permite establecer una relación de equivalencia entre ellos. La siguiente definición permitirá hacer lo mismo para variedades.

Definición 4.8. Sean M y N variedades diferenciables. Una función $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si es un homeomorfismo C^∞ y además, F^{-1} es C^∞ .

De las definiciones 4.7 y 4.8, es inmediato que dada cualquier carta coordenada (U, ϕ) en una variedad M , la función $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es un difeomorfismo. En el desarrollo de este capítulo estudiaremos más ejemplos de difeomorfismos.

Ahora podemos definir la relación \sim en el conjunto de variedades suaves, de la siguiente manera: $M \sim N$ si existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$.

Proposición 4.2. La relación \sim definida es una relación de equivalencia.

Demostración

Si M es una variedad suave, es claro que $M \sim M$, tomando a la función F de la definición como la función identidad. Además, si $M \sim N$, entonces existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$, lo que implica que $F^{-1} : N \rightarrow M$ es una función C^∞ y por lo tanto, también es un difeomorfismo. De aquí se sigue que $N \sim M$.

Por último, supongamos que $M \sim N$ y $N \sim S$. Es decir, que existen difeomorfismos $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow S$. Como F y G son homeomorfismos, entonces $G \circ F$ es homeomorfismo. Más aún, son funciones C^∞ , por lo que $G \circ F$ es C^∞ . Además, F^{-1} y G^{-1} son C^∞ , por lo que $F^{-1} \circ G^{-1} = (G \circ F)^{-1}$ también lo es. Podemos concluir entonces que $G \circ F : M \rightarrow S$ es un difeomorfismo, lo que concluye la demostración.

□

Cuando exista un difeomorfismo entre dos variedades, diremos que son difeomorfas. La proposición anterior justifica, entre otras cosas, que cuando hagamos referencia a dos variedades difeomorfas M y N , no es importante si el difeomorfismo tiene como dominio a M ó a N . Además, nos permite hacer una clasificación de variedades diferenciables mediante clases de equivalencia, de la misma manera que se hacía para espacios topológicos.

Es importante notar la relación que hay entre los conceptos de difeomorfismo y homeomorfismo. Por un lado, podemos decir que dos variedades diferenciables son equivalentes si son difeomorfas, mientras que para espacios topológicos, si son homeomorfos. Por otra parte, dos variedades no necesitan ser difeomorfas para ser homeomorfas. El primer ejemplo de esto fue encontrado por John Milnor, quien le asignó a \mathbb{S}^7 más de una estructura diferenciable, de manera que las variedades resultantes no eran difeomorfas. Sin embargo, se puede demostrar que esto no es posible con variedades de dimensión 1, 2 ó 3. Es decir, que si dos variedades de la misma dimensión menor que 4 son homeomorfas, entonces necesariamente son difeomorfas.

Al final de la sección anterior se construyó una pareja de variedades diferenciables de dimensión 1, tales que la variedad topológica asociada era la misma, pero la estructura diferenciable era distinta. El comentario anterior muestra que en realidad esas dos variedades son difeomorfas, por lo que no debe confundirse el ser difeomorfas a ser la misma variedad diferenciable, tal como pasaba para espacios topológicos.

Ahora estudiaremos una clase de difeomorfismos, de una variedad en sí misma, que resultan ser de gran importancia al trabajar con variedades orientables. Dado un atlas orientado $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ para la variedad M y un difeomorfismo $F : M \rightarrow M$, podemos construir un nuevo atlas para M :

$$\{(F(U_\alpha), \phi_\alpha \circ F^{-1})\}_{\alpha \in A}.$$

Este resulta ser un atlas orientado, pues si $F(U_\alpha) \cap F(U_\beta) \neq \emptyset$, entonces $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, por lo que las funciones

$$(\phi_\alpha \circ F^{-1}) \circ (\phi_\beta \circ F^{-1})^{-1} = (\phi_\alpha \circ F^{-1}) \circ (F \circ \phi_\beta^{-1}) = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1},$$

$$(\phi_\beta \circ F^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ F^{-1})^{-1} = (\phi_\beta \circ F^{-1}) \circ (F \circ \phi_\alpha^{-1}) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1},$$

tienen jacobiano positivo. Sin embargo, puede ser que no determine la misma orientación que el atlas original en M . Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.9. Sean M una variedad orientable, $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas orientado en M y $F : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Diremos que F preserva la orientación si $\mathcal{U}' = \{(F(U_\alpha), \phi_\alpha \circ F^{-1})\}_{\alpha \in A}$ y \mathcal{U} determinan la misma orientación.

En ocasiones, utilizar la definición anterior puede resultar difícil para comprobar si un difeomorfismo dado preserva la orientación o no. La siguiente proposición nos da un criterio muy útil para el caso de difeomorfismos de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

Proposición 4.3. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo. Entonces F preserva la orientación si y sólo si el jacobiano de F es positivo en todo \mathbb{R}^n .

Demostración

Supongamos que $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas orientado para \mathbb{R}^n . Sabemos que cada una de las funciones $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$ debe ser de clase C^∞ y su inversa también. Por lo tanto, el jacobiano de ϕ_α no puede valer 0 en ningún punto de U_α . Más aún, por la regla de la cadena, el signo del jacobiano de ϕ_α es el mismo para todo $\alpha \in A$, pues

$$\phi_{\alpha_1} \circ \phi_{\alpha_2}^{-1}$$

tiene jacobiano positivo para cada pareja $\alpha_1, \alpha_2 \in A$.

Por otro lado, F preserva la orientación si y sólo si para cada $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, las funciones

$$(\phi_{\alpha_1} \circ F^{-1}) \circ \phi_{\alpha_2}^{-1}, \quad \phi_{\alpha_2} \circ (F \circ \phi_{\alpha_1}^{-1})$$

tienen jacobiano positivo. Como los jacobianos de ϕ_{α_1} y ϕ_{α_2} tienen el mismo signo, entonces F preserva la orientación si y sólo si tiene jacobiano positivo en al menos un abierto, pero como $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta para \mathbb{R}^n , en realidad es en todo \mathbb{R}^n

□

Esta proposición nos ayuda a determinar si un difeomorfismo de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n preserva o no la orientación. Por ejemplo, consideremos el difeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $F(x, y) = (x + 1, -y)$. El jacobiano de F en todo punto es

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

por lo que podemos concluir que F no preserva la orientación. Geométricamente, esto significa que si se recorre un objeto en el sentido de las manecillas del reloj, al hacerlo sobre su imagen bajo F se haría en el otro sentido. Esto se debe a que F es la composición de una traslación y una reflexión. La reflexión es la que hace el efecto antes mencionado.

Consideremos ahora el difeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $F(x, y) = (x, y + 1)$. En este caso, podemos notar que el jacobiano de F en todo punto es

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

por lo que podemos concluir que F sí preserva la orientación. La proposición 4.3 será de gran utilidad al final de la sección 4.3.

4.1.3 Inmersiones, Encajes y Subvariedades

Una subvariedad es un subconjunto de una variedad M que es a su vez una variedad. Sin embargo, la topología o la estructura diferenciable de la subvariedad no tiene por qué coincidir con las de la

variedad M , lo que significa que pueden existir distintos tipos de subvariedades como veremos a lo largo de esta sección.

Sean M y N variedades suaves de dimensiones n y m respectivamente y $F : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Consideremos un punto $p \in M$ y $(U, \phi), (V, \psi)$ cartas coordenadas tales que U es vecindad de p , V es vecindad de $F(p)$ y $F(U) \subset V$. En este caso, podemos expresar F en términos de coordenadas locales, es decir, existe una función asociada

$$\widehat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V).$$

Esta es una función entre abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , por lo que es de la forma

$$\widehat{F}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

donde f_1, \dots, f_m son funciones que toman valores reales. Con esta notación, podemos definir el rango de la función F .

Definición 4.10. El rango de F en p se define como el rango de la matriz jacobiana de \widehat{F} en el punto $\phi(p)$. Esto es, el rango de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\phi(p)}.$$

A esta matriz se le llama matriz jacobiana asociada a F .

El rango de una función diferenciable entre dos variedades puede ser de gran utilidad para estudiar propiedades de alguna de ellas. Por ejemplo, se puede demostrar que F es difeomorfismo si y sólo si $m = n$ y el rango de F es igual a n (ó a m). Una demostración de este hecho puede encontrarse en la referencia [2] de la bibliografía.

En nuestro estudio, el rango de una función nos ayudará a construir nuevas variedades a partir de otras que ya conocíamos. Para esto, el concepto de *inmersión* será de utilidad.

Definición 4.11. Sean M y N variedades suaves, de dimensiones n y m respectivamente y $F : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Diremos que F es una *inmersión* si el rango de F es constante igual a n .

En el caso en que F sea una *inmersión inyectiva*, existe una correspondencia 1-1 entre N y $F(N) \subset M$, la cual puede usarse para dotar a $F(N)$ con una topología y una estructura diferenciable, de manera que $F(N)$ sea una variedad diferenciable, la cual se llama *subvariedad inmersa en M* .

Como un primer ejemplo, consideremos la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Claramente, F es diferenciable e inyectiva. Además, la matriz jacobiana en este caso es

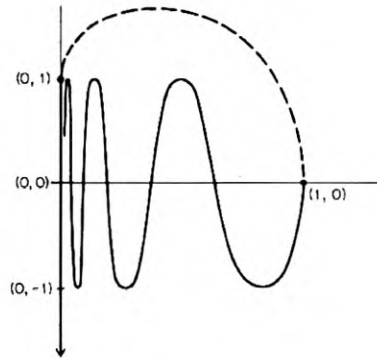
$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{cos} t \\ 1 \end{bmatrix},$$

que claramente tiene rango 1 para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, podemos concluir que la imagen $F(\mathbb{R})$ es una subvariedad inmersa en \mathbb{R}^3 . No es difícil visualizar esta variedad como una hélice cilíndrica. De esta misma manera se puede probar que diferentes curvas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 son variedades diferenciables de dimensión 1 (como subvariedades inmersas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3).

En general, la topología y la estructura diferenciable de una subvariedad inmersa en M no coincide con las de M . Por ejemplo, consideremos la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente manera:

$$F(t) = \begin{cases} (0, t+2) & \text{si } -\infty < t \leq -1 \\ (\frac{1}{t}, \operatorname{sen} \pi t) & \text{si } 1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

y para $-1 \leq t \leq 1$, alguna curva suave que conecte los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$, como muestra la figura.



Esta es una inmersión inyectiva, por lo que $F(\mathbb{R})$ es una subvariedad inmersa en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, la topología con la que se dotó a $F(\mathbb{R})$ para ser considerada variedad diferenciable no puede coincidir con la topología relativa de \mathbb{R}^2 , pues $F(\mathbb{R})$ no es localmente conexo con esta topología, pero \mathbb{R} sí lo es.

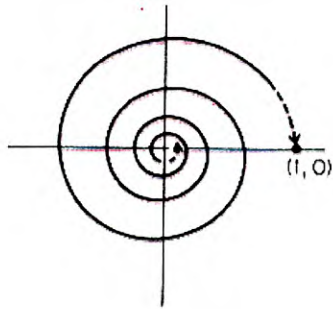
El ejemplo anterior muestra que el concepto de subvariedad inmersa puede resultar poco útil en algunos casos, ya que es deseable considerar a una subvariedad como subespacio topológico de la variedad M . Es decir, aprovechar la estructura que ya se tiene en M . Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.12. Sean M y N variedades diferenciables y $F : M \rightarrow N$ una inmersión inyectiva. Si F es un homeomorfismo sobre $F(M) \subset N$, con la topología relativa a N , diremos que F es un encaje (o encaje C^∞). En este caso, $F(M)$ se llama subvariedad encajada en N .

El primer ejemplo de inmersión que presentamos es también un ejemplo de encaje, por lo que la hélice cilíndrica es también una subvariedad encajada en \mathbb{R}^3 . Otro ejemplo es la función $F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = ((1/t) \cos 2\pi t, (1/t) \sin 2\pi t)$. Esta es una función inyectiva, continua y con inversa continua, por lo que es homeomorfismo sobre su imagen. Además, la matriz jacobiana es

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{t^2} \cos 2\pi t - \frac{2\pi}{t} \sin 2\pi t \\ -\frac{1}{t^2} \sin 2\pi t + \frac{2\pi}{t} \cos 2\pi t \end{bmatrix},$$

de donde podemos concluir que F tiene rango constante igual a 1. Esta variedad se puede visualizar como una espiral, como la de la siguiente figura.

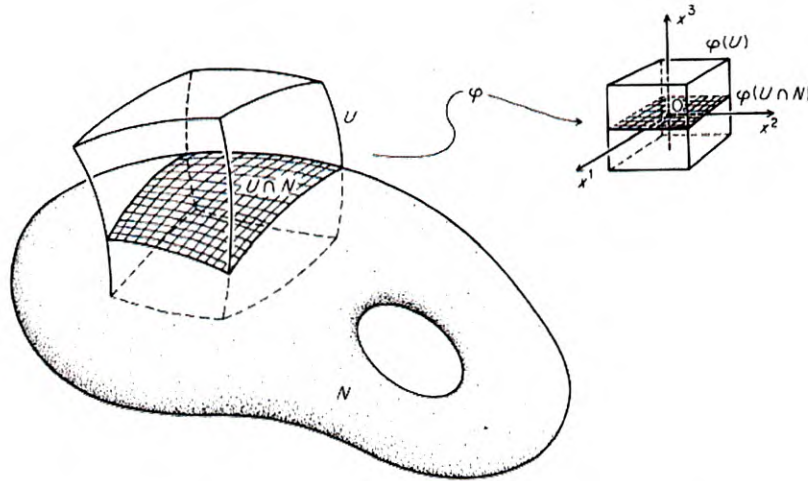


Las subvariedades encajadas en una variedad M tienen la propiedad de ser subespacios topológicos de M . Sin embargo, aún siguen teniendo la desventaja de que la estructura diferenciable de la subvariedad puede ser muy distinta a la de M . Para lograr que la estructura diferenciable en la subvariedad se obtenga directamente de la de M , consideraremos la siguiente definición.

Definición 4.13. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y $N \subset M$. Se dice que N tiene la propiedad de subvariedad de dimensión $m \leq n$ si para cada $p \in N$ existe una vecindad coordenada (U, ϕ) en M tal que

1. $\phi(p) = (0, 0, \dots, 0)$.
2. $\phi(U)$ es un cubo $C_r^n(0)$ abierto con centro en 0 y lado $r > 0$.
3. $\phi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_n) \in C_r^n(0) : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$.

Es claro que la propiedad 3 de la definición anterior puede cambiarse porque las primeras (en lugar de las últimas) $n - m$ componentes sean iguales a 0 (por ejemplo, renombrando las coordenadas). La propiedad de subvariedad de dimensión n puede ilustrarse mediante la siguiente figura, donde $M = \mathbb{R}^3$:



En el caso en el que N es un subespacio topológico de M , las vecindades coordinadas como las descritas en la definición 4.13 generan una estructura diferenciable en N , ya que éstas forman un atlas para N . Esto nos da una nueva clasificación de subvariedades.

Definición 4.14. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y N un subespacio topológico de M . Si N tiene la propiedad de subvariedad de dimensión $m \leq n$, entonces recibe el nombre de subvariedad regular (con la estructura diferenciable anteriormente descrita).

El siguiente teorema nos da una manera sencilla de construir variedades diferenciables como subvariedades regulares.

Teorema 4.1. Sean M y N variedades suaves de dimensiones n y m respectivamente y $F : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Supongamos que el rango de F es constante igual a k en M . Entonces para cada punto $q \in F(M)$, $F^{-1}(\{q\})$ es una subvariedad regular cerrada de M de dimensión $n - k$.

Demostración

Es claro que $A = F^{-1}(\{q\})$ es cerrado, puesto que $\{q\}$ lo es. Sea $p \in A$ y consideremos (U, ϕ) , (V, ψ) vecindades coordinadas de p y q , respectivamente, tales que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$ y que $\phi(U) = C_r^n(0)$, $\psi(V) = C_r^m(0)$ para algún $r > 0$. Esto puede hacerse ya que si no fuera de este tipo, se toma una vecindad lo suficientemente pequeña para que pueda transformarse suavemente en un abierto de esa forma.

Como F es de rango constante igual a k , entonces la función $\widehat{F} = \psi \circ F|_U \circ \phi^{-1}$ tiene rango constante igual a k . Del cálculo sabemos que las funciones ϕ y ψ pueden escogerse de manera que $\widehat{F}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Para una demostración de este hecho puede consultarse la referencia [2] de la bibliografía. Ahora, notemos que

$$\phi(U \cap A) = \phi(\{x \in U : F(x) = q\}) = \phi(\{x \in U : \psi \circ F(x) = 0 \in \mathbb{R}^m\})$$

$$= \{(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) : (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \in C_r^n(0)\}.$$

Por lo tanto, A satisface la propiedad de subvariedad de dimensión $n - k$, lo que concluye la demostración. □

Cabe mencionar que la estrategia que se usó al inicio de esta demostración, de tomar cartas coordenadas (U, ϕ) tal que $\phi(U)$ fuera un cubo con centro en 0, es muy utilizada y que también puede realizarse tomando bolas en lugar de cubos. En particular, usaremos esta estrategia nuevamente en la sección 4.2.

