"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Álgebra, pensamiento algebraico y el Modelo 3UV. Una experiencia con instructores comunitarios

TESIS

Que para obtener el Grado de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Karla Paola Luque Álvarez

Directora de tesis:

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora

Febrero de 2018

UNIVERSIDAD DE SONORA
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Álgebra, pensamiento algebraico y el Modelo 3UV. Una experiencia con instructores comunitarios

TESIS
Que para obtener el grado de
Licenciada en matemáticas

Presenta
Karla Paola Luque Álvarez

Directora de tesis
Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Miembros del comité revisor y jurado

Dr. Jorge Ruperto Vargas Castro

Dra. María Mercedes Chacara Montes

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi directora de tesis, la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, por su colaboración, dedicación, por el cariño brindado y por compartir conmigo sus conocimientos que permitieron la culminación de este trabajo.

A mis sinodales, Dr. Ruperto Vargas Castro, Dra. María Mercedes Chacara Montes y Dr. Ramiro Ávila Godoy, por sus revisiones y correcciones.

Al jefe de departamento, Dr. Martín Gildardo García Alvarado, por sus atenciones brindadas durante mis estudios de licenciatura.

A mi madre Sara Álvarez Duarte, agradezco especialmente por todas sus enseñanzas de vida y por estar conmigo en todo momento, por no darse por vencida y ayudarme a llegar hasta donde estoy.

A mi padre Benito Luque Chávez, mis abuelos Humberto y Ma. Jesús, mis hermanos Cristian y Manuel.

A mis amigos que más constantes Daniela, Chuy y Angelito.

Gracias.

Karla Paola Luque Álvarez
Hermosillo, Sonora
Febrero, 2018

Contenido

Introducción

En este documento se presenta el reporte de un trabajo cuyo propósito fue identificar y describir los usos de la variable que son promovidos institucionalmente por el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE), mediante la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra", así como identificar y describir el nivel de manejo de los líderes educativos comunitarios sobre este tema.

A partir del resultado que esto proporcionó, se vio la oportunidad de plantearse también como objetivo "Diseñar una propuesta de situaciones problema que complementen las que aparecen en la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra", en el sentido de lo establecido en el Modelo "Los tres usos de la variable", también conocido como Modelo 3UV.

El documento que se está presentando consta de 5 capítulos, conclusiones y una sección de anexos.

En el Capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema, así como su objetivo general y los objetivos específicos, incluyendo algunos antecedentes que dieron pie al desarrollo de esta tesis. Entre estos elementos, se consideraron algunos datos estadísticos proporcionados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), sobre los resultados arrojados en las pruebas del Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes (PLANEA), haciendo ciertas comparaciones entre los resultados obtenidos por estudiantes de escuelas que se encuentran en algunas comunidades rurales o zonas marginadas y los estudiantes de zonas urbanas.

En el Capítulo 2 se dan a conocer las instituciones que estuvieron involucradas y que permitieron la realización de este proyecto, entre ellas se encuentran el CONAFE y el INEE. Otro elemento importante que se da a conocer en este capítulo, es el modelo educativo con el que el CONAFE atiende a las comunidades que no tienen el privilegio de contar con la educación pública, así como todo el proceso que se debe seguir en las tutorías que ahí se imparten.

En el Capítulo 3 se presenta lo que se denominó como marco conceptual. En él se exponen algunas concepciones que se tienen acerca de lo que es el álgebra y el pensamiento algebraico, así como las principales dificultades que tienen la mayoría de los estudiantes en el álgebra escolar. Se agrega además el Modelo 3UV, el cual es de suma importancia pues es con base en él que se desarrolla este trabajo. Se tratan además las consideraciones metodológicas, esto es, todo el proceso en el que fue necesario involucrarse para el desarrollo del proyecto cuyos resultados se consignan en este documento.

En el Capítulo 4 se hace la descripción de los desafíos contenidos en la unidad de aprendizaje de interés, con relación al Modelo 3UV, y la descripción del proceso de solución de los aprendices que fueron tutorados.

En el Capítulo 5 se hace una pequeña propuesta que contiene algunos desafíos, los cuales se sugiere se incluyan en el proceso de tutoría con el propósito de que los aprendices comprendan mejor uno de los usos de la variable que fue considerado en menor medida en la unidad de aprendizaje. Además de esto, se proponen algunos desafíos que involucran los tres usos de la variable contemplados en el Modelo 3UV.

Se presenta además una sección de conclusiones en donde se recuperan las ideas del trabajo y se establecen conclusiones a partir del análisis de la unidad de aprendizaje que fue abordada, así como la de los diseños realizados a partir de dicho análisis.

Se agregó un apartado que contiene las referencias bibliográficas que fueron necesarias consultar y que contribuyeron a la realización de esta tesis.

Se consideró necesario también agregar un apartado en el cual se presentan algunos anexos, uno de ellos es la unidad de aprendizaje de interés, la cual pertenece al texto que utilizan quienes participan en el CONAFE. Ésta contiene todos los problemas (conocidos como desafíos) que deben ser abordados por quienes estudian ahí. En el segundo anexo se muestra la realización propia del Registro del Proceso de Aprendizaje (RPA), el cual se dividió en dos partes, debido a que el primero de los registros que se realizó contenía las soluciones de los desafíos. Según algunas indicaciones dadas, el RPA no debía contenerlas, por lo que fue necesario realizarlo nuevamente. Esto se hizo con el propósito de comprender la intención con la que se solicita a los estudiantes realizar dicho registro.

Capítulo 1
El problema de interés y sus antecedentes

1.1 Algunos antecedentes y la problemática en estudio

Una de las problemáticas que afectan a nuestro país es la pobreza, ya que millones de familias se ven afectadas a causa de ella. Según datos del Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social, (CONEVAL, 2017) hasta el año 2016, un alto porcentaje de la población en México se encontraba en situación de pobreza, aproximadamente el 43.6% de la población, que son alrededor de: 53, 418,151 personas. De esas personas, 9, 375,581 viven en pobreza extrema, esto es, el 7.6% de la población.

Algo que es importante considerar es que el lugar de residencia tiene un gran impacto en el tema de la pobreza, ya que esto es más común en las zonas rurales. La siguiente tabla muestra el porcentaje de pobreza en las residencias rurales y urbanas por separado:

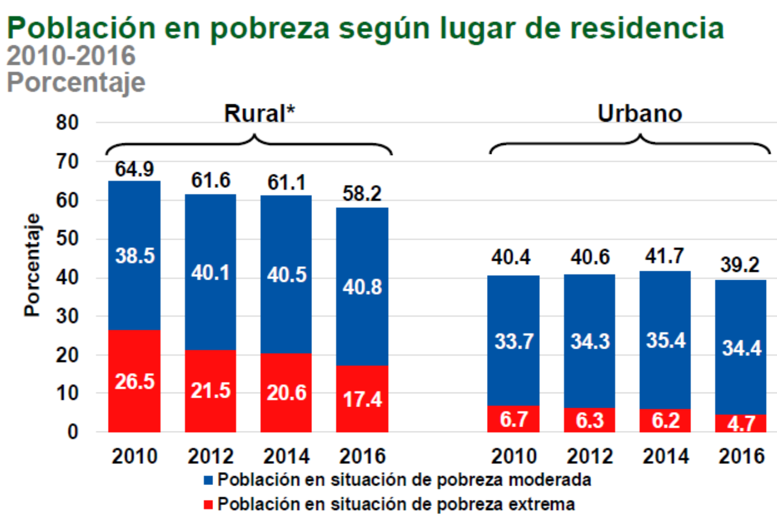


Tabla 1.1 Población en pobreza según lugar de residencia. Fuente: estimaciones del CONEVAL con base en el MCS-ENIGH 2010, 2012, 2014 y el MEC del MCS-ENIGH 2016.

*Se definen como localidades rurales aquellas cuya población es menor a 2,500 habitantes.

Claramente, cada año se puede ver que las zonas rurales presentan aproximadamente un 20% más de población en pobreza que en las zonas urbanas. Una pregunta interesante es: ¿qué sucede con la educación en los lugares donde existe tal pobreza?, es decir, ¿cuántas personas de las que viven en situaciones como éstas, ejercen realmente su derecho a la educación?, quienes la reciben, ¿reciben educación de calidad? Según estudios realizados por el Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social en los años del 2010 al 2016, aproximadamente un 20% de la población mexicana se encuentra en rezago educativo.

La tabla siguiente resume la información anterior:

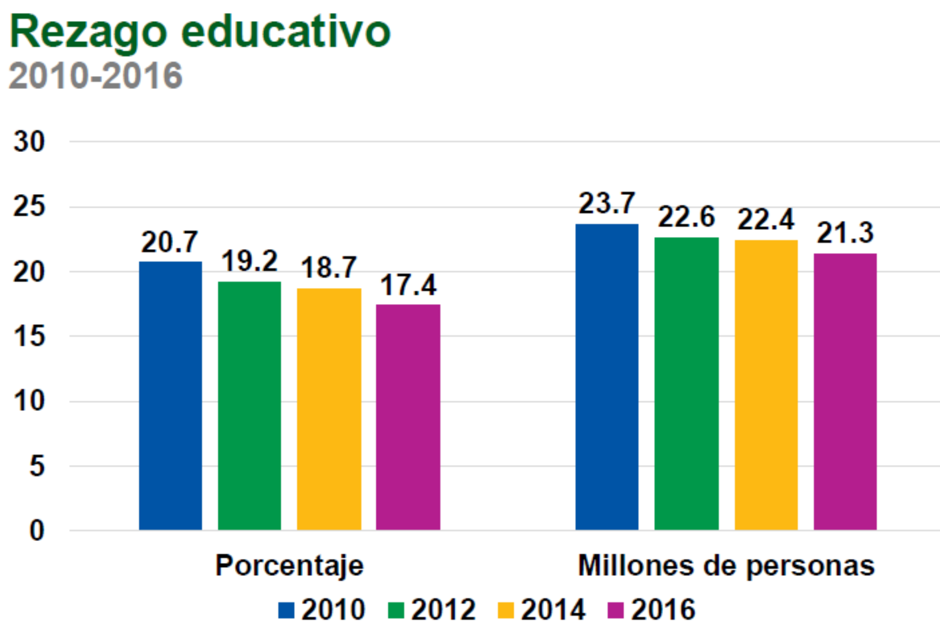


Tabla 1.2 Rezago educativo, Fuente: estimaciones del CONEVAL con base en el MCS-ENIGH 2010, 2012, 2014, el MCS-ENIGH 2015 y el MEC del MCS-ENIGH 2016.

Como se puede advertir en la tabla 1.2, aunque al paso de los años el rezago educativo ha ido disminuyendo, aún existe una gran cantidad de personas afectadas, pues en el año 2016 el 17% de la población no tenía acceso a la educación básica. Otro aspecto a preguntarse es: ¿las poblaciones en situaciones vulnerables reciben educación de calidad?; ésta es otra cuestión de interés, ya que el que se proporcione la educación obligatoria no es suficiente, pues también es importante evaluar la calidad de la educación que se recibe en lugares de situación vulnerable.

Si bien es cierto que la educación es un derecho humano, esto parece ser un gran reto para el estado mexicano.

> La educación es un derecho humano esencial que posibilita el ejercicio de los demás derechos. La educación promueve la libertad y la autonomía personal. Gracias a ella, es posible mejorar las condiciones sociales, económicas y culturales de un país; está demostrado que el incremento de la escolaridad de la población se asocia con el mejoramiento de la productividad, la movilidad social, la reducción de la pobreza, la construcción de la ciudadanía y la identidad y, en definitiva, con el fortalecimiento de la cohesión social (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), 2012, p.1).

Según datos proporcionados por el INEE (2012) los mayores retos para la educación obligatoria son:

- Alrededor del 30% de la población en México, tiene entre 3 y 17 años, la edad típica para cursar a la educación obligatoria.
- 23% de los habitantes vive en alguna de las 188 594 localidades rurales del país.
- 6.2% de la población habla alguna lengua indígena
- 21.2 millones de mexicanos viven en situación de pobreza alimentaria

Estos factores hacen aún más complicado para las escuelas públicas el proporcionar educación para todos. En 2010, sólo el 71% de la población entre 3 y 5 años asistía a la escuela y el 67% de jóvenes de entre 15 y 17 años de edad, mientras que la mayoría de las niñas y niños de 6 a 11 años (97%) asiste a la escuela primaria. Además, 91% de los niños de 12 a 14 años asisten a ella. (INEE, 2012).

Aun cuando la equidad educativa está avanzando, logrando que más niños y niñas asistan a la escuela, la desigualdad sigue haciéndose presente, ya que niños y jóvenes que viven en comunidades vulnerables presentan tasas altas de inasistencia, esto debido a que no cuentan con recursos suficientes para asistir a una escuela pública.

Se tienen datos también que indican que no todos los estudiantes que asisten a la escuela aprenden lo necesario, los resultados de las evaluaciones indican ser menos favorables para los más pobres.

Según estadísticas del INEE (2012), desde que los niños terminan la educación preescolar pueden observarse algunos rezagos en la calidad de la educación que reciben, por ejemplo, aproximadamente el 10% no sabe ni cómo se lee ni cómo se escribe, siendo también incapaces de organizar objetos con características semejantes. Sin embargo, si se comparan estos datos con los de preescolares comunitarias, este problema aumenta considerablemente, pues alrededor de una cuarta parte de los niños que egresan de preescolar en las comunidades, presentan esta misma problemática.

En la educación primaria, el rezago en la calidad educativa va en aumento, por ejemplo, el 15% de los niños que egresan de primaria no son competentes en los temas tratados en este nivel educativo, en las comunidades los porcentajes de los estudiantes que no son competentes casi se triplican.

Mientras más se aumenta el nivel escolar, mayor es el grado del rezago educativo. El impacto que esto tiene a nivel secundaria es muy grave, pues se habla de que el 50% de los estudiantes egresados de este nivel, no puede resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita ni calcular el volumen de cuerpos geométricos simples. Mientras que en estudiantes que asisten a telesecundarias, estos porcentajes aumentan, siendo casi dos terceras partes de los estudiantes quienes no son capaces de resolver problemas de este tipo. (INEE, 2012)
El INEE afirma que:

> Aunque en los últimos años las pruebas que aplica el INEE (EXCALE y PISA) (sic) registran cambios positivos en los resultados de aprendizaje de los estudiantes, éstos no se han dado de manera uniforme entre entidades federativas ni para todos los servicios educativos, ni son tan grandes y rápidos como requiere nuestra sociedad. Tampoco se aprecia una tendencia claramente indicativa de que las brechas entre diferentes grupos socioeconómicos se estén cerrando. (INEE, 2012, p.4)

Esto quiere decir que aun cuándo se han ido registrando cambios positivos en los resultados de las evaluaciones al paso de los años, el progreso que se ve no es suficiente ni satisfactorio.

Tampoco se ve que en algún momento las diferencias que existen entre la educación pública obligatoria en las distintas clases sociales vayan a desaparecer.
Las condiciones que ofrece el sistema educativo para la enseñanza y aprendizaje son muy desiguales, la siguiente es información proporcionada por la SEP y el INEE (2012).

Educación preescolar

Este nivel educativo se ofrece mediante tres tipos de servicio:

- el general, que corresponde al 67% de las escuelas
- el comunitario, con 22% de los centros escolares;
- y el indígena, con 11% de los planteles del país.

Educación primaria

El nivel de educación primaria está compuesto por aproximadamente 14.9 millones de estudiantes, cerca de 574 mil docentes y casi 100 mil escuelas;

- 78% de ellas son de tipo general
- 10% son indígenas y
- 11% comunitarias.
- 90% son de sostenimiento público.

Un 44% de las escuelas del país son de tipo multigrado. Esta situación se presenta en:

- 100% de las primarias comunitarias,
- 30% de las generales y
- 67% de los planteles indígenas.

El 90% de las escuelas indígenas se ubica en localidades rurales.

Educación secundaria

En el país existen alrededor de 36 500 escuelas secundarias, en las que estudian casi 6.2 millones de jóvenes. La educación secundaria se divide en cinco tipos:

- telesecundaria, con el 50% de las escuelas;
- general con 30%;
- técnica con 13%;
- comunitaria con 6%, y
- secundarias para trabajadores, 1% (INEE, 2012, p. 5-12).

1.2 Planea y las matemáticas en la educación básica

El Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), se puso en marcha a partir del año 2015, por coordinación de la Secretaría de Educación Pública y el INEE. El propósito de Planea es "conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales" (INEE, s.f., p. 2).

La evaluación contempla cuatro niveles de dominio, siendo el primer nivel el más bajo y el cuarto el más alto de la escala. Para el área de matemáticas, en el caso de sexto de primaria, los cuatro niveles se describen de la siguiente manera:

- **Nivel I.** Los estudiantes que se encuentran en este nivel obtienen un logro de aprendizaje insuficiente, lo cual indica que los estudiantes presentan deficiencias para seguir aprendiendo y para lograr desarrollar las habilidades necesarias para encontrarse en los niveles II, III y IV. Quienes se encuentran en este nivel de logro son capaces de escribir y comparar números naturales, pero no son capaces de resolver problemas aritméticos con números naturales.
- **Nivel II.** Los estudiantes que se encuentran en este nivel, tienen un logro apenas indispensable, es decir, desarrollan solo ciertas habilidades para realizar operaciones básicas como: suma, resta, multiplicación y división con números naturales, pero no han desarrollado las habilidades necesarias para encontrarse en los niveles III y IV.
- **Nivel III.** Quienes se encuentran en este nivel, tienen un logro satisfactorio, son capaces de resolver problemas aritméticos con números naturales o decimales y problemas de aplicación de perímetros.

- **Nivel IV.** Los estudiantes que se encuentran en este nivel, tienen un logro sobresaliente, siendo capaces de resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios; resolver problemas de aplicación de áreas y problemas que implican calcular promedio, mediana y comparar razones.

