UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Resultados de compacidad en espacios L^p

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jesús Manuel Solís Durán

Directora de tesis: Dra. Marysol Navarro Burruel

Hermosillo, Sonora, México 22 de junio del 2017

Sinodales

Dra. Marysol Navarro Burruel
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

M.C. Carolina Espinoza Villalva
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dra. Jessica Yuniver Santana Bejarano
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

A mis padres Jesús y María Elena,
y mi abuela María Luisa Ruiz Fierro.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mis padres Jesús Manuel Solís Gutierrez y María Elena Durán Ruiz, por apoyarme en las decisiones que he tomado en mi vida, sin ellos no hubiera podido lograr nada de esto, son una gran bendición en mi vida. Quiero agradecer a mis hermanas María y Alejandra, por siempre estar a mi lado impulsándome a seguir adelante, a mis tíos Rosa y Beto, por apoyarme durante estos 5 años que viví con ellos. Quiero dar un agradecimiento especial hacia mi abuela Luisa, por estar conmigo durante toda mi vida, guiándome para ser mejor persona.

Quiero agradacer a mi directora de tesis Dra. Marysol Navarro Burruel por ayudarme a realizar este trabajo y por la paciencia que me tuvo. A los profesores del Departamento en Matemáticas, Martha Guzmán, Carlos Robles, Martín García, por apoyarme durante mi transcurso en la licenciatura y, siempre que necesitaba darme consejos para seguir adelante. A mis compañeros, Kala, Jorge (Yorsh), Claudio, Katya, Ying, Roger, etc., en especial a Alejandra Morales por ayudarme en la ortografía de este trabajo, ser una excelente compañera, y porque es bien chila.

Índice general

Introducción

La teoría de conjuntos está presente prácticamente en todas las áreas de las matemáticas, algunos ejemplos son los conjuntos abiertos y conjuntos cerrados (los cuales son esenciales en Topología), o los grupos que son conjuntos con ciertas características (especialmente estudiados en Álgebra Moderna), etc. En este trabajo nos enfocaremos en estudiar los conjuntos compactos, los cuales son de gran importancia en Análisis Matemático y Ecuaciones Diferenciales, sólo por mencionar algunas áreas. Específicamente, nuestro objetivo principal será caracterizar los conjuntos compactos en los espacios L^p, y presentar algunas consecuencias importantes de este resultado. Para ello desarrollaremos el trabajo *The Kolmogorov-Riesz compactness theorem* elaborado por los matemáticos Helge Holden y Harald Hanche-Olsen [6].

El concepto de compacidad surgió en uno de los períodos más productivos de la actividad matemática, a mediados del siglo XIX. Con la intervención de grandes matemáticos como Cantor, Weierstrass, Hausdorff y Dedekind, comenzaron a hacer rigurosas muchas de las ideas que durante siglos habían sido dadas por sentadas. Dos de los primeros matemáticos en dar resultados importantes con respecto a la compacidad de conjuntos, fueron Edward Heine y Émile Borel, mientras Heine trabajaba sobre funciones continuas, Borel trataba de caracterizar la recta real mediante cubiertas abiertas. Gracias al trabajo de ambos se encontró una caracterización de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$, que afirmaba lo siguiente: *Un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.* Después se demostró que la afirmación anterior se cumplía para subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Al momento de querer generalizar el concepto de conjunto compacto en espacios métricos, notaron que el ser cerrado y acotado no implicaba el ser compacto, con ello surgió un nuevo problema. Cuando se encontró una caracterización para los conjuntos compactos en espacios métricos, introdujeron el concepto de *totalmente acotado*, de hecho, en un espacio métrico un conjunto es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.

Uno de los principales objetivos en esta tesis es caracterizar los conjuntos totalmente acotados en distintos espacios normados, donde dichos espacios normados son de Banach y por tanto caracterizamos los conjuntos compactos en dichos espacios. Dos resultados de compacidad de gran importancia en este trabajo son el teorema de Arzelá-Ascoli y el teorema de Kolmogorov-Riesz, este útimo siendo el resultado principal.

La tesis consta de tres capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el capítulo 1 daremos un repaso acerca de la compacidad en espacios métricos, haciendo especial énfasis en el teorema Arzelá-Ascoli y tratando de mostrar un breve desarrollo histórico del concepto de compacidad. Finalmente definiremos los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$ y recordaremos algunas de sus propiedades básicas.

En el capítulo 2 estudiaremos los conceptos de transformada de Fourier y espacios de Sobolev que son relevantes en análisis. Para definir la transformada de Fourier de forma natural recordaremos los resultados más importantes de los espacios de Hilbert, así como los conceptos de convolución y espacios de Sovolev, para finalmente definir la transformada de Fourier para el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ mediante el teorema de Plancherel. Por último en este capítulo veremos los espacios de Sobolev, daremos algunas de las propiedades principales y demostraremos que son completos bajo una norma dada.

En el capítulo 3 daremos una caracterizacion de los conjuntos totalmente acotados en los espacios de funciones continuas sobre un conjunto compacto K, el espacio de sucesiones l^p y el espacio de funciones $L^p(\mathbb{R}^d)$, éste último conocido como el teorema de Kolmogorov-Riesz. Finalmente, se verán tres consecuencias que surgen a partir del teorema de Kolmogorov-Riesz, la primera de ellas caracteriza los conjuntos totalmente acotados en el espacio $L^p(\mathbb{R}^r)$, tal que el conjunto de la transformada de Fourier de las funciones sea uniformemente acotada, la segunda nos da una caracterización de los conjuntos totalmente acotados en los espacios de Sobolev, y el último es el llamado principio de selección de Helly.

Capítulo 1

Historia y Preliminares

La teoría de conjuntos ha sido de gran importancia para el desarrollo de la matemática en general, en la cual han surgido conceptos de gran importancia, tales como los conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, entre otros. En este capítulo nos enfocaremos en los conjuntos compactos, estudiaremos como fueron evolucionando a través de los años, primero mostraremos algunos resultados de compacidad en espacios métricos, y daremos varias equivalencias al concepto de compacidad. En la segunda parte del capítulo, veremos un teorema muy conocido que nos caracteriza los conjuntos compactos en el espacio de funciones continuas definidas sobre un conjunto compacto en $\mathbb{R}$. Por último definiremos el espacio de funciones $L^p(\mathbb{R}^d)$ y veremos algunas de las propiedades que más nos interesan para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Compacidad en espacios Métricos

Recordemos la definición de espacio métrico.

Definición 1.1.1. *Dado un conjunto X, definimos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que para todo $x,y,z \in X$, tenemos*

1. $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

2. $d(x,y) \geq 0$.

3. *$d(x, y) = d(y, x)$.*

4. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ a esta desigualdad se le conoce como **desigualdad del triángulo**.*

A la función d se le conoce como métrica.

Un **espacio métrico** es un conjunto X provisto de una métrica d. Lo denotaremos (X, d) , o simplemente por X si no es necesario especificar su métrica. Diremos que un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Desde inicios de la topología se admitió que el intervalo $[a, b]$ tenía una cierta propiedad que era de vital importancia para la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Esto llamó el interés de muchos matemáticos, se pensaba que la propiedad era el hecho de que cualquier subconjunto infinito de puntos de $[a, b]$ tiene un punto límite, y a esta propiedad se le llamó compacidad. Con el paso del tiempo encontraron una nueva definición en términos mas generales.

Definición 1.1.2. *Sea X un espacio métrico con métrica d.*
i) A la colección $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos abiertos se le llama cubierta abierta de X, si cada $x \in X$ pertenece por lo menos a un G_α, $\alpha \in I$. Una cubierta abierta es finita si el conjunto de índices I es finito.
ii) X es compacto si cada cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita.

Es posible definir compacidad en un subconjunto del espacio, es decir, si X es un espacio métrico con métrica d y sea $A \subset X$. Decimos que A es un subconjunto compacto si el espacio métrico A con la métrica heredada por d, es compacto.

Borel y Lebesgue, intentaban caracterizar la recta real en términos de cubiertas abiertas, mientras que Bolzano y Weierstrass intentaban caracterizarla en términos de sucesiones. Heine demostró en 1872 que una función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua. Por otro lado, Borel demostró en 1894 un lema que sería de gran importancia para la teoría de conjuntos y para la matemática en general.

El lema dice lo siguiente: *Si en una línea uno tiene un número infinito de subintervalos, de manera que cada punto de la línea es interior de por lo menos uno de los intervalos, entonces uno puede determinar efectivamente un número limitado de subintervalos de entre los subintervalos dados, que tienen la misma propiedad.*

Aquí la línea es un intervalo acotado. Schönflies se dio cuenta de la conexión que existía entre el trabajo de Borel y el de Heine, por lo que Schönflies hizo una generalización de ambos trabajos y lo llamó el teorema de Heine-Borel, el cual afirma que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

En un espacio métrico general el teorema de Heine-Borel no se verifica, de hecho se sabe que si un conjunto es compacto, entonces es cerrado y acotado, pero el recíproco no necesariamente es cierto, en la siguiente sección veremos un ejemplo de un conjunto cerrado y acotado tal que no es compacto. Una caracterización de los conjuntos compactos en un espacio métrico en general es que X es un espacio métrico compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado, donde un conjunto es totalmente acotado si para todo $\epsilon > 0$ existe una cubierta finita de abiertos con diámetro menor igual a ϵ.

El origen de la compacidad secuencial se remonta a menudo a un teorema, demostrado rigurosamente por Weierstrass en 1877, que se refiere al comportamiento de funciones continuas definidas en intervalos cerrados y acotados de la recta real, el cual es conocido como el teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual afirma que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. El cual dio paso a definir espacio métrico secuencialmente compacto, diremos que un espacio X es secuencialmente compacto si toda sucesión en X contiene una subsucesión convergente.

Una de las caracterizaciones más importantes de los conjuntos compactos en espacios métricos, es la relación que existe entre ser compacto y secuencialmente compacto. Para demostrar este teorema recordemos el siguiente resultado.

Lema 1.1.3. *Sea X un espacio secuencialmente compacto. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de X. Existe $\epsilon > 0$ tal que para cada abierto B con diámetro menor igual a ϵ, se tiene que $B \subset G_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in A$.*

Para su demostración ver [7], página 180. A ϵ se le conoce como número de Lebesgue.

Teorema 1.1.4. *Sea X un espacio métrico con métrica d. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*
i) X es compacto.
ii) X es secuencialmente compacto.
iii) X es completo y totalmente acotado.

Demostración. $(i \Rightarrow ii)$ Lo demostraremos por contradicción.

Supongamos que existe una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que no contiene una subsucesión convergente, llamemos $A = \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(y_k) \cap A = \{y_k\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado tomemos la cubierta de X dada por $\mathscr{A} = \{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) : x \in X\}$, como X es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in X$ tal que $X \subset \cup_{i=1}^{n} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$, por el principio del palomar existen k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$ tales que y_{k_1}, $y_{k_2} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_{i_0})$ para algún $i_0 = 1, ..., n$. Usando la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$d(y_{k_1}, y_{k_2}) \leq d(y_{k_1}, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, y_{k_2}) < \epsilon.$$

Lo cual es una contradicción, de esta manera existe una subsucesión convergente de $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$(ii \Rightarrow iii)$

Sean $\epsilon > 0$ y A el conjunto de todos los puntos que distan mutuamente más que $\frac{\epsilon}{2}$, es decir, si p, $q \in A$, entonces $d(p,q) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Entonces A es finito, pues si A fuera infinito, entonces existe una sucesión en A tal que no tiene una subsucesión convergente, ya que cualquiera dos elementos distintos en A, distan más que $\frac{\epsilon}{2}$. Sea $A = \{x_1, ..., x_n\}$, tomemos $\mathscr{B} = B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$, veamos que $\mathscr{B}$ es una cubierta de X. Sea $x \in X$ tal que $x \notin A$, supongamos que $x \notin \cup_{i=1}^{n} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$, entonces tenemos que $x \notin B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$ para toda $i = 1, ..., n$, lo que nos dice que $d(x, x_i) \geq \frac{\epsilon}{2}$ para toda $i = 1, ..., n$, lo cual implica que $x \in A$, que es una contradicción, ya que A sólo tiene a los elementos $x_1, ..., x_n$. Además $diam(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)) \leq \epsilon$, por lo que $\mathscr{B} = \{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\}$ es una ϵ- cubierta de X, por lo cual X es totalmente acotado.

Veamos que X es completo. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X, usando el hecho de que X es secuencialmente compacto, existe una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea x el elemento al que la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Sea $\epsilon > 0$, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N_1$, entonces $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado tenemos que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x, es decir, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$ si $k > N_2$. Tomemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y fijemos $k_0 > N$, entonces

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \epsilon \quad \text{si} \quad n > N$$

Por lo tanto X es completo.

$(ii \Rightarrow i)$

Sea $\mathscr{A} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de X. Como $(ii \Rightarrow iii)$, tenemos que X es totalmente acotado, por lo cual podemos tomar una ϵ- cubierta finita $\mathscr{B} = \{B_1, ..., B_n\}$ de X tal que ϵ es el número de Lebesgue, y cada abierto $B_i \in \mathscr{B}$ tiene diámetro menor igual a ϵ. Usando el lema 1.1.3 se sigue que existen $G_1, ..., G_n \in \mathscr{A}$ tal que $B_i \subset G_i$ para cada $i = 1, ..., n$. De esta manera se obtiene que $X \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \subset \cup_{i=1}^{n} G_i$. Por lo tanto el subconjunto $\{G_1, ..., G_n\} \subset \mathscr{A}$ es una subcubierta finita de X.

$(iii \Rightarrow ii)$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X y asumamos que X es totalmente acotado y completo. Como X es totalmente acotado, existe una 1-cubierta de X. Por el principio del palomar, existe una bola B_1 que contiene una infinidad de elementos $\{x_n\}$, por lo que podemos tomar una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_n^{(1)} \in B_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora tomemos una $\frac{1}{2}$-cubierta de X, de nuevo por el principio del palomar, existe B_2 que contiene una infinidad de elementos de $\{x_n^{(1)}\}$, entonces podemos tomar una subsucesión $\{x_n^{(2)}\}$ de $\{x_n^{(1)}\}$ tal que $x_n^{(2)} \in B_2$. Procediendo de manera inductiva obtenemos que para $k > 2$ existe una subsucesión $\{x_n^{(k)}\}$ de $\{x_n^{(k-1)}\}$ tal que está contenida en una bola B_k de radio 2^{-k}.