El teorema 4.1 garantiza que las curvas y superficies de nivel son variedades diferenciables, como subvariedades regulares de \mathbb{R}^n para algún n . Por ejemplo, la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} es $F^{-1}(\{1\})$ para $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

4.1.4 Haz Tangente

Un concepto que será de vital importancia en el siguiente capítulo es el de espacio tangente a una variedad M en un punto p , así como el de haz tangente. Antes de dar la definición recordemos que dada una curva o una superficie en \mathbb{R}^3 se puede definir su espacio tangente como una recta (en el caso de curvas) o un plano (en el caso de superficies) tangente.

Supongamos que $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una curva diferenciable de la forma

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (-1, 1),$$

y tal que $\alpha(0) = p$. El vector $v = \alpha'(0) = (x_1'(0), \dots, x_n'(0)) \in \mathbb{R}^n$ es un vector tangente a la curva α en el punto p . Ahora consideremos una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es una vecindad abierta de p . Si restringimos la función f a la curva α , podemos expresar la derivada direccional con respecto a v por medio de

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \Big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^n x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Esta última expresión nos dice que la derivada direccional con respecto a v se puede pensar como un operador que actúa en las funciones diferenciables y que depende solamente de v . Generalizaremos esta idea a variedades.

Sea M una variedad suave. Una función diferenciable $\alpha : (-1, 1) \rightarrow M$ se llama curva (diferenciable) parametrizada en M . Cabe mencionar que en el resto del trabajo solamente consideramos curvas parametrizadas, por lo que nos referiremos a ellas simplemente como curvas. Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$ y sea

$$\mathcal{D} = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable en } p\}.$$

El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es un operador $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Es claro que la definición anterior puede hacerse para cualquier t , pero por simplicidad utilizaremos $t = 0$ en esta sección.

Definición 4.15. Un vector tangente a M en p es el vector tangente en $t = 0$ para alguna curva $\alpha : (-1, 1) \rightarrow M$, tal que $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se llama espacio tangente a M en p , el cual se denotará por T_pM .

Notemos que un vector tangente a una curva α tal que $\alpha(t) = p$ para $t \neq 0$ es también un vector tangente a M , ya que se puede reparametrizar la curva. Nuevamente, por simplicidad utilizaremos vectores tangentes a curvas tales que $\alpha(0) = p$.

Sean $p \in M$ y (U, ϕ) es una vecindad coordinada de p tal que $\phi(p) = 0$. La elección de esta carta siempre es posible, ya que si $\phi(p) \neq 0$, puede componerse ϕ con una traslación, por ejemplo. Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{\alpha} &= \phi \circ \alpha : (-1, 1) \rightarrow \phi(U). \end{aligned}$$

Podemos notar que para f y α dados, \tilde{f} y $\tilde{\alpha}$ quedan determinados de manera única y viceversa. Luego, la curva α puede pensarse localmente como una curva $\tilde{\alpha}$ en \mathbb{R}^n , mientras que la función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ también puede pensarse localmente como una función $\tilde{f} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Más aún, con las funciones $\tilde{\alpha}$ y \tilde{f} definidas de tal manera, tenemos que $f \circ \alpha = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}$, por lo que

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \tilde{\alpha}) \right|_{t=0} = \tilde{\alpha}'(0)\tilde{f}.$$

Supongamos ahora que $\tilde{\alpha}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Entonces

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) \tilde{f},$$

donde el subíndice 0 significa evaluar en 0. Con estas observaciones podemos probar la siguiente proposición.

Proposición 4.4. Sean M una variedad diferenciable (de dimensión n) y $p \in M$. Entonces el conjunto T_pM tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones. Además, $\dim T_pM = n$.

Demostración

Como sabíamos que f queda determinada por \tilde{f} y viceversa, entonces una acción sobre \tilde{f} puede pensarse como una acción sobre f . Por la forma que tienen estas acciones (combinaciones lineales

de operadores de la forma $\frac{\partial}{\partial x_i}$, es claro que $T_p M$ es cerrado bajo suma y multiplicación por escalar y que existe un neutro aditivo.

Por otro lado, notemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \tilde{f} = \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right|_{t=0} \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

de donde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ es el vector tangente en p a la curva α tal que

$$\tilde{\alpha}(x_i) = (0, 0, \dots, x_i, 0, \dots, 0), \quad x_i \in (-1, 1).$$

Estas curvas reciben el nombre de *curvas coordenadas*. Podemos notar que todos los elementos de $T_p M$ son generados por

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0 \right\}.$$

Por lo tanto, una vez elegida la vecindad coordenada (U, ϕ) de p , se tiene una base de $T_p M$ asociada a (U, ϕ) . Como esta base tiene n elementos, concluimos que la dimensión de $T_p M$ es n .

□

Por la proposición anterior, podemos pensar en el espacio tangente a una variedad de dimensión 1 en cualquier punto como una recta tangente, en el espacio tangente a una variedad de dimensión 2 en cualquier punto como un plano tangente, etc. Esto coincide con lo que conocíamos, ya que una curva diferenciable siempre tiene una recta tangente en cada punto, mientras que una superficie tiene un plano tangente.

El concepto de espacio tangente también nos permite definir el diferencial de una función. La siguiente proposición nos da una idea de cómo definirlo.

Proposición 4.5. Sean M y N variedades suaves de dimensiones n y m respectivamente y $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$, sea $\alpha : (-1, 1) \rightarrow M$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Definimos la curva $\beta : (-1, 1) \rightarrow N$ como $\beta = f \circ \alpha$. Entonces la función $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ dada por $df_p(v) = \beta'(0)$ es una transformación lineal que no depende de la elección de α .

Demostración

Sean (U, ϕ) y (V, ψ) vecindades coordenadas de p y $f(p)$, respectivamente. Podemos entonces expresar a f en coordenadas locales, mediante la función $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$, expresada de la siguiente manera:

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Si además expresamos a la curva en coordenadas locales como $(\phi \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, entonces

$$(\psi \circ \beta)(t) = (y_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), \dots, x_n(t))).$$

De esta última expresión es claro que $\beta'(0) = \sum_{j=1}^m b'_j (\frac{\partial}{\partial x_j})_0$, donde

$$b'_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} x'_i(0).$$

Como $x'_i(0)$ son las componentes de v , esta última expresión prueba que $\beta'(0)$ no depende la elección de α . Más aún, podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$df_p(v) = \beta'(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1(0) \\ \vdots \\ x'_n(0) \end{bmatrix},$$

de donde es claro que df_p es una transformación lineal. □

La función df_p de la proposición anterior recibe el nombre de *diferencial de f en p* . Es claro también que si f es un difeomorfismo, entonces df_p es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Definimos el conjunto TM de la siguiente manera:

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{(p, X_p) : X_p \in T_p M\}.$$

Notemos que TM puede pensarse como la unión de todos los espacios tangentes a M en algún punto. Dotaremos al conjunto TM , llamado *haz tangente de M* , con una topología y una estructura diferenciable, de tal manera que resultará ser una variedad suave de dimensión $2n$.

Sea $\pi : TM \rightarrow M$ la función tal que $\pi(p, X_p) = p$ para todo $(p, X_p) \in TM$. Consideremos un punto $p \in M$ y una vecindad coordenada (U, ϕ) en M . Recordemos que hay una base canónica de $T_p M$ asociada a (U, ϕ) , a la cual llamaremos $\{E_{1p}, \dots, E_{np}\}$. Luego, cualquier elemento X_p de $T_p M$ puede ser expresado en la forma

$$X_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ip}.$$

Definimos la función $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\phi}((p, X_p)) = (\phi(p); \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

donde los α_i 's son las coordenadas de X_p respecto a la base asociada a (U, ϕ) de $T_p M$. Es claro entonces que la imagen de $\pi^{-1}(U)$ bajo $\tilde{\phi}$ es $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, que es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{2n} . Además, la función $\tilde{\phi}$ es biyectiva sobre su imagen, pues su inversa es

$$\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (q, \alpha_1 E_{1q} + \cdots + \alpha_n E_{nq}),$$

donde $q = \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$.

Dada una colección numerable de cartas coordenadas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ en M , tal que $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cubierta de M , veamos que el conjunto

$$\mathcal{V} = \bigcup_W \{\tilde{\phi}_i^{-1}(W)\}_{i=1}^{\infty}$$

es la base para una topología en TM , donde la unión se toma sobre todos los abiertos W en \mathbb{R}^{2n} . Para probar esto supongamos que $\tilde{\phi}_i^{-1}(W) \cap \tilde{\phi}_j^{-1}(W') \neq \emptyset$. Por las fórmulas que tenemos para $\tilde{\phi}_i$ y $\tilde{\phi}_j^{-1}$, sabemos que $\tilde{\phi}_i \circ \tilde{\phi}_j^{-1}$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^{2n} . De aquí se sigue que

$$\tilde{\phi}_i^{-1}(W) \cap \tilde{\phi}_j^{-1}(W') = \tilde{\phi}_i^{-1}(W \cap (\tilde{\phi}_i \circ \tilde{\phi}_j^{-1})(W')),$$

de donde $\tilde{\phi}_i^{-1}(W) \cap \tilde{\phi}_j^{-1}(W')$ es de la forma $\tilde{\phi}_i^{-1}(W'')$, donde W'' es un abierto en \mathbb{R}^n . Por lo tanto, podemos concluir que \mathcal{V} es base de una topología en TM .

Con la topología generada por \mathcal{V} , TM es un espacio de Hausdorff. En efecto, si $(p, X_p) \neq (q, X_q)$, o bien $p \neq q$ ó $X_p \neq X_q$. En el caso que $p \neq q$, existen (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) vecindades coordenadas ajenas de p y q . Luego, $\tilde{\phi}_i^{-1}(\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n)$ y $\tilde{\phi}_j^{-1}(\phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^n)$ son básicos ajenos en TM que contienen a (p, X_p) y (q, X_q) , respectivamente. En el caso en el que $p = q$, necesariamente $X_p \neq X_q$, por lo que existen vecindades ajenas A y B de los vectores de coordenadas de X_p y X_q , en \mathbb{R}^n . Luego, si (U_j, ϕ_j) es una vecindad coordenada de p , entonces $\tilde{\phi}_j^{-1}(\phi_j(U_j) \times A)$ y $\tilde{\phi}_j^{-1}(\phi_j(U_j) \times B)$ son básicos ajenos en TM que contienen a (p, X_p) y (q, X_q) , respectivamente.

Notemos también que las funciones $\tilde{\phi}_i$ son homeomorfismos sobre su imagen. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $\tilde{\phi}_i(\pi^{-1}(U_i))$ es un abierto de \mathbb{R}^{2n} , por lo que tiene una base numerable, al igual que $\pi^{-1}(U_i)$. Sea \mathcal{W}_i la base numerable para $\pi^{-1}(U_i)$. Luego,

$$\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{W}_i$$

es una base numerable para TM . Como ya sabíamos que las funciones de transición eran C^∞ , concluimos entonces que $\{(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\phi}_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es un atlas para TM , el cual define una estructura diferenciable.

Es importante notar que con esta estructura diferenciable, se le asignan las coordenadas locales de manera natural a los elementos de TM . De la definición de diferencial de una función, es claro que si M, N son variedades diferenciables, $f : M \rightarrow N$ es una función C^∞ y $p \in M$, entonces la diferencial de f en p es una función C^∞ (como una función entre subconjuntos de TM y TN).

4.2 Particiones de la Unidad

En esta sección estudiaremos el concepto de particiones de la unidad, el cual permite demostrar muchas propiedades de las variedades diferenciables. Primeramente se presenta la definición y la

demostración de la existencia de particiones de la unidad. Posteriormente se estudian un par de aplicaciones de este concepto. Para estudiar más aplicaciones de las particiones de la unidad se recomiendan las referencias [2] y [10] de la bibliografía.

Recordemos la definición del soporte de una función y de una colección de conjuntos localmente finita.

Definición 4.16. Sean X un espacio topológico y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. El soporte de f es el conjunto

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}},$$

donde la línea en la parte superior del conjunto representa la cerradura de éste.

Definición 4.17. Sean X un espacio topológico y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de subconjuntos de X . Diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $\{\alpha \in A | U_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito.

Notemos que estas definiciones son válidas para espacios topológicos en general y por lo tanto, también para variedades. Habiendo definido estos dos conceptos, podemos definir lo que es una partición de la unidad en una variedad diferenciable.

Definición 4.18. Sea M una variedad diferenciable. Una partición de la unidad C^∞ en M es una colección de funciones C^∞ ,

$$\{f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A},$$

que cumpla las siguientes propiedades:

1. $f_\alpha \geq 0$ para cada $\alpha \in A$.
2. $\{\text{supp } f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ forma una cubierta localmente finita de M .
3. $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in M$.

Nuestro objetivo es demostrar que dada una variedad suave siempre existe una partición de la unidad C^∞ en ella. Más aún, demostraremos que siempre existe una partición de la unidad numerable. Primeramente necesitaremos estudiar algunas propiedades topológicas de una variedad, para lo cual tenemos los siguientes lemas.

Lema 4.1. Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $x \in X$. Entonces para cada vecindad U de x existe otra vecindad V de x tal que \overline{V} es compacto y $\overline{V} \subset U$.

Demostración

Como X es localmente compacto, existe una vecindad W de x tal que \overline{W} es compacto. Luego, la frontera del conjunto $V_1 = U \cap W$ es un conjunto cerrado contenido en $\overline{V_1} \subset \overline{W}$. Como \overline{W} es compacto, concluimos que la frontera ∂V_1 también lo es.

Como X es de Hausdorff, para cada punto $y \in \partial V_1$, existen vecindades abiertas ajenas U_y de x y V_y de y . Luego, $\{V_y\}_{y \in \partial V_1}$ forma una cubierta abierta para ∂V_1 , por lo que existen $y_1, \dots, y_n \in \partial V_1$ tales que $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$ es una cubierta abierta para ∂V_1 y además, $V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, n$. Tomando $A = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ y $B = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$, es claro que A es una vecindad abierta de x , B es una vecindad abierta de ∂V_1 y $A \cap B = \emptyset$.

Sea $V = V_1 \cap A$. Es claro que \bar{V} es compacto, pues $\bar{V} \subset \bar{V}_1$. Además,

$$\bar{V} \subset \bar{V}_1 \cap \bar{A} = (V_1 \cup \partial V_1) \cap \bar{A} = (V_1 \cap \bar{A}) \cup (\partial V_1 \cap \bar{A}).$$

Notemos que $\partial V_1 \cap \bar{A} = \emptyset$, pues si $a \in \partial V_1 \cap \bar{A}$, entonces todo abierto que contenga a a debería intersectar a A . En particular, $B \cap A \neq \emptyset$ (porque $a \in \partial V_1 \subset B$), lo cual contradice la construcción de A y B . Por lo tanto, $\bar{V} \subset V_1 \cap \bar{A} \subset V_1 \subset U$, lo que significa que V es la vecindad buscada. \square

Lema 4.2. Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $\{V_1, V_2, \dots\}$ una base de la topología de X . Entonces el conjunto

$$\{V_i : \bar{V}_i \text{ es compacto}\}_{i \in \mathbb{N}}$$

es también una base de la topología de X .

Demostración

Sea U un abierto en X . Por el lema 4.1, para cada $u \in U$ existe un abierto $V_u \subset U$ tal que \bar{V}_u es compacto y $\bar{V}_u \subset U$. A su vez, para cada V_u existe un conjunto $K_u \subset \mathbb{N}$ tal que

$$V_u = \bigcup_{i \in K_u} V_i,$$

donde cada V_i tiene cerradura compacta, puesto que V_u la tiene. Luego, podemos escribir a U de la siguiente manera:

$$U = \bigcup_{u \in U} V_u = \bigcup_{u \in U} \bigcup_{i \in K_u} V_i,$$

de donde se sigue la conclusión del lema. \square

El lema anterior nos garantiza que una variedad M siempre tiene una base numerable tal que todos sus elementos tienen cerradura compacta. En efecto, como todo punto $x \in M$ tiene una vecindad homeomorfa a un abierto U de \mathbb{R}^n , puede encontrarse un compacto $V \subset U$, lo que implica que x tiene una vecindad compacta y por lo tanto, M es localmente compacto. Este es un primer paso en la demostración de que en cualquier variedad diferenciable siempre existe una partición de la unidad numerable.

Otra propiedad topológica que tienen las variedades diferenciables es la propiedad conocida como *paracompacidad*. Esta propiedad es de vital importancia para probar la existencia de particiones de la unidad. Para definirla se necesita de otro concepto, el cual definimos a continuación.

Definición 4.19. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ cubiertas para X . Diremos que \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} si para cada $\beta \in B$ existe $\alpha \in A$ tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.

Definición 4.20. Diremos que un espacio topológico es paracompacto si toda cubierta abierta tiene un refinamiento localmente finito.

Una variedad M resulta ser siempre un espacio paracompacto. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.3. Sean M un variedad suave y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta para M . Entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ posee un refinamiento localmente finito, numerable y tal que sus elementos tienen cerradura compacta.

Demostración

Sea $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ una base de la topología de M tal que $\overline{V_i}$ es compacto para cada $i \in \mathbb{N}$. Construiremos una cubierta $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ de M con la propiedad de que $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$ y que cada elemento tenga cerradura compacta.

Tomamos $G_1 = V_1$ y construiremos los siguientes conjuntos de manera inductiva. Suponiendo que $G_k = V_1 \cup \dots \cup V_{j_k}$, definimos j_{k+1} como el mínimo entero positivo $j_{k+1} > j_k$, tal que

$$\overline{G_k} \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} V_i.$$

Luego, se define el conjunto G_{k+1} como

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} V_i,$$

de donde es claro que para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$, $\overline{G_i}$ es compacto y $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ forma una cubierta para M .