Los resultados mostraron que solo el 6.8% de los estudiantes se ubicó en el nivel IV, mientras que el 60.5% solo alcanzó el nivel I. (INEE, s.f.):

En 3ro de secundaria, los niveles en matemáticas son los siguientes:

- **Nivel I.** Quienes se encuentran en este nivel, tienen un logro insuficiente, son apenas capaces de resolver problemas que les permitan comparar o realizar cálculos con números naturales. Presentan muchas deficiencias para poder resolver problemas como los de los niveles II, III y IV.
- **Nivel II.** Los alumnos que se encuentran en este nivel, tienen un logro apenas indispensable, es decir, desarrollan las habilidades para resolver problemas con números decimales y ecuaciones lineales sencillas. Aún no son capaces de resolver problemas como los de los niveles III y IV.
- **Nivel III.** Este es un nivel de logro satisfactorio, los alumnos que se encuentran en este nivel son capaces de resolver problemas con números fraccionarios, con signo o con potencias de números naturales, además, pueden realizar sumas o restas de expresiones algebraicas. Presentan deficiencias para resolver los problemas del nivel IV.
- **Nivel IV.** Los estudiantes que alcanzan este nivel, tienen resultados sobresalientes, son capaces de multiplicar expresiones algebraicas, resolver problemas que impliquen números fraccionarios y decimales (mixtos), sistemas de ecuaciones, calculan áreas de secciones circulares y el volumen de cuerpos redondos. Además de resolver los problemas de los niveles I, II y III.

Los resultados de la prueba PLANEA aplicada en 2015 indican que solamente el 3.1% de los estudiantes se encuentran en el nivel de logro sobresaliente (nivel IV) y el 7.5% en el nivel II, mientras que el 65.4% de los estudiantes se encuentran en el nivel I, es decir, de logro insuficiente. Claramente estos resultados son preocupantes, sobre todo si se menciona que éstos son resultados de escuelas públicas, pues si se comparan estos resultados con los de las comunidades rurales o indígenas, se puede encontrar que los resultados son menos favorables. (PLANEA, 2015).

Resultados recientes muestran que efectivamente, la pobreza es un factor que influye en los aprendizajes de los estudiantes. En la siguiente gráfica, se puede observar que en el caso específico de 3° de secundaria, mientras que en las escuelas privadas (siendo éstas las de mayores recursos económicos) el 37% de sus estudiantes solo alcanzan el nivel I, en las escuelas comunitarias que son las que interesan en este trabajo y cuyos recursos económicos son menores, el 86.7% de sus estudiantes solo alcanzan el nivel I de logro.

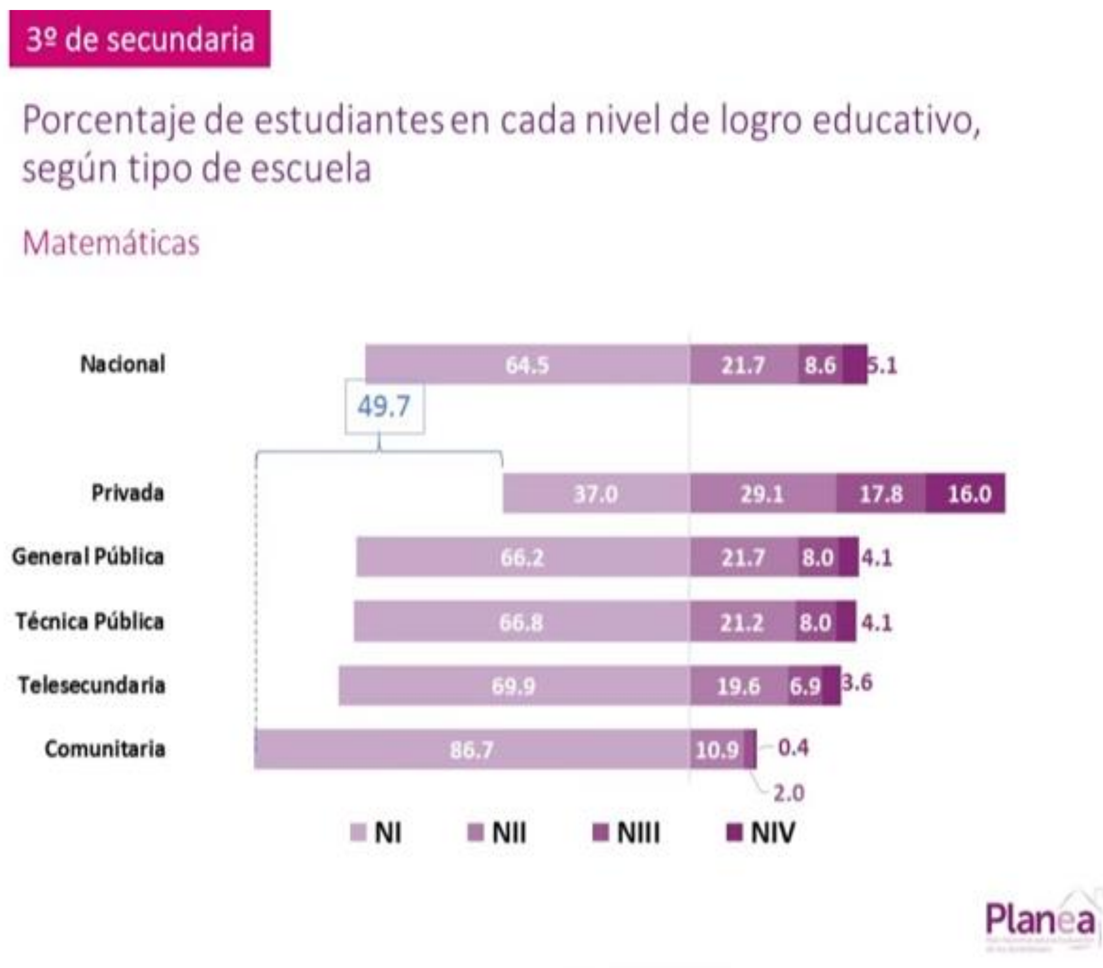


Figura 1.1 Niveles de logro educativo según el tipo de escuela. Resultados de PLANEA 2017.

Claramente existe una gran diferencia entre ambos tipos de escuela, siendo las escuelas comunitarias las que presentan mayor porcentaje de resultados desfavorables.

1.3 La problemática en estudio

Hasta este punto se presenta un panorama general sobre dos de las problemáticas más grandes que invaden a nuestro país: la pobreza y el rezago en la educación, estableciendo a partir de la información presentada, las implicaciones de una sobre la otra. Esto se hace porque se considera importante ubicar este trabajo en el contexto social en el que se desarrolló, pues se está partiendo de la premisa de que todo egresado universitario está en condiciones de abordar el estudio de problemas propios de aquella disciplina en la que se formó, pero sin dejar de lado la responsabilidad social que esto implica. Para lograr esto es necesario conocer las condiciones que rodean a la problemática de interés, sobre todo en casos como el presente, que están ligados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y en consecuencia tienen que ver con actividades realizadas por individuos influenciados por su entorno.

Aunque una de las primeras inquietudes específicas era conocer el modelo educativo con el cual aprenden niños y jóvenes mexicanos que viven en comunidades rurales alejadas y en situación vulnerable, la comparación de los resultados de las evaluaciones de PLANEA con respecto a los resultados obtenidos en escuelas públicas urbanas, muestra que hay una gran diferencia y que en las comunidades empobrecidas los resultados son menos favorables. Aunque esto pudiera considerarse un tanto natural, surgió el interés de profundizar en la forma de trabajo de las comunidades educativas rurales, particularmente las que son atendidas por el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE), centrando además el interés en el área de matemáticas.

Posterior a esta elección, fue indispensable limitar el área de trabajo a un campo específico de las matemáticas; en este sentido se abrió la posibilidad de trabajar en el área de álgebra, llegando por medio de una revisión de la literatura sobre el tema, a ubicar un tema específico: el papel que juegan los usos de la variable con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico de un individuo.

Con esos elementos, se estableció la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los usos de la variable impulsados institucionalmente por CONAFE en la unidad de aprendizaje "El lenguaje del álgebra" y cuál es el nivel de manejo que los líderes educativos comunitarios (LEC) manifiestan a este respecto?

Para lograr la identificación de los usos de la variable a que se hace referencia, se utilizará el Modelo 3UV, (Modelo de los Tres Usos de la Variable), el cual será descrito en el Capítulo 3, que corresponde al Marco Conceptual de esta tesis. Otro aspecto que es importante aclarar es a quiénes se les denomina líderes educativos comunitarios, lo cual se expondrá en el Capítulo 2.

1.3.1 Los objetivos generales y los objetivos específicos

A continuación se presentan los objetivos generales:

OG1.- Identificar y describir los usos de la variable que son promovidos institucionalmente por el Consejo Nacional de Fomento Educativo, mediante la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra", así como identificar y describir el nivel de manejo de los líderes educativos comunitarios sobre este tema.

A partir de los resultados del análisis anterior, se enuncia el:

OG2.- Diseñar una propuesta de situaciones problema que complementen las que aparecen en la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra", en el sentido de lo establecido en el Modelo 3UV.

Para el logro de los objetivos generales se han planteado los siguientes objetivos específicos:

OE1.- Conocer el modelo educativo con el que trabaja el CONAFE e identificar los niveles de aprendizaje de la unidad de interés.

OE2.- Identificar si los niveles del modelo educativo con el que trabaja el CONAFE promueven los 3 usos de la variable contemplados en el Modelo 3UV.

0E3.- Analizar cada una de las situaciones problema de la unidad de aprendizaje de interés, (conocidos como desafíos), identificando en cada uno de ellos qué uso o usos se le da a la variable.

0E4.- Describir las soluciones dadas por los LEC en cada desafío, identificando en cada una si el uso que le dio el LEC a la variable es el esperado.

OE5.- A partir de la información encontrada al alcanzar los objetivos específicos anteriores, diseñar desafíos que complementen a aquellos con los que se cuenta en la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra".

Capítulo 2
Marco de referencia

En este capítulo se presenta la información correspondiente al ámbito escolar donde se realizó el trabajo que se está reportando. Estos corresponden a:

- Las instituciones escolares involucradas en el trabajo con las comunidades rurales.
- El marco curricular del modelo educativo con el que se trabaja en las comunidades en cuestión.
- El ciclo de la relación tutora.
- Los niveles de aprendizaje a evaluar.

2.1 El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), es actualmente un organismo público autónomo, con personalidad jurídica y patrimonio propio, cuyos propósitos son: evaluar la calidad, desempeño y resultados del Sistema Educativo Nacional en preescolar, primaria, secundaria y media superior. (INEE, 2017)
Para cumplir lo anterior, el INEE se propone lo siguiente:

- Diseñar y realizar las mediciones correspondientes a componentes, procesos o resultados del sistema.
- Expedir los lineamientos a los que se sujetarán las autoridades educativas federal y locales para llevar a cabo las funciones de evaluación que les correspondan.
- Generar y difundir información para, con base en ésta, emitir directrices que sean relevantes para contribuir a las decisiones tendientes a mejorar la calidad de la educación y su equidad como factor esencial en la búsqueda de la igualdad social. (INEE, 2017)

Como uno de sus proyectos, el INEE está interesado en la evaluación de la educación en las comunidades indígenas, las cuales son el interés de este trabajo. El organismo encargado de hacer esto posible es el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE).

2.2 El Consejo Nacional de Fomento Educativo

El CONAFE es un organismo descentralizado, cuya tarea es proporcionar servicios de educación inicial y básica a niños y adolescentes que viven en localidades marginadas y/o con rezago social. Es decir, el CONAFE está donde la cantidad de niños y adolescentes con el deseo de estudiar, no es suficiente para que la educación pública se haga presente. Se habla de grupos muy pequeños.

El CONAFE tiene como misión institucional el impartir educación de calidad, con equidad e inclusión social a niñas, niños, jóvenes y adolescentes que viven en localidades marginales y con rezago social en nuestro país. Además, tiene como propósito brindar educación inicial y básica comunitaria de calidad, que sea flexible a los nuevos contextos sociales y culturales del país, garantizándoles el derecho a la educación y la conclusión satisfactoria de la educación básica. (CONAFE, 2017).

Los propósitos específicos del CONAFE son los siguientes:

- Mejorar los aprendizajes y el nivel de logro educativo en las niñas, niños y jóvenes.
- Fortalecer la atención educativa a las familias de comunidades desfavorecidas para enriquecer sus prácticas de crianza en favor del desarrollo integral de niñas y niños menores de 4 años.
- Propiciar que las niñas, niños, jóvenes y sus familias accedan, permanezcan y concluyan la Educación Básica Comunitaria.
- Crear condiciones que permitan consolidar trayectos formativos duales para los jóvenes que participan en el CONAFE. (CONAFE, 2017)

Es importante aclarar que el modelo del Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo (Modelo del ABCD) con el que trabaja el CONAFE y el modelo de la educación pública son muy distintos. Una de las diferencias notables es que, en el CONAFE no hay profesores como tal, sino que los responsables del trabajo con los alumnos son denominados Líderes Educativos Comunitarios (LEC).

No se trata solamente de una denominación distinta, sino que aquí no existen jerarquías como en la educación tradicional, donde el profesor enseña y el alumno aprende, ya que si un aprendiz tiene dominado alguna unidad de aprendizaje específica, puede pasar de tutorado a tutor (en esa unidad en particular). A los aprendices, se les conoce como "tutorado, aprendiz, alumno, estudiante". Al igual que los líderes comunitarios tienen una función distinta a la de los profesores de la educación tradicional, los aprendices también. En este caso, los líderes (o tutores) son solo guías para los tutorados, quienes, con base en preguntas, ejemplos o cualquier otra técnica que consideren necesaria, encaminan al aprendiz a dar solución a los desafíos (problemas) por sí solos, mientras que el aprendiz es quien construye su propio aprendizaje libremente.

Una mejor forma de explicar esto, es hablar del modelo curricular en el que se basa el CONAFE, el modelo del Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo, conocido por sus siglas como el Modelo ABCD.

2.3 Marco curricular de la educación comunitaria. El modelo del Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo

La propuesta de este modelo educativo tuvo como referencia el plan de estudios vigente al 2016 en la educación básica. Se espera cumplir con los mismos aprendizajes esperados en cada campo formativo y con el mismo perfil de egreso. La diferencia es que el CONAFE, debido a la diversidad de estudiantes que acuden a estos centros educativos, se vio en la necesidad de crear un currículo más flexible y una organización de la práctica educativa diferente. Propone lograr lo anterior mediante la enseñanza y aprendizaje en diálogo y la colaboración entre enseñantes y aprendices. Esto es el Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo, conocido como Modelo ABCD. (CONAFE, 2016 a, p. 9)

Según se menciona en el marco curricular de la educación comunitaria del CONAFE, datos que reporta el INEE, se asegura que al cierre del ciclo 2013-2014, México tuvo avances significativos en el acceso a la educación básica, de acuerdo a la edad y lugar de procedencia de los estudiantes.

Aunque el CONAFE permite a niños y adolescentes de comunidades rurales e indígenas recibir educación, según datos arrojados por el INEE, aún hay altos porcentajes que indican que muchos niños y jóvenes aún no son beneficiados por esta organización. Otro problema que se presenta, son los resultados de los exámenes como PLANEA, que arrojan resultados muy bajos e indican que la mayoría de la población no cumple con los requisitos deseables de logro de aprendizajes, siendo las poblaciones indígenas donde se concentra la mayoría de estudiantes con resultados menos satisfactorios.

Es por esto que el CONAFE considera que se deben diseñar reactivos para exámenes tipo PLANEA, que permitan a los jóvenes irse familiarizando con estas pruebas y que no se salgan del contexto de este modelo educativo. Además de que el modelo ABCD permite la educación a niños y jóvenes desde los 3 años, recibir educación de calidad, contribuyendo al enfrentamiento de los retos que se han presentado.

Lo más importante de este modelo educativo es conocer cómo es que se relacionan el tutor y el aprendiz durante este proceso de aprendizaje. Es por eso que a continuación se presentarán elementos que permitirán conocer el ciclo de la relación tutora.

2.4 El ciclo de la relación tutora

El ciclo de la relación tutora debe seguir una serie de procesos, los cuales nos garantizarán la calidad y los resultados de la relación pedagógica sustentada en el modelo ABCD, entre el aprendiz (estudiante) y el tutor (LEC). Dicho ciclo atiende las siguientes etapas:

2.4.1 El aprendiz elige un tema de un catálogo que el LEC ofrece

Para que un tutor pueda ofrecerles un tema a sus aprendices, primero él debe someterse a todo el proceso de tutoría, con el propósito de que, al tutorar el tema, pueda enfrentarse a las dificultades que puedan presentárseles a los tutorados. Además de que se espera que el tutor tenga una actitud entusiasta al momento de tutorar a alguien.

2.4.2 Se recibe tutoría para aprender por cuenta propia. En el diálogo, LEC y alumno aprenden.

El alumno muestra al tutor sus habilidades, lo que conoce, lo nuevo y las dificultades, todo esto por medio del diálogo. Lo importante es que el aprendiz relacione e identifique cada una de esas cosas con ayuda de preguntas hechas por el tutor y las respuestas que el mismo dé. Las mismas respuestas del estudiante, permitirán a su vez que el tutor identifique las causas que le dificulten al aprendiz comprender algo y lo que lo desvía de lo que quiere aprender. Es importante que todo esto que el tutor identifique lo utilice para hacer que el aprendiz logre corregir sus errores, con el fin de que se sienta entusiasmado y que muestre mayor motivación para aprender más sobre la unidad.

2.4.3 El aprendiz registra el proceso que le permitió alcanzar sus aprendizajes.

Este registro se hace cuando el aprendiz ha comprendido algo que le causaba dificultades, es importante que registre todo el proceso que lo llevó a dicho aprendizaje, las preguntas que se le hicieron, las respuestas que él dio que le ayudaron a comprender algo, si tenía alguna idea errónea, si dio solución a un desafío y éste no estaba correcto, etcétera. El LEC debe de apoyar al aprendiz con su registro, compartiéndole ideas, recordándole cosas que éste olvidó agregar y todo lo que considere necesario.

Lo importante de este registro no es la solución de los desafíos, ya que éstos no necesariamente se incluyen, más bien lo que interesa es el proceso por el cual tuvo que pasar el aprendiz para poder dar solución a dichos desafíos.