Tomemos la sucesión $\{x_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, que es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Mostremos que $\{x_k^{(k)}\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $i \leq j$ por la desigualdad del triángulo

$$d(x_j^{(j)}, x_i^{(i)}) \leq d(x_j^{(j)}, x_{j-1}^{(j-1)}) + \cdots + d(x_{i+1}^{(i+1)}, x_i^{(i)}).$$

Observemos que $x_j^{(j)}$ y $x_{j-1}^{(j-1)} \in B_{j-1}$, por tanto $d(x_j^{(j)}, x_{j-1}^{(j-1)}) \leq 2^{2-j}$. De la desigualdad anterior se desprende que

$$d(x_j^{(j)}, x_i^{(i)}) \leq 2^{2-j} + \cdots + 2^{2-(i+1)} \leq 2^{2-i}.$$

Por lo tanto la subsucesión $\{x_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Como X es completo, $\{x_k^{(k)}\}$ converge a un elemento $x \in X$ cuando k tienda a ∞. Por tanto X es secuencialmente compacto como queríamos.

□

1.2. Espacios Normados

Como mencionamos anteriormente queremos dar una caracterización de los compactos en los espacios L^p, para ello es necesario ver algunas propiedades en los espacios normados. También daremos una caracterización de compacidad en el espacio normado $C = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |$ f es continua$\}$, que es conocido como el teorema de Arzelá-Ascoli.

Si tomamos un espacio vectorial X y le definimos una métrica d, podremos observar las siguiente propiedades:

- $d(x+a, y+a) = d(x,y)$, es decir, d es invariante bajo traslaciones.
- $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$, es decir, aumenta proporcionalmente a la dilatación.

Con ésto sólo falta conocer la distancia de x a 0 (para todo $x \in X$) para conocer cualquier distancia entre dos elementos cualesquiera de X, ya que $d(x,y) = d(x-y, 0)$. Entonces podemos definir una función $\| \ \| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como $\|x\| = d(x,0)$. De manera más formal la podemos definir de la siguiente manera.

Definición 1.2.1. *Definimos una norma sobre un espacio vectorial X como una función $\| \ \| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in X$.
2. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *para todo* $x \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$.

4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$.

Un **espacio normado** es un espacio vectorial X provisto de una norma $\| \ \|$. Lo denotaremos $(X, \| \ \|)$, o simplemente por X si no es necesario especificar su norma. Diremos que un espacio normado es de Banach si el espacio métrico (X, d) es completo, donde $d(x,y) = \|x - y\|$. Es fácil probar que d es una métrica.
A la métrica definida de esta forma se le conoce como métrica inducida por la norma $\| \ \|$. Diremos que la función $\| \ \|$ es una **semi-norma** si cumple (1), (3), (4) de 1.2.1, y además si $x = 0$, entonces $\|x\| = 0$. En una semi-norma pueden existir elementos distintos de 0, tal que al evaluarlos en $\| \ \|$ sea igual a 0.

Para ilustrar las definiciones anteriores, daremos algunos ejemplos de espacios normados.

Ejemplo 1.2.2. *En el espacio* $\mathbb{R}^n$ *definamos la función* $\|x\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2}$, *donde* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Se puede probar fácilmente que $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ *es de Banach.*

Sea $(x_n)_n^\infty$ una sucesión en un espacio normado X, diremos que x_n converge a $x \in X$ en la norma $\| \ \|$, si $\|x_n - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 1.2.3. *Tomemos* $C = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | \ f \textit{ es continua}\}$ *y definamos* $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}$, *esta función define una norma sobre* C. *La norma en* C *es conocida como la norma del supremo y es equivalente a la convergencia uniforme, es decir, si* f_n *es una sucesión de funciones en* C, *y* $f \in C$, *tal que* $f_n \to f$ *en la norma del supremo, entonces* f_n *converge uniformemente a* f. *Además se puede demostrar que* $(C, \| \ \|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Dado que un espacio normado también es un espacio métrico, de manera natural podemos tomar las definiciones de compacidad en los espacios métricos y definirlas en un espacio normado con la métrica inducida por la norma. Por lo que todos los resultados de compacidad en espacio métricos, los podemos tomar para espacios normados. Una obsevación fácil de obtener es que si X es un espacio normado, entonces X no es compacto. Con anterioridad vimos el teorema de Heine-Borel que nos da una caracterización de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$, después se mencionó que estas condiciones no son suficientes en espacios métricos, y se dio una generalización. Daremos un ejemplo de un subconjunto cerrado y acotado de un espacio normado tal que no sea compacto.

Ejemplo 1.2.4. *Consideremos el espacio métrico* $C = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f$ *es continua*$\}$ *con la norma del supremo del ejemplo 1.2.3 y sea* $\mathcal{B} = \{f \in C : \|f\|_\infty \leq 1\}$ *tenemos que* $\mathcal{B}$ *es cerrado y acotado, entonces tomaremos una subsucesión en* $\mathcal{B}$ *tal que no contenga una subsucesión convergente. Por el teorema 1.1.4 obtendremos que* $\mathcal{B}$ *no es compacto.*

Sea $(f_n)_{n=0}^\infty$ *una sucesión en* $\mathcal{B}$ *tal que* $f_n = x^n$*, tenemos que* $\|f_n\|_\infty = 1$*. Se puede demostrar que la sucesión* $(f_n)_{n=0}^\infty$ *converge puntualmente a la función* f *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 1 \\ 0 & si\ x < 1. \end{cases}$$

La cual es una función discontinua, por lo que f *no está en* C*, lo que nos dice que no existe una subsucesión de* $(f_n)_{n=0}^\infty$ *que converja en* C*.*

Teorema de Arzelá-Ascoli

El teorema de Arzelá-Ascoli nos presenta una caracterización de compacidad en el espacio de funciones continuas, este resultado nace en medio del desarrollo de la teoría general de conjuntos de curvas y funciones, propuesta y desarrollada parcialmente por G. Ascoli y C. Arzelá entre mediados y finales del siglo XIX.

El primero en querer introducir la compacidad en los espacios de funciones continuas fue G. Ascoli, intentó usar la teoría de Cantor en los espacios n-dimensionales para encontrar resultados, sin embargo, poco tiempo después se tuvo que retirar de esta teoría. Ascoli observó que tenía que introducir otras condiciones necesarias para que en un conjunto de funciones existiera la función límite. Como primera definición, Ascoli introdujo el concepto de equicontinuidad que mas adelante obtendría alta difusión en teoría de funciones y en análisis funcional.

Definición 1.2.5. *Sea* $\mathcal{F}$ *una familia de funciones en* C*, decimos que* $\mathcal{F}$ *es* ***equicontinua*** *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$*, tal que si* $|x - y| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ *para toda* $f \in \mathcal{F}$*.*

Una observación inmediata de lo anterior es que si $\mathcal{F}$ es un familia finita, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Teorema 1.2.6. ***Arzela-Ascoli***
Sea $\mathcal{F}$ una familia de C. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. *La familia $\mathcal{F}$ es acotada y equicontinua.*

2. *Toda sucesión de $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión la cual es uniformemente convergente.*

Por el teorema 1.1.4 obtenemos que la familia $\mathcal{F}$ es compacta.

Para demostrar este teorema necesitamos los siguientes lemas.

Lema 1.2.7. *Si $\mathcal{F} = (f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$ es una sucesión de funciones la cual converge uniformemente sobre un compacto $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{F}$ es acotada.*

Demostración. Como $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente convergente, digamos a f, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in [a,b] \text{ y } n \geq N,$$

y así $|f_n(x)| < \epsilon + |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ y $n \geq N$. Por otro lado la convergencia de las f_n es unifome, por lo que f es continua en el compacto $[a,b]$, de esta manera f alcanza su valor máximo, digamos M_0. Se sigue que

$$|f_n(x)| < \epsilon + M_0 \text{ para todo } x \in [a,b] \text{ y } n \geq N.$$

Para cada función f_i con $i = 1, ..., N-1$, existen $M_1, M_2, ..., M_{N-1}$ tal que $|f_i(x)| < M_i$ para todo $x \in [a,b]$, tomemos $M = \text{máx}\{M_0 + \epsilon, M_1, ..., M_{N-1}\}$, y así $\|f_n\|_\infty < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mathcal{F}$ es acotada. □

Lema 1.2.8. *Si $\mathcal{F} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones la cual converge uniformemente, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$, f el límite uniforme de la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ y sea N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $z \in [a,b]$. Como f es el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas, se sigue que f es continua en el compacto $[a,b]$, y por tanto uniformemente continua, existe $\delta(\epsilon, f)$ tal que si $x, y \in [a,b]$ y $|x - y| < \delta(\epsilon, f)$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Por tanto, si $n \geq N$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| \leq & |f_n(x) - f(x)| \\ & + |f(x) - f(y)| \\ & + |f(y) - f_n(y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Así tomando $\delta = \text{mín}\{\delta(\epsilon, f_1), \delta(\epsilon, f_2), ..., \delta(\epsilon, f_{N-1}), \delta(\epsilon, f)\}$, se sigue que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$ para toda $x, y \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Demostración. 1.2.6 (Arzelá-Ascoli)

(2 ⇒ 1) Demostraremos esta implicación por contraposición, es decir probaremos que si $\mathcal{F}$ no es acotada o no es equicontinua, entonces $\mathcal{F}$ no es secuencialmente compacto.

Supongamos que $\mathcal{F}$ no es acotada o que no es equicontinua. Si $\mathcal{F}$ no es acotada entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $\|f_n\| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el lema 1.2.7 la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ no tiene subsucesiones uniformemente convergentes, y acabamos.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ no es equicontinua, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos en $\mathcal{F}$ tal que dado $\epsilon > 0$ para cada f_n existe $\delta = \delta_n(\epsilon, f_n) \geq \frac{1}{n}$ que hace continua a cada f_n, entonces por el lema 1.2.8 se sigue que no existe una subsucesión uniformemente convergente.

(1 ⇒ 2) Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es acotada y equicontinua, sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de $\mathcal{F}$. Demostraremos que existe una subsucesión de $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ la cual converge uniformemente.

Como estamos trabajando en $[a,b]$, existe un subconjutno denso y numerable, digamos $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Como $\mathcal{F}$ es acotada, se sigue que $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, entonces por el teorema de Bolzano-Weiastrass se sigue que $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos

$$(f_{1k}(x_1))_{k=1}^{\infty} = (f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \cdots).$$

Ahora la sucesión $(f_{1k}(x_2))_{k=1}^{\infty}$ es acotada y de nuevo por Bolzano-Weiastrass existe una subsucesión convergente, digamos $(f_{2k}(x_2))_{k=1}^{\infty}$. Procedemos inductivamente y obtenemos que

$$\begin{array}{ccccc}
f_{11}(x_1), & f_{12}(x_1), & f_{13}(x_1), & \cdots, & f_{1n}(x_1), \cdots \\
f_{21}(x_2), & f_{22}(x_2), & f_{23}(x_2), & \cdots, & f_{2n}(x_2), \cdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
f_{n1}(x_n), & f_{n2}(x_n), & f_{n3}(x_n), & \cdots, & f_{nn}(x_n), \cdots \\
\vdots & & & & \vdots \ \ddots
\end{array}$$

Tomemos $g_n = f_{nn}$, probaremos que la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$. Por construcción g_n converge en A. Dado $\epsilon > 0$, por la equicontinuidad de $\mathcal{F}$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que hace continuas a g_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Falta probar que converge para todo elemento x en $[a,b]$, como la sucesión $(g_n(x_i))_{n=1}^{\infty}$ converge para cada $x_i \in A$, entonces existe M tal que si $n,m \geq M$ se sigue $|g_n(x_i) - g_m(x_i)| < \epsilon$.

Por otro lado sea $x \in [a,b]$ sabemos que existe un $x_j \in A$ tal que si $|x - x_j| < \delta$ entonces $|g_m(x) - g_m(x_j)| < \epsilon$.

Ahora si tomamos n, $m \geq M$ tenemos

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| < 3\epsilon.$$

Por lo tanto

$$\|g_n - g_m\| = \sup_{x \in [a,b]} |g_n(x) - g_m(x)| \leq 3\epsilon.$$

Usando el criterio de Cauchy, se sigue que $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$.

$\square$

1.3. Espacios L^p

Los espacios funcionales, en particular los espacios L^p, desempeñan un papel importante en muchas aspectos del análisis. Se puede decir que la importancia de los espacios L^p proviene del hecho de que ofrecen una generalización parcial pero de gran utilidad del espacio de las funciones integrables cuadráticas L^2. De interés independiente es el espacio L^2, cuyos orígenes están ligados con aspectos básicos del análisis de Fourier, el cual estudiaremos más a detalle en el siguiente capítulo. En esta sección nos enfocaremos en definir nuestros espacios L^p, así como también dar resultados importantes en esta teoría.

Definición 1.3.1. *Para cada $1 \leq p < \infty$, definimos el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx < \infty,$$

y para cada $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observemos que para $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ es un espacio vectorial. Para el caso $p = \infty$, definamos el supremo esencial de una función f medible como

$$\text{ínf}\{\alpha \leq \infty : |f(z)| < \alpha \ c.t.p.\}.$$

El espacio $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, como todas las funciones tal que el supremo esencial es finito.

Diremos que $1 < p, q < \infty$ son exponentes conjugados si se verifica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Observemos que si $p = 2$, entonces $q = 2$, el cual es un caso especialmente importante. Por otro lado tenemos que si $p \to 1$, entonces $q \to \infty$, por lo que decimos que 1 y ∞ también son exponentes conjugados.

Tenemos que la función $\| \ \|_p$ define una semi-norma sobre $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, puesto que si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p = 0, \tag{1.3.1}$$

entonces $f = 0$ casi en todas partes.

Por lo que no cumple el inciso 2 de la definición de norma. Sin embargo, identificando convenientemente funciones podemos conseguir que la función $\| \ \|_p$ sea una norma, más aún, podemos dar una identificación que no depende de p.

Diremos que dos funciones integrables $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ son equivalentes, $f \sim g$, si $f = g$ casi en todas partes, es decir el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\}$ es de medida cero ([2], página 19). Es fácil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Mediante ella definiremos para $1 \leq p \leq \infty$ los cocientes

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, es sencillo demostrar que $L^p(\mathbb{R}^d)$ es un espacio vectorial con las operaciones

$$\alpha[f] = [\alpha f],\ [f+g] = [f] + [g],$$

y además$(L^p(\mathbb{R}^d), \| \ \|_p)$ es un espacio normado con la norma $\big\|[f]\big\|_p = \|f\|_p$.

Para un estudio mas riguroso de los espacios L^p remitimos al lector a [2]. Nosotros usaremos los siguientes resultados.

Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, y $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ tal que p y q son exponentes conjugados, entonces fg esta en $L^1(\mathbb{R}^d)$, más aún

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

La cual es llamada la **desigualdad de Hölder**. También necesitaremos la **desigualdad de Minkowski**, la cual afirma que si $f,g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \geq 1$, entonces $f + g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y además

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Por otro lado, sabemos que el espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$ es de Banach con la norma $\| \ \|_p$.