Notemos que para cada $i \geq 3$, el conjunto $\overline{G_i} - G_{i-1}$ es compacto y está contenido en $G_{i+1} - \overline{G_{i-2}}$, pues $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$ y $\overline{G_{i-2}} \subset G_{i-1}$. Por lo tanto,

$$\{U_\alpha \cap (G_{i+1} - \overline{G_{i-2}})\}_{\alpha \in A}$$

forma una cubierta abierta para $\overline{G_i} - G_{i-1}$. Podemos extraer entonces una subcubierta finita \mathcal{U}_i . Luego, para $i = 2$, extraemos una subcubierta finita \mathcal{U}_2 de la cubierta abierta $\{U_\alpha \cap G_3\}_{\alpha \in A}$ de $\overline{G_2}$.

Definimos la colección $\mathcal{U} = \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \cup \dots$, que es un refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Es claro que \mathcal{U} es numerable, pues es la unión numerable de conjuntos finitos. Veamos que también es localmente finita. En efecto, pues dado un punto $p \in M$, p debe pertenecer a $\overline{G_{i+1}} - G_i$ para algún i , el cual a su vez está cubierto solamente por una cantidad finita de elementos de \mathcal{U} , debido a la construcción de los \mathcal{U}_i 's.

Por último, para ver que cada elemento de \mathcal{U} tiene cerradura compacta, es suficiente notar que cualquier elemento de \mathcal{U} es un subconjunto de algún G_i , el cual tiene cerradura compacta. Por lo tanto, la colección \mathcal{U} es el refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ que buscábamos. □

Puede notarse que en la demostración del resultado anterior no se usó la estructura diferenciable o los homeomorfismos locales de M a \mathbb{R}^n . Es decir, que el resultado es válido para espacios de Hausdorff localmente compactos que tengan una base numerable. Habiendo desarrollado las propiedades topológicas de una variedad que servirán para probar la existencia de particiones de la unidad, ahora probaremos la existencia de una función que será de utilidad para construir la partición de la unidad buscada.

Lema 4.4. *Existe una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $F \equiv 1$ en el cubo cerrado $\overline{C_1^n(0)}$ y $F \equiv 0$ fuera de $C_2^n(0)$.*

Demostración

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida de la siguiente manera

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es no negativa y del cálculo sabemos que es de clase C^∞ . De aquí que la función

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

es no negativa, de clase C^∞ y $g(t) = 1$ para $t \geq 1$, $g(t) = 0$ para $t \leq 0$.

Ahora definimos $h(t) = g(t+2)g(2-t)$, de manera que $h(t) = 1$ para todo $t \in [-1, 1]$ y $h(t) = 0$ para todo $t \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Entonces es claro que la función F buscada puede definirse como

$$F(x_1, \dots, x_n) = h(x_1) \cdots h(x_n),$$

y cumple las propiedades deseadas. □

Con la ayuda de esta función podremos probar el siguiente teorema, el cual asegura la existencia de particiones de la unidad para cualquier variedad diferenciable. En la siguiente sección estudiaremos un par de aplicaciones de este teorema.

Teorema 4.2. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de M . Entonces existe una partición de la unidad $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un $\alpha_i \in A$ tal que $\text{supp } f_i \subset U_{\alpha_i}$ y $\text{supp } f_i$ es compacto.

Demostración

Sea $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ la cubierta de M que se definió al inicio de la demostración del lema 4.3 y definimos $G_0 = \emptyset$. De esta manera, dado un punto $p \in M$, existe el máximo entero i_p tal que $p \in M - \overline{G_{i_p}}$, y al menos un índice $\alpha_p \in A$ tal que $p \in U_{\alpha_p}$.

Sea (V, ψ) una carta coordenada tal que $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}})$, $\psi(V)$ contiene al cubo cerrado $\overline{C_2^n(0)}$ y $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Si F es la función de la conclusión del lema 4.4, definimos $f_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_p(x) = \begin{cases} (F \circ \psi)(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta definición, es claro que

$$\text{supp } f_p \subset V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}}),$$

y $f_p \equiv 1$ en la vecindad $W_p = \psi^{-1}(C_1^n(0))$ de p .

Para cada $i \geq 1$, el conjunto $\overline{G_i} - G_{i-1}$ es compacto, por lo que existen $p_1, \dots, p_{n_i} \in M$ tal que $\{W_{p_k}\}_{k=1}^{n_i}$ forma una cubierta para $\overline{G_i} - G_{i-1}$. Luego, la colección de funciones

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{f_{p_k}\}_{k=1}^{n_i}$$

es una colección numerable, por lo que podemos reindexarla de manera que sea la colección $\{f_i\}_{i=1}^\infty$.

Ahora definimos la función

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i,$$

la cual está bien definida pues para cada x , $f(x)$ es en realidad una suma finita. Con esta definición, es claro que la colección de funciones $\{g_i\}_{i=1}^\infty$, donde

$$g_i = \frac{f_i}{f} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

es la partición de la unidad buscada. □

A una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en M con la característica que para cada $\alpha \in A$, existe un elemento U_α de la cubierta \mathcal{U} de M , tal que $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$, se le llama partición de la unidad *subordinada a la cubierta* \mathcal{U} .

Ahora estudiaremos un par de aplicaciones de las particiones de la unidad y en el capítulo siguiente estudiaremos otra. Primeramente veremos que cualquier variedad diferenciable compacta

puede ser considerada como una subvariedad encajada en \mathbb{R}^n , para algún $n \in \mathbb{N}$. Se puede visualizar geoméricamente, como ya se ha mencionado, que el cilindro o el toro pueden encajarse en el espacio euclidiano tridimensional. Puede demostrarse que la botella de Klein puede encajarse en el espacio euclidiano de dimensión 4. El siguiente resultado no demuestra esas afirmaciones, pero presenta una situación similar para variedades compactas.

Teorema 4.3. *Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n . Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que M admite un encaje C^∞ a \mathbb{R}^N .*

Demostración

Como M es compacta, existen una cantidad finita de cartas coordenadas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^k$ tales que $\{U_i\}_{i=1}^k$ forma una cubierta para M . Más aún, podemos suponer que $\phi_i(U_i)$ contiene a $C_2^n(0)$ para cada i y que $\{V_i = \phi_i^{-1}(C_1^n(0))\}_{i=1}^k$ también es una cubierta para M . Para una demostración detallada de que esto puede hacerse, puede consultarse la referencia [2] de la bibliografía.

Recordemos que en la demostración del teorema 4.2 definíamos, para cada conjunto de la forma de V_i , una función C^∞ , $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_i \equiv 1$ en V_i . Luego, estas funciones se normalizaban para construir la partición de la unidad. Consideremos la función $F_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i)$ definida para cada $x \in U_i$, por medio de la ecuación

$$F_i(x) = f_i(x)\phi_i(x).$$

Es claro que es una función C^∞ , tal que $F_i(x) = 0$ para todo $x \notin \phi_i^{-1}(C_2^n(0))$, y que además coincide con ϕ_i en V_i . Por lo tanto, F_i puede extenderse a una función C^∞ , $F_i^* : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, haciendo $F_i^*(x) = 0$ para todo $x \in M - U_i$.

Como F_i^* coincide con ϕ_i en V_i , entonces F_i^* es un difeomorfismo en V_i , por lo que su matriz jacobiana asociada tiene rango n en V_i . Sea $N = (n+1)k$ y definimos $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ de la siguiente manera:

$$F(x) = (F_1^*(x); \dots; F_k^*(x); f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Es claro que F es una función C^∞ en M . Podemos entonces definir su matriz jacobiana asociada, la cual es una matriz de dimensión $N \times n$, por lo que su rango debe ser menor o igual a n en cada punto. Sin embargo, para cada $x \in M$, existe $1 \leq i \leq k$ tal que $x \in V_i$, por lo que $F_i^*(x) = \phi_i(x)$, de donde la matriz jacobiana debe tener rango igual a n . Esto implica que F es una inmersión.

Para ver que F es inyectiva, supongamos que $F(x) = F(y)$. Entonces $f_i(x) = f_i(y)$ para cada $i = 1, \dots, k$. Luego, $f_i(x)\phi_i(x) = f_i(y)\phi_i(y)$ para cada i . En particular, para i_0 tal que $f_{i_0}(x) \neq 0$. En este caso, $\phi_{i_0}(x) = \phi_{i_0}(y)$, lo cual implica que $x = y$, de donde concluimos que F es una inmersión inyectiva. Más aún, como M es compacta y F es inyectiva, entonces F es un homeomorfismo sobre su imagen con la topología relativa. Por lo tanto, F es un encaje.

□

Para demostrar el teorema anterior se utilizó la existencia de las funciones f_i , la cual se justificó en el teorema 4.2. Una aplicación más directa del resultado final de este teorema es el siguiente resultado, el cual nos permite extender funciones diferenciables definidas en una subvariedad regular cerrada N , a toda la variedad M de la cual es subvariedad.

Teorema 4.4. *Sean M una variedad suave de dimensión m , N una subvariedad regular cerrada de M de dimensión n y $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces existe una función diferenciable $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_N \equiv f$.*

Demostración

Sea $p \in N$. Como N es una subvariedad regular, entonces existe una vecindad coordinada (U, ϕ) en M tal que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $\phi(U) = C_{2r}^n(0)$ y

$$\phi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_m) \in C_{2r}^n(0) : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\},$$

para algún $r > 0$. Es claro que tanto U como ϕ dependen de p , pero en la notación no haremos explícita esta dependencia. Más aún, como f es C^∞ en N , podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap N) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ .

Sea $\tilde{U} = \phi^{-1}(\overline{C_r^m(0)})$. Es claro que la restricción $f \circ \phi^{-1}|_{\phi(\tilde{U} \cap N)}$ es de clase C^∞ . Como N es una variedad cerrada, existe una función C^∞ $g_\phi : \overline{C_r^m(0)} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g_\phi|_{\phi(\tilde{U} \cap N)} \equiv (f \circ \phi^{-1})|_{\phi(\tilde{U} \cap N)}.$$

Luego, la función $g_\phi \circ \phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ para cualquier abierto $A \cap \tilde{U}$, lo que implica que para cada p existe una función C^∞ $G_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}$, donde $V_p = \phi^{-1}(C_r^m(0))$. Además, se cumple que $G_p|_{V_p \cap N} \equiv f|_{V_p \cap N}$.

Es claro que la colección $\{V_p\}_{p \in N} \cup \{(M - N)\}$ forma una cubierta abierta para M . Por el lema 4.3, existe un refinamiento localmente finito, digamos $\{W_i\}_{i=1}^\infty$, tal que $\overline{W_i}$ es compacto para cada $i \in \mathbb{N}$. Por el teorema 4.2 existe una partición de la unidad $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ subordinada a $\{W_i\}_{i=1}^\infty$.

Consideremos la subsucesión de funciones $\{f_{i_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_i\}_{i=1}^\infty$, de todas las funciones f_{i_k} tales que $\text{supp } f_{i_k} \cap N \neq \emptyset$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $p_k \in N$ tal que $\text{supp } f_{i_k} \subset V_{p_k}$. El punto p_k existe por el teorema 4.2 y la construcción de $\{W_i\}_{i=1}^\infty$.

Definimos la función $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $x \in M$, como

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{p_k}(x) f_{i_k}(x).$$

Es importante notar que $G_{p_k}(x)$ no siempre está bien definido, pero cuando no lo está, $f_{i_k}(x) = 0$. Además, la cantidad de índices k para los cuales $G_{p_k}(x)$ está bien definido es finita para cada $x \in M$, por lo que la función F está bien definida y es C^∞ .

Por último, si $x \in N$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, puede ser que $x \in \text{supp } f_{i_k}$ ó $x \notin \text{supp } f_{i_k}$.

En el segundo caso, $f_{i_k}(x) = 0$, mientras que en el primer caso $x \in V_{p_k}$, por lo que $G_{p_k}(x) = f(x)$. Por lo tanto,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x)f_{i_k}(x) = f(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}(x),$$

pero como $x \in N$ y las funciones $\{f_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ son las únicas cuyo soporte intersecta a N , entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = 1,$$

de donde $F(x) = f(x)$ para todo $x \in N$.

□

En el siguiente capítulo estudiaremos una aplicación más de la existencia de particiones de la unidad, la cual será de gran importancia para el estudio de variedades riemannianas.

4.3 Acciones de Grupos Discretos sobre Variedades

En el capítulo 2 estudiamos acciones de grupos discretos sobre espacios topológicos en general. En esta sección nos enfocaremos en el caso de variedades diferenciables y usaremos la misma notación para la proyección natural y las otras funciones que definía la acción. Recordemos que en el capítulo 2 nos restringimos a acciones de grupos, de manera que las funciones θ_g fueran homeomorfismos. En el caso de variedades diferenciables nos restringiremos a que tales funciones sean difeomorfismos.

El siguiente resultado nos da una manera de construir nuevas variedades suaves mediante la acción de un grupo discreto sobre una variedad. Nótese la similitud que tiene con los resultados obtenidos en el capítulo 2.

Teorema 4.5. *Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y Γ un grupo discreto que actúa libre, propia y discontinuamente sobre M . Entonces existe una única estructura diferenciable en $\tilde{M} = M/\Gamma$ tal que cada $p \in \tilde{M}$ tiene una vecindad conexa \tilde{U} , con la propiedad de que*

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$$

es una descomposición de $\pi^{-1}(\tilde{U})$ en sus componentes conexas (abiertas) y $\pi|_{U_{\alpha}}$ es un difeomorfismo sobre \tilde{U} para cada $\alpha \in A$.

Demostración

Del teorema 2.1, es claro que \tilde{M} es un espacio de Hausdorff. Luego, como M tiene una base numerable, entonces M/Γ también la tiene. Ahora, como la acción de Γ es discontinua, para cada $x \in M$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $hU \cap U \neq \emptyset$ solamente si $h = e$. Por lo tanto, $\pi|_U$ es

inyectiva sobre su imagen $\pi(U)$. Como π es abierta, entonces es homeomorfismo.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que (U, ϕ) es una carta coordenada. Definimos entonces la función

$$\tilde{\phi} : \pi(U) \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n,$$

como $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi|_U^{-1}$, de manera que $\tilde{\phi}$ es un homeomorfismo. Como cada $p \in \tilde{M}$ es la imagen de algún $x \in M$ bajo π , entonces \tilde{M} es una variedad topológica de dimensión n .

Para cada carta (U, ϕ) en M , como en la descripción anterior, consideramos la carta coordenada $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ en \tilde{M} , de manera que la colección \mathcal{U} de todas ellas forma una cubierta para \tilde{M} . Sean $(\tilde{U}, \tilde{\phi}), (\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{U}$ tales que

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset,$$

es decir, $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, para U y V adecuados. Por lo tanto, existe $h \in \Gamma$ tal que $U \cap hV \neq \emptyset$. Luego, como $\pi = \pi \circ \theta_h$, entonces $\tilde{\psi}^{-1} = \pi \circ \psi^{-1} = \pi \circ \theta_h \circ \psi^{-1}$, de donde

$$\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}^{-1} = \phi \circ \pi|_U^{-1} \circ \pi \circ \theta_h \circ \psi^{-1} = \phi \circ \theta_h \circ \psi^{-1}.$$

Como θ_h es difeomorfismo, se sigue que $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ es de clase C^∞ . Análogamente para $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$. Por la proposición 4.1, existe una única estructura diferenciable en \tilde{M} que contiene a \mathcal{U} y por lo tanto, podemos considerar a \tilde{M} como una variedad diferenciable.

Ahora veamos que esta estructura diferenciable satisface la propiedad del enunciado del teorema. Sean $p \in \tilde{M}$ y $x \in M$ tal que $\pi(x) = p$. Entonces existe una vecindad coordenada (U, ϕ) de x tal que $\pi|_U$ es homeomorfismo sobre $\tilde{U} = \pi(U)$. En la estructura diferenciable que definimos, está la carta coordenada $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$, donde $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi|_U^{-1}$, de manera que

$$(\tilde{\phi} \circ \pi|_U^{-1}) \circ \pi|_U \circ \phi^{-1}$$

es la función identidad en \mathbb{R}^n , que es C^∞ , de donde $\pi|_U$ es una función C^∞ . Análogamente, $\pi|_U^{-1}$ también lo es, por lo que podemos concluir que $\pi|_U$ es un difeomorfismo. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que \tilde{U} es conexo, por lo que las componentes conexas de $\pi^{-1}(\tilde{U})$ son de la forma gU , con $g \in \Gamma$.

Ahora sólo falta ver que esta estructura diferenciable es la única que satisface esta propiedad. Supongamos que hay otra, y sea $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ una carta coordenada de la primera estructura. Demostraremos que cualquier carta coordenada $(\tilde{U}', \tilde{\phi}')$ de la nueva estructura es C^∞ -compatible con $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$. En efecto, supongamos que $\tilde{U} \cap \tilde{U}' \neq \emptyset$. Como $\pi|_{U \cap U'}$ es difeomorfismo con cualquiera de las dos estructuras, entonces $\phi' \circ \pi|_{U \cap U'}^{-1} \circ \tilde{\phi}'^{-1}$ y $\tilde{\phi} \circ \pi|_{U \cap U'} \circ \phi^{-1}$ son de clase C^∞ . Además, $\phi \circ \phi'^{-1}$ es C^∞ , pues es una función de transición. Por lo tanto,

$$\tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}'^{-1} = (\tilde{\phi} \circ \pi|_{U \cap U'} \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \phi'^{-1}) \circ (\phi' \circ \pi|_{U \cap U'}^{-1} \circ \tilde{\phi}'^{-1})$$

es una función C^∞ . Análogamente, $\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1}$ es C^∞ , de donde $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ y $(\tilde{U}', \tilde{\phi}')$ son C^∞ -compatibles. Podemos concluir entonces que la nueva estructura debe contener a la primera, y en particular, debe contener a \mathcal{U} . Por la proposición 4.1, las dos estructuras coinciden.