2.4.4 El aprendiz demuestra públicamente lo aprendido

En esta parte, el tutorado expone frente a sus compañeros o incluso a los padres de familia y a la comunidad el proceso que lo llevó a comprender y aprender un nuevo tema. Para esto, debe dar respuestas a las siguientes preguntas:

¿Qué quería entender o resolver?, ¿Qué dificultades de comprensión encontré?, ¿Cómo las resolví?, ¿Qué entendí o cuál fue la respuesta que encontré?

La demostración pública tiene tres intenciones académicas:

a. La social, que implica rendir cuentas sobre el avance del aprendizaje logrado, para lograr promover ante la comunidad la importancia que tiene el asistir a la escuela, impulsar la idea de que el conocimiento que se logra con esto es un bien que está al servicio de todos, para que así, tanto adultos como jóvenes y niños se sientan motivados a aprender.
b. La confirmación o el fortalecimiento del aprendizaje logrado, pues permite explicar el proceso de aprendizaje, de manera que personas distintas al LEC puedan entenderlo. En algunos casos, el aprendiz debe responder preguntas acerca de su procedimiento o sobre el conocimiento logrado.
c. El desarrollo de habilidades comunicativas, específicamente la claridad de las ideas, la confianza para hablar en público y la expresión oral adecuada al auditorio. (CONAFE, 2016a, p.35).

2.4.5 El aprendiz acompaña a otro compañero en el aprendizaje del tema estudiado

Una de las frases características del modelo ABCD es “enseñar es aprender dos veces”, es por ello que este punto es muy importante para este modelo, ya que un aprendiz que ya resolvió completamente cada uno de los desafíos contenidos en una unidad, puede ser capaz de guiar a un compañero en el proceso de aprendizaje de la misma. En este proceso, el aprendiz se enfrentará a distintas formas de resolver los problemas, lo cual le permitirá profundizar el conocimiento que ya tenía. Además, como en este modelo se pretende desarrollar un aprendizaje personalizado, al contar con compañeros que puedan tutorar un tema que ya estudiaron, no se restringirá a que el LEC tutore a todos los aprendices uno por uno, ya que estos aprendices a su vez, ofrecerán tutoría a alguien más, formando el siguiente ciclo:

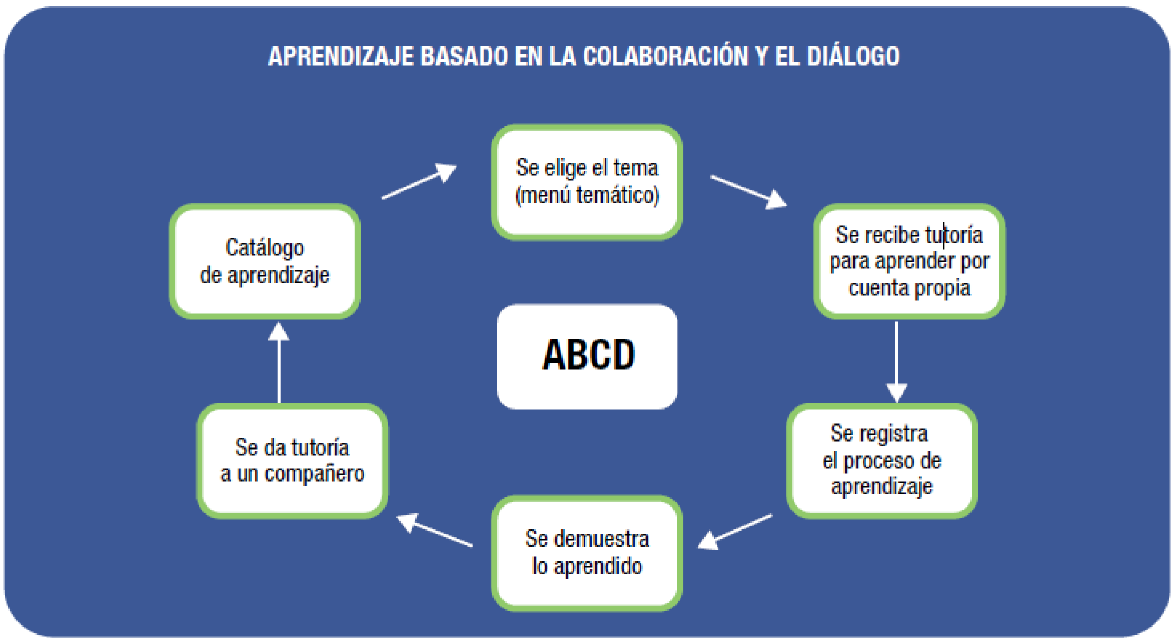


Figura 2.1 CONAFE. (2016a) Marco curricular de la educación comunitaria. Ciclo de la relación tutora. (p. 36)

La implementación de este modelo educativo impulsa cambios organizacionales en las escuelas que buscan la mejora del aprendizaje de los alumnos.

2.5 El multigrado en el modelo del ABCD

Los centros comunitarios del CONAFE ofrecen educación de tipo multigrado debido a la poca cantidad de niños con los que se trabaja. Esta es una de las razones por las cuales se decidió implementar el modelo del ABCD, con el propósito de enfrentar el desafío que este tipo de educación representa, no sólo en CONAFE, ya que en el país existen escuelas públicas incompletas con la misma problemática.

Por lo mencionado anteriormente, se puede comprender mejor la necesidad del CONAFE por crear un nuevo modelo educativo, que satisficiera las necesidades de este tipo de escuelas, debido a que no era posible imitar el modelo de una escuela regular en comunidades con pocos estudiantes y de localidades dispersas.

Después de asumir que debían crear un nuevo modelo educativo, el cual estaría enfocado en la enseñanza y el aprendizaje y que buscaba que se mantuviera interés por aprender de parte de los estudiantes, se tuvieron que tomar en cuenta aquellos detalles del modelo regular que había que conservar, aquellos que había que agregar y cuáles se tenían que eliminar.

2.6 Propósitos y campos de formación

El currículum del modelo ABCD para la Educación comunitaria incluye los campos de formación del plan de estudios nacional para la educación básica: a) Lenguaje y comunicación; b) Pensamiento matemático; c) Exploración y comprensión del mundo natural y social, y d) Desarrollo social y para la convivencia. En este último se presenta el contenido del resto de los campos, además de que, por la forma en que se desarrolla la educación comunitaria y por la formación que adquieren los estudiantes en su vida cotidiana, se agregó un nuevo campo llamado: Participación en comunidad.

Para la organización del mapa curricular del modelo del ABCD, se realizó un análisis de los temas, contenidos y aprendizajes esperados del plan de estudios actual de la educación básica, con el propósito de identificar los temas que tienen continuidad en todo el trayecto formativo y establecerlos como temas prioritarios, los cuales serán obligatorios en el modelo del ABCD. (CONAFE, 2016a, p. 41). A partir de esta selección de temas, se organizó el menú temático de cada campo formativo. A continuación se presenta la estructura curricular:

Figura 2.2 CONAFE. (2016a) Marco curricular de la educación comunitaria. Estructura curricular. (p.41).

2.6.1 Ejes transversales y campos formativos

Existen algunos aspectos que son considerados como eje transversal de este modelo, éstos tienen una gran importancia para el desarrollo de los estudiantes. Además, son transversales porque permiten relacionar contenidos de los distintos campos.

Los ejes transversales son:

- Interculturalidad
- Formación para la ciudadanía
- Desarrollo del lenguaje para el ámbito de estudio

Como se mencionó antes y se muestra en la Figura 2.2, los campos formativos de este modelo son:

- Lenguaje y comunicación
- Pensamiento matemático
- Exploración y comprensión del mundo natural y social
- Participación en comunidad

Por el interés que se tiene en este trabajo, nos enfocaremos sólo en hacer especificaciones sobre el campo formativo del área de matemáticas.

2.6.2 Pensamiento matemático

La finalidad que tiene este campo formativo en el marco curricular del modelo ABCD, consiste en desarrollar los conocimientos, habilidades y actitudes propias del pensamiento matemático, mediante la identificación de situaciones problema de la vida cotidiana que requieran de dichas habilidades para realizar los procedimientos necesarios para llegar a los resultados matemáticos esperados.

Este programa está organizado por unidades de aprendizajes, en las cuales se les plantean ciertos desafíos (situaciones problema) cercanos a la comunidad, los cuales permitan a los aprendices familiarizarse con lo que la situación les plantea.

La solución se lleva a cabo mediante el diálogo con el tutor o con otros estudiantes. Mediante este diálogo y la colaboración que se logra, el estudiante fortalece su capacidad para aprender a aprender por cuenta propia y es capaz de reconstruir sus procesos, de demostrar como aprendió y apoyar a sus compañeros a construir su propio conocimiento.

Podemos encontrar en los documentos de CONAFE que el campo formativo se organiza para su estudio en tres ejes que agrupan los temas de currículo, estos son:

Sentido numérico y pensamiento algebraico. Agrupa los temas relacionados con la aritmética y el desarrollo del pensamiento algebraico; para su abordaje se divide en: números enteros, números fraccionarios y decimales, patrones y ecuaciones.

***Forma, espacio y medida*.** Agrupa contenidos relacionados con las formas geométricas, la dimensión espacial y la medición; contempla los siguientes tópicos: ubicación espacial, figuras geométricas, cuerpos geométricos y medida.

Manejo de la información. Incluye aspectos relacionados con el manejo y tratamiento de la información proveniente de diferentes fuentes y su uso para la toma de decisiones informadas, los temas que lo integran son: proporcionalidad y funciones, análisis y presentación de datos, y nociones de probabilidad.

Para cada uno de estos temas se presentan problemas que, al ser analizados y resueltos con profundidad, permiten abordar y articular los diferentes aspectos y formar al estudiante en el hacer matemático. (CONAFE, 2016a, p.49 – 52).

El campo formativo y sus componentes se presentan de la siguiente manera en el modelo del ABCD:

CAMPO FORMATIVO	EJES	TEMAS	UNIDADES DE APRENDIZAJE AUTÓNOMO	EJES TRANSVERSALES		
Pensamiento matemático	Sentido numérico y pensamiento algebraico.	Números enteros.	Las losetas.	Ámbito de estudio: expresión oral y producción de textos.	Interculturalidad.	Ciudadanía.
		Números racionales.	La pastelería.			
		Patrones y progresiones.	De la regularidad a la generalización.			
		Ecuaciones.	El lenguaje del álgebra.			
	Forma, espacio y medida.	Formas geométricas.	Más que figuras planas.			
		Ubicación espacial.	Como grandes exploradores.			
		Medida.	Y solo es comparar…			
	Manejo de la información.	Proporcionalidad y funciones.	Lo equitativo, lo justo y el cambio en matemáticas.			
		Análisis y presentación de datos.	Analicemos el dato.			
		Nociones de probabilidad.	Águila o sol.			

Figura 2.3. CONAFE. (2016a, p.52) Marco curricular de la educación comunitaria. Campo Formativo y sus componentes.

Este trabajo se centrará en:

1) Campo formativo: Pensamiento matemático.

2) Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
3) Tema: Ecuaciones.
4) Unidad de aprendizaje: El lenguaje del álgebra.

Los niveles de aprendizaje que se presentan en esta unidad son los siguientes:

INICIAL

Nivel 1: Usar diferentes formas de expresión para representar y comunicar información de lo que sucede a tu alrededor.

BÁSICO

Nivel 2: Resuelves problemas de suma de dígitos, comunicas de manera oral y escrita.

Nivel 3: Resuelves problemas que implican realizar sumas cuyo resultado es menor a 100 y el valor faltante es la suma o alguno de los sumandos.

Nivel 4: Resuelves problemas usando habilidades básicas de interpretación y razonamiento; que involucran a la suma y la resta, modificando el lugar de la incógnita.

INTERMEDIO

Nivel 5: Resuelves problemas que implican trabajar con representaciones múltiples y comunicas tus interpretaciones y explicaciones.

Nivel 6: Resuelves problemas multiplicativos usando números naturales que incluyen interpretar y razonar en contextos familiares.

Nivel 7: Resuelves problemas que implican multiplicar o dividir, modificando el lugar de la incógnita, comunicas tu estrategia y argumentaciones.

Nivel 8: Resuelves problemas que implican crear y analizar diversas representaciones de la información. Comunicas tus explicaciones y argumentaciones.

AVANZADO

Nivel 9: Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = c$ donde a, b y c son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.

Nivel 10: Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$donde a, b, c y d son números racionales. Reflexionas y comunicas razonamientos y argumentos.

Nivel 11: Resuelves problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones y el uso de ecuaciones de segundo grado. Utilizas conocimientos y convenciones para resolver diversas situaciones del mundo real (CONAFE 2016b, p. 68).

Capítulo 3

Marco conceptual y consideraciones metodológicas

En este capítulo se presentan elementos teóricos que fundamentan el desarrollo de esta tesis: lo que se ha denominado marco conceptual. Con la intención de ordenar esta exposición, se dividió el capítulo en las siguientes secciones:

1. Álgebra y pensamiento algebraico

En este apartado se presentarán algunas ideas retomadas de diversas investigaciones anteriores, sobre algunas concepciones que expertos tienen sobre "álgebra" y "pensamiento algebraico", con el fin de clarificar la relación que tienen dichos conceptos, a partir de ello, se propondrá una reflexión personal sobre las diferencias y similitudes que expertos mencionan sobre cada concepto para después proponer una idea general a partir de todas ellas.

2. Principales dificultades que se presentan comúnmente a los estudiantes en el álgebra escolar.

Como el título lo dice, se mencionarán algunas de las principales dificultades que suelen presentar los estudiantes con relación al álgebra escolar.

3. El modelo 3UV (3 Usos de la Variable)

Aquí se expondrán las ideas básicas propuestas en el modelo 3UV, las cuales, como ya se señaló con anterioridad, sirvieron como columna vertebral tanto para la parte de exploración como para la parte del diseño que fueron enunciadas en los objetivos generales y específicos.

3.1 Álgebra y pensamiento algebraico

3.1.1 Álgebra

A continuación, se presentan algunas concepciones que fueron recopiladas en un trabajo anterior, acerca de diferentes concepciones de álgebra que a lo largo del tiempo se han manejado, esto desde el punto de vista de algunos expertos (Mena, R. 2002). Esta recopilación fue hecha con el fin de presentar algunas de las distintas percepciones que pueden existir con relación al álgebra.

a) **El investigador Alan Bell (Kieran 1993), afirma que**: "Históricamente, álgebra es resolver problemas para formar y resolver ecuaciones". Establece además que esa misma concepción de lo que es álgebra puede ser ampliada agregándole las acciones de generalización y el trabajo con funciones y fórmulas como característica dominante de toda actividad algebraica.
b) **Para el investigador James J. Kaput (1995)** Históricamente los contenidos del álgebra han sido, hileras e hileras de letras y números guiados por leyes algebraicas o formalismos sintácticos, donde los escasos problemas que se plantean son presentados como aplicaciones al final de cada tema. Pero presentar el álgebra así, es restringirla al estudio de una sola cosa, sin relaciones a otros procesos mentales, es tener una visión de un álgebra sin relaciones, fuera del contexto de la nueva propuesta de enseñanza.
c) **El investigador Louis Charbonneau, (Kieran**) hace referencia a varias formas de considerar lo que es el álgebra:
    - Álgebra es una extensión de la aritmética. En la escuela se enseña álgebra diciendo que los símbolos, etc. son como números, o sea, se comportan como números. El enfatizar en números escondidos en letras, fomenta la idea de que los símbolos algebraicos se comportan no por el modo para el cual fueron creados, sino como otro objeto matemático.
    - Algebra es simbolismo. El simbolismo es central en el álgebra. El simbolismo reduce el volumen de la presentación de un argumento, por lo que se podría decir que el simbolismo es un lenguaje. Un obstáculo muy general, al considerar el

álgebra como un lenguaje que emplea muchas palabras y símbolos que los estudiantes ya han estudiado en aritmética, puede ser, por el lado positivo, que le permita al estudiante entender rápidamente y de una forma muy simple, lo que es el álgebra, pero tiene un lado muy negativo también y es creer que las palabras comunes y corrientes y los símbolos tienen exactamente el mismo significado que ellos les dan en aritmética. El simbolismo nos permite ponerle un nombre a algo que no lo tenía, lo cual es muy importante en la forma analítica de maniobrar un problema. Pero en álgebra, no todo es simbolismo. El simbolismo es un medio para resolver problemas, es un medio que acompaña al análisis de un problema. Los símbolos son herramientas del razonamiento.

d) **Dentro de los estándares de la NCTM (1989), álgebra es**: entender el concepto de variable, expresión y ecuación; representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas, reglas verbales y ecuaciones y explorar las interrelaciones de esas representaciones; analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones; desarrollar confianza en resolver ecuaciones lineales utilizando métodos concretos, formales e informales; investigar desigualdades y ecuaciones lineales y no lineales; aplicar métodos algebraicos para resolver una variedad de problemas del mundo real y problemas matemáticos.

e) **Lesley Lee (Kieran Op. Cit.)** considera que álgebra es: una cultura que permite integrarla como un conjunto de actividades, como en un lenguaje, y que dentro de este proceso de aculturación algebraica que toma lugar en el salón de clases, ayuda mucho pensar en la interacción del lenguaje y el conocimiento, de la misma forma como en la interacción entre álgebra y otra cultura matemática que es la aritmética. Si el álgebra es una cultura, entonces iniciarse en ella es la primera etapa de un largo proceso de aculturación, una iniciación dentro de esta nueva cultura, con sus propias concepciones usuales, sus formas sociales, sus maneras de comunicación con formas escritas y visuales, su selección de temas, estructuras, código de conductas, etc.

f) **Luis Radford (Kieran Op. Cit.) Establece que el álgebra consiste en** herramientas conceptuales con las cuales operamos para producir más adelante abstracciones. Las herramientas son: clasificar, comparar, combinar, transformar y usar la reversibilidad que contiene acciones asociadas con estructuras básicas de conjuntos de números, relaciones, funciones, etc. Además, álgebra consiste en desarrollar procesos como lenguaje algebraico, usar relaciones o conexiones y trabajar con representaciones:

- Utilizar el lenguaje algebraico para expresar relaciones y trabajar con las representaciones.
- Manipular las expresiones simbólicas de diferentes formas para exponer aspectos nuevos al realizar relaciones.
- Utilizar los procesos para desarrollar algunas características del pensamiento algebraico, de las cuales las más importantes son formar y resolver ecuaciones, generalizar y trabajar con funciones y fórmulas.
- A los alumnos se les dificulta trabajar algebraicamente representando la situación simbólicamente, después hacer transformaciones sintácticas y luego, verificar si desde la solución se puede llegar a la situación original, que corresponde a escribir lo que se hace con símbolos numéricos y algoritmos desde el final hasta el inicio. Trabajar algebraicamente es hacer todo esto con cantidades que no se especifican numéricamente (números generalizados) o con cantidades que aún no están especificadas (incógnitas).
- Se puede aprender el aspecto lingüístico aprendiendo a usar la notación correctamente a través de un aprendizaje donde los símbolos tengan una significación.
- Es muy necesario adquirir el hábito de la estrategia "saber-preguntarse" que es indispensable para lograr el éxito en actividades tales como generalización, formulación y resolución de problemas y además el trabajo con funciones y sus relaciones (Mena, R. 2002, p. 24 - 30).

g) **Alan Schoenfeld (Lacampagne, Blair y Kaput, 1995)** describe el álgebra como "un pasaporte académico para el paso a prácticamente todas las vías del mercado de trabajo y todas las calles de la escuela".