Por último, un resultado importante en teoría de la medida es el **Teorema de convergencia dominada** , que dice lo siguiente:

Sea (f_n) una sucesión en $L^p(\mathbb{R}^d)$ que converge puntualmente a f. Si existe $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que para todo n, $|f_n| \leq g$; entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y (f_n) converge a f en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Capítulo 2

Transformada de Fourier y Espacios de Sobolev

En este capítulo estableceremos las bases para obtener algunas consecuencias del Teorema principal de esta tesis, para ello será necesario desarrollar dos conceptos de gran importancia en Análisis. El primero de ellos, la Transformada de Fourier. Intentaremos definirla de forma natural, para ello estudiaremos, el espacio de Schwartz, convolución y la teoría de espacios de Hilbert. Por último definiremos los espacios de Sobolev y demostraremos algunos resultados importantes de estos espacios. Cabe mencionar que el objetivo principal de esta tesis no es desarrollar la teoría de Transformada de Fourier, daremos algunos resultados sin demostración, remitimos al lector a [5] para un estudio más profundo.

2.1. Transformada de Fourier

2.1.1. Espacio de Schwartz

Definimos el soporte de una función f como la cerradura de todos los $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $f(x) \neq 0$, es decir

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}},$$

y lo denotamos por $sop(f)$.

Si U es un abierto de $\mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $C^k(U)$ a todas las funciones tales que sus derivadas parciales de orden menor o igual a k, existen y son continuas, y el conjunto $C^\infty(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C^k$. Además si $E \subset \mathbb{R}^d$ denotaremos por $C_c^\infty(E)$ al espacio de todas las funciones en $C^\infty(E)$ con soporte compacto en E. Denotaremos por C_0 al conjunto de las funciones tales que $|f(x)| \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Para reducir notación llamaremos a los espacios $L^p(\mathbb{R}^d) = L^p$, $C^k(\mathbb{R}^d) = C^k$, $C^\infty(\mathbb{R}^d) = C^\infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty$.

Es conveniente tener una notación compacta para las derivadas parciales. Escribiremos

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

para derivadas parciales de orden superior usaremos la notación de multi-índices.

Definición 2.1.1. *Un multi-índice es una d-tupla de enteros no negativos. Si* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *es una d-tupla, entonces*

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j, \qquad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_d!, \qquad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Si $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y α un multi-índice, entonces

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

Uno de los principales objetivos de este capítulo es definir el concepto de transformada de Fourier y aunque ésta puede introducirse directamente sobre funciones de L^1 y adquiere pleno sentido, comenzaremos estudiándolo sobre el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ (por razones que serán expuestas más adelante), constituido por las funciones de clase C^∞ que junto con sus derivadas, decrecen mas rápido que cualquier potencia de $|x|$. Más precisamente, para cualquier natural N, y multi-índice α, definimos

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = Sup_{x \in \mathbb{R}^d}\left\{(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|\right\}.$$

El espacio de Schwartz esta definido por

$$S(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \in C^\infty : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \text{ para toda } N, \alpha\}.$$

Para reducir notación, denotaremos al espacio de Schwartz como S. Un ejemplo clásico de funciones en S son $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-|x|^2}$, donde α es cualquier multi-índice. A partir de la definición del espacio de Schwartz, podemos obtener que S es un espacio completo con la topología definida por las seminormas $\| \ \|_{(N,\alpha)}$.

Observemos además que $S \subset L^1$, pues si $f \in S$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1+|x|)^{d+1}|f(x)|}{(1+|x|)^{d+1}} dx \\ &\leq \|f\|_{(d+1,0)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|)^{d+1}} < \infty, \end{aligned}$$

por lo que $f \in L^1$.

Definición 2.1.2. *Sean $\mathfrak{L} = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \right\}$, $y \in \mathbb{R}^d$. Definimos el operador de traslación con respecto a y, $T_y : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, como*

$$(T_y f)(x) = f(x-y)$$

Observemos que si $f \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\|T_y f\|_p = \|f\|_p$ para toda $y \in \mathbb{R}$, y que $\|T_y f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Decimos que f converge uniformemente si $\|T_y f - f\| \to 0$ cuando $y \to 0$, equivalentemente a la convergencia dada en el ejemplo 1.2.3 del capítulo 1. Una observación inmediata de lo anterior es, si $f \in C_c$ entonces $T_y f$ converge uniformemente a f cuando $y \to 0$. La demostración se sigue de la compacidad del soporte de las funciones $T_y f$.

Proposición 2.1.3. *Si $1 \leq p < \infty$, la traslación es continua con la norma L^p, esto es, si $f \in L^p$ y $z \in \mathbb{R}^d$, entonces $\|T_y f - T_z f\|_p \to 0$ si $y \to z$.*

Demostración. Sean T_y y T_z operadores de traslación y sea f una función, entonces $T_z(T_y(f)) = T_{z+y}(f)$, por lo que la proposición 2.1.3 es equivalente a demostrar que $\|T_y(T_z f) - T_z f\|_p \to 0$ cuando $y \to 0$. Solamente probaremos que $\|T_y f - f\|_p \to 0$ cuando $y \to 0$, pues en el caso general basta sustituir f por $T_z f$ ya que $\|f\|_p = \|T_z f\|$.

Para hacer la demostración primero tomaremos el caso que f sea de soporte compacto, y usando la densidad de C_c sobre L^p concluiremos la demostración.

Supongamos que $f = g \in C_c$, por tanto

$$\|T_y(g) - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y) - g(x)|^p dx.$$

Tomemos $y \in \mathbb{R}^d$ tal que $|y| \leq 1$. Necesitamos que

$$x - y \in sop(g),$$

es decir

$$x \in sop(g) + y \subset sop(g) + \overline{B_1(0)} \equiv K \text{ compacto.}$$

Se sigue que

$$\|T_y(g) - g\|_p^p = \int_K |g(x - y) - g(x)|^p dx \leq \|T_y(g) - g\|_\infty^p \mu(K),$$

de la observación que nos dice que si $f \in C_c$ entonces $T_y f$ converge uniformemente a f cuando $y \to 0$, obtenemos

$$\|T_y(g) - g\|_p^p \leq \|T_y(g) - g\|_\infty^p \mu(K) \to 0,$$

cuando $y \to 0$.

Para el caso general, supongamos que $f \in L^p$, como C_c es denso en L^p, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in C_c$ tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$. De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|T_y(f) - f\| &= \|T_y(f) - T_y(g) + T_y(g) - g + g - f\| \\
&\leq \|T_y(f) - T_y(g)\| + \|T_y(g) - g\| + \|g - f\| \\
&= \|g - f\| + \|T_y(g) - g\| + \|g - f\| \\
&= 2\|g - f\| + \|T_y(g) - g\| < 3\epsilon,
\end{aligned}$$

para y suficientemente pequeña. □

2.1.2. Convolución

La convolución es una operación matemática muy importante entre dos funciones, tiene aplicaciones que incluyen probabilidad, estadística, visión por computadora, procesamiento de lenguaje natural, procesamiento de imagen y señal, ingeniería y ecuaciones diferenciales. Algunas propiedades importantes de la convolución las veremos en este capítulo, además tiene gran relevancia para la demostración de teoremas posteriores tales como el Teorema de Plancherel.

Definición 2.1.4. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, definimos la convolución $f * g$ como*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

siempre que esta integral exista.

Algunas de las propiedades importantes de esta operación son:

Asumiendo que las siguientes integrales existen, tenemos que

1. $f * g = g * f$.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. Para todo $z \in \mathbb{R}^d$, $T_z(f * g) = (T_z f) * g = f * (T_z g)$.
4. Si A es la cerradura de $\{x+y : x \in \mathrm{sop}(f), y \in \mathrm{sop}(g)\}$, entonces $\mathrm{sop}(f * g) \subset A$.

Para su demostración ver [5], página 240. También sabemos que si f, g son funciones tales que $f \in L^1$, $g \in C^k$ y $\partial^\alpha g$ es acotada para toda $|\alpha| \leq k$, entonces $(f * g) \in C^k$ y $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ para todo $|\alpha| \leq k$.

Los espacios de funciones L^p son muy importantes para el desarrollo de este trabajo, por lo que sería de gran interés estudiar algunos resultados de convolución en este espacio. Algunos de ellos es la **Desigualdad de Young**, el cual establece que si $f \in L^1$ y $g \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $(f * g)$ existe en casi todas partes, $(f*g) \in L^p$ y además $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. También tenemos que si p y q son exponentes conjugados, además $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $(f * g)(x)$ existe para toda x, $f * g$ es acotada, uniformemente continua, y

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

además si $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_0$.

De este resultado se puede obtener una generalización para la desigualdad de Young, llamada la **Desigualdad de Young Generalizada**, la cual afirma que si $1 \leq p,q,r \leq \infty$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, y además $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $f * g \in L^r$ y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Por otro lado veamos que

Proposición 2.1.5. *Si f, $g \in S$, entonces $f * g \in S$.*

Demostración. Dado que $f \in L^1$ y $g \in C^\infty$, tenemos que $(f * g) \in C^\infty$ y además $\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha (f) * g$. Ahora para cada $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene

$$(1 + |x|)^N |\partial^\alpha (f * g)(x)| = (1 + |x|)^N |(\partial^\alpha (f) * g)(x)|,$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha f(x - y) g(y) dy \right| &\leq (1 + |x|)^N \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x - y)||g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x - y)||g(y)| dy. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N &= (1 + |x + y - y|)^N \\ &\leq (1 + |x - y| + |y|)^N \\ &\leq (1 + |x - y|)^N (1 + |y|)^N, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x - y)||g(y)| dy &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[(1 + |x - y|)^N |\partial^\alpha f(x - y)| \right] (1 + |y|)^N |g(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_{(N,\alpha)} (1 + |y|)^N |g(y)| dy \\ &= \|f\|_{(N,\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |y|)^{N+d+1} |g(y)| \frac{dy}{(1 + |y|)^{N+d+1}} \end{aligned}$$

$$\leq \|f\|_{(N,\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \|g\|_{(N+d+1,0)} \frac{dy}{(1+|y|)^{N+d+1}}$$

$$= \|f\|_{(N,\alpha)} \|g\|_{(N+d+1,0)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy}{(1+|y|)^{N+d+1}} < \infty.$$

Así obtenemos que

$$(1+|x|)^N |\partial^\alpha (f * g)(x)| < \infty \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ y natural } N.$$

Por lo tanto

$$f * g \in S.$$

□

Para continuar estudiando propiedades de la convolución vamos a introducir una nueva notación. Dada una función $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ y $t > 0$, podemos definir la función $\phi_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tal que

$$\phi_t(x) = t^{-d} \phi(t^{-1}x) \text{ para cada } t > 0.$$

Estas nuevas funciones nos ayudarán para demostrar resultados muy importantes, tales como el teorema de Plancherel. Una observación que se puede obtener fácilmente es que si una función $\phi \in L^1$, entonces $\phi_t \in L^1$ independientemente de t, más aún, las integrales coinciden, es decir,

$$\int \phi(x)dx = \int \phi_t(x)dx \text{ para toda } t > 0.$$

Cuando se toma la convolución de una función f y ϕ_t, tal que $\phi \in L^1$ y $\int \phi = a$, es natural preguntarse cómo es $(f * \phi_t)$ cuando t tiende a cero, qué condiciones se necesitan para que $(f * \phi_t)$ converja, y si converge, a qué función lo hace. En el siguiente teorema daremos condiciones necesarias para que $(f * \phi_t)$ converja en distintos espacios de funciones cuando t tiende a 0.

Teorema 2.1.6. *Supongamos que $\phi \in L^1$ y $\int \phi(x)dx = a$, entonces*

1. *Si $f \in L^p$ tenemos que $f * \phi_t$ converge a (af) en L^p si t tiende a 0.*

2. *Si f es acotada y uniformemente continua, entonces $f * \phi_t$ converge uniformemente a (af) cuando t tiende a 0.*

3. *Si $f \in L^\infty$ y f es continua en un conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^d$, entonces $(f * \phi_t)$ converge uniformemente a (af) cuando t tiende a 0.*

Demostración. Ver [5], página 242. □

Para hacer la demostración del teorema de Plancherel, primero definiremos la transfromada de Fourier en un subconjunto denso de L^2, y de esta manera obtener una extensión en todo L^2. Para ello usaremos el hecho de que para $1 \leq p < \infty$, C_c^∞ es denso en $(L^p, \|\cdot\|_p)$, también C_c^∞ es denso en $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ y por tanto, S es denso en $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$.

2.1.3. Espacios de Hilbert

Vamos a desarrollar los resultados básicos acerca de los espacios de Hilbert, un tipo muy particular de espacios de Banach con propiedades especiales que están muy lejos de verificarse en espacios de Banach generales. Los espacios de Hilbert ocupan un lugar de enorme importancia dentro del conocimiento matemático. El desarrollo de estos espacios son de ayuda para poder dar una introducción a la transformada de Fourier. Lo que haremos es dar una base para el espacio de funciones cuadrado integrables periódicas, para así definir la transformada de Fourier discreta mediante la serie de Fourier.

Definición 2.1.7. *Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que una función $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ es un producto interior en H si cumple*

1. *$\langle x, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in H$.*

2. *$\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.*

3. *$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in H$.*

4. *$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ para toda $x, y, z \in H$.*

5. *Para $\lambda \in \mathbb{K}$ $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.*

Se dice que H es un espacio con producto interno o H es un espacio pre-Hilbert.

Sea H un espacio pre-Hilbert, entonces el producto interno define una norma sobre H, dada por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. A la norma que queda definida de esta manera se le conoce como la norma inducida por el producto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Si $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interior, y además el espacio es completo bajo la norma inducida por el producto interior, se dice que H es un espacio de Hilbert.

Al surgir los espacios de Hilbert de manera natural como una generalización a dimensión infinita de los espacios euclidianos, éstos preservan muchas de sus propiedades deseables. Una de estas propiedades es el concepto de ortogonalidad.

Definición 2.1.8. *Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interior. Diremos que x y $z \in H$ son ortogonales si $\langle x, z\rangle = 0$. Sea $A \subset H$ diremos que A es un subconjunto ortogonal si x y z son ortogonales para todo x, $z \in A$.*

Definición 2.1.9. *Sea $\{u_\alpha\}$ un subconjunto de vectores de H, donde α varía sobre un conjunto I de índices. Decimos que $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si*

$$\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = \begin{cases} 1 & si\ \alpha = \beta \\ 0 & si\ \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Dicho de otra forma $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si es ortogonal y $\|u_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in I$.

Al agregar a los conjuntos ortonormales la condición de maximalidad, surgen conjuntos de gran importancia para la teoría de espacios de Hilbert: Bases Ortonormales. La importancia de estos conjuntos radica en el hecho de que cualquier elemento de un espacio de Hilbert se puede expresar en términos de su base, así como también provee fórmulas explícitas para expresar la norma y el producto interior.

Definición 2.1.10. *Diremos que un subconjunto $\mathcal{E} = \{e_i : i \in I\}$ de un espacio de Hilbert H, es un sistema ortonormal completo o una base ortonormal, si $\mathcal{E}$ es ortonormal y es maximal con respecto a la ortogonalidad.*

Esta última condición de maximalidad se puede reescribir como sigue: $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de que si existe algún $x \in H$ tal que $\langle x, e_i \rangle = 0$ para todo $e_i \in \mathcal{E}$, entonces $x = 0$.