□

Cabe mencionar que una función con la característica adicional de la proyección natural π obtenida en este teorema se llama *recubrimiento* de variedades, mientras que el dominio recibe el nombre de *variedad recubridora*. Es decir, que existe una única estructura diferenciable en M/Γ que hace que $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ sea un recubrimiento. Nótese también la similitud que un recubrimiento de variedades es a su vez recubrimiento de espacios topológicos (definición 2.8). El teorema 4.5 nos permite identificar como variedades suaves a los espacios cociente que se estudiaron en el capítulo 2.

Corolario 4.1. *El cilindro, la banda de Möbius, el toro, la botella de Klein y el espacio proyectivo son variedades diferenciables.*

Demostración

Ya vimos que las acciones que definen a estos espacios son libres, propias y discontinuas. Solamente falta ver que cada función θ_g es un difeomorfismo. En los primeros cuatro casos, esto se sigue directamente de la forma que tienen.

Para el caso del espacio proyectivo, la acción de \mathbb{Z}_2 es sobre la variedad \mathbb{S}^2 . La función θ_0 es la identidad, que es C^∞ . La función θ_1 es tal que $\theta_1(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Esta es la misma acción que se da localmente en \mathbb{R}^2 (por medio de las cartas coordenadas), en donde sabemos que es de clase C^∞ . Por lo tanto, θ_1 es C^∞ y concluimos que el espacio proyectivo es una variedad suave.

□

Hemos visto que una acción libre, propia y discontinua de un grupo discreto Γ , sobre una variedad diferenciable M , genera otra variedad diferenciable M/Γ , pero no se ha dicho nada sobre la orientabilidad de esta última. Veremos que, en general, la variedad cociente no es orientable; para que lo sea, necesitaremos restringir un poco más la acción de Γ .

Definición 4.21. Sean M una variedad orientable y Γ un grupo que actúa sobre M . Diremos que la acción de Γ preserva la orientación si para cada $g \in \Gamma$, el difeomorfismo θ_g preserva la orientación.

Teorema 4.6. *Sean M una variedad orientable y Γ un grupo discreto que actúa libre, propia y discontinuamente sobre M . Si la acción de Γ preserva la orientación, entonces M/Γ es una variedad orientable.*

Demostración

Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas orientado en M . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para cada $\alpha \in A$, $U_\alpha \cap hU_\alpha \neq \emptyset$ solamente si $h = e$. En la demostración del teorema 4.5 vimos que un atlas para la variedad M/Γ es $\{(\pi(U_\alpha), \tilde{\phi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, donde $\tilde{\phi}_\alpha = \phi_\alpha \circ \pi|_{U_\alpha}^{-1}$. Veamos que este

es un atlas orientado.

Supongamos que $\alpha, \beta \in A$ son tales que $\pi(U_\alpha) \cap \pi(U_\beta) \neq \emptyset$, por lo que existe un $h \in \Gamma$ tal que $U_\alpha \cap hU_\beta \neq \emptyset$. En la demostración del teorema 4.5 vimos que las funciones de transición estaban dadas por:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1} &= \phi_\alpha \circ \theta_h \circ \phi_\beta^{-1}, \\ \tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1} &= \phi_\beta \circ \theta_{h^{-1}} \circ \phi_\alpha^{-1}.\end{aligned}$$

Como la acción de Γ preserva la orientación, entonces θ_h y $\theta_{h^{-1}}$ preservan la orientación, por lo que $\phi_\beta \circ \theta_{h^{-1}} \circ \phi_\alpha^{-1}$ y $\phi_\alpha \circ \theta_h \circ \phi_\beta^{-1}$ tienen jacobiano positivo. Por lo tanto, M/Γ es una variedad orientable. □

Este teorema nos permite construir nuevas variedades orientables a partir de una variedad orientable, o bien, determinar si una variedad cociente es una variedad orientable, como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 4.2. *El cilindro y el toro son variedades orientables.*

Demostración

Recordemos que el cilindro y el toro son de la forma M/Γ , donde $M = \mathbb{R}^2$, que es una variedad orientable. El atlas orientado que consideramos para M era $\{(\mathbb{R}^2, \phi)\}$, donde $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la función identidad. Es claro entonces que es suficiente que cada θ_g tenga jacobiano positivo para que la acción de Γ preserve la orientación.

En el caso del cilindro, $\Gamma = \mathbb{Z}$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\theta_n(x, y) = (x+n, y)$. En el caso del toro, $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y para cada $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\theta_{(m,n)}(x, y) = (x+m, y+n)$. En ambos casos la matriz jacobiana es la matriz identidad, la cual tiene determinante positivo. □

El teorema 4.6 nos permite determinar si una variedad cociente es orientable, en el caso en que la acción de grupo que la define preserva la orientación, pero no para el caso contrario. El siguiente teorema lo complementa en este sentido.

Teorema 4.7. *Sean M una variedad orientable y Γ un grupo que actúa libre, propia y discontinuamente sobre M . Si M/Γ es orientable, entonces existe un atlas orientado en M tal que la acción de Γ preserva la orientación.*

Demostración

Sea $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas orientado en M/Γ . Por el teorema 4.5, sabemos que

$$\pi^{-1}(\tilde{U}_\alpha) = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} U^\beta,$$

para algún conjunto de índices B_α . Veamos que el conjunto $\mathcal{U} = \{(U^\beta, \phi_\beta)\}_{\alpha \in A}^{\beta \in B_\alpha}$, donde

$$\phi_\beta = \tilde{\phi}_\alpha \circ \pi|_{U^\beta},$$

es un atlas orientado para M .

Es claro que \mathcal{U} es una cubierta para M . Supongamos que $U^{\beta_1} \cap U^{\beta_2} \neq \emptyset$ y consideremos $\tilde{U}_{\alpha_1} = \pi(U^{\beta_1})$, $\tilde{U}_{\alpha_2} = \pi(U^{\beta_2})$ con sus respectivas funciones de coordenadas $\tilde{\phi}_{\alpha_1}, \tilde{\phi}_{\alpha_2}$. Una de las funciones de cambio de coordenadas entre U^{β_1} y U^{β_2} está dada por:

$$(\tilde{\phi}_{\alpha_1} \circ \pi|_{U^{\beta_1}}) \circ (\pi|_{U^{\beta_2}}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{\alpha_2}^{-1}) = \tilde{\phi}_{\alpha_1} \circ \tilde{\phi}_{\alpha_2}^{-1},$$

en al menos un abierto. Es claro entonces que esta función es de clase C^∞ y tiene jacobiano positivo. Análogamente para la otra función de transición.

Veamos ahora que la acción de Γ preserva la orientación. Dado $h \in \Gamma$, es suficiente probar que si $U^{\beta_1} \cap hU^{\beta_2} \neq \emptyset$, entonces las funciones $\phi_{\beta_2} \circ \theta_{h^{-1}} \circ \phi_{\beta_1}^{-1}$ y $\phi_{\beta_1} \circ \theta_h \circ \phi_{\beta_2}^{-1}$ tienen jacobiano positivo. Esto es cierto, ya que también son las funciones de transición entre $\pi(U^{\beta_1})$ y $\pi(U^{\beta_2})$. Por lo tanto, Γ preserva la orientación. □

Este teorema nos da una manera de estudiar la orientabilidad y la no-orientabilidad de variedades cociente. En particular, podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 4.3. *La banda de Möbius, la botella de Klein y el espacio proyectivo son variedades no orientables.*

Demostración

Recordemos que la banda de Möbius y la botella de Klein son variedades cocientes de la forma \mathbb{R}^2/Γ . Por la proposición 4.3 es suficiente analizar el jacobiano de las funciones $\theta_h, h \in \Gamma$, pues la proposición es válida para cualquier orientación en \mathbb{R}^n .

En el caso de la banda de Möbius, $\Gamma = \mathbb{Z}$. Sabemos que $\theta_1(x, y) = (x + 1, -y)$, por lo que su matriz jacobiana es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

que tiene determinante -1. Entonces θ_1 no preserva la orientación y Γ tampoco. Por lo tanto, la banda de Möbius no puede ser una variedad orientable.

En el caso de la botella de Klein, $\Gamma = \langle u, v|uvu^{-1}v = e \rangle$ y sabemos que $\theta_u(x, y) = (x + 1, -y)$, que es el mismo difeomorfismo que analizamos para la banda de Möbius. Por lo tanto, la botella de Klein tampoco es una variedad orientable.

El espacio proyectivo es una variedad cociente de la forma \mathbb{S}^2/Γ , donde $\Gamma = \mathbb{Z}_2$. Veamos que

$\theta_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, que está definido por $\theta_1(x_1, x_2, x_3) = -(x_1, x_2, x_3)$ no preserva la orientación. En la sección 4.1.1 vimos que un atlas orientado para \mathbb{S}^2 era

$$\{(U_N, \tilde{\phi}_N), (U_S, \phi_S)\},$$

donde $U_N = \mathbb{S}^2 - (0, 0, -1)$, $U_S = \mathbb{S}^2 - (0, 0, 1)$, junto con las funciones $\tilde{\phi}_N$ y ϕ_S , dadas por:

$$\tilde{\phi}_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{1+x_3} \right) (-x_1, x_2),$$

$$\phi_S(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{1-x_3} \right) (x_1, x_2).$$

Haciendo algunos cálculos puede verificarse que $\phi_S \circ (\theta_1 \circ \tilde{\phi}_N^{-1})(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, que ya sabemos que tiene jacobiano negativo. Por lo tanto, θ_1 no preserva la orientación y concluimos que el espacio proyectivo no es una variedad orientable.

□

Capítulo 5

Variedades Riemannianas y Acciones de Grupos Discretos

Al estudiar variedades con una estructura diferenciable, como en el capítulo anterior, se puede estudiar la continuidad y diferenciableidad de curvas sobre ellas. Sin embargo, no se puede (al menos de manera inmediata a partir de la estructura diferenciable) estudiar conceptos como longitud o ángulo entre curvas. En este capítulo introduciremos una noción a las variedades suaves que nos permitirá estudiar estos conceptos: la de métrica riemanniana. La Geometría Riemanniana es el estudio de las variedades diferenciables dotadas con una métrica riemanniana, llamadas variedades riemannianas.

En particular, buscaremos definir una métrica riemanniana en variedades de la forma M/Γ . Para esto, primero presentaremos algunos de los conceptos básicos, para después estudiarlos en variedades cociente. Esto nos permitirá estudiar los conceptos de longitud y ángulo entre curvas sobre las variedades cociente que hemos estudiado previamente.

5.1 Variedades Riemannianas

En esta sección se estudian los conceptos de la geometría riemanniana que se estudiarán en variedades cociente. Primeramente se presenta la definición de métrica y variedad riemanniana con algunos ejemplos. Posteriormente se estudia el concepto de geodésica, para finalmente hacer un estudio más exhaustivo de estos conceptos en el caso particular de \mathbb{S}^2 . Existen otros conceptos en la geometría riemanniana, como lo es la curvatura. El lector interesado en estudiar esta noción, así como profundizar en el estudio de la geometría riemanniana puede consultar las referencias [2], [9] y [18].

5.1.1 Métricas Riemannianas

Para dar una definición precisa de lo que es una métrica riemanniana, se necesita la noción de campo vectorial diferenciable en una variedad. Para definir este concepto se utiliza la variedad TM construida en la sección 4.1.4.

Definición 5.1. Sean M una variedad suave y U un abierto en M . Una función diferenciable $X : U \rightarrow TM$ se dice ser un campo vectorial diferenciable en U si para cada $p \in U$, $X(p) = (p, X_p)$, para algún $X_p \in T_pM$.

La idea de esta definición es que se asocie a cada punto p de la variedad M un vector en el espacio tangente a M en p . En este trabajo solamente se presenta lo necesario para poder definir una métrica riemanniana. El lector interesado en profundizar en el estudio de campos vectoriales sobre variedades puede consultar las referencias [2] y [12].

Un ejemplo de campo vectorial diferenciable son los campos vectoriales E_i que asocian a cada punto p de una vecindad coordenada U el vector E_{ip} . Este ejemplo es de gran importancia, ya que cualquier campo vectorial X en U se puede expresar, como

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) E_i(p),$$

para cada $p \in U$, donde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Además, X es diferenciable si y sólo si a_i es diferenciable para cada $i = 1, \dots, n$.

La expresión anterior, junto con la forma que tienen los elementos de la base canónica en T_pM nos permiten pensar en un campo vectorial como un operador que actúa sobre las funciones con valores reales diferenciables en M , de manera que para cada f , actúa de la siguiente manera:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p),$$

donde $\tilde{f} = f \circ \phi$. Notemos que Xf también es una función diferenciable, lo cual nos permite considerar las funciones $Y(Xf)$ ó $X(Yf)$. Sin embargo, no podemos asegurar que el operador XY también sea un campo vectorial. La siguiente proposición trata este problema.

Proposición 5.1. Sean X y Y campos vectoriales diferenciables en una variedad M . Entonces existe un único campo vectorial Z tal que $Zf = (XY - YX)f$ para cada función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable.

Demostración

Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas coordenado para M y supongamos que en cada carta coordenada, X y Y tienen las siguientes expresiones:

$$X = \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Para cada $\alpha \in A$ y cada función f , notamos que

$$XYf = X \sum_{j=1}^n b_j^\alpha \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n a_i^\alpha \frac{\partial b_j^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i^\alpha b_j^\alpha \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n b_j^\alpha \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_i^\alpha b_j^\alpha \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Usando estas expresiones definimos al campo vectorial Z_α , en U_α por medio de la ecuación:

$$Z_\alpha f = XYf - YXf = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i^\alpha \frac{\partial b_j^\alpha}{\partial x_i} - b_j^\alpha \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}.$$

La última expresión asegura además que Z_α es el único campo vectorial con la propiedad de ser igual a $XY - YX$. Esto nos permite definir Z , con esta misma propiedad, en toda la variedad M , ya que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $Z_\alpha = Z_\beta$.

□

El campo vectorial Z de la conclusión de la proposición anterior recibe el nombre de *corchete de X y Y* y se representa por medio de $[X, Y]$. Esta operación permite construir un nuevo campo vectorial diferenciable, a partir de dos ya dados.

Supongamos ahora que para cada $p \in M$, el espacio $T_p M$ está dotado con un producto interior g_p , es decir, con una función $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, bilineal, simétrica y positiva definida. Esto motiva la definición de *métrica riemanniana*.

Definición 5.2. Sean M una variedad diferenciable y g una función que a cada $p \in M$ le asocie un producto interior g_p en $T_p M$. Diremos que g es una métrica riemanniana si dados un abierto U en M , y X, Y campos vectoriales diferenciables en U , la función $g(X, Y)(p) = g_p(X(p), Y(p))$ es diferenciable.

Notemos que la idea de una métrica riemanniana es asociar a cada punto p de la variedad M , un producto interior g_p en el espacio $T_p M$ de manera que éste varíe suavemente al variar p . Otro enfoque de lo que es una métrica riemanniana, que es básicamente la misma idea pero utilizando otro lenguaje matemático (el de tensores), puede encontrarse en la referencia [16] de la bibliografía.

Consideremos las funciones $\alpha_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como

$$\alpha_{ij}(p) = g_p(E_{ip}, E_{jp}).$$

Las n^2 funciones α_{ij} se llaman las *componentes* de g . Considerando las funciones α_{ij} , puede darse una definición alternativa de métrica riemanniana: una función g que asocie a cada punto p en M un producto interior g_p en $T_p M$ y tal que para cualquier carta coordenada U , las funciones α_{ij} son C^∞ . Cuando se consideran estas mismas funciones dependiendo de coordenadas locales, es decir,

las funciones $\alpha_{ij} \circ \phi^{-1}$, es común denotarlas por g_{ij} . Estas funciones forman una matriz que ayuda a calcular el valor de $g_p(X_p, Y_p)$. Si $X_p = \alpha_1 E_{1p} + \cdots + \alpha_n E_{np}$ y $Y_p = \beta_1 E_{1p} + \cdots + \beta_n E_{np}$, entonces

$$g_p(X_p, Y_p) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Dadas dos cartas coordenadas (U, ϕ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las funciones g_{ij} no tienen la misma expresión en las coordenadas locales de una carta que en las de la otra. Supongamos que (x_1, \dots, x_n) son las coordenadas locales de U y que (y_1, \dots, y_n) son las de V . Supongamos que $x_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$ y denotamos $g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, $g'_{ij}(y_1, \dots, y_n)$. Si A es la matriz jacobiana de esta transformación, entonces

$$A^t(g_{ij})A = (g'_{ij}),$$

donde A^t denota la traspuesta de A . Una matriz que se transforma de esta manera recibe el nombre de *tensor*. La matriz (g_{ij}) se llama *tensor métrico*. El concepto de tensor es algo más general, pero para nuestros objetivos no es necesario tratar esta noción. Un tratamiento del concepto general de tensor puede encontrarse en la referencia [4] de la bibliografía.