Como se ha mostrado, existen distintas percepciones acerca de lo que es el álgebra, lo cual hace pensar que las ideas que se tienen sobre lo que se va a estudiar en esta área son distintas aún entre profesores y por supuesto entre los mismos alumnos. Sin embargo, en la exposición anterior, se percibe que las ideas coincidentes que se tienen sobre lo que es el álgebra son las siguientes:

- Resolver problemas para formar y resolver ecuaciones.
- Hacer generalizaciones.
- Entender el concepto de variable.

Esto es, se manifiestan tres usos de la variable como centrales en el estudio del álgebra. Y coincidentemente, es en el tema de la variable y sus posibles usos en donde existe mayor dificultad al momento de aprender álgebra. Comprender los distintos usos de las variables puede ser muy complicado para los alumnos; en este sentido más adelante se presentarán algunos ejemplos de los errores más comunes que tanto estudiantes como profesores cometen al trabajar con variables.

Se retomarán ahora, para no cortar el hilo de la presentación, un aspecto que para muchos resulta complicado esto es, distinguir entre lo que es el álgebra y el pensamiento algebraico, con el fin de aclararlo se presentará una sección con algunas concepciones sobre este último.

3.1.2 Pensamiento algebraico

El interés de esta sección es clarificar las diferencias que existen entre el álgebra y el pensamiento algebraico. ¿Siempre que se resuelve un problema de álgebra se hace uso del pensamiento algebraico?, ¿una cosa implica la otra?, para responder a estas cuestiones se recurre nuevamente a proporcionar las reflexiones de algunos expertos acerca de lo que es el pensamiento algebraico. A partir de ellas, se presentará una reflexión propia sobre lo que se considera en general que es el álgebra y el pensamiento algebraico. Las siguientes ideas fueron seleccionadas debido a la importancia que tienen en este trabajo y a que son expertos en la materia, por lo que son ideas claras de lo que el pensamiento algebraico puede significar.

a) **Alan Bell (Kieran Op. Cit.):** Pensamiento algebraico significa uno o más de los aspectos siguientes presentes durante la resolución de problemas aritméticos complejos:
    - Métodos hechos paso por paso, trabajando con datos que involucran o no incógnitas.

- Percepción global del enunciado del problema con el procedimiento y uso de múltiples relaciones aritméticas.
- Saber reconocer métodos generales similares en diferentes tipos de problemas.
- Saber encontrar y comprobar las generalizaciones.
- Reconocer y utilizar las propiedades generales de sistemas numéricos y sus operaciones.
- Saber reconocer, denotar, representar y utilizar funciones.
- Utilizar un lenguaje simbólico manipulable para ayudar en todo el trabajo que hay por hacer en los incisos anteriores.

b) **Louis Charbonneau (1996):** Una forma del pensamiento algebraico involucra:
   - Operaciones aritméticas entre símbolos y números.
   - Preocupación por las relaciones matemáticas en lugar de la preocupación por el objeto matemático. La forma del pensamiento algebraico está basada entonces sobre relaciones en lugar de enfocarse en predicciones lógicas.
   - Hacer preguntas con confianza, hasta aquellas donde la idea expresa existencia de los objetos algebraicos, conectada con la abstracción.

c) **Battista y Brown (1998):** El pensamiento algebraico es pensar acerca de los procedimientos, es pensar, reflexionar hasta el punto de poder expresar esos procedimientos en el símbolo algebraico. El pensamiento o razonamiento algebraico le da sentido al uso del álgebra, para lo cual su enseñanza debe enfocarse en aprendizajes significativos, no en la manipulación simbólica. A lo largo de sus cursos de matemáticas los estudiantes deben de aprender a pensar y hablar acerca de los procedimientos generales realizados sobre números y cantidades… Pensando acerca de los procedimientos numéricos que empiezan en grados elementales y continúan… hasta que los estudiantes pueden expresar y reflexionar acerca de los procedimientos en donde se usa el simbolismo algebraico.

d) **Herbert y Brown (1997).** Pensamiento algebraico es usar el simbolismo matemático y las herramientas para analizar diferentes situaciones como (1) extraer información de una situación propuesta (2) representar esa situación matemáticamente en palabras, diagramas, tablas, gráficas y ecuaciones; y (3) interpretar y aplicar las matemáticas para encontrar la solución de las incógnitas, para comparar conjeturas e identificar relaciones funcionales.

e) **Kieran y Chalouh (1993**): El pensamiento algebraico involucra el desarrollo del razonamiento matemático dentro de un marco mental algebraico al construir significados para los símbolos y las operaciones del álgebra en términos de la aritmética.

f) **Kaput (NCTM, 1994):** El pensamiento algebraico involucra construcción y representación de patrones, generalización, y lo más importante la acción de explorar y hacer conjeturas. Y afirma que el detallar las conexiones entre las diversas formas del razonamiento algebraico, especialmente la manera de desarrollarlas en la mente de los estudiantes a través de actividades didácticas, es lo más importante para estar inmersos en la nueva propuesta algebraica que promueve el desarrollo del pensamiento algebraico (Mena, R. 2002, p. 31-34).

g) **Radford (2010)** establece que el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos que están relacionados:

- El sentido de indeterminación, en el cual se encuentran los parámetros, incógnitas y variables.
- La analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos (Vergel, R., 2015).

Se puede concluir que en general, se considera al pensamiento algebraico como todos aquellos procedimientos o conjunto de elementos puestos en juego para resolver un problema de álgebra, además de que quien lo realiza puede razonar matemáticamente acerca de lo que está haciendo, logrando así la construcción propia del significado de todos aquellos elementos que estén involucrados en el problema. Es necesario que el álgebra proporcione aprendizajes significativos y no solamente mecanismos de resolución, con el fin de que quien aprenda álgebra pueda fácilmente desarrollar el pensamiento algebraico y a la inversa.

Existe por lo tanto diferencias entre lo que es el álgebra y el pensamiento algebraico, es importante entonces que los estudiantes logren desarrollar en ellos el pensamiento algebraico

al momento de resolver la unidad de aprendizaje autónomo de interés, lo cual debe ser tomado en cuenta al momento de realizar el análisis de los desafíos.
Otros aspectos que resultan de interés para el desarrollo de este trabajo, son las dificultades que comúnmente presentan los alumnos al resolver problemas del álgebra en los salones de clases.

3.2 Las principales dificultades de los alumnos en el álgebra escolar

Diversos estudios han mostrado que los alumnos, principalmente de secundaria, se enfrentan a una serie de dificultades al empezar a estudiar álgebra. Aunque existe una gran variedad de problemas que los alumnos suelen tener, se encontró una lista que parece detallar muy bien esas dificultades que han sido transcendentales.

Mancera, E. y Pérez, C. (2007), formularon la siguiente relación sobre las principales dificultades de los alumnos al resolver problemas algebraicos:

- **Generalización equivocada de procedimientos aritméticos**: Cuando los alumnos han aprendido con anterioridad a resolver problemas con procedimientos numéricos, les resulta difícil pasar de lo aritmético a lo algebraico y suelen tratar de resolver los problemas aritméticamente, evitando el uso del lenguaje algebraico.
- **Dificultades en el empleo de los signos y expresiones: Principalmente** con el uso de los signos, la problemática es que los alumnos no logran comprender qué significa tener cantidades negativas por lo que no logran emplearlas correctamente, lo mismo pasa al intentar entender una expresión algebraica.
- **Falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problemas:** El resolver los problemas de manera intuitiva, lleva a los alumnos a no prestar atención en el proceso de solución, encaminándolos a generar dificultades al momento de tener que plasmar el procedimiento de resolución.
- **Equivocaciones en la interpretación de las variables:** El hacer uso de las letras con anterioridad, para representar fórmulas como $A = b * h$, provoca que muchos alumnos consideren las variables de una ecuación como una incógnita con un valor

fijo el cual hay que encontrar, lo que los aleja de entender los diferentes usos de las variables.

Ursini, S., Escareño, F:, Montes, D. y Trigueros, M. (2005/ 2016), por otro lado, mencionan algunos de los errores más comunes que cometen los estudiantes al trabajar en álgebra, aclarando que esto es debido a que no logran comprender el sentido de las literales y cómo es que se espera se trabaje con ellas. Estos errores son:

1. **Dificultad para diferenciar entre los distintos usos de la variable**. Se habla de que los estudiantes no son capaces de comprender qué representan las letras en distintas expresiones, muchas veces si se les enfrenta con una expresión del tipo $3 + a + a + a + 10$, consideran que se trata de "una ecuación mal planteada" que, por tanto, "no es posible resolverla". Esto tiene que ver con que los alumnos están acostumbrados al uso de la variable como incógnita y no logran ver que en este caso se está representando un número general. Lo mismo ocurre con expresiones en donde la variable representa una relación funcional, comúnmente los alumnos intentan resolver problemas de este tipo haciendo uso de la variable como incógnita.
2. **Dificultades para interpretar la letra cuando aparece acompañada de un coeficiente o tiene un exponente.** Esta dificultad es muy común y existe una variedad de ideas erróneas que la mayoría de los estudiantes llegan a tener, lo cual no les permite resolver correctamente aquellos problemas que implican expresiones de este tipo, por ejemplo: $4b, b^3, b$.
3. **Dificultades para aceptar una expresión abierta ($\boldsymbol{x + 7; 3x}$) como respuesta válida.** Cuando los estudiantes llegan a respuestas de este tipo, llegan a creer que la respuesta es incompleta e incluso a otorgarle un valor arbitrario a la letra, con el fin de obtener un número como respuesta. Esto es debido a que no logran entender que en problemas de este tipo el valor de la variable no se puede ni se desea calcular, ya que se trata de un valor indefinido.
4. **Tendencia a ignorar la letra que representa un parámetro o a asignarle un valor: Por ejemplo, en ecuaciones como $\boldsymbol{5mx + 2 = 0}$.** La presencia de estos parámetros desconcierta a los estudiantes. Algunos de ellos pasan este parámetro por alto,

mientras que otros comentan que es un problema incompleto y que se necesita de un sistema de ecuaciones para encontrar la solución, otros intentan resolver la ecuación, pero al ver que contiene la letra m conciben que no pueden acabar el proceso.

5. **Dificultad para reconocer la variación conjunta de dos variables relacionadas.** Al pedírseles que resuelvan problemas que implican la variación conjunta de dos variables, la mayoría de los estudiantes no logra comprender la idea de ello, logrando trabajar con la correspondencia, pero no con la variación.

Se considera que éstas son las dificultades que mayormente se presentan a los alumnos. En su mayoría, las principales dificultades tienen que ver con el uso e interpretación de la variable. Es por ello que se hablará acerca de los tres usos de la variable propuestos por el Modelo 3UV.

3.3 El Modelo 3UV

Como se menciona anteriormente, una de las principales dificultades que se les presentan a los estudiantes con relación al álgebra es entender el significado de la "variable", lo que sucedió también al momento de trabajar con algunos LEC. No solamente porque no logren comprender qué es una variable, muchas veces el que ésta tenga diferentes usos es lo que hace que ellos se agobien al momento de resolver problemas que involucren el uso de las mismas.

Ursini,S., et al. (2016), en el Modelo 3UV, presentan una clasificación de 3 distintos usos de la variable, los cuales son:

a) La variable como *Incógnita*, cuyo valor puede ser determinado con exactitud si se consideran las restricciones del problema.
b) Como *número general*, es decir, se utiliza como un instrumento para expresar matemáticamente un patrón, una regularidad o un método general.
c) Como una *relación funcional*, esto es, se presenta en una relación de variación conjunta con otras variables.

Se espera que los estudiantes comprendan cada uno de los diferentes usos que tiene la variable y que sean capaces de manipularlos, interpretarlos y simbolizarlos, permitiéndoles así ser capaces de resolver cualquier tipo de problema que implique hacer uso de las mismas (Ursini, S., Op. Cit., 2016).

Uno de los principales conflictos a los que los alumnos se pueden enfrentar es el no lograr identificar la función que está cumpliendo la variable en cada problema particular e incluso el no comprender que ésta puede tener varias funciones. Es por esto que resulta interesante hacer notar la existencia de los tres usos de la variable, que el Modelo 3UV proporciona.

Según Ursini, S., Op. Cit., existe una serie de aspectos que caracterizan cada uno de los tres usos de la variable.

Para trabajar con problemas y ejercicios que involucran la **incógnita** es necesario:

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.
I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones (Ursini, S., Op. Cit. p. 35-36).

En el caso del **número general** es necesario:

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales (Ursini, S., Op. Cit. p. 36-37).

Para el caso de variables en una **relación funcional** es necesario:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema (Ursini, S., Op. Cit. p. 37).

Es posible encontrar una relación entre lo que expertos consideran que es el pensamiento algebraico y lo que el Modelo 3UV propone que deben ser capaces de realizar los alumnos al momento de resolver problemas que impliquen cada uno de los tres distintos usos de la variable. Es por ello que este trabajo se realizará a partir de estas características proporcionadas por el Modelo 3UV, con base en el cual se desarrollará el análisis de los desafíos de la unidad de aprendizaje de interés, así como el de las soluciones dadas por los LEC que fueron tutorados. Además, la parte relativa a la propuesta de complementariedad para los desafíos existentes, también se diseñó tomando en cuenta la propuesta contenida en el Modelo 3UV.

3.4 Consideraciones metodológicas

Como se mencionó anteriormente, el interés de este trabajo es Identificar y describir los usos de la variable que son promovidos institucionalmente por el Consejo Nacional de Fomento Educativo, mediante la unidad de aprendizaje autónomo “El lenguaje del álgebra”, así como identificar y describir el nivel de manejo de los líderes educativos comunitarios sobre este tema**.** A partir de que se han formulado los objetivos generales y específicos de este trabajo, es necesario plantear cómo es que fueron alcanzados dichos propósitos, es decir, cuáles fueron las acciones necesarias para el logro de los mismos.

Para esto, se definió primero el tipo de estudio que se ha realizado. En este caso fue necesario el desarrollo de un estudio de carácter exploratorio:

> Los estudios exploratorios se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes. Es decir, cuando la revisión de la literatura reveló que tan sólo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas. (Hernández R., Fernández C. y Baptista P., 2006: pp. 100-101)

Además, es importante señalar que:

> Los estudios exploratorios sirven para familiarizarnos con fenómenos relativamente desconocidos, obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa respecto de un contexto particular, investigar nuevos problemas, identificar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investigaciones futuras, o sugerir afirmaciones y postulados. (Hernández et al., 2006: p. 101)

El proceso que se siguió fue el siguiente:

1. Revisión documental

Las referencias bibliográficas que fueron consultadas y examinadas fueron:

A. Decálogo del ABCD

Dicho documento fue importante ya que en él se presenta el reglamento que todo líder educativo comunitario debe seguir al momento de tutorar a cada grupo, con la finalidad de que el estudiante aprenda como el modelo del ABCD lo propone.

B. Marco curricular de la educación comunitaria. Modelo ABCD.

Fue sumamente importante pues trata sobre el modelo con el cual se trabaja en las comunidades del Conafe, ahí se explica todo lo que hay que conocer sobre el mismo, desde las actividades que debe realizar el LEC, el tutorado y la relación que debe existir entre ellos, así como los procesos de evaluación y los instrumentos que se emplean para ello.

C. Proyecto Nacional de Evaluación y Mejora Educativa de Escuelas Multigrado (PRONAEME)

Posteriormente se revisó el Proyecto Nacional de Evaluación y Mejora Educativa de Escuelas Multigrado (PRONAEME), en el cual se muestran algunos resultados de los logros de aprendizajes alcanzados por instituciones educativas, haciendo comparaciones entre estudiantes que estudian en localidades urbanas y estudiantes de localidades rurales o comunidades marginadas, entre otros. El interés por revisar dicho proyecto, fue el conocer los progresos que se tienen en lugares marginados y compararlos con los que se tienen en lugares en mejor desarrollo.

En este documento se hace ver necesaria la búsqueda de alternativas de evaluación que estimulen a los estudiantes a mejorar en sus procesos de aprendizaje para que esas diferencias no sean tan remarcadas. Aunque diversos estudios mostraban que los bajos resultados eran debido a la falta de capacitación docente en dichos lugares.

Los documentos mencionados en los puntos A, B y C, permitieron el logro del OE1 y el OE2.

D. Unidad de aprendizaje autónomo. Pensamiento matemático.

En esta unidad se presentan los temas y los desafíos que cada uno de ellos contiene y son éstas con las que se trabaja en las comunidades. Particularmente se revisó la unidad de nombre: El lenguaje del álgebra, en la cual se ve el tema de ecuaciones, debido al interés del desarrollo de este trabajo.

Esta revisión fue necesaria para el logro del OE3.