Teorema 2.1.11. ***Caracterización de Bases Ortonormales***
Sea $\mathcal{E} = \{e_i : i \in I\}$ un subconjunto de H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *$\mathcal{E}$ es una base ortonormal.*

2. *El subespacio generado por $\mathcal{E}$, $\langle \mathcal{E} \rangle$, es denso en H.*

3. *Para cada $x \in H$ se tiene que $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.*

4. *Para cada $x \in H$ se tiene que $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2$.*

5. *Si $x, y \in H$, entonces $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$.*

Demostración. Ver [3], página 16. □

La propiedad (3) es llamada la representación en serie de Fourier de x con respecto a la base $\mathcal{E}$, a los escalares $\langle x, e_i \rangle$ se les conoce como coeficientes de Fourier respecto a $\mathcal{E}$, y a la propiedad (4) se le denomina "igualdad de Parseval".

Teorema 2.1.12. *Sea $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert H, y sea $x \mapsto \hat{x}$ con $\hat{x} = (\langle x, u_i \rangle)_{i=0}^{\infty}$, entonces $\hat{}$ es un isomorfismo entre espacios de Hilbert.*

Demostración. Ver [3], página 20. □

El resultado anterior establece que todos los espacios de Hilbert de dimensión infinita con base ortogonal numerable, son isomorfos.

Para cumplir el objetivo de esta sección, necesitamos estudiar el espacio $L^2(\mathbb{T}^d)$, donde $\mathbb{T}^d$ es el toro d-dimensional o bien, el espacio cociente de $\mathbb{R}^d$ con $\mathbb{Z}^d$. Los resultados que daremos nos permitirán definir la **Transformada de Fourier discreta**, y de esta manera poder hacer una generalización para el caso continuo. El espacio $L^2(\mathbb{T}^d)$ es el conjunto de todas las funciones cuadrado integrables periódicas, con periodo 2π. Lo primero que veremos es ver que $L^2(\mathbb{T}^d)$ es un espacio de Hilbert. Sean f, $g \in L^2(\mathbb{T}^d)$, definamos la función $\langle , \rangle : L^2(\mathbb{T}^d) \times L^2(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{K}$ como

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f\bar{g}dx, \tag{2.1.1}$$

para toda f,$g \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Es fácil demostrar que 2.1.1 es un producto interno en $L^2(\mathbb{T}^d)$, y que su norma inducida es

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con esto obtenemos que $L^2(\mathbb{T}^d)$ es un espacio pre-Hilbert,de hecho tenemos que el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ es de Hilbert, haciendo unas modificaciones sobre el dominio, se sigue que $L^2(\mathbb{T}^d)$ es de Hilbert. Por otro lado se puede demostrar que la familia $\left\{\mathscr{E}_k : k \in \mathbb{Z}^d\right\}$ donde $\mathscr{E}_k = \{e^{2\pi i k\cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ (ver [5], página 248).

Por el teorema de caracterización de bases ortonormales, tenemos cualquier elemento de H se puede expresar como su serie de Fourier con respecto a una base, en particular tomando $H = L^2(\mathbb{T}^d)$ y como base a $\left\{\mathscr{E}_k : k \in \mathbb{Z}^d\right\}$. De modo que f se puede escribir como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)\mathscr{E}_k \quad \text{en } L^2(\mathbb{T}^d),$$

donde $\hat{f}(k) = \langle f, \mathscr{E}_k \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(x)e^{-2\pi i k\cdot x}dx$, son los coeficientes de Fourier. Sea $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, por la identidad de Parseval se deduce

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle f, \mathscr{E}_k \rangle|^2.$$

Definamos a la Transformada de Fourier discreta como el ismomorfismo $\hat{} :$ $L^2(\mathbb{T}^d) \to l^2$, tal que

$$f \mapsto \left(\langle f, \mathscr{E}_k \rangle\right)_{k \in \mathbb{Z}^d}.$$

Una de las propiedades de la transformada de Fourier discreta, la cual se puede generalizar para el caso continuo, es la desigualdad de Hausdorff-Young, la cual afirma que si $1 \leq p \leq 2$, q es el exponente conjugado de p, y si $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ entonces $\hat{f} \in l^q(\mathbb{Z}^d)$ y además

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p. \tag{2.1.2}$$

2.1.4. Transformada de Fourier

El concepto matemático que hoy conocemos como transformada de Fourier fue introducido por Joseph B. Fourier en 1811. La transformada de Fourier y el análisis armónico en general constituye hoy una de las herramientas más útiles para el estudio y el tratamiento de múltiples aspectos de las ecuaciones diferenciales parciales. Podría decirse que en este ámbito desempeña un papel análogo al de la transformada de Laplace en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Es también significativo el papel que la transformada de Fourier juega en el terreno de las aplicaciones, fundamentalmente en teoría de la señal, teoría cuántica de campos, tomografía y tratamiento y digitalización de imágenes.

Hemos visto cómo las series de Fourier representan un espacio de funciones periódicas. Ahora nos proponemos extender esto para funciones no periódicas reemplazando la serie por una integral.

Definición 2.1.13. *Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformada de Fourier de f la definimos de la siguiente manera*

$$(\mathscr{F}f)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx.$$

Claramente se tiene que $|e^{-2\pi i\xi\cdot x}| = 1$. De esta manera podemos asegurar que la transformación está bien definida pues

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi\xi\cdot x}dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)e^{-2\pi\xi\cdot x}|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx < \infty.$$

Además se puede probar que $\hat{f}$ es continua. De esta manera $\hat{f}$ está en $BC(\mathbb{R}^d)$, donde $BC(\mathbb{R}^d)$ son las funciones continuas y acotadas.

Usaremos la notación de $\mathscr{F}$ de transformada de Fourier para dar claridad en ciertas situaciones. Algunas propiedades de la transformada de Fourier son las siguientes

Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

1. $(T_y f)\hat{}(\xi) = e^{-2\pi i\xi\cdot y}\hat{f}(\xi)$ y $T_z(\hat{f}) = \hat{h}$ donde $h(x) = e^{2\pi iz\cdot x}f(x)$. (2.1.4)

2. Si $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es lineal e invertible y $S = (T^*)^{-1}$, entonces $(f \circ T)\hat{} = |detT|^{-1}\hat{f} \circ S$.

3. $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.

Por otro lado, se puede observar que
1. Si $x^\alpha f \in L^p$ para toda $|\alpha| \leq k$ entonces $\hat{f} \in C^k$ y $\partial^\alpha \hat{f} = ((-2\pi ix)^\alpha f)\,\hat{}$.
2. Si $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ para todo α tal que $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in C_0$, $|\alpha| \leq k$ entonces

$$(\partial^\alpha)\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \tag{2.1.3}$$

El siguiente resultado determina el comportamiento de la transformada de Fourier de cualquier función $f \in L^1$. El cual es uno de los resultados más importantes del análisis de Fourier y del análisis asintótico. Tiene muchas aplicaciones físicas, especialmente en estudios de fenómenos ondulatorios.

Lema 2.1.14. ***Lema de Riemann-Lebesgue***
Si $f \in L^1$, entonces

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx \to 0 \text{ cuando } |\xi| \to \infty.$$

Demostración. Ver [5], página 249. □

En álgebra lineal se estudian algunos tipos de transformaciones lineales, si tenemos una transformación lineal T, bajo ciertos criterios se puede definir una transformacion lineal S, tal que $S \circ T = T \circ S$ y esto a su vez sea igual a la transformación identidad. A S se le llama inversa de T. Es natural preguntarse si existe una transformación que actúe como inversa de la transformada de Fourier. Una transformación $\check{}$ que funciona como "inversa" de nuestra transformada de Fourier es la siguiente

Definición 2.1.15. ***Transformada de Fourier Inversa***
Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definimos la transformada de Fourier inversa como el operador $\check{}$ tal que

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{2\pi\xi\cdot x}dx.$$

Necesitamos los siguientes lemas para demostrar que efecivamente la transformada $\check{}$, es la inversa de la transformada de Fourier en el sentido $\check{\hat{f}} = \hat{\check{f}} = f_0$ y $f_0 = f$ casi en todas partes.

Lema 2.1.16. *Sea $a > 0$, entonces*

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Demostración. Por un lado tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2} dx = \prod_{j=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x_j|^2} dx = (I_1)^d.$$

Ahora tomemos el caso particular donde $d = 2$, veamos que

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a|x|^2} dx,$$

haciendo cambio a coordenadas polares, se sigue que

$$I_2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} re^{-ar^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2} dr,$$

haciendo un cambio de variable $u = ar$, así $du = 2ardr$, entonces

$$I_2 = \frac{\pi}{a} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{-\pi}{a} e^{-u}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

Por otro lado tenemos que $I_2 = (I_1)^2$, entonces $I_1 = (I_2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Por tanto obtenemos que $I_d = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}}$. □

Lema 2.1.17. *Si f, $g \in L^1$, entonces $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g}$.*

Demostración. La demostración se sigue de aplicar el teorema de Fubini en ambos lados de la igualdad. □

Proposición 2.1.18. *Sea $a > 0$ y sea $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ para $x \in \mathbb{R}^d$, entonces*

$$\hat{f}(\xi) = a^{\frac{-d}{2}} e^{-\pi \frac{|\xi|^2}{a}}.$$

Demostración. Consideremos primero el caso cuando $d = 1$, como $f(x) = e^{-\pi a x^2}$, tenemos $f'(x) = (2\pi a x)e^{-\pi a x^2}$, así

$$\begin{aligned}
(\hat{f})'(\xi) &= ((-2\pi i x)f)\hat{}(\xi) \\
&= \left((-2\pi i x)e^{-\pi a x^2}\right)\hat{}(\xi) \\
&= \frac{i}{a}\,(f')\hat{}(\xi) \\
&= \frac{i}{a}(-2\pi i \xi)\hat{f}(\xi) \\
&= \frac{-2\pi}{a}\xi\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la derivada del producto tenemos que

$$\frac{d}{d\xi}\left[e^{\frac{\pi\xi^2}{a}}\hat{f}(\xi)\right] = e^{\frac{\pi\xi^2}{a}}\left[\frac{-2\pi}{a}\xi\hat{f}(\xi)\right] + \hat{f}(\xi)\left[\frac{2\pi}{a}\xi e^{\frac{\pi\xi^2}{a}}\right] = 0.$$

de esta manera sabemos que $e^{\frac{\pi\xi^2}{a}}\hat{f}(\xi)$ es una constante. Usando el lema 2.1.16 y tomando a $\xi = 0$ se sigue que

$$\hat{f}(0) = \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\infty}^{\infty} e^{-\pi a x^2}dx = a^{\frac{-1}{2}},$$

por lo tanto

$$\hat{f}(\xi) = a^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-\pi\xi^2}{a}}.$$

Para el caso general, consideremos

$$f(x) = e^{-\pi a|x|^2} = \prod_{j=1}^{d} e^{-\pi a x_j^2},$$

aplicando Fubini a $\hat{f}$, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\prod_{j=1}^{d} e^{-\pi a x_j^2}\right)e^{-2\pi i \xi\cdot x}dx = \prod_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi a x_j^2}e^{-2\pi i \xi_j\cdot x_j}dx.$$

Para cada j podemos aplicar el caso $n = 1$, por tanto

$$\prod_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi a x_j^2}e^{-2\pi i \xi_j\cdot x_j}dx = \prod_{j=1}^{d} a^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-\pi\xi_j^2}{a}},$$

de esta manera se tiene

$$\hat{f}(\xi) = a^{\frac{-d}{2}} e^{\frac{-\pi|\xi|^2}{a}}.$$

□

En el siguiente teorema mostraremos que la Transformada de Fourier Inversa realmente funciona como "inversa" de la Transformada de Fourier.

Teorema 2.1.19. ***Teorema de inversión de Fourier***
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces existe una función continua f_0 tal que

$$\check{\hat{f}} = \hat{\check{f}} = f_0 \text{ y } f = f_0 \text{ casi en todas partes.}$$

Demostración. Tomemos $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ fijos, y sea $\phi(\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-\pi t^2 |x|^2}$. Veamos como es la transformada de Fourier de ϕ

$$\hat{\phi}(y) = T_x \left(\left(e^{-\pi t^2 |\xi|^2} \right) \hat{} (y) \right),$$

por la proposición 2.1.18, tenemos

$$\hat{\phi}(y) = T_x \left(t^{-d} e^{\frac{-\pi|y|^2}{t^2}} \right) = t^{-d} e^{-\pi \frac{|x-y|^2}{t^2}} = g_t(x-y),$$

donde $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$.

Notemos que $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = 1$, usando el lema 2.1.17 se sigue que

$$\begin{aligned} (I) \cong \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-\pi t^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g_t(x-y) dy = (f * g_t)(x). \end{aligned}$$

Por las observaciones 2.1.6 sabemos que $(f * g_t)$ converge a f en L^1 cuando t tiende a 0. Por otra parte tenemos que $e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-\pi t^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi) \to e^{2\pi i \xi \cdot x} \hat{f}(\xi)$ cuando $t \to 0$. De esta manera obtenemos que

$$\left| e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-\pi t^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi) \right| \to \left| e^{2\pi i \xi \cdot x} \hat{f}(\xi) \right| \le \left| \hat{f}(\xi) \right|.$$

Por el teorema de convergencia dominada, se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\xi\cdot x}e^{-\pi t^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{t\to 0} e^{2\pi i\xi\cdot x}e^{-\pi t^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)dx\\
&= \check{\hat{f}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (I) se tiene

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\xi\cdot x}e^{-\pi t^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)dx = \lim_{t\to 0}(f * g_t)(x) = f(x) \text{ casi en todas partes.}$$

De esta manera obtenemos que $f = \check{\hat{f}}$ casi en todas partes.

Para ver que $\hat{\hat{f}} = f$ casi en todas partes, se hace un cambio de variable $\xi = -u$ en (I) y se procede del mismo modo. Como $\hat{\hat{f}}$ y $\check{\hat{f}}$ son continuas, se tiene

$$\hat{\hat{f}} = \check{\hat{f}} = f \text{ casi en todas partes.}$$

□

Un corolario de gran importancia del resultado anterior es

Corolario 2.1.20. *$\mathscr{F} : S \to S$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Sabemos que $\mathscr{F} : S \to S$ es continuo y $\check{} : S \to S$ es continuo.

Además, $d : S \to S$ es tal que $d(g)(x) = g(-x)$ es un isomorfismo topológico. Por tanto si $f \in S$

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x) = (\mathscr{F}\circ d)(f)(x),$$

$\check{}$ es un isomorfismo topológico, y como $\check{}\circ\mathscr{F} = \mathscr{F}\circ\check{} = Id$ en S.