El ejemplo más sencillo de métrica riemanniana puede definirse en \mathbb{R}^n . El espacio tangente en cada punto es isomorfo a \mathbb{R}^n , el cual puede dotarse con el producto interior euclidiano:

$$g_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En este caso, las componentes tienen una expresión muy sencilla, que es $\alpha_{ij} \equiv \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. En otras palabras, el tensor métrico es la matriz identidad en cada punto. Esta métrica recibe el nombre de métrica euclidiana.

Definición 5.3. Sea g una métrica riemanniana. Diremos que g es localmente euclidiana si para cada $p \in M$ existe una vecindad coordenada (U, ϕ) en la cual el tensor métrico es la matriz identidad.

También puede definirse una métrica riemanniana por medio de su tensor métrico. Consideremos el conjunto

$$H^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

Notemos que se puede dar fácilmente un atlas de una sola carta, que genera la estructura diferenciable que hereda de \mathbb{R}^2 . Si además lo dotamos con la métrica riemanniana tal que

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

la variedad resultante se conoce como *plano hiperbólico*, que es el objeto de estudio en la geometría de Lobachevsky. Existen distintos modelos para estudiar esta geometría, algunos de los cuales permiten extender la definición para H^n . Es decir, un espacio hiperbólico de dimensión n .

En el caso en el que M es una superficie regular en \mathbb{R}^3 , cada punto tiene un plano tangente, el cual posee un producto interior, que es el que determina el producto interior euclidiano en \mathbb{R}^3 . Es decir, se consideran los vectores tangentes a la superficie como vectores en \mathbb{R}^3 . Este es el caso que se trata en la geometría diferencial clásica, donde g recibe el nombre de *primera forma fundamental*.

Es importante mencionar que el caso de las superficies en \mathbb{R}^3 se puede generalizar al caso de variedades inmersas en \mathbb{R}^n . En particular, el teorema 4.1 nos permite dotar de una estructura riemanniana a S^n . En la sección 5.1.3 se harán los cálculos explícitamente para S^2 .

Definición 5.4. Diremos que la pareja (M, g) es una variedad riemanniana si M es una variedad diferenciable y g una métrica riemanniana en M .

Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos la notación de pareja y nos referiremos a una variedad riemanniana M sin hacer énfasis en cuál es la métrica riemanniana. De acuerdo a la definición anterior, (\mathbb{R}^n, g) es una variedad riemanniana, donde g es la métrica riemanniana antes mencionada para \mathbb{R}^n . También podemos notar que el plano hiperbólico y cualquier superficie regular en \mathbb{R}^3 son variedades riemannianas.

Una variedad riemanniana es una nueva estructura matemática. Al igual que en el caso de grupos, los homomorfismos son funciones que preservan la estructura algebraica, existen funciones que preservan la estructura riemanniana, es decir, la métrica.

Definición 5.5. Sean (M, g) y (N, h) variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Diremos que f es una isometría si para todo $p \in M$, se cumple:

$$g_p(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) \quad \forall u, v \in T_p M.$$

Definición 5.6. Sean M y N variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Diremos que f es una isometría local si cada $p \in M$ posee una vecindad U tal que $f : U \rightarrow f(U)$ es un difeomorfismo que satisface la condición de isometría en la definición anterior.

Es claro que toda isometría es isometría local en cada punto. También es claro que todos los ejemplos de isometrías de \mathbb{R}^2 estudiados en la sección 3.2 son también ejemplos de isometrías en el sentido de la definición 5.5. En la sección 5.2 veremos ejemplos de isometrías locales que no son isometrías (globales).

Una pregunta natural es si existe una variedad diferenciable que no admita ninguna métrica riemanniana. El siguiente teorema nos dice que en cualquier variedad diferenciable puede definirse una métrica riemanniana.

Teorema 5.1. Sea M una variedad diferenciable. Entonces es posible definir una métrica riemanniana en M .

Demostración

Consideremos un atlas coordinado $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de M localmente finito y $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ la partición de la unidad subordinada a dicho atlas. Definiremos un producto interior g^i en cada U_i . Sean $p \in U_i$ y $X_p, Y_p \in T_p M$. Denotaremos por X_p^*, Y_p^* a los vectores en \mathbb{R}^n con las mismas coordenadas que X_p, Y_p , respecto a la base canónica. Definimos entonces

$$g_p^i(X_p, Y_p) = \langle X_p^*, Y_p^* \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto interior euclidiano en \mathbb{R}^n . Es claro que g^i es una métrica riemanniana en U_i . Ahora definimos g_p en cada punto $p \in M$ como

$$g_p(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) g_p^i(X_p, Y_p).$$

Notemos que g_p está bien definida, debido a que el atlas que tomamos es localmente finito. Además, es claro que g_p es bilineal y simétrica. Para ver que es positiva definida, es suficiente notar que dado un p fijo existe al menos un $j \in \mathbb{N}$ tal que $f_j(p) > 0$. Por lo tanto,

$$g_p(X_p, X_p) \geq 0,$$

y $g_p(X_p, X_p) = 0$ si y sólo si $X_p = 0$, lo que prueba que g_p es positiva definida. La propiedad de diferenciabilidad se sigue directamente de que en cada U_i , g_p^i es una métrica riemanniana y que las funciones f_i son C^∞ .

□

El teorema anterior, que es una aplicación más de la existencia de particiones de la unidad, nos dice que toda variedad diferenciable es en realidad una variedad riemanniana.

La métrica riemanniana en una variedad M también nos permite definir la longitud de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, con α una función C^1 . Definiremos su longitud como

$$L_\alpha = \int_a^b (g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)))^{\frac{1}{2}} dt,$$

donde $\alpha'(t)$ es el vector tangente a la curva α en el punto $\alpha(t)$. Notemos que esta definición es muy similar a la de longitud de una curva en \mathbb{R}^n . Ahora debemos ver que esta definición no depende de la parametrización de la curva α . En efecto, supongamos que $\beta : [c, d] \rightarrow M$ es una reparametrización de la curva, es decir, $\beta = \alpha \circ f$, donde $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección diferenciable. De la definición de vector tangente a la curva y la regla de la cadena se sigue que

$$\beta'(s) = \alpha'(s) \frac{df}{ds},$$

de donde la longitud de la curva β es

$$L_\beta = \int_c^d (g_{\beta(s)}(\beta'(s), \beta'(s)))^{\frac{1}{2}} ds = \int_c^d (g_{\beta(s)}(\alpha'(f(s)), \alpha'(f(s))))^{\frac{1}{2}} \frac{df}{ds} ds,$$

y haciendo el cambio de variable $t = f(s)$, obtenemos que

$$L_\beta = \int_a^b (g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)))^{\frac{1}{2}} dt = L_\alpha.$$

La noción de longitud de curvas en una variedad riemanniana M permite considerar a M como un espacio métrico, cuando M es conexa. Definimos la función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, por medio de la siguiente ecuación:

$$d(p, q) = \inf L_\alpha \quad p, q \in M,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas C^1 que tienen a p como punto inicial y a q como punto final. Para probar que d es una métrica necesitaremos los siguientes lemas. El primero de ellos nos dice que el ínfimo de la definición siempre se alcanza para curvas en \mathbb{R}^n , mientras que el segundo nos da desigualdades que serán de utilidad.

Lema 5.1. *Sea $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 . Entonces la longitud de $x(t)$, con la métrica riemanniana usual, es mayor o igual que $\|x(b) - x(a)\|$.*

Demostración

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $x(a) = 0$, de manera que basta probar que la longitud de $x(t)$ es mayor o igual que $\|x(b)\|$. Sea $x(t) = \lambda(t)\mathbf{u}(t)$, donde $\mathbf{u}(t)$ es un vector unitario para cada $t \in [a, b]$.

Como $\mathbf{u}(t)$ es un vector unitario, entonces para cada t , $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) \rangle = 1$, de donde $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \|x'(t)\|^2 &= \langle x'(t), x'(t) \rangle = \langle \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t), \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t) \rangle \\ &= (\lambda'(t))^2 \|\mathbf{u}(t)\|^2 + (\lambda(t))^2 \|\mathbf{u}'(t)\|^2 = (\lambda'(t))^2 + (\lambda(t))^2 \|\mathbf{u}'(t)\|^2 \geq (\lambda'(t))^2 \quad \forall t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Esto implica que $\|x'(t)\| \geq |\lambda'(t)|$ para todo $t \in [a, b]$. Usando esta propiedad y calculando la longitud de la curva obtenemos:

$$\int_a^b \|x'(t)\| dt \geq \int_a^b |\lambda'(t)| dt \geq \left| \int_a^b \lambda'(t) dt \right| = |\lambda(b) - \lambda(a)|,$$

pero como $x(a) = 0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\lambda(a) = 0$. Por lo tanto,

$$\int_a^b \|x'(t)\| dt \geq \lambda(b) = \|x(b)\| = \|x(b) - x(a)\|.$$

□

El lema anterior nos dice que la curva de longitud menor en \mathbb{R}^n que une a dos puntos es un segmento de recta. Es decir, que cualquier curva que una a dos puntos en \mathbb{R}^n tendrá longitud mayor o igual que la distancia euclidiana entre ellos.

Lema 5.2. Sean M una variedad diferenciable y (U, ϕ) una carta coordenada tal que $\phi(p) = 0$, para algún $p \in M$. Consideremos $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ una curva de longitud L cuyo punto inicial es p , su punto final es q y $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ denota a la curva $\phi \circ \gamma$ en $\phi(U)$. Si $a > 0$ es tal que $\overline{B_a(0)} \subset \phi(U)$, entonces para cada $r \leq a$ existen $m_a, m_r, M_a, M_r > 0$ tales que

$$0 < m_a \|\phi(q)\| \leq m_r \|\phi(q)\| \leq L \leq M_r \int_a^b \|x'(t)\| dt \leq M_a \int_a^b \|x'(t)\| dt.$$

Demostración

Para probar la última propiedad que define una métrica, sea $p \in M$ y (U, ϕ) una vecindad coordenada tal que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Consideremos las funciones $g_{ij} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, las componentes de la métrica en coordenadas locales. Para cada $r \leq a$, definimos el conjunto K_r como

$$K_r = \{(x, \alpha) \mid \|x\| \leq r, \|\alpha\| = 1\}, \quad r \leq a.$$

Es claro que K_r es un compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pues es cerrado y acotado. Por esta razón, la función

$$f(x, \alpha) = \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \right)^{\frac{1}{2}}$$

alcanza su valor máximo M_r y su valor mínimo m_r en K_r . Notemos además que f no puede tomar el valor 0, por lo que

$$0 < m_a \leq m_r \leq f(x, \alpha) \leq M_r \leq M_a \quad \forall (x, \alpha) \in K_r.$$

De aquí podemos obtener que si $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene norma $b \neq 0$, entonces $(x, \frac{\beta}{b}) \in K_r$ para todo $x \in \overline{B_r(0)}$, por lo que se pueden aplicar las desigualdades anteriores y multiplicar por b . Luego,

$$0 < m_a b \leq m_r b \leq f(x, \beta) \leq M_r b \leq M_a b \quad \forall x \in \overline{B_r(0)}.$$

Consideremos ahora una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \phi^{-1}(\overline{B_r(0)}) \subset U$ cuyo punto inicial es p y cuyo punto final es q . Denotaremos por $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a la curva $\phi \circ \gamma$ en $\phi(U)$. No es difícil convencerse que la longitud de γ está dada por

$$L = \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b f(x(t), x'(t)) dt.$$

Luego, por las desigualdades que probamos:

$$0 < m_a \int_a^b \|x'(t)\| dt \leq m_r \int_a^b \|x'(t)\| dt \leq L \leq M_r \int_a^b \|x'(t)\| dt \leq M_a \int_a^b \|x'(t)\| dt.$$

Notemos que $\int_a^b \|x'(t)\| dt$ es la longitud de la curva $x(t)$, por lo que es menor o igual que la longitud de la recta que une a $\phi(p) = 0$ con $\phi(q)$, de donde

$$0 < m_a \|\phi(q)\| \leq m_r \|\phi(q)\| \leq L \leq M_r \int_a^b \|x'(t)\| dt \leq M_a \int_a^b \|x'(t)\| dt,$$

lo que concluye la demostración. □

Proposición 5.2. *La función d como se definió es una métrica para M .*

Demostración

Primero probaremos que la función d siempre está bien definida. Para esto bastará probar que M es conexa por trayectorias. Como M es variedad, es localmente conexa por trayectorias. Sean $p \in M$ y V_p el abierto más grande que sea conexo por trayectorias y que contiene a p (la unión de todos ellos). Demostraremos que $V_p = M$. Supongamos que $V_p \subsetneq M$ y sea

$$Q = \bigcup_{q \neq p} V_q,$$

de manera que $M = P \cup Q$, donde P y Q son abiertos ajenos, lo cual contradice la conexidad de M . Por lo tanto $V_p = M$, lo cual prueba que M es conexa por trayectorias.

De la definición de d , es claro que $d(p, q) \geq 0$ y que $d(p, q) = d(q, p)$ para todo par de puntos $p, q \in M$. Además, para dados tres puntos $p, q, r \in M$ y cada $\epsilon > 0$, existen una curva α de p a q y una curva β de q a r , tales que

$$L_\alpha = d(p, q) + \epsilon, \quad L_\beta = d(q, r) + \epsilon.$$

Luego, el producto de estas dos trayectorias (como se definió en la sección 2.2.1) es una curva de p a r cuya longitud es $L_\alpha + L_\beta$. Por lo tanto,

$$d(p, r) \leq L_\alpha + L_\beta = d(p, q) + d(q, r) + 2\epsilon,$$

lo que implica que $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$, que es la desigualdad del triángulo.

Supongamos ahora que $p \neq q$. Entonces $q \in \phi^{-1}(B_r(0))$ para algún $0 < r \leq a$. Sea $q' = \gamma(c)$ el primer punto sobre la curva γ que no pertenece a $\phi^{-1}(B_r(0))$, es decir, el primer punto sobre la curva tal que $\|\phi(q')\| = r$. Si L' es la longitud de la curva $\gamma(t)$ con $a \leq t \leq c$, entonces $L' \leq L$. Luego, del lema 5.2 obtenemos que

$$0 < m_a r \leq L' \leq L,$$

de donde podemos concluir que $d(p, q) > 0$. Esto prueba que si $d(p, q) = 0$, entonces necesariamente $p = q$, que es lo que faltaba probar. □

La proposición anterior nos dice que una métrica riemanniana sobre una variedad diferenciable M determina una métrica en M , es decir, que una variedad riemanniana puede considerarse como espacio métrico. Esta métrica, a su vez, define una topología en M (la topología de espacio

métrico). Si esta nueva topología no coincide con la que ya tenía asignada M , entonces el espacio métrico y la variedad son objetos distintos. La siguiente proposición nos dice que esto no puede pasar.

Proposición 5.3. *La topología que define d en M coincide con la topología que ya tenía asignada.*

Demostración

Sean $p \in M$ y (U, ϕ) una carta coordenada tal que $\phi(p) = 0$. Dada una vecindad V cualquiera de p , podemos tomar un abierto contenido en V lo suficientemente pequeño para que también esté contenido en U . Entonces existe $r > 0$ tal que $V_r = \phi^{-1}(B_r(0)) \subset U \cap V$. Veamos que V_r contiene una bola con centro en p y radio $\epsilon > 0$ (con la métrica que definimos en M). En efecto, pues si $\epsilon < m_a r$ y $q \in V_r$, entonces $\|\phi(q)\| \leq r$. Por el lema 5.2, tenemos

$$0 < m_a \|\phi(q)\| \leq L_\gamma.$$

Luego, $m_a \|\phi(q)\| \leq d(p, q) < m_a r$, de donde concluimos que $q \in V_r$ y $B_\epsilon(p) \subset V_r$.

Ahora veamos que dado V_r de la misma forma, podemos encontrar una bola de radio $\epsilon' > 0$ que contiene a V_r . En efecto, si $\epsilon' > M_a r$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{V}_r$ es una curva cuyo punto inicial es p y cuyo punto final es q , entonces por el lema 5.2 tenemos

$$d(p, q) \leq L_\gamma \leq M_a \int_a^b \|x'(t)\| dt.$$

Tomando ínfimo sobre las curvas γ , obtenemos que $d(p, q) \leq M_a \|\phi(q)\| < M_a r < \epsilon'$, de donde $V_r \subset B_{\epsilon'}(p)$. Esto prueba que la topología inducida por la métrica y la topología de M coinciden.

□

Una estructura riemanniana sobre una variedad M permite definir otro concepto geométrico de gran importancia: el de ángulo entre dos curvas. Recordemos que un producto interior en un espacio vectorial permite definir el ángulo entre dos vectores. Dadas dos curvas que se intersectan en el punto p , definiremos el ángulo entre ellas como el ángulo entre los vectores tangentes a tales curvas en el punto p .

Por último, cabe mencionar que si M y N son variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ es una isometría, entonces para cualquier curva α en M , su longitud y la longitud de $f \circ \alpha$ coinciden. Esta es una implicación directa de la definición de isometría y de longitud. Por lo tanto, podemos concluir que f también es isometría con las métricas inducidas por la estructura riemanniana. Esto es, que si d_M y d_N son tales métricas, entonces

$$d_M(p, q) = d_N(f(p), f(q)) \quad \forall p, q \in M.$$

5.1.2 Derivada Covariante y Geodésicas

Cuando se estudian espacios vectoriales en álgebra lineal, la importancia de dotarlos con un producto interior es que pueden estudiarse conceptos geométricos, como el ángulo entre dos vectores. En el caso de variedades diferenciables, la existencia de una métrica riemanniana permite también definir conceptos geométricos como ángulos o longitud de curvas. En esta sección nos centraremos en el estudio del análogo de las líneas rectas en una variedad, conocidas como geodésicas.