E. Guion de trabajo para Líderes Educativos Comunitarios

Finalmente se revisó un guion de trabajo, el cuál guía a los líderes educativos a evaluar los aprendizajes de los tutorados, presentándose ahí una serie de actividades que hay que realizar al finalizar cada unidad de aprendizaje que fue abordada por cada aprendiz.

F. Evaluaciones finales aplicadas en Conafe

Se revisaron también algunas evaluaciones que se han aplicado anteriormente a los aprendices de Conafe, para tener una idea de cómo y cuáles son los procesos de evaluación que se aplican normalmente debido a que la manera en que evalúan a sus aprendices es distinta.

G. Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa.

Debido a que el interés de este trabajo es revisar si los desafíos propuestos por la unidad de aprendizaje de interés, son suficientes para que el estudiante sea capaz de distinguir los 3 Usos de las Variables propuestos por el Modelo 3UV, se revisó este libro ya que es ahí donde se propone dicho modelo.

De igual manera que en el punto D, esto permitió el logro del OE3, así como el OE4 y el OE5.

H. Tesis y artículos relacionados con el tema.

Esta parte fue primordial para el desarrollo de este trabajo, debido a que era necesario investigar algunos aspectos relacionados con las concepciones que se tienen sobre el álgebra y el pensamiento algebraico, así como la recopilación de algunos antecedentes que ayudaran a contextualizar la problemática abordada.

2. Estudio exploratorio

Para llevar a cabo el estudio, con apoyo del INEE, se seleccionó como escenario de investigación a las instalaciones del CONAFE en Hermosillo, Sonora.

La estrategia seguida fue conocer el método de trabajo de esta institución, así como la revisión bibliográfica necesaria que diera lugar a un problema de investigación de interés, dando lugar a la problemática de interés de este trabajo, así como la cuestión de investigación y los objetivos del mismo.

3. Entrada al escenario de investigación

2.1 Ambientación con la infraestructura, con el personal y con las formas de operación de CONAFE, en Hermosillo, Sonora.

Lo primero que se hizo fue asistir a una reunión, en la cual se planteó la situación por la que el CONAFE y sus comunidades están pasando y que para ellos presenta un escenario poco favorable, por lo que requieren tomar medidas con el fin de obtener resultados positivos que permitan mejorar su situación. Es decir, el CONAFE argumenta que al ser uno de los primeros años en los que se aplican evaluaciones como PLANEA a sus aprendices, los resultados arrojados no fueron muy favorables.

La preocupación del CONAFE no son del todo las cifras de los resultados de dicha prueba, sino más bien estriba en el futuro de sus estudiantes y en que algunos de ellos decidirán continuar sus estudios en el bachillerato. Al darse cuenta de que se enfrentarán a un modo de enseñanza distinto al que esta institución maneja, y que los resultados proporcionados por dichas evaluaciones indican que los aprendizajes adquiridos por sus estudiantes pudieran no ser suficientes, se solicitó la revisión de los desafíos de la unidad de aprendizaje “El lenguaje del álgebra” con el fin de ver si los desafíos son suficientes para que sus aprendices adquieran los conocimientos necesarios para ingresar a un bachillerato.

Se acordó pasar por todo el proceso de tutoría con el fin de entender el modelo educativo, la relación tutora y el Registro del Proceso del Aprendizaje (RPA) que debe realizar cada alumno y si esto en conjunto con los desafíos es suficiente para la adquisición de los conocimientos que se necesitan para ingresar al bachillerato.

2.2 Revisión y análisis de la Unidad de Aprendizaje de interés, particularmente de los desafíos propuestos.

Para entender mejor la situación, en un primer momento fue necesario resolver la unidad de aprendizaje de interés: El lenguaje del algebra. Se solicitó que se resolviera primeramente como se haría normalmente, es decir, resolverlo como se ha aprendido.

Después de esto, se proporcionó información acerca del RPA, en ella se explicaba detalladamente lo que se tenía que hacer en él y se solicitó que se realizara uno de toda la unidad. En este RPA lo que interesa no es la solución de los desafíos, sino todo el proceso por el que se tuvo que pasar para llegar a dicha solución.

2.3 El Registro del Proceso de Aprendizaje

Fueron necesarios algunos días para lograr realizar el RPA correctamente, lo cual se logró con la ayuda de un tutor, después de que esto se logró, se recibió una tutoría en un tema de otra unidad de aprendizaje. Esto se hizo con el fin de estar en el lugar de los aprendices (todos pasan por este proceso antes de ser tutores), para posteriormente vivir la experiencia desde el lugar del tutor.

El proceso de tutoría se vivió por completo, desde las preguntas que el tutor hacía y las respuestas que se dieron, las investigaciones que fueron necesarias hacer, los errores que se cometieron, los aprendizajes que se obtuvieron, el registro del proceso de aprendizaje, así como la presentación pública y las sugerencias hechas por el tutor y algunas otras personas ahí presentes.

A partir de todo lo anterior, fue necesario vivir la experiencia desde la otra perspectiva, la del tutor. Para ello se contó con dos días de tutorías, en los cuales se tenían 3 aprendices (LEC del CONAFE) que nunca habían tomado la unidad.

3.4 El proceso de tutorías

En esta parte fue necesario involucrarse ya directamente con los LEC, quienes en esta ocasión participaban como aprendices, el proceso de tutorías que se siguió fue el que normalmente se sigue en el CONAFE con los alumnos y LEC con los que ahí se trabaja. La finalidad de esta actividad fue identificar las dificultades presentadas por cada uno de ellos en cada desafío abordado, para posteriormente a partir de su proceso de solución de cada uno de éstos, poder realizar la descripción con base en el modelo 3UV, de los usos que los LEC le dan a la variable y lograr los objetivos propuestos en este trabajo.

4. Selección de los participantes

El personal del CONAFE normalmente realiza eventos en los que se imparten tutorías a algunos LEC que desean abordar nuevas unidades de aprendizaje autónomo. Algunos LEC participan como tutores y otros como aprendices. Normalmente quienes ocupan el lugar de aprendices eligen una unidad de interés que no han abordado antes y eligen a algún tutor que decidió tutorarla. En este caso fueron 3 LEC de distintas ciudades de Sonora quienes decidieron abordar la unidad y ser tutorados en la unidad abordada en este trabajo, en donde el papel del investigador era el de tutor.

5. Trabajo de campo (proceso de tutoría)

Para llevar esto a cabo se consideró el Modelo 3UV, en el que se establecen los distintos usos que puede tener la variable en la resolución de problemas. Esto permitió hacer el análisis de las situaciones problemas abordadas en la unidad de aprendizaje autónomo de interés, lo cual contribuyó al logro de los objetivos.

6. El diseño

Como colaboración propia, a partir del análisis anterior, se consideró necesaria la realización de un diseño de situaciones problemas (desafíos) que podrían complementar a los contenidos en la unidad. Para esto fue necesario apoyarse en las sugerencias que el Modelo 3UV propone.

7. Establecimiento de conclusiones

Con todo lo anterior, como cierre a esta tesis, se establecieron algunas conclusiones sobre todo el proceso que metodológicamente ha sido reseñado y que se tradujo en una serie de aprendizajes personales que en la sección correspondiente serán expuestos.

Capítulo 4
Los desafíos y los distintos usos de la variable

En este capítulo se pretende hacer uso de lo estudiado acerca del modelo 3UV y a partir de ello realizar una descripción detallada de cada uno de los aspectos de interés de la unidad de aprendizaje: “El lenguaje del álgebra”, en el tema Ecuaciones (consultar el Anexo 1).
Para ello, este capítulo se conformará de la siguiente manera:

A. En un primer momento, se mostrará la presentación del tema con su correspondiente análisis con base en el Modelo 3UV.
B. Posteriormente, se presentarán por orden de aparición cada uno de los desafíos con su correspondiente descripción con relación a los usos de la variable que en cada uno de ellos se promueve.
C. A partir de lo anterior, se presentarán los procesos de solución de cada uno de los aprendices, conjuntamente se realizará una descripción sobre los aspectos relacionados con los distintos usos de la variable que los tutorados abordaron en cada desafío.

   Los puntos B y C permitirán hacer una comparación sobre lo que la unidad pretende promover sobre los usos de la variable y lo que los tutorados hicieron para resolver el desafío.
D. Finalmente se presentarán cada uno de los niveles de aprendizaje esperados en la unidad, con el fin de identificar si se le da prioridad a alguno de los usos de la variable. Con ayuda de esto, en caso de que alguno de los usos de la variable no esté presente en la unidad, se recurrirá al diseño de desafíos que lo involucren.

4. Unidad de aprendizaje: El lenguaje del álgebra. Ecuaciones.

4.1 Presentación del tema y el modelo 3UV

El párrafo que se transcribe a continuación, hace una pequeña introducción acerca de lo que se verá en la unidad de aprendizaje autónomo de interés. Se decidió agregar debido a que se considera importante presentar también el análisis con relación al Modelo 3UV de esta parte de la unidad.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

> Día a día todos vivimos diversas situaciones que en las que necesitamos poner en juego nuestros conocimientos e ingenio para buscar las mejores soluciones y aprender mucho de cada experiencia. ¿Sabías que las matemáticas son un lenguaje que nos ayuda a modelar situaciones complicadas para encontrar soluciones más certeras y rápidas? ¿Sabías que una expresión matemática tiene mucha información que ofrecerte? Aprender el lenguaje de las Matemáticas y en particular del álgebra te abre las puertas para comprender lo que ellas tienen para ti. Sí, es un lenguaje en código que tienes la oportunidad de aprender y comprender.
>
> Esta Unidad de Aprendizaje te ayudará a conocer el código del álgebra para que puedas expresar y comunicar diversas situaciones utilizando este lenguaje secreto, así como también te ayudará a descifrar los mensajes que otros han escrito (CONAFE, 2016b, p.57).

Se puede observar que en la presentación del tema de la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra", se concibe al álgebra como "un lenguaje en código" que sirve para comunicar ideas y que ayuda a modelar situaciones problema con el fin de encontrar soluciones. El Modelo 3UV entre algunas de sus propuestas para mejorar el aprendizaje del álgebra, propone que un acercamiento a ésta puede ser el siguiente: "Considerar el álgebra como a un lenguaje con su propia gramática. Se trata aquí de un acercamiento estructural al álgebra” (Ursini, S., et al, 2016, p. 21).

Si se observa la siguiente tabla de contenidos que aparece en la presentación del tema de la unidad:

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO LÓGICO					
Ecuaciones					
Ecuaciones lineales				Sistema de ecuaciones	Ecuaciones cuadráticas
Expresiones de la forma a+b=____ _	Expresiones de la forma a+__ _=b	Expresiones de la forma a(__ _)=b	Expresiones de la forma ax+b=cx+d	Expresiones de la forma ax+by=n dx+cy=m	Expresiones de la forma ax2+bx+c

Tabla 4.1 Tabla de contenidos: Sentido numérico y pensamiento lógico. CONAFE 2016 p. 57.

En ella se puede observar que se presentan expresiones que promueven los tres usos de la variable, al hablar de ecuaciones lineales se puede considerar a la variable como incógnita, en el sistema de ecuaciones lineales se promueven los tres usos de la variable y en la última expresión pudiera promoverse a la variable como número general, según lo indica el Modelo 3UV. Habría que esperar, sin embargo, para saber si estas apreciaciones que se están exponiendo, efectivamente se concretan y se hacen explícitos en los materiales de trabajo para los tutores y tutorados.

Otra parte interesante de la presentación del tema de la unidad, es en la que se muestran el objetivo general y los objetivos específicos:

PROPÓSITO GENERAL

Reconoceremos las ventajas del lenguaje algebraico para modelar situaciones problemáticas diversas en busca de su solución. Resolveremos problemas que impliquen realizar operaciones con expresiones algebraicas y que involucren el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Aprenderemos a describir y comunicar nuestros procesos de solución a problemas que implican la suma de números naturales, mediante representaciones gráficas o de manera oral.
- Desarrollaremos diversas estrategias para resolver problemas que implican sumas en las que el valor desconocido puede ser cualquiera de los sumandos o el resultado, así como problema que impliquen realizar multiplicaciones. Y compartiremos nuestros procesos de solución.
- Desarrollaremos diversas estrategias para resolver problemas que implican realizar sumas o multiplicaciones con números reales en las que el valor desconocido puede ser cualquiera de los elementos de la suma o de la multiplicación. Y compartiremos nuestros procesos de solución (CONAFE, 2016b, p.58).

En esta parte se pueden ver nuevamente reflejados los tres usos de la variable, los cuales aparecen en el objetivo general y se desprenden después en los objetivos específicos.

En el objetivo general aparecen los tres usos de la variable, ya que se habla de problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales y cuadráticas, entre las cuales pudiera entrar un sistema de ecuaciones. Esto último promovería el uso de la variable como relación funcional, además de promover a la variable como incógnita y como número general.

El primer objetivo específico promueve el uso de la variable como número general, al proponer representaciones gráficas que describan los procesos de solución de problemas de ese tipo, ya que se refiere a expresar reglas y métodos que representen el reconocimiento de patrones (ya que habla de sumas de números naturales).

Los dos objetivos específicos restantes, pretenden promover el uso de la variable como incógnita al hablar de los procesos de solución de problemas y de un valor desconocido que hay que encontrar.

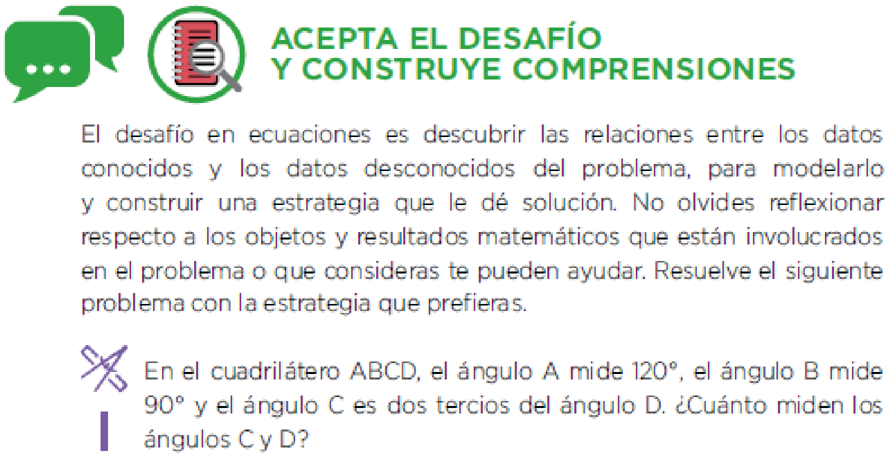
4.2 Los usos de la variable involucrados en los desafíos

En esta parte se hará la descripción para cada uno de los desafíos y finalmente se recaudará la información para realizar una breve descripción general de los usos de la variable que se ven involucrados en ellos.

Como parte del proceso, una de las acciones que se realizaron para poder llevar a cabo este trabajo fue la resolución propia de los desafíos (esto se encontrará en el Anexo 2). Al ser una de las primeras acciones que se realizaron para el desarrollo de este trabajo, la resolución de los desafíos se hizo desde el punto de vista de las matemáticas en sí, al igual que la tutoría de los LEC y no con base al Modelo 3UV, ya que esto se investigó posterior a dichas acciones. El análisis de los desafíos con base en el Modelo 3UV, permitió adquirir una visión distinta de lo que se promueve en la unidad en general (los tres usos de la variable) y en el proceso de solución seguido por cada uno de los aprendices.

Los desafíos presentados a continuación, son los que se encuentran en la unidad de aprendizaje "Pensamiento matemático", con la cual trabaja el CONAFE: Consejo Nacional de Fomento Educativo. (2016b). Unidad de aprendizaje: Pensamiento matemático. Ciudad de México: CONAFE. (p.56 -69).

Desafío 1



ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El desafío en ecuaciones es descubrir las relaciones entre los datos conocidos y los datos desconocidos del problema, para modelarlo y construir una estrategia que le dé solución. No olvides reflexionar respecto a los objetos y resultados matemáticos que están involucrados en el problema o que consideras te pueden ayudar. Resuelve el siguiente problema con la estrategia que prefieras.

En el cuadrilátero ABCD, el ángulo A mide 120°, el ángulo B mide 90° y el ángulo C es dos tercios del ángulo D. ¿Cuánto miden los ángulos C y D?

Figura 4.1 Desafío 1, CONAFE, 2016b, p.58

En este desafío se pueden ver involucrados varios usos de la variable, el primero y el más claro es el de la incógnita. En la pregunta que aparece al final del enunciado se solicita que el aprendiz indique los valores de dos "variables", las cuales pasan a ser incógnitas debido a que su valor es único y puede ser determinado a partir de los demás datos.

Existe dentro de este desafío información que no está implícita pero que los estudiantes necesitarían saber para poder solucionar este desafío por medio de ecuaciones (si éste fuera el caso). Es necesario conocer la proposición "En todo cuadrilátero, la suma de sus ángulos interiores es 360°". Esta información permite que el alumno logre construir un sistema de ecuaciones (aunque muchas veces sin darse cuenta), como el que aparece en la presentación del tema, es decir, se ve involucrada a la variable en una relación funcional, en donde el valor de la variable C depende de la variable D.

Usos de la variable que se fomentan en el desafío 1: Como incógnita y como relación funcional.

Desafío 2

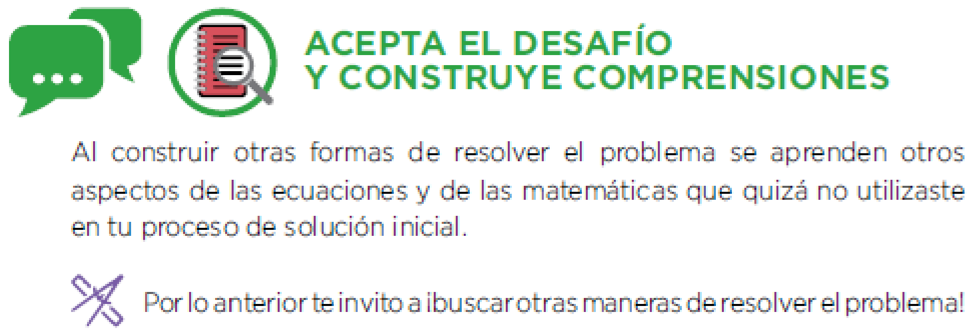


Figura 4.2 Desafío 2, CONAFE, 2016b, p.59

En este desafío se solicita al aprendiz que proporcione alguna otra solución distinta a la dada en el desafío anterior, la finalidad de esto parece ser que el aprendiz pueda darse cuenta de que existen distintos procesos de solución correctos para el mismo problema.