De esta manera se sigue que $\mathscr{F} : S \to S$ es un isomorfismo topológico. □

El siguiente lema se usa para demostrar el teorema de Plancherel.

Lema 2.1.21. *Sean $1 < p < q < r < \infty$ entonces $L^p \cap L^r \subset L^q$.*

Demostración. Si $r = \infty$ y si $f \in L^p \cap L^r$, se sigue

$$\int |f|^q = \int |f|^p|f|^{q-p} \leq \|f\|_\infty^{q-p}\int |f|^p < \infty$$

Ahora, si $r < \infty$, tenemos que $\frac{1}{r} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p}$, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{(1-\lambda)}{r}$, así $1 = \frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r}$, por lo que obtenemos que $\frac{p}{\lambda q}$ y $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ son exponentes conjugados.

Por tanto si $f \in L^p \cap L^r$

$$\int |f|^q = \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q}.$$

Por último usando Hölder, obtenemos que

$$\int |f|^q \leq \left\| |f|^{\lambda q} \right\|_{\frac{p}{\lambda q}} \left\| |f|^{(1-\lambda)q} \right\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} = \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

□

El teorema de Plancherel hace posible extender la transformada de Fourier, mediante un argumento de continuidad, a un operador unitario en L^2. En $L^1 \cap L^2$, esta extensión coincide con la transformada de Fourier original definida en L^1.

Teorema 2.1.22. ***Teorema de Plancherel***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Además el operador $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ se puede extender continuamente a todo $L^2(\mathbb{R}^d)$ como un isomorfismo entre espacios de Hilbert.

Demostración. Tomemos el conjunto $\chi = \{f \in L^1 : \hat{f} \in L^1\}$. Es fácil demostrar que χ es un subespacio lineal. Observemos que $f \in L^\infty$ ya que $f = \check{\hat{f}}$ casi en todas partes y sabemos que $\check{\hat{f}} \in L^\infty$, entonces por lo anterior y por el lema 2.1.21 obtenemos que $f \in L^2$.

Dado que $S \subset L^1$ y por el corolario 2.1.20 concluimos que $S \subset \chi$, entonces como S es denso en L^2 se sigue que χ es denso en L^2. Más aún $\hat{(\chi)} = \chi$, pues si $g \in \hat{(\chi)}$, existe $f \in \chi$ tal que $\hat{f} = g$ así $f \in L^1$ y $\hat{f} \in L^1$, y por el teorema de inversión de Fourier obtenemos que $\check{\check{f}} = f(-\cdot)$ casi en todas partes. Así $g \in \chi$ y análogamente para el recíproco. Por tanto $\hat{} : \chi \to \chi$ es biyectiva.

Ahora tomemos el producto interior de L^2 y veamos que $\hat{}$ preserva el producto interior en χ. Sean f, $g \in \chi$ lo que haremos es ver que $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$:

Definimos $h = \bar{\bar{g}}$, y veamos como es $\hat{h}$

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{g}(x)}e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{g}(x)e^{2\pi i\xi\cdot x}}dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(x)e^{2\pi i\xi\cdot x}dx} = \overline{g(x)}.\end{aligned}$$

Ahora veamos como es el producto interior de f y g

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{h}(x)dx.$$

Usando el lema 2.1.17

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle.$$

Así $\hat{} : \chi \to \chi$ es un isomorfismo de espacios con producto interior y χ es denso en L^2, Por tanto $\hat{} : \chi \to \chi$ se puede extender continuamente a todo L^2 como isomorfismo entre espacios de Hilbert. Definimos a la extensión de $\hat{}$ como una función $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$ tal que $\mathscr{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(f_n)$, donde $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \chi$ y converge a f en L^2. La cual esta bien definida pues

$$\|\mathscr{F}(f_n) - \mathscr{F}(f_m)\|_2 = \|\mathscr{F}(f_n - f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \to 0 \text{ cuando } n,m \to \infty,$$

por tanto $\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(f_n)$ existe.

Observemos que $\mathscr{F}(f)$ no depende de la sucesión elegida, pues si (f_n), (g_n) son sucesiones de χ tal que (f_n) y (g_n) convergen a f en L^2, entonces $f_n - g_n \to 0$ en L^2. Por lo que $\mathscr{F}(f_n - g_n)$ converge a 0, ya que $\mathscr{F}$ es continua en χ. Así obtenemos $\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(f_n) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(g_n)$.

Por lo que podemos definir a $\mathscr{F}$ como

$$\mathscr{F}(f)(\xi) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(\xi)e^{-2\pi\xi\cdot x}dx \text{ para } f \in L^2.$$

Por definición $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$ es continua, veamos que $\mathscr{F}$ preserva la norma. Dado $f \in L^2$ existe $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \chi$ tal que $f_n \to f$ en L^2, entonces

$$\|\mathscr{F} f\|_2 = \|\lim_{n\to\infty} \mathscr{F} f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\mathscr{F} f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

Por último $\check{} : \chi \to \chi$ es continuo, preserva la norma y $(\check{\chi}) = \chi$. Aplicando los mismos argumentos que usamos para definir $\mathscr{F}$, podemos mostrar que existe una extensión $\check{} : L^2 \to L^2$ que preserva la norma y es continua. Se puede probar fácilmente que $\check{} = \mathscr{F}^{-1}$.

Falta demostrar que si $f \in L^1 \cap L^2$ entonces $\hat{f} = \mathscr{F}(f)$.

En efecto: Sean $f \in L^1 \cap L^2$ y $g(x) = e^{-\pi|x|^2} \in S$.

Notamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g dx = 1$.

Ahora, por la desigualdad de Young obtenemos que $(f * g_t) \in L^1 \cap L^2$ y $(f * g_t)\hat{} = \hat{f}\hat{g}_t(\xi) \in L^1$.

Por lo tanto $(f * g_t) \in L^1$ y $(f * g_t)\hat{} \in L^1$ por lo que tenemos que $(f * g_t) \in \chi$ para toda $t > 0$. Además $(f * g_t) \to f$ en L^2 cuando $t \to 0$. Entonces $\mathscr{F}(f * g_t) \to \mathscr{F}(f)$ en L^2 cuando $t \to 0$.

Tenemos que existe una sub-red ([5], página 126) de $(\mathscr{F}(f * g_t))_{t>0}$ tal que $\mathscr{F}(f * g_t)$ converge a $\mathscr{F}(f)$ casi en todas partes. Por otra parte $\mathscr{F}(f * g_t)(\xi) = (f * g_t)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\pi t^2|\xi|^2}$, se sigue que

$$\hat{f}(\xi)e^{-\pi t^2|\xi|^2} \to \hat{f}(\xi) \text{ cuando } t \to 0.$$

Por lo tanto $\mathscr{F}(f) = \hat{f}$ casi en todas partes. □

Por último para el caso general también tenemos la desigualdad de Hausdorff-Young, que afirma que si $1 \le p \le 2$, q es el exponente conjugado de p, y si $f \in L^p$, entonces $\mathscr{F}(f) \in L^q$ y $\|\mathscr{F}(f)\|_q \le \|f\|_p$.

2.2. Espacios de Sobolev

En la siguiente sección estudiaremos los espacios de Sobolev que resultan ser importantes en análisis funcional para obtener información sobre ecuaciones diferenciales parciales, y será un espacio en el que posteriormente caracterizemos los conjunto compactos.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^d$. Tomemos $f \in C^1(U)$, y $\phi \in C_c^\infty(U)$ usando integración por partes y el hecho de que ϕ vale cero en la frontera de U por estar en $C_c^\infty(U)$, tenemos

$$\int_U f\phi_{x_i} dx = f\phi\Big|_{\partial U} - \int_U \phi f_{x_i} dx = -\int_U \phi f_{x_i} dx.$$

De forma general, si k es un entero positivo, y $f \in C^k(U)$, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \le k$, tenemos que

$$\int_U f D^\alpha(\phi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \phi D^\alpha(f) dx. \tag{2.2.1}$$

Lo que haremos será estudiar la ecuación 2.2.1, sabemos que la ecuación 2.2.1 se cumple si la función f esta en $C^k(U)$, pero nos preguntamos qué pasará si la función f no es k veces diferenciable. El problema radica en que si $f \notin C^k(U)$, entonces el término $D^\alpha(f)$ del lado derecho de la ecuación 2.2.1, no tiene sentido. Para resolver esto queremos ver si existe una función localmente integrable v, tal que cumpla la ecuación 2.2.1, es decir

$$\int_U fD^\alpha(\phi)dx = (-1)^\alpha \int_U \phi v dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Definición 2.2.1. *Sean u, $v \in L^1_{loc}(U)$, y α un multi-índice. Decimos que v es la α-ésima derivada débil si*

$$\int_U uD^\alpha(\phi)dx = (-1)^\alpha \int_U \phi v dx,$$

para toda función $\phi \in C_c^\infty(U)$.

En otras palabras diremos que v es la derivada en sentido débil de u, y a v lo denotaremos por $D^\alpha(u)$. Si no existe v tal que cumpla 2.2.1, entonces diremos que u no tiene α-ésima derivada en sentido débil. Un resultado que se puede seguir fácilmente es que si la α-ésima derivada débil de una función u existe, entonces es única salvo conjuntos de medida cero. La demostración se puede ver en [4], página 243.

Para ilustrar los resultados anteriores daremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.2.2. *Sean $n = 1$, $U = (0,2)$ y*

$$u(x) = \begin{cases} x & si\ 0 < x \leq 1 \\ 1 & si\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

Definamos

$$v(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & si\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

Demostremos que $u' = v$ en sentido débil. Sea $\phi \in C_c^\infty$, necesitamos probar que

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^2 v\phi dx.$$

Veamos que

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx.$$

Usando integración por partes en la primera integral e integrando en la segunda

$$\int_0^2 u\phi' dx = u\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi' dx + \phi\Big|_1^2.$$

Como ϕ esta en $C_c^\infty(U)$ tenemos que $\phi(0) = \phi(2) = 0$. De esta manera

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^2 v\phi dx.$$

Así obtenemos que v es la derivada de u en sentido débil.

Para definir los espacios de Sobolev, fijemos $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero positivo. Tomaremos el conjunto de todas las funciones que tienen derivadas débiles de orden menor o igual a k, que estén en el espacio $L^p(U)$.

Definición 2.2.3. *Definimos el espacio de Sobolev como el conjunto $W^{k,p}(U)$ de todas las funciones localmente integrables $u : U \to \mathbb{R}$ tales que $D^\alpha(u)$ existe en sentido débil para toda $|\alpha| \leq k$ y $D^\alpha(u) \in L^p(U)$.*

Es decir el espacio de Sobolev es un subconjunto de $L^p(U)$, tal que todas sus derivadas débiles estén en $L^p(U)$. Algunas propiedades básicas de las derivadas débiles en los espacios de Sobolev son las siguientes:

Teorema 2.2.4. *Supongamos que $f, g \in W^{k,p}(U)$ y $|\alpha| \leq k$, entonces*

1. *$D^\alpha(f) \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\alpha(D^\beta(f)) = D^\beta(D^\alpha(f))$ para todos multi-índices α, β, tal que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.*

2. *Para cada* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in W^{k,p}(U)$ *y además* $D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha(f) + \mu D^\alpha(g)$, *con* $|\alpha| \leq k$.

3. *Si* V *es un subconjunto abierto de* U, *entonces* $f \in W^{k,p}(V)$.

4. *Si* $\zeta \in C_c^\infty$, *entonces* $\zeta f \in W^{k,p}(U)$ *y*

$$D^\alpha(\zeta f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(\zeta) D^{\alpha-\beta}(f),$$

   donde $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

El número (4) es conocida como la fórmula de Leibniz.

Demostración. Ver [4] página 247. □

El inciso 2 del teorema 2.2.4 nos dice que el espacio $W^{k,p}(U)$ es un espacio vectorial, nos preguntamos si podemos definir una norma sobre este espacio, como cada función en $W^{k,p}(U)$ junto a sus derivadas pertencen a $L^p(U)$, es natural pensar en una norma que tenga algo en común con la norma conocida para los espacios L^p.

Definición 2.2.5. *Si* $f \in W^{k,p}(U)$, *entonces definimos la norma de* f *por*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & si\ 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} ess\sup_U |D^\alpha f| & si\ p = \infty. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Para ver que 2.2.2 es una norma en $W^{k,p}(U)$ solamente nos enfocaremos en la desigualdad del triángulo, para demostrarlo usaremos la desigualdad de Minkowski primero para integrales y después para sumas finitas. Sean $f, g \in W^{k,p}$, entonces

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{W^{k,p}} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(f) + D^\alpha(g)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(f)\|_p^p + \|D^\alpha(g)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(f)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(g)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|f\|_{W^{k,p}} + \|g\|_{W^{k,p}},$$

por lo que $\| \ \|_{W^{k,p}}$ define una norma sobre $W^{k,p}$. Para el caso $p = \infty$ se usa la desigualdad de Minkowaki.

Definición 2.2.6. *Sea* (f_m) *una sucesión en* $W^{k,p}$. *Decimos que* (f_m) *converge a* f *si para cada conjunto compacto* $V \subset U$, (f_m) *converge a* f *en la norma de* $W^{k,p}(V)$.

En el primer capítulo se estudiaron los espacios L^p, algunas de las propiedades más importantes de ellos era el hecho de que son espacios completos bajo la métrica inducida por su norma. Ahora que estudiamos un nuevo tipo de espacios, el cual ya vimos que son normados, es lógico preguntarse si estos nuevos espacios son completos. En el siguiente resultado mostraremos que el espacio $W^{k,p}$ es un espacio completo con la norma 2.2.2.

Teorema 2.2.7. *Para cada* $k = 1, 2, \ldots$ *y* $1 \leq p \leq \infty$, *el espacio de Sobolev es de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(U)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|D^\beta(f_i) - D^\beta(f_j)\|_p &= \left(\int_U |D^\beta(f_i - f_j)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha(f_i) - D^\alpha(f_j)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha(f_i - f_j)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f_i - f_j\|_{W^{k,p}} \to 0 \quad si\ i, j \to \infty.
\end{aligned}$$

De aquí se tiene que para cada $|\alpha| \leq k$ la sucesión $\{D^\alpha(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(U)$. Como el espacio $L^p(U)$ es de Banach, entonces para cada α existe f_α tal que

$$D^\alpha(f_m) \to f_\alpha \text{ en } L^p(U),$$

en particular para $\alpha = (0,...,0)$, se tiene que

$$f_m \to f_{(0,\dots,0)} =: f \text{ en } L^p(U)\ .$$

Vamos a probar que $f \in W^{k,p}(U)$, que sus α-ésimas derivadas débiles satisfacen la ecuación

$$D^\alpha f = f_\alpha,$$

y que f_i converge a f en $W^{k,p}$.