Primeramente estudiaremos la diferenciación de campos vectoriales en una variedad, ya que esto nos permitirá dar una definición precisa de lo que es una geodésica. Para establecer ideas, consideremos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ y $V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial sobre la curva γ , tal que para cada $t \in [0, 1]$, $V(t) \in T_{\gamma(t)}S$. El vector $\frac{dV}{dt}$ no necesariamente pertenece también a $T(S)$, por lo que la derivada de campos vectoriales no es una propiedad intrínseca de S . Sin embargo, la proyección ortogonal del vector $\frac{dV}{dt}$ sí pertenece a $T(S)$ para cada t . Este campo vectorial, llamado *derivada covariante*, será generalizado a variedades riemannianas. Para esto consideraremos lo que es una conexión afín.

Definición 5.7. Sean M una variedad diferenciable y $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en M . Una conexión afín en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, denotada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, que satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
- (b) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
- (c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$,

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$, funciones diferenciables.

La siguiente proposición hace más clara la idea de esta definición.

Proposición 5.4. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Entonces para cada curva diferenciable $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial V sobre γ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ sobre γ , tal que:

- (a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- (b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$.
- (c) Si $V(t) = Y(\gamma(t))$, donde $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}Y$.

Demostración

Sea (U, ϕ) una carta coordenada tal que $\gamma([0, 1]) \cap U \neq \emptyset$. Entonces el campo vectorial V puede

expresarse, para cada $t \in [0, 1]$, por medio de la ecuación

$$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) E_i(\gamma(t)),$$

donde v_1, \dots, v_n , son funciones diferenciables con valores reales. Además, la curva γ en coordenadas locales puede ser expresada como $(\phi \circ \gamma)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Supongamos que existe la correspondencia de la conclusión de la proposición. Probaremos que es la única que satisface dichas propiedades. Por las propiedades (a) y (b), tenemos entonces que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} E_j + \sum_{j=1}^n v_j \frac{DE_j}{dt}.$$

Luego, por la propiedad (c), para cada $j = 1, \dots, n$:

$$\frac{DE_j}{dt} = \nabla_{\gamma(t)} E_j = \nabla_{\sum \frac{dx_i}{dt} E_i} E_j = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \nabla_{E_i} E_j.$$

De aquí se sigue que $\frac{DV}{dt}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} E_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{E_i} E_j.$$

Esta última expresión muestra que la correspondencia es única, ya que necesariamente es la que se indica. Además, nos permite probar la existencia ya que dentro de la carta coordenada U podemos definir $\frac{DV}{dt}$ por medio de dicha expresión. Un argumento similar al que se usó para probar la existencia en la proposición 5.1, nos permite extender $\frac{DV}{dt}$ a toda la variedad M .

□

Esta proposición muestra que la elección de una conexión afín en M permite definir una derivada de campos vectoriales sobre curvas, con las propiedades deseables (a) y (b). Esta derivada recibe el nombre de *derivada covariante*. Esta noción permite considerar la aceleración de una curva, así como el concepto de paralelismo de campos vectoriales.

Definición 5.8. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Un campo vectorial V sobre la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ se llama paralelo si $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

El siguiente lema muestra que dado un vector tangente V_0 a M sobre una curva γ , siempre existe un campo vectorial paralelo, tal que coincide con V_0 en un punto. Este campo vectorial recibe el nombre *transporte paralelo de V_0 a lo largo de γ* .

Lema 5.3. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Sean $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable en M y $V_0 \in T_{\gamma(t_0)} M$, un vector tangente a M en $\gamma(t_0)$, con $t_0 \in [0, 1]$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo V sobre la curva γ , tal que $V(t_0) = V_0$.

Demostración

Primero supongamos que el lema ya fue probado para el caso en el que $\gamma([0, 1])$ está contenido en una carta coordenada. Entonces para cada $t_1 \in [0, 1]$, $\gamma([t_0, t_1])$ es un compacto, por lo que puede ser cubierto por una cantidad finita de vecindades coordenadas. Por nuestra hipótesis, V puede definirse en cada una de estas vecindades. Como es de manera única, estas definiciones coinciden en las intersecciones, lo cual nos permite extender la definición a todo $[t_0, t_1]$.

Será suficiente entonces probar el lema para el caso cuando $\gamma([0, 1])$ está contenido en una carta coordenada (U, ϕ) . Supongamos que $(\phi \circ \gamma)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ y que

$$V_0 = \sum_{j=1}^n v_j^0 E_j(\gamma(t_0)).$$

Buscamos un campo vectorial V que satisfaga $\frac{DV}{dt} = 0$. Si en la carta coordenada U , el campo vectorial V tiene la representación

$$V = \sum_{j=1}^n v_j E_j,$$

entonces la condición $\frac{DV}{dt} = 0$ puede ser reescrita como

$$\sum_{k=1}^n \frac{dv_k}{dt} E_k + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{E_i} E_j = 0.$$

Si además, $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$, donde las Γ_{ij}^k son funciones diferenciables, entonces la condición es

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) E_k = 0,$$

lo cual es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx_i}{dt} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

con las condiciones iniciales $v_k(t_0) = v_k^0$ para $k = 1, \dots, n$. De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que la solución existe y es única. Esto garantiza la existencia y unicidad del campo vectorial V buscado.

□

Las funciones Γ_{ij}^k que aparecieron en esta demostración se llaman *símbolos de Christoffel* y son de gran utilidad al estudiar una variedad riemanniana. En la geometría diferencial clásica se estudian estas funciones para superficies en \mathbb{R}^3 .

Es importante notar que dada una conexión afin sobre una variedad, ésta permite hablar sobre el paralelismo de campos vectoriales sobre curvas, la cual es deseable que concuerde con la geometría que establece la métrica riemanniana en la variedad. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.9. Sea (M, g) una variedad riemanniana con una conexión afín ∇ . Diremos que ∇ es compatible con g si para cualesquiera curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, y campos vectoriales V, W sobre γ , se tiene que $g(V, W)$ es una función constante en $\gamma([0, 1])$.

De entrada no es claro que en cualquier variedad riemanniana se pueda definir una conexión afín compatible con su métrica riemanniana. En efecto, este es un teorema de gran importancia en la Geometría Riemanniana, el cual fue probado por el matemático italiano Tullio Levi-Civita. Para probarlo, primero necesitaremos un par de caracterizaciones de las conexiones afines compatibles con una métrica riemanniana.

Lema 5.4. Sea (M, g) una variedad riemanniana con una conexión afín ∇ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) ∇ es compatible g .

(b) Para cualesquiera campos vectoriales V, W sobre la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, se cumple que

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right).$$

(c) Para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se satisface la ecuación

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Demostración

Primero probaremos que (a) y (b) son equivalentes. Es claro que (b) implica (a), por lo que solamente probaremos que (a) implica (b). Sea $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ una base ortonormal de $T_{\gamma(t_0)}M$, $t_0 \in [0, 1]$. Por el lema 5.3, se pueden extender los vectores $P_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$, a toda la curva γ por transporte paralelo. Como ∇ es compatible con g , entonces $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in [0, 1]$. Luego, podemos representar a los campos vectoriales V, W como

$$V = \sum_{i=1}^n v_i P_i, \quad W = \sum_{i=1}^n w_i P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde v_i y w_i son funciones diferenciables en $[0, 1]$ para cada i . Como P_i es paralelo para cada i , entonces $\frac{DP_i}{dt} = 0$, por lo que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dv_i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dw_i}{dt} P_i.$$

De estas expresiones se sigue que

$$g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i\right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n v_i w_i\right) = \frac{d}{dt} g(V, W),$$

lo cual prueba que (a) y (b) son equivalentes. A continuación probaremos que (a) y (c) también lo son.

Supongamos que ∇ es compatible con g y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable con $\gamma(t_0) = p$, $t_0 \in [0, 1]$ y tal que $X(p) = \gamma'(t_0)$. Entonces

$$X(p)g(Y, Z) = \left. \frac{d}{dt}g(Y, Z) \right|_{t=t_0} = g(\nabla_{X(p)}Y, Z)(p) + g(Y, \nabla_{X(p)}Z)(p).$$

Como p es arbitrario, concluimos que (a) implica (c). Un argumento similar (pero en el sentido inverso) prueba que (c) implica (a), lo cual concluye la demostración. \square

Otra propiedad que puede tener una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable M es la de ser *simétrica*, la cual definimos a continuación.

Definición 5.10. Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M se dice ser simétrica si para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se satisface la ecuación:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Notemos que si una conexión afín ∇ es simétrica, entonces en cualquier carta coordenada (U, ϕ) se satisface que

$$\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = [E_i, E_j] = 0,$$

o equivalentemente, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ para cada $i, j, k = 1, \dots, n$. Esta es la razón por la que recibe el nombre de conexión afín simétrica. Ahora ya podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.2. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces existe una única conexión afín ∇ , simétrica y compatible con g .

Demostración

Primero supongamos que existe ∇ como en la conclusión del teorema. Por el lema 5.4, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se satisfacen las ecuaciones:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X),$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Sumando las primeras dos ecuaciones, y luego restando la última, obtenemos

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z) + 2g(Z, \nabla_Y X),$$

o equivalentemente,

$$g(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z)\}.$$

Esta última expresión muestra que ∇ está determinada de manera única por g . Esto prueba que si ∇ existe, entonces debe ser única (la que tenga esa expresión). Además, esta misma ecuación (llamada fórmula de Koszul) nos permite definir ∇ en general: que satisfaga tal fórmula. Se puede verificar mediante algunos cálculos que de tal forma ∇ está bien definida y satisface las propiedades deseadas.

□

Hemos probado que dada una variedad riemanniana, siempre existe una única conexión afín con las propiedades mencionadas. Esta conexión recibe el nombre de *conexión riemanniana de M* . Como ésta se deriva de la estructura riemanniana, será la conexión afín que consideraremos de aquí en adelante. Como una consecuencia de este teorema, tenemos que los símbolos de Christoffel en una carta coordenada (U, ϕ) dependen solamente de los coeficientes g_{ij} en U .

Corolario 5.1. Sean (M, g) una variedad riemanniana y (U, ϕ) una carta coordenada con coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) . Si (g^{ij}) denota la matriz inversa de (g_{ij}) , entonces para cada $i, j, m = 1, \dots, n$, se cumple la ecuación:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}.$$

Demostración

Sean E_1, \dots, E_n los campos vectoriales canónicos asociados a la carta coordenada (U, ϕ) , es decir $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Sabemos que $[E_i, E_j] = 0$ y que $g(E_i, E_j) = g_{ij}$, para todos los índices i, j . Por lo tanto, usando la última ecuación de la demostración del teorema 5.2, obtenemos

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right).$$

La parte izquierda puede escribirse como un producto de matriz por vector, de la siguiente manera:

$$[\Gamma_{ij}^1, \dots, \Gamma_{ij}^n] \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

y multiplicando por la matriz (g^{ij}) por el lado derecho, se obtiene la conclusión del corolario.

□

El desarrollo que hemos hecho hasta ahora en esta sección ha sido únicamente para poder dar una definición precisa de lo que es una geodésica. Intuitivamente, se trata de una curva cuya aceleración es 0. Recordemos que el concepto de aceleración lo da una conexión afín, para lo cual consideraremos la conexión riemanniana.

Definición 5.11. Sean M una variedad riemanniana y $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable. Diremos que γ es una geodésica si $\frac{D}{dt}(\gamma'(t)) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Nuestro objetivo ahora será encontrar ecuaciones que nos faciliten estudiar la existencia de geodésicas en una variedad riemanniana. Sea (U, ϕ) una vecindad coordenada de $\gamma(t_0)$, con $t_0 \in [a, b]$ y supongamos que $(\phi \circ \gamma)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Entonces

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} E_i.$$

Recordando la expresión que obtuvimos en la demostración del lema 5.3 para $\frac{DV}{dt} = 0$, la condición $\frac{D}{dt}(\gamma'(t))$ puede ser reescrita como

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) E_k = 0,$$

o equivalentemente, como el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Notamos que es un sistema de n ecuaciones de segundo orden, por lo que dadas las condiciones iniciales $x_k(t_0)$ y $\frac{dx_k}{dt}(t_0)$ para $k = 1, \dots, n$, podemos asegurar (al menos localmente) la existencia y unicidad de la solución y por lo tanto, la existencia y unicidad de una geodésica. Es decir, que si escogemos un punto y una velocidad, existe una única geodésica que pasa por dicho punto con dicha velocidad.

Es fácil notar que las geodésicas en \mathbb{R}^n son las rectas. Esto es claro, ya que son las curvas con aceleración 0. Esto nos permite hacer la analogía con una variedad riemanniana, de manera que en ocasiones las geodésicas en una variedad reciben el nombre de rectas en dicha variedad.

En la geometría diferencial clásica se estudian las geodésicas de superficies en \mathbb{R}^3 . La definición de geodésica que hemos dado es equivalente a cualquiera de las que pueden darse para superficies. En tal caso se obtienen distintos ejemplos, como las geodésicas en la esfera \mathbb{S}^2 , que son los círculos de radio máximo. En la siguiente sección se calcularán las geodésicas en la variedad \mathbb{S}^2 , mientras que en la sección 5.2 estudiaremos más ejemplos de geodésicas. En la referencia [8] de la bibliografía pueden encontrarse el cálculo de las geodésicas en otros ejemplos de variedades con ilustraciones geométricas.

Las geodésicas pueden ser caracterizadas como las curvas de menor longitud que unen a dos

puntos dados (al menos localmente). La demostración de este hecho requiere un desarrollo mucho más exhaustivo de las propiedades de las geodésicas, el cual se aleja del objetivo de este trabajo. Las referencias [3] y [18] de la bibliografía presentan este desarrollo, así como otras propiedades de importancia en el estudio de geodésicas.

5.1.3 Geodésicas en \mathbb{S}^2

Como ya se ha mencionado, puede utilizarse la estructura de \mathbb{R}^{n+1} para dotar a \mathbb{S}^n con una métrica riemanniana. En esta sección haremos los cálculos para el caso $n = 2$. Consideremos el atlas coordinado para \mathbb{S}^2 que se dió en la sección 4.1.1. Consideraremos las cartas $U_3^+ = \mathbb{S}^2 \cap \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 > 0\}$, $U_2^+ = \mathbb{S}^2 \cap \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 > 0\}$, con sus respectivas funciones coordenadas

$$\begin{aligned}\phi_3(x_1, x_2, x_3) &= (u_1, u_2) = (x_1, x_2), & \phi_3^{-1}(u_1, u_2) &= \left(u_1, u_2, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}\right), \\ \phi_2(x_1, x_2, x_3) &= (v_1, v_2) = (x_1, x_3), & \phi_2^{-1}(v_1, v_2) &= \left(v_1, \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}, v_2\right).\end{aligned}$$

Las curvas coordenadas en cada punto $(u_1, u_2) \in \phi_3(U_3^+)$ son $\alpha(t) = (u_1, u_2 + t)$ y $\beta(t) = (u_1 + t, u_2)$. Luego,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t) &= (\phi_3^{-1} \circ \alpha)(t) = \left(u_1 + t, u_2, \sqrt{1 - (u_1 + t)^2 - u_2^2}\right), \\ \tilde{\beta}(t) &= (\phi_3^{-1} \circ \beta)(t) = \left(u_1, u_2 + t, \sqrt{1 - u_1^2 - (u_2 + t)^2}\right).\end{aligned}$$

Calculando los vectores tangentes en \mathbb{R}^3 a las curvas $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ en $t = 0$, obtenemos una base para el espacio tangente a \mathbb{S}^2 en $\phi_3^{-1}(u_1, u_2)$. Estos vectores son

$$E_1 = (1, 0, -u_1(1 - u_1^2 - u_2^2)^{-\frac{1}{2}}), \quad E_2 = (0, 1, -u_2(1 - u_1^2 - u_2^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

Por lo tanto, podemos calcular el tensor métrico en el punto con coordenadas locales (u_1, u_2) , que es la matriz (g_{ij}) , cuyas entradas son:

$$g_{11} = 1 + \frac{u_1^2}{1 - u_1^2 - u_2^2}, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{u_1 u_2}{1 - u_1^2 - u_2^2}, \quad g_{22} = 1 + \frac{u_2^2}{1 - u_1^2 - u_2^2}.$$

Un cálculo similar muestra que el tensor métrico en coordenadas (v_1, v_2) es la matriz (g'_{ij}) cuyas entradas son:

$$g'_{11} = 1 + \frac{v_1^2}{1 - v_1^2 - v_2^2}, \quad g'_{12} = g'_{21} = \frac{v_1 v_2}{1 - v_1^2 - v_2^2}, \quad g'_{22} = 1 + \frac{v_2^2}{1 - v_1^2 - v_2^2}.$$

Notemos que $(u_1, u_2) = (v_1, (1 - v_1^2 - v_2^2)^{\frac{1}{2}})$, por lo que la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v_1}{(1 - v_1^2 - v_2^2)^{\frac{1}{2}}} & -\frac{v_2}{(1 - v_1^2 - v_2^2)^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}.$$

Haciendo cálculos y usando la fórmula para la transformación de coordenadas, es fácil observar que se satisface la ecuación

$$A^t(g_{ij})A = (g'_{ij}),$$

lo que concuerda con la fórmula de cambio de coordenadas que obtuvimos en la sección 5.1.1. De manera similar se pueden hacer todos los cambios de coordenadas posibles.