REVISA TU AVANCE

Figura 4.3 Revisa tú avance, CONAFE, 2016b, p.60

Se agregó esta parte debido a que se emplean los términos: Número desconocido, variable e incógnita, como si éstas fueran ajenas una de las otras, lo cual pudiera crear confusión tanto en los tutores como en los tutorados. Con lo poco que se trabajó con algunos de los LEC, fue suficiente para identificar que hasta esta parte no existe una idea clara ni cercana a lo que es la variable, ni a los distintos usos que ésta puede tener. Al momento de conversar con algunos de los líderes que resolvían esta unidad de aprendizaje, salieron a relucir en gran medida estas dificultades, provocando preocupación en ellos mismos al darse cuenta de que no tenían una idea clara de lo que es la variable ni de cómo ésta puede ser usada.

Desafío 3

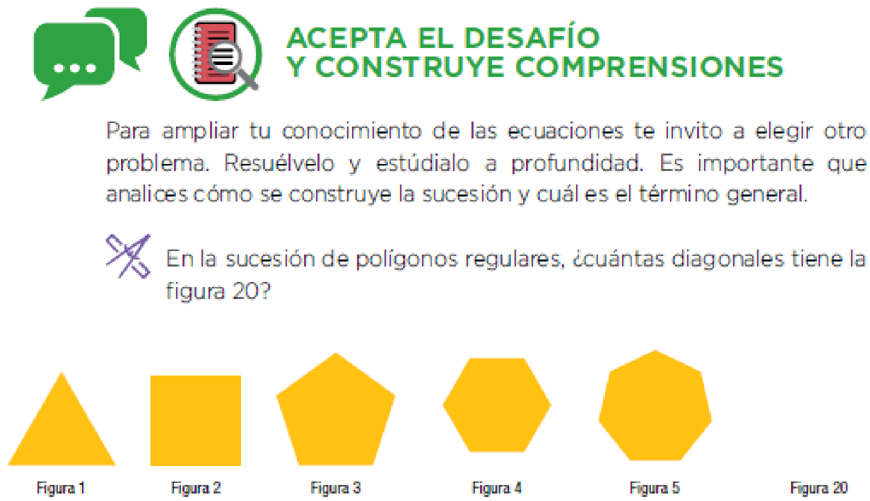
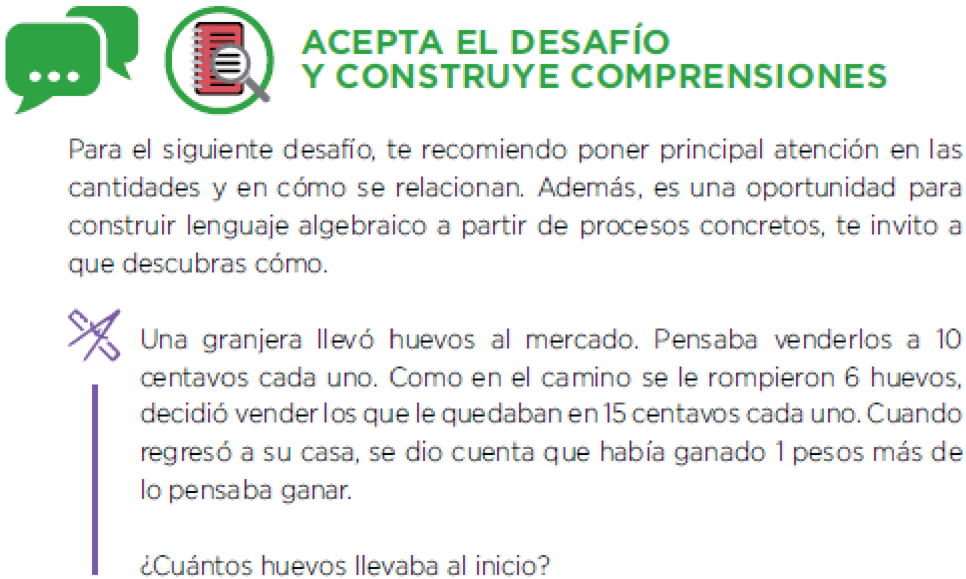


Figura 4.4 Desafío 3, CONAFE, 2016b, p.60

En este desafío se promueve el uso de la variable como número general, apareciendo esto implícitamente en el mismo. Hasta este momento, ya se han implementado los tres usos de la variable propuestos por el Modelo 3UV, es decir, no existe una preferencia hacia ninguno de ellos.

Desafío 4



ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío, te recomiendo poner principal atención en las cantidades y en cómo se relacionan. Además, es una oportunidad para construir lenguaje algebraico a partir de procesos concretos, te invito a que descubras cómo.

Una granjera llevó huevos al mercado. Pensaba venderlos a 10 centavos cada uno. Como en el camino se le rompieron 6 huevos, decidió vender los que le quedaban en 15 centavos cada uno. Cuando regresó a su casa, se dio cuenta que había ganado 1 pesos más de lo pensaba ganar.

¿Cuántos huevos llevaba al inicio?

Figura 4.5 Desafío 4, CONAFE, 2016b, p.61

Aunque existen varias formas de resolver este desafío, la idea central pretende ser que el alumno genere un sistema de ecuaciones que permita llegar a la solución del mismo. Es decir, se espera que el aprendiz haga uso de la variable como relación funcional, aunque al mismo tiempo, lo que se pretende encontrar es un valor específico, es decir, se hace uso de la variable como una incógnita. Por lo tanto, este desafío es una actividad integradora (según lo que menciona Ursini, S., en el modelo 3UV), esto significa que pretende que quien resuelva el desafío logre pasar de un uso de la variable a otro sin mayor problema.

Con ayuda del tutor, el aprendiz pudiera lograr hacer los dos usos de la variable que se involucran en este desafío adecuadamente, mediante una serie de preguntas que guíen al aprendiz.

Usos de la variable involucrados:

- Relación funcional
- Incógnita

Desafío 5

ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el desafío de la vida de Diofanto, te invito a buscar diferentes formas de resolverlo. Te recomiendo recuperar poco a poco la información que te ofrece el enunciado y cómo se relaciona con lo que te pide.

> "Larga fue la vida de Diofanto, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia; su mentón cubrióse de vello después de otro doceavo de su vida; la séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril; pasó un quinquenio más y le nació un hijo, cuya vida sólo duró la mitad de la de su padre, que sólo sobrevivió cuatro años a la de su amado hijo". ¿A qué edad murió Diofanto?

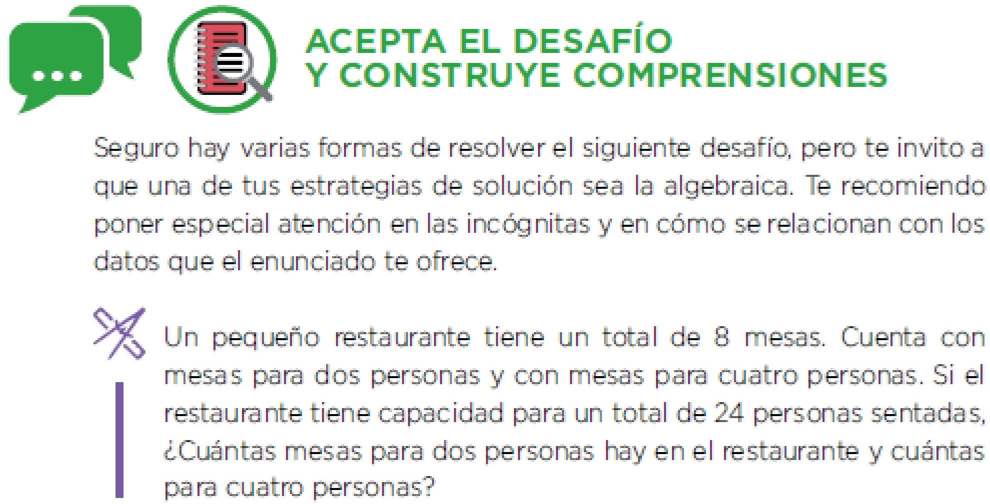
Figura 4.6 Desafío 5, CONAFE, 2016b, p.61

Al igual que en el desafío anterior, en éste se pretende que el aprendiz sea capaz de generar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, se le da el uso a la variable como una relación funcional, pero además se pretende que se encuentre una de las incógnitas (edad de Diofanto). Planteado de la manera en que se establece en el desafío, en donde solamente se le solicita al aprendiz encontrar la edad de Diofanto, puede verse que el uso de la variable que predomina es el de la incógnita, es decir, al poder sustituir una ecuación en la otra, se llega a una ecuación lineal en la que al final simplemente es necesario encontrar el valor de la incógnita.

Usos de la variable involucrados:

- Relación funcional
- Incógnita

Desafío 6



ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Seguro hay varias formas de resolver el siguiente desafío, pero te invito a que una de tus estrategias de solución sea la algebraica. Te recomiendo poner especial atención en las incógnitas y en cómo se relacionan con los datos que el enunciado te ofrece.

Un pequeño restaurante tiene un total de 8 mesas. Cuenta con mesas para dos personas y con mesas para cuatro personas. Si el restaurante tiene capacidad para un total de 24 personas sentadas, ¿Cuántas mesas para dos personas hay en el restaurante y cuántas para cuatro personas?

Figura 4.7 Desafío 6, CONAFE, 2016b, p.62

El mismo desafío indica a los aprendices que pongan especial atención en las incógnitas, en este momento, si algún aprendiz no tuviera claro lo que esto significa, el mismo desafío los obligaría a descubrirlo. Lo que hace interesante al desafío es el poder encontrar las ecuaciones que permitan al aprendiz llegar a la solución, mediante un sistema de ecuaciones 2x2. Aunque hay varias formas de resolverlo, el desafío mismo indica que en esta solución se haga uso del álgebra, lo que debería llevar a los estudiantes al sistema que se mencionó anteriormente.
En general, el desafío intenta promover a la variable como una relación funcional, lo que debiera permitir al estudiante encontrar el valor de las dos incógnitas involucradas en dicha relación, pero no parece ser adecuado para ello, ya que puede resolverse fácilmente sin ningún método algebraico.

Usos de la variable involucrados:

- Relación funcional
- Incógnita

Desafío 7

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el desafío del triángulo algebraico es necesario que analices con cuidado la información que te ofrece y lo que te pide; no olvides que los esquemas también te ofrecen información.

¿Cuál es el área y el perímetro del triángulo cuyos lados están dados por las expresiones $x+3$, $x-4$ y $2x-5$?

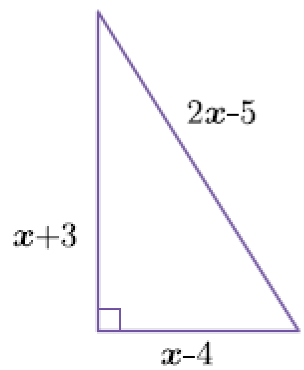


Figura 4.8 Desafío 7, CONAFE, 2016b, p.62

En este desafío se pide que se encuentre el perímetro y el área del triángulo proporcionado por el esquema, pero para ello es necesario primeramente encontrar el valor de la variable x, donde x toma el papel de una incógnita.

Usos de la variable:

- Incógnita

Desafío 8

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto ofrece información que te puede ayudar en la tarea de resolver ecuaciones. Identifica aquello que fortalece tus reflexiones realizadas con el estudio de los problemas y también los elementos nuevos que te ofrece el texto.

LENGUAJE ALGEBRAICO

Una ecuación es una igualdad entre expresiones matemáticas que contiene valores desconocidos, a estos valores desconocidos se les llama incógnitas.

$$2m+4=36 \qquad 5(3\text{-}y)=\text{-}2y \qquad 15=7w^2\text{-}15w$$

Donde m y w son incógnitas.

Resolver una ecuación significa determinar el valor de la incógnita que satisface la igualdad, es decir, que al sustituir el valor determinado en la ecuación y realizar las operaciones correspondientes, se obtiene el mismo valor en ambos lados de la igualdad. Para la ecuación $2m+4=36$, se puede verificar que m=16 cumple con la igualdad y que ningún otro número la satisface.

Para determinar el valor de la incógnita es necesario despejarla, es decir, dejarla sola en uno de los lados de la igualdad. Para despejar la incógnita es importante realizar operaciones que permitan eliminar los números que le "estorban" para quedarse sola. Las frases como "está sumando pasa restando" son para memorizar y realizar el proceso de manera mecánica, lo cual ayuda a realizar de manera rápida un despeje; sin embargo, las estrategias mecánicas suelen descuidar aspectos específicos de la estructura de la ecuación, lo que lleva al fracaso en su solución. Por ello es prioritario desarrollar y cuidar cada paso del proceso de despeje de la incógnita y verificar la solución de la ecuación y del problema. En el trabajo de despeje de la incógnita es necesario tener en cuenta y respetar las propiedades de la igualdad:

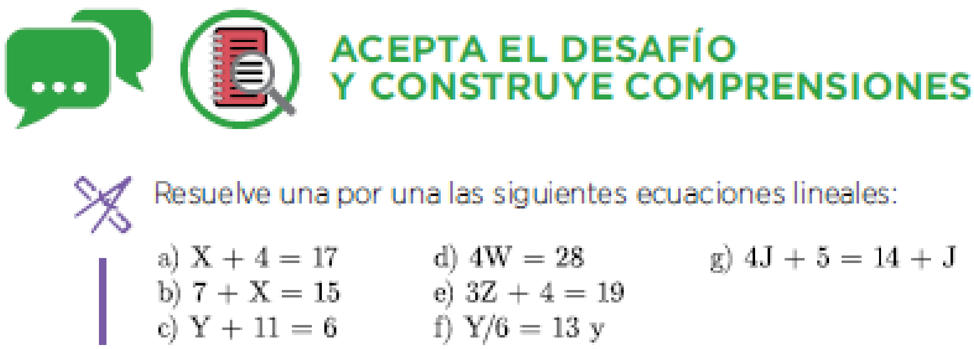
- Propiedad 1: Cuando se suma o resta un número a ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 2: Cuando se multiplica o divide por un mismo número, distinto de cero, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 3: Cuando se eleva a una potencia distinta de cero ambos miembros de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 4: Cuando se extrae la misma raíz, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

Figura 4.9 Desafío 8, CONAFE, 2016b, p.63-64

Aquí lo que se pretende es que el aprendiz tenga clara la idea de lo que es la incógnita, después de que ya trabajó con ella al momento de resolver algunos otros desafíos. Se explica detalladamente lo que es una ecuación y además se señala que en éstas la variable toma el papel de incógnita.

Además, se les proporciona una serie de propiedades que se deben de seguir para resolver adecuadamente una ecuación. En esta parte el aprendiz solamente debe comprender la información que se le proporciona y no es necesario que realice ningún procedimiento.

Desafío 9


ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Resuelve una por una las siguientes ecuaciones lineales:

a) $X + 4 = 17$
b) $7 + X = 15$
c) $Y + 11 = 6$
d) $4W = 28$
e) $3Z + 4 = 19$
f) $Y/6 = 13$ y
g) $4J + 5 = 14 + J$

Figura 4.10 Desafío 9, CONAFE, 2016b, p.65

En este desafío se promueve el uso de la variable como incógnita, ya que se pretende que los aprendices encuentren el valor de una variable al aplicar las propiedades propuestas por el desafío anterior.

Desafío 10

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto muestra una nueva forma de ver una ecuación.

WHAT MAKES AN EQUATION BEAUTIFUL[16]

By Kenneth Chang

The wonder of mathematics is that it captures precisely in a few symbols what can only be described clumsily with many words. Those symbols, strung together in meaningful order, make equations -- which in turn constitute the world's most concise and reliable body of knowledge.

[16] Kenneth Chang, "What Makes an Equation Beautiful," The best of Physics. (The New York Times, 24 Oct. 2004), http://www.nytimes.com/2004/10/24/weekinreview/what-makes-an-equation-beautiful.html

Readers of Physics World magazine recently were asked an interesting question: Which equations are the greatest?

A half-dozen of respondents, including Richard Harrison, chose one of the simplest possible equations.

Mr. Harrison wrote: "'$1 + 1 = 2$' is the fairy tale of mathematics, the first equation I taught my son, the first expression of the miraculous power of the mind to change the real world. I remember my son holding up the index finger, the 'one finger,' of each hand as he learned the expression, and the moment of wonder, perhaps his first of true philosophical wonder, when he saw that the two fingers, separated by his whole body, could be joined in a single concept in his mind."

Figura 4.11 Desafío 10, CONAFE, 2016b, p.65-66

En este desafío no se ve involucrada a la variable de ninguna manera, simplemente se trata de ir familiarizando al aprendiz con el idioma inglés, el personal del CONAFE afirma que estos desafíos no pretenden cumplir con ningún otro requisito, simplemente se agregan desafíos sencillos en inglés que estén un poco relacionados con el tema de interés.

Desafío 11

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

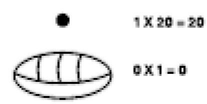
El cero fue una aportación de la comunidad maya a la humanidad, ¿quieres saber por qué? En el siguiente texto descubrirás una razón más para asegurar con admiración que ¡el cero tiene un valor mucho mayor al que representa!

EL CERO[17]

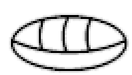
Las matemáticas mayas han dejado una huella en el tiempo; antes que cualquier otra civilización, los mayas originaron un concepto revolucionario: el cero.

[17] Silvia María Poveda Pilarte y José David Alemán Pérez. Matemática Maya. *Operaciones fundamentales en la aritmética maya*, (Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Recinto universitario "Rubén Darío," Facultad de Educación e Idiomas. Managua: 2006, Departamento de Matemática), 22-25, https://www.google.com.mx/search?q=Bra.+Silvia+María+Poveda+Pilarte%2C+Br.+José+David+Alemán+Pérez.+Matemática+Maya.+Operaciones+fu (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016)

El cero es un símbolo comúnmente utilizado para representar la nada; sin embargo, el concepto maya del cero no implica una ausencia ni una negación; para los mayas, el cero posee un sentido de plenitud. Por ejemplo, al escribir la cifra 20, el cero, puesto en el primer nivel, únicamente indica que la veintena está completa.