Sea α un multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, y $\phi \in C_c^\infty$, entonces para cada m tenemos que

$$\int_U D^\alpha(f_m)\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U f_m D^\alpha(\phi)dx.$$

Usando la desigualdad de Hölder, el hecho de que $D^\alpha(f_m) \to f_\alpha$ en $L^1(U)$ y de que $\phi \in C_c^\infty$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_U D^\alpha(f_m)\phi dx - \int_U f_\alpha\phi dx\right| &= \left|\int_U \left(D^\alpha(f_m)\phi - f_\alpha\phi\right)dx\right| \\ &\leq \int_U \left(|D^\alpha(f_m) - f_\alpha|\ |\phi|\right)dx \\ &\leq \left(\int_U |D^\alpha(f_m) - f_\alpha|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_U |\phi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= M\left(\int_U |D^\alpha(f_m) - f_\alpha|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad si\ m \to \infty,\end{aligned}$$

donde $M = \left(\int_U |\phi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$. Por tanto

$$\lim_{m\to\infty}\int_U D^\alpha(f_m)\phi dx = \int_U f_\alpha\phi dx.$$

De forma análoga se puede obtener que

$$\lim_{m\to\infty}\int_U f_m D^\alpha(\phi)dx = \int_U f D^\alpha(\phi)dx,$$

de esta manera tenemos que

$$\int_U f_\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U f D^\alpha(\phi)dx \text{ con } \phi \in C_c^\infty,$$

por lo que las derivadas en sentido débil existen y además

$$D^\alpha(f) = f_\alpha \in L^p(U),$$

en consecuencia se tiene que $f \in W^{k,p}(U)$.

Finalmente

$$\|f_i - f\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha(f_i) - D^\alpha(f)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \text{ cuando } i \to \infty$$

Pues $\|D^\alpha(f_i) - D^\alpha(f)\|_p \to 0$ cuando $i \to \infty$ para todo multi-índice α, con $|\alpha| \leq k$.

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Kolmogorov-Riesz

La compacidad en los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)(1 \leq p < \infty)$ es a menudo vital en las pruebas de existencia para las ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de $L^p(\mathbb{R}^d)$ sea compacto se obtiene en el teorema de compacidad de Kolmogorov, o también llamado teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz. Las pruebas de este teorema se basan frecuentemente en el teorema de Arzelá-Ascoli. En este capítulo mostramos cómo se puede deducir tanto el teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz, como el teorema de Arzelá-Ascoli de un lema sobre compacidad en espacios métricos, que se basa en la generalización del teorema de Heine-Borel visto en el capítulo 1, que nos dice que un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado. Otro teorema que estudiaremos en este capítulo es el principio de selección de Helly.

3.1. Teorema de compacidad de Arzelá-Ascoli

El siguiente lema es de gran importancia, pues a través de el obtenemos una caracterización de los conjuntos totalmente acotados en los espacios métricos, y nos ayudará a mostrar los siguientes tres teoremas, entre ellos el teorema de Arzelá-Ascoli y el de Kolmogorov-Riesz.

Lema 3.1.1. *Sea X un espacio métrico. Asumamos que para todo $\epsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$, un espacio métrico W y un mapeo $\Phi : X \to W$ continuo tal que $\Phi(X)$*

es totalmente acotado, y para todo $x, y \in X$ tal que $d(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta$, se tiene que $d(x, y) < \epsilon$. Entonces X es totalmente acotado.

Demostración. Para cualquier $\epsilon > 0$, tomamos δ, W y Φ que existen por hipótesis. Como $\Phi(X)$ es totalmente acotado, existe una δ-cubierta $\{V_1, ..., V_n\}$ de $\Phi(X)$, así obtenemos que $\{\Phi^{-1}(V_1), ..., \Phi^{-1}(V_n)\}$ es una cubierta de X.

Veamos que el $diam(\Phi^{-1}(V_i)) \leq \epsilon$ para toda $i = 1, \cdots, n$. Sea $x, y \in \Phi^{-1}(V_i)$, como $x, y \in \Phi^{-1}(V_i)$ se tiene que $\Phi(x), \Phi(y) \in V_i$, lo que nos dice $d(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta$, entonces por hipótesis se sigue $d(x, y) < \epsilon$. Como x,y son arbitrarias se cumple para toda $x, y \in \Phi^{-1}(V_i)$, en particular para el supremo, por lo que $diam(\Phi^{-1}(V_i)) \leq \epsilon$, así obtenemos que $\{\Phi^{-1}(V_1), ..., \Phi^{-1}(V_n)\}$ es una ϵ-cubierta de X, de esta manera X es totalmente acotado. □

El primer teorema que mostraremos usando el lema anterior es el teorema de Arzelá-Ascoli, en el primer capítulo ya lo probamos usando la técnica de diagonalización. Daremos ahora una caracterización de los conjuntos totalmente acotados en el espacio de funciones continuas definidas sobre un espacio topológico compacto (anteriormente nuestro espacio tolológico compacto era el intervalo [a,b]). Para demostrar el regreso del siguiente teorema daremos una función definida en el subconjunto de funciones sobre el espacio $\mathbb{R}^d$ y veremos que esa función cumple las hipótesis del lema 3.1.1.

Teorema 3.1.2. ***Arzelá-Ascoli***
Sea Ω un espacio topológico compacto. Entonces un subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(\Omega)$ es totalmente acotado con la norma del supremo si y sólo si

1. *es puntualmente acotado.*

2. *es equicontinuo.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Asumimos que $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es puntualmente acotado y equicontinuo. Sea $\epsilon > 0$, como el conjunto $\mathcal{F}$ es equicontinuo, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si x,$y \in \Omega$, $d(x, y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Por otro lado tenemos que Ω es compacto, podemos encontrar una familia de abiertos $\{V_1, ..., V_n\}$, tal que es una δ-cubierta de Ω, por la equicontinuidad de $\mathcal{F}$

y la manera que tomamos la δ-cubierta de Ω, se tiene que si x, $y \in V_i$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y para toda $i = 1, \cdots, n$.

Para cada V_i elijamos x_i fijo. Definimos $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ como:

$$\Phi(f) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$

como $\mathcal{F}$ es puntualmente acotado, se tiene que $\Phi(\mathcal{F})$ es acotada, y como estamos en dimensión finita, se tiene $\Phi(\mathcal{F})$ es totalmente acotada.

Más aún si $f, g \in \mathcal{F}$ con $\|\Phi(f) - \Phi(g)\| < \epsilon$, para cada $x \in \Omega$, existe j_x con $j_x = 1, \cdots, n$ tal que $x \in V_{j_x}$, de esta manera se obtiene que:

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_{j_x})| + |f(x_{j_x}) - g(x_{j_x})| + |g(x_{j_x}) - g(x)| < 3\epsilon,$$

tomando el supremo sobre las $x \in \Omega$, obtenemos

$$\|f - g\|_\infty \leq 3\epsilon.$$

Por el lema 3.1.1 $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto totalmente acotado de $C(\Omega)$.

Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cubierta finita de $\mathcal{F}$, claramente $\mathcal{F}$ es acotado, así existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_\infty < M \text{ para toda } f \in \mathcal{F},$$

de manera que

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < M \text{ para toda } f \in \mathcal{F},$$

se sigue

$$|f(x)| < M \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \text{ y para toda } x \in \Omega,$$

por lo tanto

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| \leq M \text{ para toda } x \in \Omega.$$

Así obtenemos que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotado.

Veamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Sea $\epsilon > 0$. Consideremos la $\frac{\epsilon}{6}$-cubierta $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de $\mathcal{F}$, y para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$ tomemos $g_j \in U_j$ fijo. Como g_j es continua en Ω, para cada $x \in \Omega$ podemos elegir un conjunto abierto $V_{j,x}$ tal que $|g_j(x) - g_j(y)| \leq \frac{\epsilon}{6}$ para toda $y \in V_{j,x}$.

Tomamos ahora $V_x = \bigcap_{i=1}^n V_{j,x}$. Notemos que $\{V_x\}$ es una cubierta abierta de Ω, por la compacidad de Ω existen $x_1, \cdots, x_n \in \Omega$ tal que

$$\Omega \subset \cup_{i=1}^n V_{x_i}.$$

Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de la cubierta $\{V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}\}$. Si $f \in \mathcal{F}$, entonces $f \in U_j$ para algún $j \in \{1, \cdots, n\}$, por lo cual

$$\|f - g_j\|_\infty < \frac{\epsilon}{6},$$

luego, si $x, y \in \Omega$ con $|x - y| < \delta$, existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x, y \in V_{x_i}$, se sigue que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)|.$$

Para el primer término

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_i)| &\leq |f(x) - g_j(x)| + |g_j(x) - g_j(x_i)| + |g_j(x_i) - f(x_i)| \\ &\leq 2\|f - g_j\|_\infty + |g_j(x) - g_j(x_i)| \\ &< 2\frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se sigue de la continuidad de g_j. De forma análoga se tiene que

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia, si $x, y \in \Omega$ con $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Por tanto $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

$\square$

3.2. Teorema de compacidad para espacios l^p

Antes de ver el teorema de Kolmogorov-Riesz daremos una caracterización de los conjuntos totalmente acotados en los espacios $l^p = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$. La demostración del siguiente teorema es similar a la demostración del teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 3.1.2), encontraremos una función que cumpla las condiciones del lema 3.1.1. A menudo los espacios l^p se estudian por separado de los espacios L^p, pero estos se pueden ver como un caso particular de los espacios L^p, donde el espacio que se trabaja son los naturales $\mathbb{N}$ con la medida de contar. Un dato interesante es que el primer matemático en demostrar el siguiente teorema fue Fréchet en 1908, pero solamente lo demostró para el caso $p = 2$.

Teorema 3.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ es un subconjunto de l^p, donde $1 \leq p < \infty$, entonces $\mathcal{F}$ es totalmente acotado si y sólo si:*

1. *Es puntualmente acotado.*

2. *Para todo $\epsilon > 0$, existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda x en el subconjunto*

$$\sum_{k>n} |x_k|^p < \epsilon^p.$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Asumimos que $\mathcal{F} = \{x^{(i)}\}_{i\in I}$ satisface las dos condiciones del teorema. Dado $\epsilon > 0$ tomemos la n que existe por hipótesis, definamos el mapeo $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi(x) = (x_1, ..., x_n),$$

ya que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotado, para cada $j = 1, \cdots, n$ existe M_j tal que $\sup_{i\in I}\{|x_j^{(i)}|\} < M_j$. Tomando $M = \max_{j=\overline{1,n}}\{M_j\}$, obtenemos que $|\Phi(x^{(i)})| < nM$ para toda $i \in I$, por lo que $\Phi(\mathcal{F})$ es acotado. Como estamos en un espacio de dimensión finita se tiene que $\Phi(\mathcal{F})$ es totalmente acotado.

Ahora bien, si $x, y \in \mathcal{F}$ tal que $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$, usando la desigualdal de Minkowski obtenemos que

$$\begin{aligned}\|x-y\|_p &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k>n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k>n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k>n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<3\epsilon.\end{aligned}$$

Por el lema 3.1.1, $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{F}=\{x^{(i)}\}_{i\in I}$ un subconjunto totalmente acotado de l^p.

Entonces para cada $\epsilon>0$, existe una ϵ-cubierta finita de $\mathcal{F}$, claramente $\mathcal{F}$ es acotado, por lo que existe $M\in\mathbb{R}$ tal que

$$\|x^{(i)}\|_p<M \text{ para toda } i\in I,$$

de manera que

$$|x_j^{(i)}|<M \text{ para toda } i\in I \text{ y para toda } j\in\mathbb{N},$$

por lo tanto

$$\sup_{i\in I}|x_j^{(i)}|\leq M \text{ para toda } j\in\mathbb{N}.$$

Así obtenemos que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotado.

Veamos ahora que para todo $\epsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $x\in\mathcal{F}$, se tiene que $\sum_{k>N}|x_k|^p<\epsilon^p$. Sea $\epsilon>0$, como $\mathcal{F}$ es totalmente acotado, existe una ϵ-cubierta $\{U_1,...,U_m\}$ de $\mathcal{F}$. Para cada $j=1,...,m$ elijamos $x^{(j)}=\{x_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}\in U_j$. Como $x^{(j)}\in l^p$, existe $N_j\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>N_j}|x_k^{(j)}|^p<\epsilon^p$, veamos cómo es $\sum_{k>N_j}|y_k|^p$ cuando $y=\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\in U_j$. Primero observemos que si $y\in U_j$, entonces $\|x^{(j)}-y\|_p^p=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(j)}-y_k|^p<\epsilon^p$. Por lo tanto $\left(\sum_{k>N_j}|y_k-x_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon$. Ahora

$$\left(\sum_{k>N_j}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k>N_j}|y_k-x_k^{(j)}+x_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando desigualdad de Minkowski para series se tiene que

$$\left(\sum_{k>N_j} |y_k - x_k^{(j)} + x_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k>N_j} |y_k - x_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k>N_j} |x_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon.$$

Tomando $n = \text{máx}\{N_j : j = 1, ..., m\}$, se tiene que para cualquier $y \in \mathcal{F}$

$$\left(\sum_{k>n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon.$$

De esta manera concluimos con la demostración. □

3.3. Teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz

En esta sección estaremos exponiendo y explicando el teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz, un poderoso teorema del análisis funcional, que caracteriza la noción de totalmente acotado en los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$. Antes de exponer el teorema, mostraremos la desigualdad de Jensen para funciones convexas en $\mathbb{R}^d$ que es de importancia en la demostración del teorema de Kolmogorov-Riesz.

Definición 3.3.1. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo y no vacío, sea $f : S \to \mathbb{R}$, decimos que f es convexa en S si y sólo si*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo x_1, $x_2 \in S$

Algunas observaciones son que una función convexa f definida en un abierto C es continua en C y diferenciable en todos los puntos menos en un conjunto de medida cero, además si $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa y x_0 un punto interior de I, entonces existe α tal que $f(x) \geq f(x_0) + \alpha(x - x_0)$ para toda $x \in I$.