Una vez calculado el tensor métrico en cada carta coordenada, pueden calcularse las ecuaciones para geodésicas. Sin embargo, las ecuaciones para geodésicas usando el sistema de coordenadas que hemos usado son ecuaciones de grado superior a 2, lo cual las vuelve muy complicadas de resolver. Lo que se hace normalmente es considerar coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 en lugar de coordenadas cartesianas. Desde luego que para esto se considera un atlas diferente, el cual puede reducirse hasta solamente dos cartas. Consideremos el abierto en el plano

$$\phi(U) = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

y la función $\phi^{-1}(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } v \text{ sen } u, \cos u)$. Es claro que el abierto U es \mathbb{S}^2 menos un semicírculo, de manera que se puede construir otra carta (V, ψ) , de manera similar, de tal forma que $\mathbb{S}^2 = U \cup V$.

Utilizando coordenadas esféricas, es fácil verificar que la base para el espacio tangente en el punto $\phi^{-1}(u, v)$ está dada por los vectores

$$E_1 = (\cos u \cos v, \text{sen } v \cos u, -\text{sen } u), \quad E_2 = (-\text{sen } u \text{ sen } v, \cos v \text{ sen } u, 0).$$

De aquí que el tensor métrico en el punto con coordenadas locales (u, v) es la matriz (g_{ij}) cuyas entradas son:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \text{sen}^2 u.$$

Luego, es fácil calcular su inversa, que es la matriz (g^{ij}) , cuyas entradas son:

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{\text{sen}^2 u}.$$

Una vez calculadas las matrices (g_{ij}) y (g^{ij}) , podemos calcular con facilidad los símbolos de Christoffel, de acuerdo a la fórmula del corolario 5.1. Se obtiene:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \text{sen } 2u, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\tan u}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones para geodésicas son:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \text{sen } 2u = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \cot u = 0.$$

Busquemos primero las geodésicas que salen del polo norte. Es decir, que una de las condiciones iniciales es $(u(0), v(0)) = (0, v_0)$, para alguna constante v_0 . En este caso, una solución es $u = t + u_0$, $v = v_0$. Esto significa que la curva $\gamma(t) = \phi^{-1}(u(t), v(t))$ es un círculo de radio máximo. Más aún, cualquier punto puede considerarse como el polo norte, por lo que podemos concluir que todas las geodésicas son círculos de radio máximo (sólo tiene que aplicarse una transformación para que dado un punto y un vector velocidad, éstos se transformen a las condiciones para los cuales ya se resolvió el problema).

5.2 Estructuras Riemannianas y Geodésicas en Variedades Cociente

En esta sección estudiaremos los conceptos de la sección anterior (métricas riemannianas y geodésicas) en variedades de la forma M/Γ , donde M es una variedad riemanniana y Γ es un grupo que actúa libre, propia y discontinuamente sobre M . Primeramente veremos bajo qué condiciones la variedad cociente hereda una métrica riemanniana natural de la de M para posteriormente estudiar cómo obtener geodésicas en M/Γ a partir de las geodésicas en M .

Recordemos que en el capítulo 2 pudimos construir un nuevo espacio topológico a partir de uno dado, mediante la acción de un grupo por medio de homeomorfismos. En el capítulo 4 pudimos hacer lo mismo con variedades diferenciables mediante la acción de un grupo por medio de difeomorfismos. En ambos casos lo que se hace es preservar la estructura que se pretende definir. Es de esperarse entonces que para construir una nueva variedad riemanniana de la misma manera, deba hacerse mediante la acción de un grupo por medio de isometrías.

Definición 5.12. Sean (M, g) una variedad riemanniana y Γ un grupo que actúa sobre M . Si para cada $h \in \Gamma$ la función θ_h es una isometría, diremos que g es Γ -invariante.

El nombre Γ -invariante se debe a que la métrica es preservada por la acción, lo cual es muy natural. Esta es la única condición extra que se necesita para la acción de Γ sobre M para poder definir una métrica riemanniana de manera natural en la variedad M/Γ , tal y como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 5.3. Sean (M, g) una variedad riemanniana y Γ un grupo discreto que actúa libre, propia y discontinuamente de manera que g es Γ -invariante. Entonces $\tilde{M} = M/\Gamma$ hereda una métrica riemanniana \tilde{g} tal que la proyección natural π es una isometría local.

Demostración

Por el teorema 4.5, sabemos que \tilde{M} posee una única estructura diferenciable tal que la proyección natural $\pi : M \rightarrow \tilde{M}$ es un recubrimiento. Veremos que existe solamente una métrica riemanniana \tilde{g} en \tilde{M} tal que π es además una isometría local.

Sea $\tilde{p} = \Gamma p \in \tilde{M}$ y $u, v \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Definiremos $\tilde{g}_{\tilde{p}}(u, v)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{g}_{\tilde{p}}(u, v) = g_p((d\pi_p)^{-1}(u), (d\pi_p)^{-1}(v)).$$

Notemos que esta definición no depende del representante p de \tilde{p} . En efecto, como g es Γ -invariante, si $\pi(p_1) = \pi(p_2) = \tilde{p}$, entonces existe $h \in \Gamma$ tal que $\theta_h(p_1) = p_2$. Sean U_1 y U_2 vecindades de p_1 y p_2 respectivamente, tales que $\pi|_{U_1}$ y $\pi|_{U_2}$ son difeomorfismos sobre su imagen. Denotaremos por $d\pi_1$ al diferencial de $\pi|_{U_1}$ en p_1 y por $d\pi_2$ al de $\pi|_{U_2}$ en p_2 . Usando la definición de diferencial de un difeomorfismo, no es difícil convencerse que $(d\theta_h) \circ (d\pi_1)^{-1} = (d\pi_2)^{-1}$. Luego, como θ_h es isometría, se sigue que

$$g_{p_1}((d\pi_1)^{-1}(u), (d\pi_1)^{-1}(v)) = g_{p_2}(d\theta_h((d\pi_1)^{-1}(u)), d\theta_h((d\pi_1)^{-1}(v))) = g_{p_2}((d\pi_2)^{-1}(u), (d\pi_2)^{-1}(v)),$$

lo cual prueba que \tilde{g} está bien definida.

Como $d\pi_1$ y $d\pi_2$ son funciones C^∞ , se sigue directamente también que \tilde{g} varía de manera suave al variar p . Por lo tanto, \tilde{g} es una métrica riemanniana para \tilde{M} . Para ver que con esta métrica la proyección natural π resulta ser una isometría local, es suficiente considerar la vecindad donde es un difeomorfismo. Usando la notación en el párrafo anterior, tenemos que para cada $u, v \in T_{p_1}M$,

$$g_{p_1}(u, v) = g_{p_1}((d\pi_1)^{-1}(d\pi_1(u)), (d\pi_1)^{-1}(d\pi_1(v))) = \tilde{g}_{\tilde{p}}(d\pi_1(u), d\pi_1(v)),$$

lo cual concluye la demostración del teorema. □

Notemos que la métrica que hereda la variedad cociente en el teorema anterior es localmente la misma que tiene la variedad recubridora. Esto nos hace darle especial importancia al caso cuando la variedad $M = \mathbb{R}^n$, el espacio euclidiano. En este caso, la variedad \tilde{M} posee una métrica riemanniana localmente euclidiana. El siguiente corolario muestra ejemplos de esto.

Corolario 5.2. *El cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein poseen una métrica riemanniana localmente euclidiana.*

Demostración

Será suficiente verificar que las acciones que definen a estas variedades son por medio de isometrías. De esta manera podremos aplicar el teorema 5.3. En efecto, notemos que para el cilindro y el toro, el diferencial de θ_h está dado por

$$d\theta_h(x, y) = (x, y),$$

para cada $h \in \Gamma$. Como en cada punto, el espacio tangente es \mathbb{R}^2 con el producto interior euclidiano, es claro que la métrica se conserva y por lo tanto, θ_h es una isometría. En el caso de la banda de Möbius y la botella de Klein, para algunos $h \in \Gamma$, la expresión de $d\theta_h$ será la misma que para el cilindro y el toro, mientras que para otros será

$$d\theta_h(x, y) = (x, -y).$$

En cualquier caso, la métrica se conserva y concluimos que la banda de Möbius y la botella de Klein también se obtienen mediante isometrías. Por lo tanto, heredan una métrica riemanniana que localmente es igual a la de \mathbb{R}^2 , es decir, localmente euclidiana. □

Ahora veremos cómo pueden encontrarse las geodésicas en la variedad $\widetilde{M} = M/\Gamma$, conociendo las geodésicas en M . Lo más natural es que las geodésicas en \widetilde{M} resulten ser las proyecciones bajo π de las geodésicas en M . Consideremos una variedad riemanniana (M, g) y un grupo Γ que actúa libre, propia y discontinuamente sobre M , de manera que g es Γ -invariante. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4. *Sea $\tilde{\gamma}$ una geodésica en $\widetilde{M} = M/\Gamma$. Entonces existe una geodésica γ en M tal que $\tilde{\gamma} = \pi \circ \gamma$. Además, si γ es una geodésica en M , entonces $\pi \circ \gamma$ es una geodésica en \widetilde{M} .*

Demostración

Recordemos que una curva $\gamma(t)$, que tiene coordenadas locales $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, es una geodésica si y sólo si se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Además, sabemos que localmente M y \widetilde{M} tienen las mismas coordenadas locales, de manera que las ecuaciones para geodésicas son las mismas en M y \widetilde{M} son las mismas, excepto quizá por los símbolos de Christoffel. Sin embargo, por el corolario 5.1, éstos dependen únicamente de la métrica riemanniana, la cual es localmente la misma en M y en \widetilde{M} . Por lo tanto, las ecuaciones para geodésicas son las mismas en M y en \widetilde{M} . Esto significa que si γ es una geodésica en M , entonces $\pi \circ \gamma$ es una geodésica en \widetilde{M} , mientras que si $\tilde{\gamma}$ es una geodésica en \widetilde{M} , entonces $\pi_U^{-1}(\tilde{\gamma})$ es una geodésica en M , donde U es un abierto en el cual π es una isometría. □

El teorema anterior nos permitirá estudiar las geodésicas en el cilindro, la banda de Möbius, el toro, la botella de Klein y el espacio proyectivo. Cada uno de estos espacios presenta distintos tipos de geodésicas, algunas de las cuales tienen características distintas a las del plano euclidiano (globalmente).

Lo primero que hay que notar es que el teorema 5.4 es válido localmente. Es decir, que localmente las geodésicas de \widetilde{M} tienen las mismas propiedades que las de M . En particular, para el caso del cilindro, banda de Möbius, toro y botella de Klein, las geodésicas son la imagen bajo la proyección natural de los segmentos de recta contenidos en el abierto adecuado de \mathbb{R}^2 (cuando se considera con la métrica euclidiana). Sin embargo, cualquier segmento cerrado y acotado puede ser cubierto con una cantidad finita de estos abiertos en \mathbb{R}^2 , de manera que la imagen de cualquier

segmento de recta es una geodésica en \widetilde{M} . Además, la longitud se preserva. En la siguiente sección estudiaremos las imágenes de rectas bajo la proyección natural en todos estos casos, así como las geodésicas en el espacio proyectivo.

5.3 Ejemplos

En la sección anterior demostramos que el cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein poseen una métrica localmente euclidiana. Es importante notar que esta proposición se obtuvo considerando a \mathbb{R}^2 con la métrica euclidiana. Sin embargo, si consideráramos a esta variedad con otra métrica (no necesariamente la euclidiana), entonces las respectivas variedades cociente heredarían una métrica distinta. A continuación presentamos un estudio sobre las posibles métricas riemannianas en cada uno de estos ejemplos, así como de sus geodésicas.

Supongamos que \mathbb{R}^2 está dotado con una métrica riemanniana cuyo tensor métrico es la matriz (g_{ij}) . Para que esta métrica genere una métrica riemanniana en la variedad cociente, debe ser Γ -invariante. Esto puede traducirse al lenguaje del tensor métrico como la condición

$$A^t(g_{ij}(\theta_h(x_1, x_2)))A = (g_{ij}(x_1, x_2)) \quad \forall h \in \Gamma,$$

donde A es la matriz jacobiana de θ_h . Más aún, si Γ es generado por un conjunto S , es suficiente que se satisfaga la condición para cada $h \in S$. Esto es claro, ya que si se satisface para los generadores se satisface para cualquier elemento de Γ .

5.3.1 Cilindro

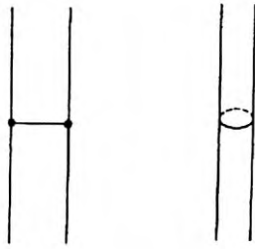
Para el caso del cilindro, sabemos que $\Gamma = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ y que $\theta_1(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$, por lo que su matriz jacobiana es la matriz identidad. Luego, para que (g_{ij}) genere una métrica riemanniana en el cilindro, es necesario que

$$\begin{bmatrix} g_{11}(x_1 + 1, x_2) & g_{12}(x_1 + 1, x_2) \\ g_{21}(x_1 + 1, x_2) & g_{22}(x_1 + 1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2) & g_{12}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) & g_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

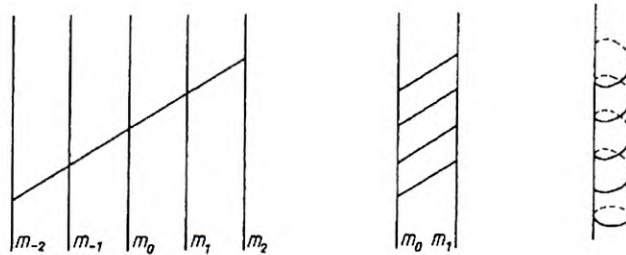
Es decir, necesitamos que las funciones g_{ij} sean periódicas en la primer componente (con período 1) para cada $i, j = 1, 2$. Es claro que la métrica euclidiana satisface esta condición.

Ahora veamos cómo son las geodésicas en el cilindro cuando se considera la métrica euclidiana en \mathbb{R}^2 . Ya se ha mencionado que las geodésicas en el cilindro son las proyecciones de rectas en el plano euclidiano localmente. Sin embargo, cuando se estudian de manera global, estas propiedades pueden no conservarse.

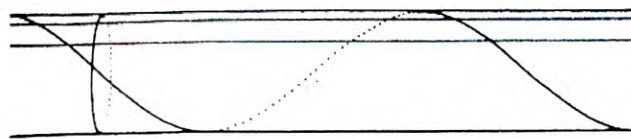
Primeramente notemos que hay tres tipos de rectas en \mathbb{R}^2 que tienen imágenes esencialmente distintas bajo la proyección natural. El primer caso son las rectas paralelas al eje x , que bajo la proyección natural forman círculos alrededor del cilindro. La siguiente figura muestra cómo se ven estas rectas en la región fundamental, seguido de cómo se ven en el cilindro.



El segundo caso son las rectas que no son paralelas a ningún eje, que bajo la proyección natural forman hélices sobre el cilindro. La siguiente figura muestra una de estas rectas sobre el plano marcado por distintas regiones fundamentales, seguido de cómo se ve tal recta en una de ellas y finalmente cómo se ve sobre el cilindro.



El último caso son las rectas que son paralelas al eje y , que bajo la proyección natural forman curvas que recorren el cilindro a todo su largo. La siguiente figura muestra los tres tipos de geodésicas que pueden formarse en el cilindro.



Es importante señalar algunas diferencias que tienen las geodésicas en el cilindro con las del plano euclidiano a nivel global. Una primer diferencia es que dados dos puntos en el cilindro, puede haber más de una geodésica que pasa por ellos. Por ejemplo, los puntos $\pi(0, 0)$ y $\pi(1, 1)$ pueden ser unidos por $\pi(L)$ y $\pi(L')$, donde L es la recta $y = x$ y L' es la recta $x = 1$. Este mismo ejemplo sirve para notar que dos geodésicas pueden intersectarse en más de un punto.

Otra diferencia es que hay geodésicas de longitud finita y de longitud infinita. Un ejemplo de longitud finita es $\pi(L)$, donde L es cualquier recta paralela al eje x , mientras que un ejemplo de longitud infinita es $\pi(L')$, donde L' es cualquier recta paralela al eje y .

5.3.2 Banda de Möbius

En el caso de la banda de Möbius, también $\Gamma = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, pero en este caso $\theta_1(x_1, x_2) = (x_1 + 1, -x_2)$. Por lo tanto, la matriz jacobiana J_1 de θ_1 es

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego, haciendo la multiplicación de matrices obtenemos que la condición para que (g_{ij}) genere una métrica riemanniana en la banda de Möbius es

$$\begin{bmatrix} g_{11}(x_1 + 1, -x_2) & -g_{12}(x_1 + 1, -x_2) \\ -g_{21}(x_1 + 1, -x_2) & g_{22}(x_1 + 1, -x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2) & g_{12}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) & g_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Entonces es necesario que para cada punto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se satisfagan las condiciones $g_{ii}(x_1 + 1, -x_2) = g_{ii}(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, y $g_{12}(x_1 + 1, x_2) = -g_{12}(x_1, x_2)$. Nuevamente, es claro que la métrica euclidiana satisface estas condiciones.

En el caso del cilindro, podíamos visualizar fácilmente los tipos de geodésicas, ya que esta variedad puede representarse fácilmente en un dibujo plano. Esto no es así para el caso de la banda de Möbius, aunque sí pueden enunciarse algunas de sus características que las diferencian de las rectas en el plano euclidiano.