La posición del cero comprueba que a este número no le falta nada, lo cual es una acepción opuesta al concepto de ausencia o carencia. En este sentido, el 20 es una unidad completa del segundo nivel y del primer nivel. Al ocupar el primer nivel, y generar uno nuevo, da la idea del cierre de un ciclo y el principio de otro. Quizá esto se relacione con las hipótesis que se han generado en torno a la naturaleza y significado original del glifo que representa:



EL CERO

En primer lugar, puede observársele como un puño cerrado: los dedos (que son los numerales con que empezó a contar el hombre) retenidos dentro de un espacio cerrado; contenidos en el puño, integrados y completos. Por otra parte, se le ve como una concha, imagen vinculada con el concepto de la muerte.

Al unir ambas acepciones, se deduce la terminación de la vida, el cierre de un ciclo, la medida que se completa, la integración final. Al ver el glifo y entenderlo como un puño cerrado, este señala que nada sobra, que todo está contenido dentro de la mano, que el conjunto está completo; la concha anuncia que un ciclo de vida ha terminado y que solo queda ahí el remanente, la huella geológica que nos informa que existió y se completó.

Figura 4.12 Desafío 11, CONAFE, 2016b, p.66 - 67

En este desafío no se ve involucrada a la variable en ninguno de sus tres usos, solo invita al aprendiz a conocer un poco del origen del número cero y la gran importancia que éste tiene. A partir del análisis que se hizo de los desafíos presentados en la unidad de aprendizaje autónomo, se pudo llegar a varias conclusiones, la primera de ellas fue que la unidad promueve correctamente los tres usos de la variable que propone el Modelo 3UV. Vale la pena mencionar que algunos de los desafíos presentados son susceptibles de resolverse, ya sea con métodos aritméticos u otros, pero sin necesidad de hacer uso de álgebra. Además existe falta de secuenciación entre ellos y solamente existe un desafío que promueve el uso de la variable como número general y que es el que suele presentar mayores dificultades.

La intención que se tiene con esta unidad de aprendizaje es adecuada según el Modelo 3UV, pero faltan elmentos que se tendrían que modificar para una mayor efectividad de la misma, con relación al cumplimiento de los objetivos planteados.

4.3 Los usos de la variable involucrados en la resolución de los desafíos

A continuación se presentarán los desafíos con los que se trabajó en la tutoría, así como algunas especificaciones de cada uno de los tutorados. En esta ocasión se tutoraron a 3 personas.

Es importante mencionar que se trabajó con cada tutorado una cantidad de desafíos distinta, es decir, los tres aprendices comenzaron al mismo tiempo, pero se dejaba de trabajar con el primer desafío cuando el aprendiz lo resolvía correctamente y además era capaz de explicar lo que hizo para resolverlo.

A partir de lo que se trabajó, se propondrán algunas formas de abordar el desafío con base en el modelo 3UV; ya sea para facilitarle al aprendiz la resolución del mismo, con ayuda de un problema más sencillo o con el cual éste se sienta más familiarizado, o para brindarle herramientas que le hagan comprender mejor lo que se está solicitando; lo cual puede ser de manera dinámica con ayuda de un software, manualidades, etc.

Una parte importante en esta sección corresponderá a la descripción del proceso de solución aportado por cada uno de los LEC que fueron tutorados, dicha descripción se realizará mediante la guía del modelo 3UV.

Es importante aclarar que el proceso que se siguió para la tutoría es el mismo que se sigue normalmente con los estudiantes y los LEC con los que se trabaja en CONAFE. Los nombres con los que se identifica a los LEC son falsos, para proteger su identidad.

Desafío 1

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El desafío en ecuaciones es descubrir las relaciones entre los datos conocidos y los datos desconocidos del problema, para modelarlo y construir una estrategia que le dé solución. No olvides reflexionar respecto a los objetos y resultados matemáticos que están involucrados en el problema o que consideras te pueden ayudar. Resuelve el siguiente problema con la estrategia que prefieras.

En el cuadrilátero ABCD, el ángulo A mide 120°, el ángulo B mide 90° y el ángulo C es dos tercios del ángulo D. ¿Cuánto miden los ángulos C y D?

Figura 4.13 Desafío 1, CONAFE, 2016b, p.58

Caso 1

Nombre: María

Edad: 36 años

Grado de estudio: Egresada de Contabilidad

Coordinación y LEC Conafe

Dificultades: Sabía la definición de cuadrilátero, pero no recordaba la propiedad “La suma de todos sus ángulos interiores es 360°”.

Solución: Al no saber la propiedad de la suma de los ángulos, optó por la opción de realizar el dibujo del cuadrilátero. Pidió regla y transportador y llegó a la solución con este método. Hasta ese punto no tuvo mayores dificultades.

A pesar de que la aprendiz logró encontrar lo que el desafío le estaba pidiendo, no utilizó ningún procedimiento algebraico, recurrió solamente elementos geométricos y aritméticos. Por lo tanto, en su procedimiento no involucró ninguno de los tres usos de la variable.

Caso 2
Nombre: José
Edad: 24 años
Grado de estudio: Bachillerato
Líder educativo Comunitario: nivel primaria y secundaria

Dificultades: No sabía la definición de cuadrilátero, al pedirle que lo explicara dijo que un cuadrilátero era un cuadrado, con algunas de las preguntas que se le hicieron se dio cuenta de que no tenía muy clara la definición, así que se vio en la necesidad de investigarlo, además de tener una idea más clara de lo que es un cuadrilátero, se percató de que la suma de sus ángulos interiores es 360°.

Solución: Lo primero que hizo fue hacer un esquema, es decir, con regla y transportador trató de hacer el cuadrilátero planteado empezando con los dos ángulos que ya conocía y trató de encontrar los dos restantes, considerando la información que se le proporcionó en el desafío acerca de estos dos últimos.
Después de intentarlo por un tiempo, decidió que esa no era la mejor forma de hacerlo, ya que sus trazos no eran correctos y no sabía cómo cerrar la figura. Decidió hacerlo de otra forma y optó por hacer lo siguiente:

$$A + B + C + D = 360°$$
$$120° + 90° + C + D = 360°$$
$$C + D = 150°$$

$$\frac{2}{3}D + D = 150°$$

$$\frac{5}{3}D = 150°$$

$$D = (150°)\ \frac{3}{5} = 90°$$

$$C = \frac{2}{3}D = \frac{2(90)}{3} = 60°$$

Otra dificultad que se le presentó, fue la suma de fracciones en $\frac{2}{3}D + D = 150°$. Con ayuda de la reflexión y con algunos ejemplos que se le proporcionaron, logró comprender que D es lo mismo que $1D$ y que $\frac{3}{3}D$ y así fue como logró realizar la simplificación.

Este aprendiz logró incluir en su procedimiento los dos usos de la variable que el desafío pretendía promover, aunque al parecer no tenía ideas claras sobre lo que es la variable y el uso que le estaba dando. Sus aportaciones eran muy pobres, se trató de guiar al aprendiz con la siguiente conversación:

Tutor: ¿Cómo resolviste el desafío?, ¿Puedes explicarme tu procedimiento?
Aprendiz: "Es que quiero encontrar el valor de C y D y ya me están dando lo que mide A y B y como ya se que en total debe ser 360° y que $C = \frac{2}{3}D$ ya pude encontrar lo que me pedían"
Tutor: ¿y qué era lo que te pedían?
Aprendiz: El valor de C y el de D.
Tutor: Las letras C y D, ¿que representan?
Aprendiz: Pues la medida de dos de los ángulos del cuadrilátero.
Tutor: Y C ¿debe de medir 60° o puede medir distinto?, ¿qué pasa con D?
Aprendiz: Pues a lo mejor y si C mide por ejemplo 40° la D también tendría que cambiar…

Tutor: Entonces… ¿existirá otra posible solución al desafío, es decir, otros valores para C y D que resuelvan el desafío?
Aprendiz: … No sé.

Posiblemente era necesario hacer preguntas distintas que ayudaran mejor al aprendiz a comprender lo que estaba haciendo al resolver el desafío pues, aunque fue capaz de encontrar la solución de manera correcta y sin mayores complicaciones, no tenía la idea clara de lo que estaba haciendo y, por lo tanto, no tenía las herramientas necesarias para poder tutorar a alguien en la unidad.

Caso 3.
Nombre: Paulina
Edad: 34 años
Grado de estudio: Bachillerato
Instructor: nivel primaria y secundaria

Dificultades: No recordaba la propiedad de los ángulos interiores del cuadrilátero.

Solución: Pudo llegar a la solución por medio del dibujo del cuadrilátero, sabía que los ángulos faltantes eran C y D, tales que $C = \frac{2}{3}D$ y recordó que la suma de todos los ángulos debía ser igual a 360°. Con estos datos y el esquema realizado llegó a la solución.

Igual que la aprendiz del caso 1, esta aprendiz se ayudó con un esquema, pero a la vez hizo uso de ecuaciones. En su procedimiento se vio involucrada a la variable como una relación funcional y como incógnita. Mediante algunas preguntas hechas por el tutor, la aprendiz logró identificar que se estaba haciendo uso de una incógnita, pero no logró identificar que existía una variable que dependía de otra, aunque en su procedimiento si lo incluyó.

Sugerencias de formas en las que se podría abordar el problema

- Empezar con un problema más sencillo, por ejemplo, con un triángulo.
  Se puede comenzar con un problema más sencillo y con un polígono con el que ellos están más familiarizados. Esto hará que se den cuenta de que la suma de los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180° y partiendo de eso y con la guía del tutor, el tutorado llegará a la conclusión de que, en los cuadriláteros, la suma de todos los ángulos interiores es 360°, ya que esta era la propiedad que olvidaban o no conocían la mayoría de los tutorados. Además, eso quizá les ayudaría a generalizar o por lo menos a darse cuenta de cómo es la suma de los ángulos interiores de ciertas figuras (dividiendo cada figura en triángulos o llegando a la fórmula general).

Esto se puso en práctica al momento de tutorar a los aprendices, al hacérseles preguntas sobre las propiedades de los triángulos, la mayoría de ellos recordó que la suma de los ángulos interiores en todo triángulo es igual a 180°, aunque al principio no lograban encontrar relación alguna entre éste y los cuadriláteros, con ayuda de dibujos, preguntas hechas por el tutor y preguntas que los mismos aprendices se hacían, llegaban a la conclusión de que los cuadriláteros estaban formados por dos triángulos, por lo que sus ángulos interiores debían sumar el doble que los del triángulo.

- Al igual que en el caso anterior, se puede trabajar con triángulos, pero en este caso, el tutor puede pedir al tutorado que dibuje un cuadrilátero (si lo único que conoce es que es una figura de 4 lados) y con preguntas encaminar al tutorado a dividir dicho cuadrilátero en dos triángulos (trazando una diagonal). A partir de este esquema, puede llevarse al aprendiz a la conclusión de que los ángulos interiores del cuadrilátero suman 360° (al observar que se divide en dos triángulos y recordar que, en todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180°).

En estas dos primeras formas de abordar el problema se está buscando lo mismo, solo que de manera distinta. Es importante que el aprendiz llegue a la propiedad de ángulos interiores de polígonos por cuenta propia, ya que, si solo lo investiga, puede olvidarlo fácilmente. La segunda opción surgió a partir de las respuestas proporcionadas por los aprendices, puede ser de utilidad cuando el aprendiz no logra encontrar relación alguna entre el triángulo y el cuadrilátero.

- Ya que una de las cosas que los aprendices decidieron hacer en un inicio fue la de realizar un esquema, se les podría proporcionar la herramienta GeoGebra para que lo hagan más visual, fácil de comprender y entretenido. Esto se pudiera facilitar debido a que los LEC que fueron tutorados contaban con acceso a un celular o computadora con internet y podían consultarlo cuando lo consideraran necesario.

  Una opción sería el applet en el que el aprendiz pueda trazar una diagonal formando dos triángulos de la siguiente manera:

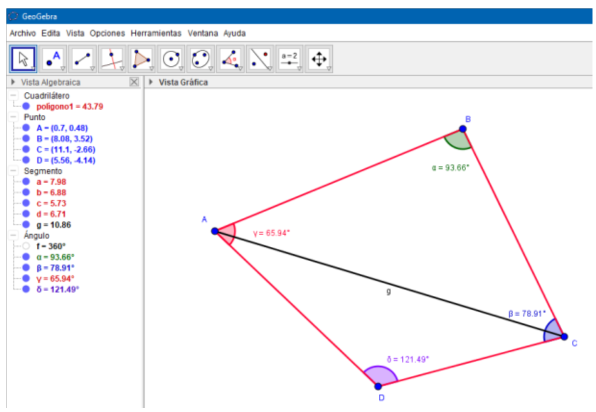


Figura 4.14 Applet propuesto como sugerencia para abordar el Desafío 1

Para que visualmente se den cuenta de lo visto anteriormente: “un cuadrilátero está formado por dos triángulos” y lleguen a la conclusión antes mencionada.

Otra sería un applet que haga lo siguiente: Muestre los ángulos de un cuadrilátero, sin sus medidas y después estos ángulos los mueva de tal manera que se forme una circunferencia, como se muestra a continuación:

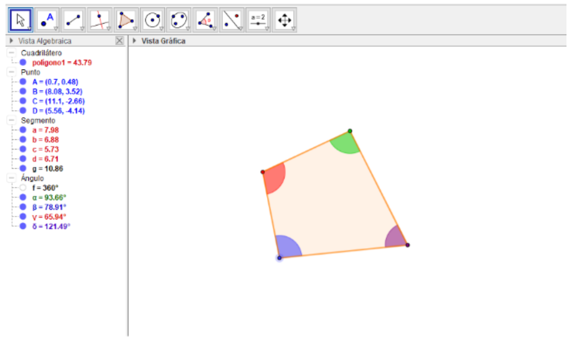


Figura 4.15 Applet propuesto como sugerencia para abordar el Desafío 1

El aprendiz puede observar en una primera pantalla un cuadrilátero, el cual tiene marcados sus cuatro ángulos con colores distintos. Se le puede proponer que modifique el cuadrilátero moviendo los puntos libremente.

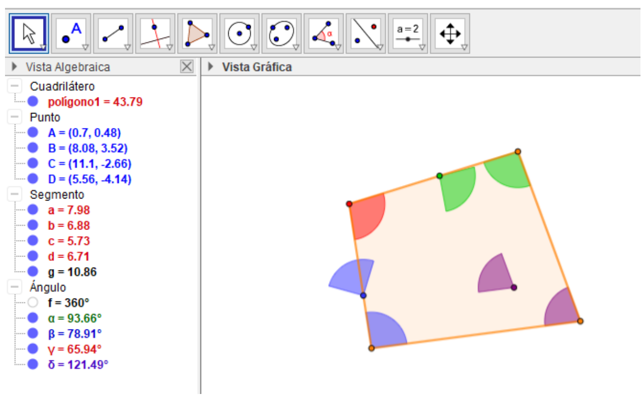


Figura 4.16 Applet propuesto como sugerencia para abordar el Desafío 1

En esta parte, se le da la indicación al aprendiz de mover los ángulos libremente, hasta que el mismo opte por colocarlos como se muestra en la siguiente figura:

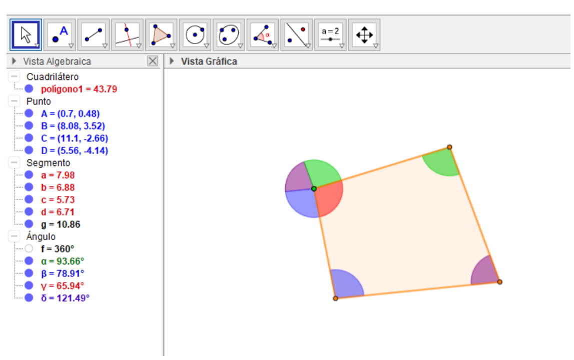


Figura 4.17 Applet propuesto como sugerencia para abordar el Desafío 1

Este applet, permitiría al aprendiz darse cuenta de que independiente de la forma del cuadrilátero, sus ángulos interiores siempre formarán una circunferencia y a partir de ello quizá puedan recordar que ángulo completo mide 360°, lo que los hará llegar a la misma conclusión que los puntos anteriores.

Desafío 2

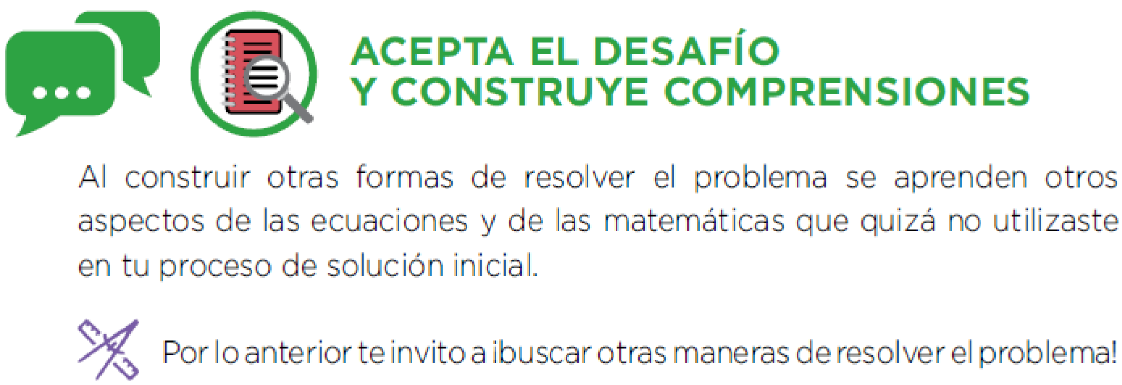


Figura 4.18 Desafío 2, CONAFE, 2016b, p.59

Caso 1

Dificultades: La aprendiz presentó muchas dificultades, ya que al encontrar una solución gráfica en el Desafío 1, se centró en encontrar otra solución de este tipo, pero no consideró lo que requería este nuevo desafío, pues pedía que con dicha solución se aprendieran otros aspectos de las ecuaciones y aunque en sus soluciones las ecuaciones que utilizó fueron las siguientes: y , ya que fueron los datos que afirmó conocer, cuando lo representó gráficamente en ambas soluciones (la del Desafío 1 y el Desafío 2), nunca se dio cuenta de que las estaba empleando.