Lema 3.3.2. ***Desigualdad de Jensen***
Sean E un conjunto medible de $\mathbb{R}^d$, ρ una función no negativa e integrable en E tal

que

$$\int_E \rho = 1.$$

Sean $I = [a, b]$ *un intervalo en* $\mathbb{R}$*,* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *una función convexa, y* $f : E \to I$ *una función tal que* $f\rho$ *y* $(\varphi \circ f)\rho$ *son integrables en* E*. Entonces* $\int_E f\rho \in I$ *y además*

$$\varphi\left(\int_E f\rho\right) \leq \int_E (\varphi \circ f)\rho$$

Demostración. Primero mostremos que $\int_E f\rho \in I$. Si $f \geq a$ para toda $x \in E$, tenemos que $f\rho \geq a\rho$, por tanto $\int f\rho \geq a$. De manera similar obtenemos que $\int f\rho \leq b$, así $\int_E f\rho \in I$. Tomemos $c = \int_E f\rho$, supongamos que c pertence al interior de I, sabemos que existe α, tal que

$$\varphi(t) \geq \varphi(c) + \alpha(t - c) \text{ para toda } t \in I, \tag{3.3.1}$$

al sustituir en 3.3.1 t por $f(x)$ y multiplicando por $\rho(x)$ obtenemos

$$(\varphi \circ f)(x)\rho(x) \geq \varphi(c)\rho(x) + \alpha(f(x) - c)\rho(x) \text{ para toda } x \in E,$$

integrando en ambos lados, se sigue que

$$\int_E (\varphi \circ f)(x)\rho(x) \geq \varphi(c) + \alpha\left(\int_E f(x)\rho(x) - c\right) = \varphi(c) = \varphi\left(\int_E f(x)\rho(x)\right).$$

Ahora veamos que pasa si c es alguno de los extremos, sin pérdida de generalidad supongamos que $c = a$, por lo que $\int_E f\rho = a$ implica que $f = a$ casi en todas partes en el conjunto $S = \{x \in E : \rho(x) > 0\}$. De esta manera se sigue que

$$\int_E (\varphi \circ f)(x)\rho(x) = \int_S (\varphi \circ f)(x)\rho(x) = \varphi(a)\int_S \rho(x) = \varphi(a).$$

Por tanto $\varphi\left(\int_E f\rho\right) = \int_E (\varphi \circ f)\rho$. □

Teorema 3.3.3. ***Teorema de Kolmogorov-Riesz***

Sea $1 \leq p < \infty$*. Un subconjunto* $\mathcal{F}$ *de* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *es totalmente acotado si y sólo si:*

1. $\mathcal{F}$ *es acotado.*

2. *Para cada $\epsilon > 0$, existe algún R tal que para toda $f \in \mathcal{F}$*

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

3. *Para cada $\epsilon > 0$, existe algún $\rho > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$, $y \in \mathbb{R}^d$ con $|y| < \rho$*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{F}$ cumple las tres condiciones. Primero, dado $\epsilon > 0$ tomemos R de la segunda condición, y ρ de la tercera condición.

Sea Q un cubo abierto centrado en el origen tal que $|y| < \frac{1}{2}\rho$ para toda $y \in Q$. Sean $Q_1, ..., Q_N$ translaciones de Q tal que $Q_j \cap Q_k = \{\varnothing\}$ si $k \neq j$, y la cerradura de $\bigcup\limits_{i=\overline{1,N}} Q_i$ contenga la bola de radio R centrada en el origen. Sea P el mapeo proyección que va de L^p al espacio de funciones características en los cubos Q_i dada por

$$Pf(x) = \begin{cases} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(z)dz, & x \in Q_i,\ i = 1, \cdots, N \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se puede probar fácilmente que P es lineal. Veamos que P es acotado.

Por demostrar que $\|P(f)\|_p \leq M\|f\|_p$ para alguna $M > 0$, en efecto

$$\begin{aligned} \|P(f)\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |P(f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\cup_{i=1}^N Q_i} |P(f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\left(\cup_{i=1}^N Q_i\right)^c} |P(f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \int_{Q_i} |P(f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Minkowski para series

$$\begin{aligned} \|P(f)\|_p &\leq \sum_{i=1}^N \left(\int_{Q_i} |P(f)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{Q_i} \left(\left|\frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(z)dz\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|^p} \left(\int_{Q_i} |f(z)| dz \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3.2}$$

Por otro lado usando Hölder, se sigue

$$\int_{Q_i} |f(z)| dz \leq \left(\int_{Q_i} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_i} dz \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_p |Q_i|^{\frac{1}{q}},$$

de esta manera

$$\left(\int_{Q_i} |f(z)| dz \right)^p \leq \|f\|_p^p |Q_i|^{\frac{p}{q}},$$

sustituyendo en 3.3.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \|P(f)\|_p &\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|^p} \|f\|_p^p |Q_i|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_p \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|Q_i||Q_i|^{\frac{p}{q}}}{|Q_i|^p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\left(\frac{|Q_i||Q_i|^{\frac{p}{q}}}{|Q_i|^p} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{|Q_i|^{\frac{1}{p}} |Q_i|^{\frac{1}{q}}}{|Q_i|} = |Q_i|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} = |Q_i|^0 = 1.$$

Por lo tanto

$$\|P(f)\|_p \leq N \|f\|_p,$$

de esta manera mostramos que P es acotado.

Ahora sea $f \in \mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \|f - Pf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - Pf(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \cup_{i=1}^{N} Q_i} |f(x) - Pf(x)|^p dx + \int_{\cup_{i=1}^{N} Q_i} |f(x) - Pf(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Usando la condición 2, y que $B_R(0) \subset \overline{\bigcup_{i=\overline{1,N}} Q_i}$, obtenemos

$$\|f - Pf\|_p^p < \epsilon^p + \int_{\cup_{i=1}^{N} Q_i} |f(x) - Pf(x)|^p dx = \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - Pf(x)|^p dx. \tag{3.3.3}$$

Por otro lado, para cada i fijo, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|f(x) - Pf(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(z) dz \right| \\
&= \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(x) dz - \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(z) dz \right| \\
&= \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \left(f(x) - f(z) \right) dz \right|.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en 3.3.3

$$
\|f - Pf\|_p^p < \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - Pf(x)|^p dx = \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \left(f(x) - f(z) \right) dz \right|^p dx.
$$

Por la desigualdad de Jensen, se obtiene

$$
\|f - Pf\|_p^p < \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(x) - f(z) dz \right|^p dx \leq \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |f(x) - f(z)|^p dz dx.
$$

Notemos que $z - x \in 2Q$, cuando $x, z \in Q_i$, tomando el cambio de variable $y = z - x$

$$
\begin{aligned}
\|f - Pf\|_p^p &< \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |f(x) - f(z)|^p dz \ dx \\
&\leq \epsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{2Q} |f(x) - f(x+y)|^p dy \ dx.
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Fubini, usando que $|Q_i| = |Q|$ y que los Q_i son disjuntos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{2Q} |f(x) - f(x+y)|^p dy \ dx &= \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - f(x+y)|^p dx \ dy \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x+y)|^p dx \ dy,
\end{aligned}
$$

de esta manera

$$
\|f - Pf\|_p^p < \epsilon^p + \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x+y)|^p dx \ dy,
$$

por la condición 3

$$\begin{aligned}\|f - Pf\|_p^p &< \epsilon^p + \frac{1}{|Q|}\int_{2Q}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x) - f(x+y)|^p dx\ dy \\ &\leq \epsilon^p + \frac{1}{|Q|}\int_{2Q}\epsilon^p dy = (2^d + 1)\epsilon^p.\end{aligned}$$

Entonces $\|f - Pf\|_p < (2^d + 1)^{\frac{1}{p}}\epsilon$. Así obtenemos $\|f\|_p < (2^n + 1)^{\frac{1}{p}}\epsilon + \|Pf\|_p$. Por la linealidad de P, si $f,g \in \mathcal{F}$ y $\|Pf - Pg\|_p < \epsilon$, entonces

$$\|f - g\| < (2^n + 1)^{\frac{1}{p}}\epsilon + \|Pf - Pg\|_p < \left((2^d + 1)^{\frac{1}{p}} + 1\right)\epsilon.$$

Más aún, como P es acotado y $\mathcal{F}$ esta acotada por (1), la imagen $P(\mathcal{F})$ es acotada. Además el espacio de funciones características en los cubos Q_i es de dimensión finita, por lo que $P(\mathcal{F})$ es totalmente acotado. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{(2^d+1)^{\frac{1}{p}}+1}$, por el lema 3.1.1, se sigue que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado,.

($\Rightarrow$) Asumamos que $\mathcal{F}$ es totalmente acotada. La existencia de una ϵ-cubierta finita de $\mathcal{F}$, para todo $\epsilon > 0$, claramente implica que $\mathcal{F}$ es acotado. Estableciendo la condición 1.

Para la condición 2, dado $\epsilon > 0$, sea $\{U_1, U_2, ..., U_m\}$ una ϵ-cubierta de $\mathcal{F}$, tomemos g_i tal que $g_i \in U_i$ para cada $i = 1, ..., m$. Sea R_j con $j = 1, ..., m$, tal que para cada j

$$\int_{|x|>R_j}|g_j(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

Tomando $R = \text{máx}\{R_j : j = 1, ..., m\}$, se sigue que

$$\int_{|x|>R}|g_j(x)|^p dx < \epsilon^p \text{ para todo } j = 1, ..., m. \tag{3.3.4}$$

Si $f \in U_k$, entonces $\|f - g_k\|_p \leq \epsilon$, y además

$$\left(\int_{|x|>R}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{|x|>R}|f(x) - g_k(x) + g_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

Por la desigualdad de Minkowski, se tiene

$$\left(\int_{|x|>R}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{|x|>R}|f(x)-g_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>R}|g_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

por último, usando que $f \in U_k$ y 3.3.4

$$\left(\int_{|x|>R}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f-g_k\|_p + \left(\int_{|x|>R}|g_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon,$$

de esta manera se cumple la condición 2.

Ahora sólo falta demostrar la condición 3. Por la proposición 2.1.3, tenemos que para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $\rho = \rho(f)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+y)-f(x)|^p dx < \epsilon^p \text{ si } |y| < \rho.$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $\{U_1, ..., U_m\}$ una ϵ-cubierta de $\mathcal{F}$, tomemos g_i tal que $g_i \in U_i$ para cada $i = 1, ..., m$. Para cada i, existe ρ_i tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d}|g_i(x+y)-g_i(x)|^p dx < \epsilon^p \text{ si } |y| < \rho_i.$$

Tomando $\rho = \text{mín}\{\rho_i : i = 1, ..., m\}$, si $f \in U_j$, se sigue

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+y)-g_j(x+y)+g_j(x+y)-g_j(x)+g_j(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

por la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+y)-g_j(x+y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^d}|g_j(x+y)-g_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^d}|g_j(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < 3\epsilon,\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{F}$, siempre que $|y| < \rho$. Así, la condición 3 se cumple. □

Los siguientes dos resultados son corolarios del Teorema de Kolmogorov-Riesz. En el primer corolario daremos una caraterización de los conjuntos totalmente acotados en los espacios $L^2(\mathbb{R}^d)$, usando la Transformada de Fourier, en sí lo que haremos es demostrar que el corolario verifica las hipótesis del teorema de Kolmogorov-Riesz. Primero daremos un resultado que nos ayudará en la demostración del corolario posterior a el.

Lema 3.3.4. *Sean* $\rho > 0$, $y \in \mathbb{R}^d$ *fijo, entonces* $\sup_{|\xi|<\rho} |e^{i\xi\cdot y} - 1|^2 \leq \rho^2 |y|^2$.

Demostración. Veamos cómo es $|e^{i\xi\cdot y} - 1|^2$

$$
\begin{aligned}
|e^{i\xi\cdot y} - 1|^2 &= \left(e^{i\xi\cdot y} - 1\right)\overline{\left(e^{i\xi\cdot y} - 1\right)} \\
&= \left(e^{i\xi\cdot y} - 1\right)\left(e^{-i\xi\cdot y} - 1\right) \\
&= e^{i\xi\cdot y}e^{-i\xi\cdot y} - e^{i\xi\cdot y} - e^{-i\xi\cdot y} + 1 \\
&= 2 - 2cos(\xi \cdot y) \\
&= 2(1 - cos(\xi \cdot y)).
\end{aligned}
$$

Por tanto es suficiente probar que $2(1 - cos(\xi \cdot y)) \leq \rho^2|y|^2$. Si probamos que $2(1 - cos(\xi\cdot y)) \leq |\xi\cdot y|^2$, ya acabaríamos, pues $|\xi\cdot y|^2 \leq \rho^2|y|^2$ por la desigualdad de Schwartz. Como la función $\frac{x^2}{2} + cos(x) \geq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$, tomando $x = \xi \cdot y$, se sigue que $\frac{(\xi\cdot y)^2}{2} + cos(\xi \cdot y) \geq 1$, por tanto $2(1 - cos(\xi \cdot y)) \leq |\xi \cdot y|^2$. De ésta manera obtenemos que $2(1 - cos(\xi \cdot y)) \leq |\xi \cdot y|^2$, por lo tanto $|e^{i\xi\cdot y} - 1|^2 \leq \rho^2|y|^2$ de donde se sigue el resultado. □

Corolario 3.3.5. *Sea* $\mathcal{F} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$, *tal que el* $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_2 \leq M < \infty$. *Si*

$$
\lim_{r\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{|x|\geq r} |f(x)|^2 dx = 0 \qquad y \qquad \lim_{\eta\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{|\xi|>\eta} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0,
$$

entonces $\mathcal{F}$ *es totalmente acotada en* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Lo que necesitamos hacer es probar las condiciones del teorema de Kolmogorov-Riesz para $p = 2$. Por hipótesis tenemos la condición 1 del teorema de Kolmogorov-Riesz, para obtener la condición 2 usamos que

$$
\lim_{r\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{|x|\geq r} |f(x)|^2 dx = 0,
$$

de esta manera, dado $\epsilon > 0$ existe $R \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|x| \geq R} |f(x)|^2 dx < \epsilon,$$

por tanto

$$\int_{|x| \geq R} |f(x)|^2 dx < \epsilon \quad \text{para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Finalmente para la propiedad 3, por el teorema de Plancherel 2.1.22 tenemos que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Así dado $\epsilon > 0$, para $f \in \mathcal{F}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\left(f(x+y) - f(x)\right)\hat{}|^2 dx.$$

Por linealidad y la propiedad 2.1.4 de transformada de Fourier, se sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |(e^{i\xi \cdot y} - 1)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| < \eta} |(e^{i\xi \cdot y} - 1)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > \eta} |(e^{i\xi \cdot y} - 1)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Por otro lado tenemos que

$$|e^{i\xi \cdot y} - 1| \leq |e^{i\xi \cdot y}| + 1 = 2,$$

sustituyendo convenientemente en 3.3.5

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx < \int_{|\xi| < \eta} &|(e^{i\xi \cdot y} - 1)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &+ 4 \int_{|\xi| > \eta} |\hat{f}(x)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Usando que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ y para η fijo suficientemente grande, se sigue

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx < M^2 \sup_{|\xi| < \eta} |e^{i\xi \cdot y} - 1|^2 + \epsilon,$$

Usando el lema 3.3.4, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx < M^2\eta^2|y|^2 + \epsilon,$$

si $|y| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{\eta M}$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx < 2\epsilon.$$

Por lo que la condición 3 del teorema de Kolmogorov-Riesz se cumple. Por tanto el conjunto $\mathcal{F}$ es totalmente acotado. □

El siguiente resultado da una caracterización de los conjuntos que no son totalmente acotados dentro de un espacio normado X, el resultado se usa para demostrar el corolario 3.3.7.