Sean L la recta $y = -2x + 1$ y L' la recta $y = 2x + 1$, en el plano euclidiano \mathbb{R}^2 . No es difícil notar que L es la imagen de L' bajo $v \in \Gamma$, donde

$$v(x, y) = (x + 1, -y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esto implica que $\pi(L) = \pi(L')$, pero esa igualdad no se da punto a punto, lo que significa que $\tilde{L} = \pi(L)$ se interseca a sí misma. En el plano euclidiano, ninguna recta se interseca a sí misma, por lo que esto es una diferencia importante.

Al igual que en el caso del cilindro, podremos encontrar imágenes (bajo π) de rectas que tienen longitud finita. Por ejemplo, si L es la recta $y = 0$, es claro que $\pi(L)$ es una curva que da una vuelta a la banda de Möbius. Esto puede visualizarse, por ejemplo, en un modelo de papel de la banda de Möbius. Más aún, cualquier otra geodésica periódica en la banda de Möbius tiene el doble de longitud que $\pi(L)$. En efecto, pues las únicas geodésicas cerradas son las imágenes bajo π de las rectas paralelas al eje x , que en la región fundamental se ven como dos segmentos paralelos al eje x , cada uno de longitud 1.

5.3.3 Toro

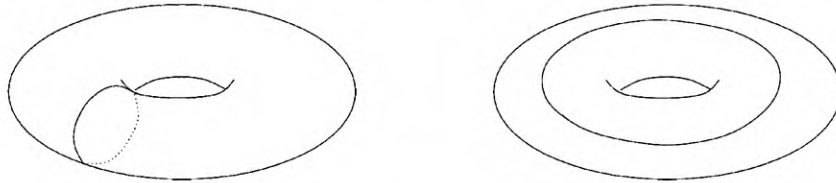
Recordemos ahora que el toro se construye mediante la acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $\theta_{(0,1)}(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$ y $\theta_{(1,0)}(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1)$. Es claro que el primer generador es el mismo que para el cilindro, por lo que para generar una métrica riemanniana en el toro es necesario que las funciones

g_{ij} sean periódicas en la primer componente con período 1. Un cálculo sencillo muestra que la condición adicional es

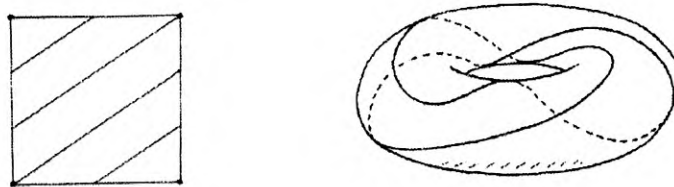
$$\begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2 + 1) & g_{12}(x_1, x_2 + 1) \\ g_{21}(x_1, x_2 + 1) & g_{22}(x_1, x_2 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2) & g_{12}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) & g_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Es decir, para que una métrica riemanniana en \mathbb{R}^2 cuyo tensor métrico es (g_{ij}) genere una métrica riemanniana en el toro es necesario que las funciones g_{ij} sean periódicas en ambas componentes con período 1. Es claro que la métrica euclidiana satisface estas condiciones.

Al igual que en el caso del cilindro, y a diferencia de la banda de Möbius, el toro sí puede representarse fácilmente en un dibujo plano. Las geodésicas más sencillas en el toro son aquellas que son imágenes (bajo la proyección natural) de rectas horizontales o verticales en el plano euclidiano. En la siguiente figura se muestra una geodésica que proviene de una recta horizontal (izquierda) y una que proviene de una recta vertical (derecha).

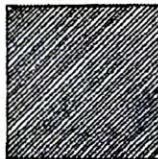


Puede resultar interesante que se pueden encontrar geodésicas de longitud tan grande como se desee. Basta notar que la imagen bajo π de una recta que pasa por el origen con pendiente racional es periódica, ya que pasará por algún punto con coordenadas enteras. Si la pendiente de dicha recta es $\frac{p}{q}$, donde p y q son primos relativos, entonces no hay ningún punto con coordenadas enteras entre $(0, 0)$ y (q, p) sobre la recta. Luego, p y q pueden escogerse de manera que la longitud del segmento que une a $(0, 0)$ y (q, p) sea tan grande como se desee y por lo tanto, su imagen bajo π también la tendrá. Esto se ilustra en la siguiente figura, donde se muestra cómo se ve una de estas rectas en la región fundamental y su imagen en el toro.



Un último caso es la imagen bajo π de rectas con pendiente irracional que pasan por el origen. Es claro que estas rectas no pasan por ningún punto con coordenadas enteras, de manera que su imagen bajo π no es periódica, lo que significa que tendrá longitud infinita. La siguiente figura muestra cómo se vería en la región fundamental. En el toro sería una curva que le da una infinidad

de vueltas al toro por distintas partes, de manera que quede cubierto de la misma manera que la región fundamental.



5.3.4 Botella de Klein

La botella de Klein se construyó utilizando la acción de $\Gamma = \langle u, v | uvu^{-1}v = e \rangle$ sobre \mathbb{R}^2 , donde

$$\theta_u(x_1, x_2) = (x_1 + 1, -x_2),$$

$$\theta_v(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1).$$

Es claro entonces que la condición que impone el generador u es la misma que para la banda de Möbius, mientras que la del generador v es la de ser periódica en la segunda componente con período 1 (como en el caso del toro). Por lo tanto, las condiciones para la métrica en \mathbb{R}^2 para que genere una métrica en la botella de Klein son

$$g_{ii}(x_1 + 1, -x_2) = g_{ii}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

$$g_{12}(x_1 + 1, x_2) = -g_{12}(x_1, x_2),$$

$$g_{ij}(x_1, x_2 + 1) = g_{ij}(x_1, x_2).$$

Además, ya sabemos que la métrica euclidiana satisface todas estas condiciones.

Los primeros ejemplos de geodésicas en la botella de Klein son las imágenes bajo π de rectas horizontales y verticales. En la sección 2.1.2, donde se presenta la figura de la construcción de la botella de Klein se presentan también estas curvas. Al igual que en el caso del toro, se pueden obtener geodésicas de longitud tan grande como se quiera y de longitud infinita (mediante un procedimiento similar al usado en el toro).

5.3.5 Espacio Proyectivo

El caso del espacio proyectivo es un poco más delicado que los anteriores, ya que conocemos distintos atlas para \mathbb{S}^2 . Calculamos el tensor métrico para dos atlas distintos en la sección 5.1.3. Sin embargo, el primero de ellos presenta el problema que cualquier carta no contiene a dos puntos distintos de la misma órbita. Por esta razón consideraremos coordenadas esféricas.

Recordemos que el espacio proyectivo se construye mediante la acción de $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ sobre \mathbb{S}^2 , por lo que debemos estudiar la acción de 1 sobre un punto con coordenadas locales (u, v) en

\mathbb{S}^2 . Recordemos $\theta_1(x)$ es la antípoda de x en \mathbb{S}^2 , por lo que si $x = (u, v)$ en coordenadas locales, entonces $\theta_1(u, v) = (u + \frac{\pi}{2}, v + \pi)$, donde las sumas se toman módulo π en la primera componente y módulo 2π en la segunda. Luego, la matriz jacobiana de esta transformación es la matriz identidad, por lo que para obtener una métrica riemanniana en el espacio proyectivo, es necesario que

$$\begin{bmatrix} g_{11}(u + \frac{\pi}{2}, v + \pi) & g_{12}(u + \frac{\pi}{2}, v + \pi) \\ g_{21}(u + \frac{\pi}{2}, v + \pi) & g_{22}(u + \frac{\pi}{2}, v + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{21}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Es decir, que las funciones g_{ij} sean periódicas de período $\frac{\pi}{2}$ en la primera componente y de período π en la segunda. Es claro que el tensor métrico que calculamos en la sección 5.1.3 satisface estas condiciones.

Para estudiar las geodésicas en el espacio proyectivo, recordemos que las geodésicas en \mathbb{S}^2 son los círculos de radio máximo parametrizados respecto a la longitud de arco. Esto significa que $\gamma(t + \pi) = -\gamma(t)$, donde γ es una geodésica en \mathbb{S}^2 , pero como $p(-\gamma(t)) = p(\gamma(t))$ para todo t , donde p es la proyección natural, entonces podemos concluir que las geodésicas en el espacio proyectivo son periódicas con período π .

5.4 Relación con el Teorema de Killing-Hopf

En el capítulo 3 se enunció y demostró el teorema de Killing-Hopf sin necesidad de introducir herramientas o conceptos de la geometría riemanniana. Sin embargo, este teorema tiene una estrecha relación con ella y, más particularmente, con los resultados obtenidos en este capítulo.

Primeramente podemos notar que la métrica euclidiana, que definimos en la sección 3.2, por medio de la ecuación

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

está inducida por la métrica riemanniana usual en \mathbb{R}^2 . Lo mismo pasa con el concepto de isometría de \mathbb{R}^2 . Se definen como funciones que preserven la métrica euclidiana, aunque es equivalente a definirlos como que preserven la métrica riemanniana en cada punto.

En la sección 3.3.1 se dotó a las superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ con una métrica D . Para esto se utilizó que la acción de Γ sobre \mathbb{R}^2 era libre, propia y discontinua, pero que además para cada $h \in \Gamma$, la función θ_h es una isometría de \mathbb{R}^2 . Estas son las mismas propiedades que se utilizaron en este capítulo para dotarlos con una métrica riemanniana. En ambos casos la métrica resultó ser localmente euclidiana. Esto no es casualidad, ya que en realidad la métrica D es la que induce la métrica riemanniana. Notemos que la métrica D es localmente euclidiana en vecindades que se obtienen usando la propiedad de discontinuidad de la acción de Γ sobre \mathbb{R}^2 , mientras que esta misma propiedad se usa para dar la estructura diferenciable y la métrica riemanniana que resulta ser localmente euclidiana en estas vecindades.

Una vez que se prueba que las superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ son localmente euclidianas, en la sección 3.3.1, se utiliza esta propiedad para definir los conceptos de longitud y ángulo en estas superficies. Es claro que estas definiciones, que utilizan la isometría local con el plano euclidiano son equivalentes a las de la sección 5.1.1, las cuales se hacen por medio de una métrica riemanniana. En otras palabras, la noción de longitud y ángulo que se trabajó en el capítulo 3 son las nociones riemannianas.

En la misma sección 3.3.1 se probó que la topología que define la métrica D sobre una superficie de la forma \mathbb{R}^2/Γ coincide con la topología cociente. Esto no es más que un caso particular de la proposición 5.3, ya que la métrica D es en realidad la métrica inducida por la estructura riemanniana.

Otro concepto que se definió sobre las superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ aprovechando la isometría local con \mathbb{R}^2 es el de segmento de recta. Se definieron simplemente como la imagen bajo la proyección natural de segmentos de recta en \mathbb{R}^2 . Por el teorema 5.4, la noción de recta que se utilizó en el capítulo 3 es la de geodésica.

Continuando con el uso de las geodésicas en el capítulo 3, en la sección 3.3.2 se definió la función lápiz $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, donde S es una superficie localmente euclidiana, completa y conexa por trayectorias. Esta función fue de gran utilidad para construir un grupo Γ tal que S se representara como \mathbb{R}^2/Γ . Al definir esta función se utiliza fuertemente la completez de la superficie S , prolongando segmentos de recta tanto como sea necesario. Esto es, prolongando geodésicas tanto como se desee. Esto no puede hacerse en general en una variedad riemanniana. Una variedad con tal propiedad es llamada *geodésicamente completa*. En primera instancia es difícil determinar si completez geodésica y completez como espacio métrico son equivalentes. El teorema de Hopf-Rinow, que es de gran importancia en la geometría riemanniana, establece que, en efecto, completez geodésica y completez como espacio métrico son equivalentes. La demostración de este teorema es larga y se sale de los objetivos de este trabajo, por lo que no la presentaremos aquí. El lector interesado puede consultar una demostración en las referencias [2] ó [3] de la bibliografía.

Notemos entonces que la demostración del teorema de Killing-Hopf depende fuertemente las estructuras riemannianas, tanto de \mathbb{R}^2 como de las superficies de la forma \mathbb{R}^2/Γ , aunque no fue necesario hacer explícita esta dependencia. Sin embargo, también es importante notar que si quisiéramos demostrar el teorema de Killing-Hopf utilizando todas las herramientas y resultados de este capítulo nos ahorraríamos varias demostraciones intermedias, pero no todas. En particular, el estudio de las isometrías de \mathbb{R}^2 juega un papel de vital importancia en la demostración del teorema.

Conclusiones

Después del desarrollo que se ha hecho a lo largo de este trabajo se pueden obtener varias conclusiones. La primera es que pueden encontrarse todas las superficies localmente euclidianas, completas y conexas por trayectorias. De la demostración del teorema de Killing-Hopf, no es difícil deducir cómo proceder para enunciar y demostrar un teorema similar para variedades de dimensión mayor a 2.

Podemos notar también que el cilindro, la banda de Möbius, el toro y la botella de Klein son ejemplos muy importantes de variedades riemannianas, ya que son las únicas de superficies completas y conexas que poseen una métrica localmente euclidiana. La construcción de ellas por medio de la acción de un grupo discreto sobre \mathbb{R}^2 nos permitió calcular con facilidad su grupo fundamental, así como dotarlo con una estructura diferenciable y una métrica riemanniana.

Más particularmente, esta construcción permitió determinar si dichas variedades son orientables o no, para lo que hay que analizar jacobianos si se desea hacer directamente. Además, facilitó el estudio de las geodésicas, ya que hay que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden si se desea calcularlas directamente. En ambos casos, el estudio de las funciones θ_g juega un papel indispensable.

Un concepto de gran importancia en Geometría Riemanniana es el de curvatura. Normalmente el estudio de este concepto requiere herramientas matemáticas más sofisticadas de las que se han trabajado a lo largo del texto, razón por la cual no se presentó un desarrollo de esta noción. Sin embargo, también puede estudiarse al considerar acciones de grupos discretos sobre una variedad riemanniana. En particular, se obtiene un teorema de clasificación de variedades de curvatura constante. Toda variedad de curvatura constante positiva es de la forma \mathbb{S}^2/Γ ; toda variedad de curvatura constante negativa es de la forma H^n/Γ , donde H^n es el espacio hiperbólico n -dimensional; y toda variedad de curvatura cero es de la forma \mathbb{R}^n/Γ . Por la observación del párrafo anterior, el teorema de Killing-Hopf que probamos en el capítulo 3 es un teorema de clasificación de variedades de dimensión 2 con curvatura 0.

De los resultados que obtuvimos también podemos concluir que \mathbb{S}^2 no es localmente euclidiana, lo que quiere decir que no pueden dibujarse mapas perfectos de la Tierra sobre un plano. Este resultado fue demostrado por Gauss y es conocido como *Theorema Egregium*. Formalmente,

el Theorema Egregium establece que la curvatura gaussiana de una superficie se preserva bajo isometrías locales. Además, la curvatura gaussiana de \mathbb{S}^2 es 1, mientras que la del plano euclidiano es 0, por lo que no puede existir una isometría local entre ellos. Esta es una manera alternativa de convencerse que \mathbb{S}^2 no es una superficie localmente euclidiana. Por tal motivo no se incluye en el teorema de clasificación en el capítulo 3. Sin embargo, si nuestro planeta tuviera forma de cilindro, banda de Möbius, toro o botella de Klein, sí podríamos hacer mapas precisos.

Para concluir este trabajo, mencionamos nuevamente que la construcción de variedades mediante acciones de grupos facilita el estudio de distintas nociones matemáticas, las cuales ayudan a entender el universo desde el punto de vista geométrico, utilizando las herramientas de la geometría riemanniana.

Bibliografía

- [1] Armstrong, M.A. (1983). *Basic Topology*. Springer-Verlag, New York.
- [2] Boothby, William M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc., Orlando, FL.
- [3] Do Carmo, Manfredo Perdigão. (1992). *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, MA.
- [4] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P. (1984). *Modern Geometry - Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer-Verlag.
- [5] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P. (1985). *Modern Geometry - Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*. Springer-Verlag.
- [6] Dummit, David S., Foote, Richard M. (2004). *Abstract Algebra*. John Wiley and Sons, Inc.
- [7] Fulton, William. (1995). *Algebraic Topology: A First Course*. Springer-Verlag, New York.
- [8] Fomenko, A.T., Kunii, T.L. (1997). *Topological Modeling for Visualization*. Springer-Verlag, Tokyo.
- [9] Gallot, S., Hulin, D., LaFontaine, J. (1993). *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [10] Helgason, Sigurdur (2001). *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. American Mathematical Society.
- [11] Herstein, I.N. (1987). *Álgebra Moderna*. Trillas, México, D.F.
- [12] Lee, John M. (2003). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York.
- [13] Martin, George E. (1982). *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag, New York.
- [14] Massey, W.S. (1991). *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer.

- [15] Munkres, James R. (2002). *Topología*. Prentice-Hall. Madrid, España.
- [16] Naber, Gregory L. (1997). *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*. Springer-Verlag, New York.
- [17] Nikulin, V.V., Shafarevich, I.R. (1994). *Geometries and Groups*. Springer-Verlag.
- [18] Petersen, Peter. (1998). *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, New York.
- [19] Stillwell, John. (1992). *Geometry of Surfaces*. Springer-Verlag, New York.
- [20] Warner, Frank W. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, New York.