Lema 3.3.6. *Sea X un subconjunto de un espacio normado, entonces X no es totalmente acotado si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq \epsilon$ para toda $m \neq n$.*

Demostración. Supongamos que X no es totalmente acotado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que no podemos encontrar un número finito de bolas de radio ϵ que cubran a X. Sea $x_1 \in X$, como X no es totalmente acotado existe x_2 tal que $x_2 \notin B_\epsilon(x_1)$. Nuevamente usando el hecho de que X no es totalmente acotado, podemos conseguir $x_3 \in X$ tal que $x_3 \notin \cup_{i=1}^{2} B_\epsilon(x_i)$. Procediendo inductivamente podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|x_k - x_m\| \geq \epsilon$ si $k \neq m$.

Ahora para demostrar el regreso supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n - x_m\| \geq \epsilon$, basta tomar una cubierta de diámetro $\frac{\epsilon}{2}$, si x_i pertenece a una bola B, entonces $x_j \notin B$ para todo $j \neq i$ ya que $\|x_i - x_j\| \geq \epsilon$. Por tanto X no es totalmente acotado. □

Una caracterización de los conjuntos totalmente acotados en los espacios de Sobolev, la obtenemos en el siguiente corolario, observemos la importancia de este resultado, pues dada la completez de los espacios de Sobolev, también obtenemos una caracterización de los conjuntos compactos en este espacio.

Corolario 3.3.7. *Un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ es totalmente acotado si y sólo si*

1. *$\mathcal{F}$ es acotado, es decir, existe alguna M tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x)|^p dx < M, \quad f \in \mathcal{F}, \quad |\alpha| \leq k.$$

2. *Para cada $\epsilon > 0$ existe algún R, tal que para toda $f \in \mathcal{F}$*

$$\int_{|x|>R} |D^\alpha f(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

3. *Para cada $\epsilon > 0$ existe algún $\rho > 0$, tal que para cada $f \in \mathcal{F}$, $y \in \mathbb{R}^d$ con $|y| < \rho$*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x+y) - D^\alpha f(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

Demostración. Para demostrar el corolario anterior veremos que un subconjunto $\mathcal{F} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ es totalmente acotado en $W^{k,p}$ si y sólo si $D^\alpha(\mathcal{F}) := \{D^\alpha(f) : f \in \mathcal{F}\}$ es totalmente acotado en L^p, pues usando el teorema de Kolmogorov-Riesz en cada uno de los conjunto $D^\alpha(\mathcal{F})$, se obtiene que cada uno de ellos es totalmente acotado.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado, entonces existen $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{F}$ tal que $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(f_i) : i = 1, ..., n\}$ forma una cubierta de $\mathcal{F}$. Demostraremos que el conjunto $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(D^\alpha(f_i)) : i = 1, ..., n\}$ forma una cubierta de $D^\alpha(\mathcal{F})$ para cada α con $|\alpha| \leq k$.

Veamos primero que si $\|f - g\|_{W^{k,p}} \leq \epsilon$, entonces $\|D^\alpha(f) - D^\alpha(g)\|_p \leq \epsilon$. Es fácil probarlo pues

$$\|D^{\alpha_0}(f) - D^{\alpha_0}(g)\|_p^p \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(f) - D^\alpha(g)\|_p^p = \|f - g\|_{W^{k,p}}^p < \epsilon^p.$$

Sea $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(D^\alpha(f_i)) : i = 1, ..., n\}$, y sea g' una función en $D^\alpha(\mathcal{F})$ tal que $g' \notin \bigcup_{i=\overline{1,n}} D^\alpha(f_i)$. Sea g la función tal que su α-ésima derivada débil sea g', como el conjunto $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(f_i) : i = 1, ..., n\}$ es una cubierta de $\mathcal{F}$, $g \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(f_j)$ para algún j. Por lo que $\|f_j - g\|_{W^{k,p}} \leq \frac{\epsilon}{2}$, y así $\|D^\alpha(f_j) - g'\|_p \leq \frac{\epsilon}{2}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(D^\alpha(f_i)) : i = 1, ..., n\}$ es una cubierta de $D^\alpha(\mathcal{F})$ y el diámetro de cada abierto es menor o igual a ϵ.

Para demostrar la otra implicación lo demostraremos por contraposición. Existe $\epsilon > 0$ tal que podemos encontrar una sucesión de elementos $\{f_l\}_{l=1}^\infty$ que cumplen que

$\|f_n - f_m\|_{W^{k,p}} \geq \epsilon$ para toda $n,m \in \mathbb{N}$. Sea r el numero de multi-índices tales que su orden sea menor o igual a k. Tomemos $n = 1$ y $m = 2$, entonces

$$\|f_1 - f_2\|^p_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(f_1) - D^\alpha(f_2)\|^p_p \geq \epsilon^p,$$

existe un α_1 tal que $\|D^{\alpha_1}(f_1) - D^{\alpha_1}(f_2)\|^p_p \geq \frac{\epsilon}{r}$. Ahora tomamos $n = 2$ y $m = 3$ y veamos que

$$\|f_2 - f_3\|^p_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(f_2) - D^\alpha(f_3)\|^p_p \geq \epsilon^p,$$

existe un α_2 tal que $\|D^{\alpha_2}(f_1) - D^{\alpha_2}(f_2)\|^p_p \geq \frac{\epsilon}{r}$. Procediendo inductivamente generamos una sucesión de multi-índices $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$. Por el principio del palomar existe una subsucesión $\{\alpha_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ de $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ tal que $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomemos la sucesión $\{D^{\alpha_{i_1}} f_l\}_{l=1}^\infty$ en $D^{\alpha_{i_1}}(\mathcal{F})$, para cada $n \neq m$ se tiene que $\|D^{\alpha_{i_1}}(f_n) - D^{\alpha_{i_1}}(f_m)\|_p \geq \frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{p}}}$. De esta manera por el lema 3.3.6, $D^{\alpha_{i_1}}(\mathcal{F})$ no es totalmente acotado.

Aplicando el teorema de Kolmogorov-Riesz en cada en cada conjunto $D^\alpha(\mathcal{F})$, se sigue que $D^\alpha(\mathcal{F})$ es totalmente acotado para cada $|\alpha| \leq k$, por tanto $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

□

3.4. Principio de selección Helly

El teorema de Helly se utiliza a menudo como un reemplazo para el teorema de compacidad de Kolmogorov, en particular en el contexto de leyes de conservación hiperbólicas no lineales, a pesar de ser más especializado. Demostraremos a continuación que el teorema de Helly es una consecuencia fácil del teorema de compacidad de Kolmogorov. Antes de iniciar con el teorema hablaremos sobre algunas propiedades de las funciones sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}$, particularmente funciones de variación acotada.

Definición 3.4.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ diremos que f es de variación acotada en $[a,b]$, si existe $M \in \mathbb{N}$,* *tal que*

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < M,$$

dode el supremo se toma sobre todas las particiones del intervalo $[a,b]$.

Definición 3.4.2. *Sea* f *una función de variación acotada y sea* $\Sigma(P)$ *la suma* $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ *correspondiente a la partición* $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ *de* $[a,b]$. *Al número*

$$TV(f,[a,b]) = \sup_{P}\{\Sigma(P)\},$$

se le llama variación total de la función f *en el intervalo* $[a,b]$.

Diremos que una función es localmente de variación acotada sobre $\mathbb{R}$, si para todo intervalo $[a,b]$ se cumple que $TV(f,[a,b]) < \infty$. Si ocurre que

$$V(f,\mathbb{R}) = \sup_{[a,b]\subset\mathbb{R}} TV(f,[a,b]) < \infty,$$

entonces se dice que f es de variación acotada sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.3. *Sea* f *definida sobre* $\mathbb{R}$, *entonces* f *es de variación acotada si y sólo si se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes.*

Para la demostración del teorema ver [1], pág. 159.

Lema 3.4.4. *Consideremos una sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definida en los enteros positivos y que toma valores en los reales. Asumimos que la sucesión es uniformemente acotada, es decir, existe* M *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq M \quad \textit{para toda } x \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe una subsucesión n_k *tal que* f_{n_k} *converge para todo* $x \in \mathbb{N}$.

Demostración. La demostración del lema usa el argumento diagonal de manera similar a la demostración del teorema 1.2.6 del capítulo 1. □

Para el siguiente resultado es necesario recordar el concepto de integral impropia. Sea f definida en el intervalo $[a,\infty)$ se dice que f es integrable si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende a ∞ se tiene que la sucesión de integrales definidas $\left\{\int_a^{x_n} f(x)dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un límite en común $L \in \mathbb{R}$. A L se le llama *integral impropia de f en $[a,\infty)$* y se denota por $\int_a^{\infty} f(x)dx$, es decir,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^{x} f(x)dx.$$

Lema 3.4.5. *Sea u una función de variación acotada en $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+y) - u(x)|dx \leq |y|TV(u)$$

para toda $y \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $y > 0$. Calculando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+y) - u(x))|dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{jy}^{(j+1)y} |u(x+y) - u(x))|dx,$$

Haciendo el cambio de variable para cada j fijo $x = z + jy$, tenemos que $dx = dz$, y por el teorema de convergencia monótona

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{y} |u(z+jy+y) - u(z+jy))|dz &= \int_0^{y} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u(z+(j+1)y) - u(z+jy))|dz \\ &\leq TV(u) \int_0^{y} dz = yTV(u).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+y) - u(x))|dx \leq yTV(u).$$

□

Teorema 3.4.6. *Teorema de Helly*

Sea (u_n) una sucesión de funciones de variación acotada en el intervalo acotado $[a,b]$. Si existe una constante M tal que $TV(u_n) \leq M$ y $\|u_n\|_{\infty} \leq M$ para toda n, entonces existe una subsucesión de (u_n) que converge puntualmente a u en todas partes y en norma $L^1([a,b])$, más aún, u es de variación acotada.

Demostración. Extendemos cada función u_n a todos los reales como

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & x \in [a,b] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad podemos llamar u_n a su extensión. Se sigue que $TV(u_n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis tenemos que la condición 1 del teorema de Kolmogorov-Riesz se cumple. Para la condición 2, sea $\epsilon > 0$, basta tomar R suficientemente grande tal que $[a,b] \subset B_R(0)$, entonces

$$\int_{|x|>R} |u_n(x)|dx = 0 < \epsilon.$$

El lema 3.4.5 demuestra que todas las funciones u_n satisfacen la condición 3 del teorema de Kolmogorov-Riesz. Por tanto el conjunto (u_n) es totalmente acotado. Además tenemos que $u_n \in L^1([a,b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n|dx = \int_{[a,b]} |u_n|dx \leq \|u_n\|_\infty \int_{[a,b]} dx \leq M(b-a).$$

Por el teorema 1.1.4 obtenemos que existe una subsucesión (u_n) tal que converge en $L^1([a,b])$ y además que también converge casi en todas partes (la cual denotaremos de la misma manera para aligerar la notación). Por el lema 3.4.3 para cada i, el término (u_n) se puede escribir como resta de dos funciones crecientes, es decir $u_n = v_n - w_n$. Las sucesiones v_i y w_i satisfacen las condiciones del teorema actual, aplicando la misma argumentación tenemos que v_n y w_n convergen en $L^1([a,b])$ y casi en todas partes a las funciones v, w respectivamente.

Como v_n es monótona creciente, se sigue que v es creciente, en los puntos de convergencia puntual. Sin pérdida de generalidad supongamos que v es creciente en todas partes, después de redefinirla posiblemente en un conjunto de medida cero. Para ver que v_n converge a v en todas partes, primero veamos que v_n converge a v en los puntos donde v es continua. Sea x un punto donde v es continua, dado $\epsilon > 0$ tomemos δ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|v(x) - v(y)| < \epsilon$. Sean z,y tales que $v_n(y) \to v(y)$ y $v_n(z) \to v(z)$ y además $x - \delta < y < x < z < x + \delta$, así para n suficientemente grande y usando el hecho de que $|x - y| < \delta$ y $|x - z| < \delta$ se sigue que

$$v(x) - 2\epsilon < v(y) - \epsilon < v_i(y) \leq v_i(x) \leq v_i(z) < v(z) + \epsilon < v(x) + 2\epsilon.$$

Por tanto $|v_n(x) - v(x)| < 2\epsilon$ para i suficientemente grande, de esta manera $\lim_{i\to\infty} v_i(x) = v(x)$ para cada x, donde v es continua. Solamente falta ver que $\lim_{i\to\infty} v_n(x) = v(x)$ para cada x donde v es discontinua. Como v es de variación acotada, tenemos que el conjunto de discontinuidades en v es a lo mas numerable, por el lema 3.4.4 se sigue que existe una subsucesión que converge en todo punto discontinuo de v. Por tanto tenemos convergencia puntual en todas partes. De manera similar podemos demostrar que w_n converge a w para toda $x \in [a, b]$. Entonces

$$u_i \to v - w,$$

puntualmente para toda $x \in [a, b]$ cuando $i \to \infty$, y además $v - w$ es de variación acotada. $\square$

Capítulo 4

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue caracterizar los conjuntos compactos en el espacio de funciones $L^p(\mathbb{R}^d)$, conocido como el teorema de Kolmogorov-Riesz, para dar esta caracterización utilizamos el resultado de Heine-Borel generalizado para espacios métricos, que dice que un conjunto es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo. Como siempre trabajamos en espacios completos, sólo nos enfocamos en caracterizar los conjuntos totalmente acotados.

Para llegar al resultado mencionado anteriormente hicimos un desarrollo histórico, mencionando los principales resultados de compacidad, empezando con la compacidad en espacios métricos. Uno de los resultados de gran interés en el Análisis Matemático sobre compacidad es el teorema de Arzelá-Ascoli, es por ello que lo presentamos en el primer capítulo, y en el último dimos una demostración alternativa utilizando un lema sencillo de espacios métricos, el cual también nos sirvió para demostrar el teorema de Kolmogorov-Riesz.

También caracterizamos los conjuntos compactos en otros espacios métricos, como el espacio de funciones continuas sobre un conjunto compacto K, y el espacio de sucesiones l^p. Por último desarrollamos algunas aplicaciones del teorema de Kolmogorov-Riesz, para ello en el capítulo 2 estudiamos la Trasformada de Fourier y algunos conceptos básicos como el de Convolución, el espacio de Schwart, y los espacios de Sobolev. Finalmente, se demostramó el principio de selección de Helly, como una aplicación directa del teorema de Kolmogorov-Riesz.

Aún queda mucho por estudiar en la teoría de compacidad, algunas preguntas que me han surguido en lo personal son, si se puede dar una caracterización de los conjuntos totalmente acotados en el espacio $L^p(X)$, donde X es un espacio métrico completo. En lo personal me parece muy interesante seguir investigando sobre el tema y espero en un futuro poder retomarlo.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Análisis matemático.* Reverté, 1996.

[2] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, 2014.

[3] J. B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] L. C. Evans. *Partial Differential Equation.* American Mathematical Society, 1998.

[5] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, 2013.

[6] H. Hanche-Olsen and H. Holden. The kolmogorov–riesz compactness theorem. *Expositiones Mathematicae*, 28(4):385–394, 2010.

[7] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, 2000.