Solución: La aprendiz no comprendía que era lo que este nuevo desafío le pedía, por lo que se le preguntó si sabía lo que es una ecuación, para lo que ella respondió que no exactamente, pues podía ver una ecuación y decir que lo era, pero no sabía para que se utilizan, cómo se resuelven o cómo se llama cada uno de sus elementos, es decir, variables, incógnitas, etc. A partir de eso, decidió que debía investigar sobre las ecuaciones para después poder dar solución al desafío.

Después de que realizó dicha investigación, la aprendiz logró aclarar ciertas inquietudes y entendió lo que el desafío le pedía. Finalmente, pudo escribir las expresiones que ya había utilizado, aunque no explícitamente, sino que lo hizo mentalmente. Al momento de querer ahora si dar solución, pudo explicar que tenía dos ecuaciones y dos incógnitas y que si sustituía una ecuación en la otra podía encontrar el valor de una incógnita y después, conociendo este valor, podría encontrar el valor de la otra.

Aunque podía explicar esto, al pedirle que lo realizara se le presentaron nuevas dificultades, pues tenía problemas con el despeje y la suma de fracciones. Por lo que nuevamente le fue necesario investigar. Después de un tiempo, la aprendiz logro darle solución al desafío.
Para esto dio solución a un sistema de ecuaciones, aunque se le trató de hacer reflexionar sobre lo que hizo, no logró darse cuenta por si sola del tipo de solución que ella empleó. Nuevamente investigó para poder entender que se trataba de un sistema de ecuaciones. Al preguntársele si podría encontrar una solución distinta por medio de ecuaciones, ella dijo que sería complicado pero que podría intentarlo.

Aunque fue capaz de dar solución gráfica rápidamente, en el tema de ecuaciones aún le falta mucho por estudiar, pues al realizársele algunas preguntas, las pudo responder, pero presentaba algunas dificultades para poder hacerlo. Por el tiempo que se dedicó a la solución del mismo, se considera que tuvo avances suficientes.

Con relación a los usos de la variable, la aprendiz solo logró identificar a la variable como incógnita, sin darse cuenta de que conjuntamente le estaba dando otro uso. Se dedicó un tiempo para tratar de hacer reflexionar a la aprendiz, pero debido a que presentaba muchas dificultades y a tener una actitud de desesperación se decidió continuar con otro desafío y volver a éste cuando se considerara adecuado. Una de las dificultades más grandes que se tuvo fue que no se podía intervenir para ayudar a los aprendices, eran ellos quienes por cuenta propia debían llegar a identificar lo que estaban haciendo.

Caso 2

Dificultades: La dificultad que presentó este aprendiz fue que, al haber dado solución en el Desafío 1 por medio de un sistema de ecuaciones, él debía buscar una solución distinta, la cual le ocasionó problemas.

Solución: A pesar de sus complicaciones, el aprendiz fue capaz de plantear un nuevo sistema de ecuaciones y de darle solución casi inmediatamente. Aunque el plantear un nuevo sistema de ecuaciones no fue problema para él, al preguntársele que método de solución empleó, no le fue tan sencillo, ya que no sabía que se trataba de un sistema de ecuaciones. Optó por investigar (preguntándole a un compañero), y así se dio cuenta de que estaba resolviendo un sistema de ecuaciones y de cómo se resolvían estos, además, investigando un poco más en internet y algunas unidades de aprendizaje, se dio cuenta de que existían distintos métodos que permitían llegar a la solución del sistema.

Al finalizar con el desafío y después de algunos cuestionamientos hechos de parte del tutor al tutorado, se llegó a la conclusión de que el aprendiz podía resolver otros desafíos del mismo tipo, pero que no era apto para tutorar a otros aprendices pues seguía sin tener claro lo que es la variable y sus distintos usos, al preguntársele si sabía lo que es la variable logró señalarla en su procedimiento, pero no pudo dar una explicación propia al respecto.

Caso 3

Dificultades: Al haber presentado una solución de tipo gráfica para el primer desafío, la aprendiz sabía que para este desafío debía dar otra solución, pero esta vez tenía que emplear ecuaciones en ella. Al preguntársele si sabía lo que es una ecuación ella dijo que no sabía la definición exacta pero que si veía una podía identificar que se estaba hablando de una.

Solución: Para poder dar solución al Desafío 2, lo primero que decidió hacer la aprendiz fue investigar que son las ecuaciones. Su investigación fue muy completa, tanto que llegó a la definición de sistema de ecuaciones. Después de esto, ella consideró que dominaba completamente la información que encontró. A partir del diálogo tutor-aprendiz, pudo corroborar lo que afirmaba.

A partir de ello, leyó nuevamente el desafío 1 y se le pidió que formulara las ecuaciones que considerara podían servirle para este nuevo desafío. Sin mucho problema, la aprendiz concluyó que tenía las siguientes ecuaciones:

(1) $120° + 90° + C + D = 360°$

(2) $C + D = 150°$

(3) $C = \frac{2}{3} D$

Optó por sustituir primero la ecuación (3) en (2) para encontrar el valor de D y después sustituir el valor de D en la ecuación (1), llegando así a la solución: $C = 60°$ y $D = 90°$. Al llegar a esta solución, se le cuestionó si habría otra manera de plantear sus dos ecuaciones a lo que concluyó que sí, y fue capaz de hacerlo. A partir de varias preguntas que se le hicieron, se concluyó que la aprendiz ya era competente y podía asesorar a alguien más en la solución de ambos desafíos. Entendió que un alumno podrá encontrar soluciones distintas, pero dijo ser capaz de comprobar si estaba bien resuelto o no. Nuevamente pudo identificar que existían dos valores desconocidos que debía encontrar, afirmando que se hablaba de dos incógnitas y que además una dependía de la otra.

Esto dejó ver que comprendía que se estaba haciendo uso de la variable como incógnita y como relación funcional, que era lo que se esperaba de este desafío.

Desafío 3

ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para ampliar tu conocimiento de las ecuaciones te invito a elegir otro problema. Resuélvelo y estúdialo a profundidad. Es importante que analices cómo se construye la sucesión y cuál es el término general.

En la sucesión de polígonos regulares, ¿cuántas diagonales tiene la figura 20?

Figura 4.19 Desafío 3, CONAFE, 2016b, p.60

Caso 1

Dificultades: No sabía la definición de polígono regular ni la definición de diagonal.

Solución: Para poder comenzar a resolver este desafío la aprendiz decidió investigar acerca de estos conceptos para así poder darse cuenta de lo que se requiere en él.
Después de esta investigación, ella pudo comprender lo que se pedía. Decía saber que se requería de una ecuación que le diera el número de diagonales de cada polígono, pero le parecía complicado llegar a ello pues no se le ocurría como comenzar. Para esto, se le hizo una serie de preguntas: ¿Cuántas diagonales tiene el triángulo?, ¿Cuántas el cuadrado?, ¿Qué información de los polígonos es la que tenemos?, ¿Esa información que tenemos nos puede ayudar en algo para la solución del desafío?, ¿Existe relación entre la información que ya conocemos y lo que queremos encontrar?, entre otras.

Con ayuda del diálogo y las respuestas que la aprendiz daba, ella misma pudo llegar a la conclusión de que tenía la información necesaria para lo que el desafío le pedía. Decidió comenzar dibujando las diagonales en cada polígono para ver si encontraba alguna relación entre estas y el número de lados de cada polígono.

La aprendiz hizo lo siguiente:

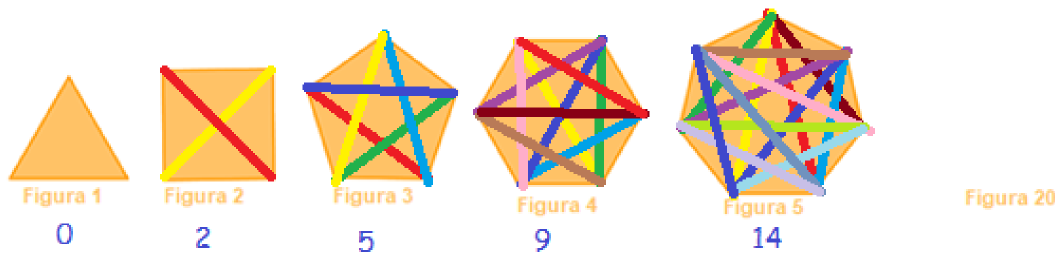


Figura 4.20 creación propia a partir de la figura que aparece en el desafío y lo que la aprendiz realizó

En cada polígono dibujó las diagonales con colores distintos, para después contarlas y debajo de cada figura puso el número de diagonales que esta tenía.

Luego hizo algo como lo siguiente:

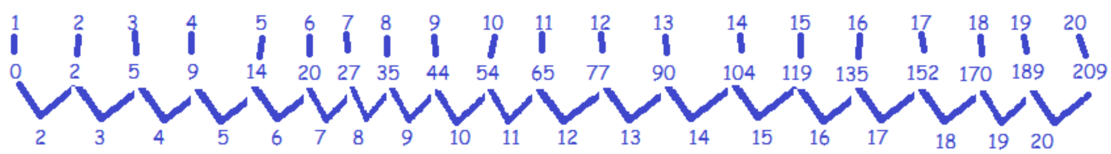


Figura 4.21 Creación propia a partir de lo elaborado por la aprendiz.

Donde explicó que los números de arriba era el número de la figura, el número de en medio era el número de diagonales de cada figura y los números de abajo indicaban en cuántas diagonales iba aumentando cada figura, es decir, entre la segunda y la primera figura hay una diferencia de dos diagonales, entre la tercera y segunda figura una diferencia de 3 diagonales, etc.

Con este método pudo llegar a la solución del desafío, que era *¿Cuántas diagonales tiene la figura 20?* Esta aprendiz dijo tener la solución y comprender el comportamiento, pero que no entendía a que se referían con "término general", además de que todavía no comprendía como podía emplear una ecuación para representar todo lo que ella hizo paso por paso. Para poder avanzar, decidió investigar lo que aún no tenía muy claro.

Al investigar al respecto, encontró la definición de término general y algunos ejemplos. Con ayuda de esto fue que entendió mejor que era lo que tenía que buscar. Dijo que entendía que los números dados en el ejemplo, podía tomarlos como los números que en el desafío representaban a las diagonales de los polígonos y así poder encontrar ese término general.

Después de intentarlo por un tiempo, buscó más información en internet y llegó a la fórmula que buscaba. Explicó que no sabía cómo llegar a ella, pues no le parecía tan sencillo como en los ejemplos que encontró, pero que, al dar con la fórmula, checó que se cumpliera en todos los casos hasta llegar a la figura 20 y al percatarse de eso entendió que era esa la fórmula que necesitaba.

A pesar de comprender el problema y poder encontrar lo que se le pedía en el desafío, la aprendiz no fue capaz de dar con la fórmula por cuenta propia, ya que la obtuvo de internet. Por lo anterior, se le pidió que explicara a que se debía cada uno de los términos de esa función. La función que encontró fue la siguiente:

$$a_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Pudo explicar que la n representaba el número de lados de las figuras, pero no pudo comprender el porqué del “-3” ni el porqué del “2”.

La mencionada aprendiz solo pudo llegar hasta esta parte de la unidad ya que se acabó el proceso de tutoría y ella seguía con este desafío. Al terminar el tiempo estipulado para tutorías, los aprendices debían realizar su Registro del Proceso de Aprendizaje (RPA) y preparar la demostración pública.

La aprendiz proporcionaba información suficiente para poder decir que tenía claro lo que el desafío pedía, además de que era capaz de identificar que era necesario encontrar una expresión general, la cual debía dar el número de diagonales de cualquier polígono que deseara. Aunque encontró esa expresión, no fue suficiente pues no comprendió el por qué dicha expresión era así ni tampoco pudo llegar a ella pos si sola.

Caso 2

Dificultades: El aprendiz presentó muchas dificultades, ya que no entendía que era lo que se pedía en el desafío, no sabía la definición de "polígono regular", ni la definición de "diagonal", además de no comprender a que se referían con "término general".

Solución: Para poder comenzar con este desafío, el aprendiz decidió investigar todos los conceptos que no tenía claros. Después de tener claro los conceptos dijo: "Ya comprendí una parte de lo que me pide el desafío, sé que debo encontrar el número de diagonales que tiene la figura 20, pero no comprendo cómo puedo hacerlo si en el desafío solo me muestran las figuras 1, 2, 3,4 y 5. Puedo saber cuántas diagonales tienen cada una de esas figuras porque las puedo trazar y contar, pero no sé cómo puedo hacerlo para la figura 20 ya que no sé cuál es esa figura".

A partir de ese comentario que el aprendiz hizo, dejó en claro que aún no comprendía completamente la intención del desafío, es decir, el aprendiz era capaz de responder lo que podía ver, pero no lo que no la información que el desafío no le estaba proporcionando. El problema principal que se le presentaba era que no lograba realizar el salto necesario hacia el uso de la variable como número general. Para ayudarle a comprenderlo, se tuvo un diálogo como el siguiente:

Tutor:= T, Aprendiz:= A.

T: ¿Qué información te da el desafío?
A: Solo nos da las 5 figuras de la imagen.
T: ¿Puedes obtener alguna información de esas 5 figuras?
A: Puedo sacar el número de lados, de vértices y de ángulos.
T: ¿Existe alguna relación entre esos números que puedes obtener?
A: El número de lados, ángulos y vértices que tiene cada figura son iguales.
T: ¿Puedes obtener más información a partir de eso que ya conoces?
A: Puedo trazar las diagonales y ver cuantas tiene cada figura.
T: ¿Crees que exista relación entre la información que tenías y la que puedes encontrar?
A: Supongo que sí, pero tendría que hacerlo primero para saber cuál es.

A partir de eso, el aprendiz decidió dibujar las diagonales a cada polígono e hizo lo siguiente:

# Figura	# Diagonales
1	0
2	2
3	5
4	9
5	14

Dijo que era toda la información que podía obtener de las figuras, y que no encontraba ninguna relación entre el número de la figura y el número de diagonales, además de que seguía sin comprender como encontrar el número de diagonales que tiene la figura 20 ya que no tenía idea de cómo podía ser dicha figura. A partir de esto, con ayuda del diálogo se orientó al aprendiz para que comprendiera que le faltaba la parte más importante del desafío, que era la generalización. Para esto optó por investigar, lo cual rápidamente lo llevó a la fórmula que buscaba.

Con base en el diálogo, el aprendiz dijo entender qué es la generalización y así comprendió de qué figura se hablaba (figura de 22 lados). Fue capaz de explicar cómo fue que entendió que se trataba de esa figura, aceptando que encontró la formula en su búsqueda en internet, y no por su propio razonamiento. Se le preguntó si podía expresar la fórmula de otra forma y esto fue lo que hizo.

Fórmula encontrada:

$$a_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

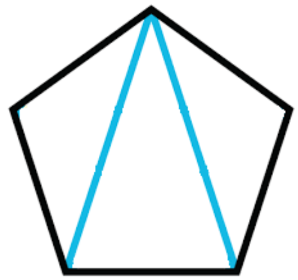
Otra expresión:

$$a_n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$$

Fácilmente pudo llegar a otras expresiones a partir de la que encontró, pero no era suficiente que comprendiera eso, pues debía entender el porqué de cada término de la expresión.

Al pedirle que explicara lo que significaba cada término dijo lo siguiente:

La n representa el número de lados de los polígonos, el 2 es porque en cada vértice hay dos vértices consecutivos, en los cuales no se forma una diagonal, y el -3 es porque las diagonales de cada vértice dividen al polígono en triángulos de la siguiente manera:



Aunque tenía la idea, no estaba correcta, pero no fue difícil hacerle ver la verdadera razón de cada término. Con ayuda del diálogo, el aprendiz logró llegar a la siguiente conclusión:

De cada vértice sale una diagonal a los demás vértices, excepto a sí mismo y a los dos entre los que se encuentra, entonces se une a todos los vértices excepto esos tres, por eso el -3. Como una diagonal la trazamos entre dos vértices dos veces, la que sale de un vértice y la que sale del otro, el resultado se tiene que dividir por 2.

Con mucha ayuda e investigaciones propias, el aprendiz logró obtener una solución muy completa, aunque al igual que las otras dos aprendices el también encontró la expresión en Internet, el sí fue capaz de explicar el por qué la forma de dicha expresión era así. Se pudo llegar a la conclusión de que el aprendiz logró comprender el significado de "término general" y "número general", aunque en un principio no parecía tener idea de lo que esto significaba.

Caso 3

Dificultades: No sabía a qué se refería el término general ni la definición de polígono regular.

Solución: A partir del diálogo, la aprendiz decidió comenzar investigando en diversas fuentes acerca de estos conceptos que no tenía claros. Después, dijo entender el desafío y lo explicó con sus palabras de manera correcta, pero dijo que se le complicaba el encontrar la fórmula pues no tenía idea de cómo comenzar. Explicó con un ejemplo la generalización de una sucesión y explicó cómo funcionaba, es decir, demostró que lo tenía claro, pero no entendía cómo encontrar esa fórmula que generalizara lo que el desafío pedía.

Explicó también que comprendía la relación que existía entre un polígono y otro y el número de diagonales de éstos, pudiendo encontrar un patrón. Al parecer, el problema que se le presentaba al aprendiz era llegar a la fórmula. Con el propósito de facilitarle el proceso, se le propuso comenzar con un problema similar, pero más sencillo.

Como la aprendiz entendía que se estaba trabajando con una sucesión, se le propuso pensar en una más común, por ejemplo:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6,7,\ldots$$

Y se le pidió que encontrara un patrón, ella dijo que a cada número se le iba sumando 1. Se le pidió que lo representara con una expresión algebraica y eligió la siguiente:

$$a_n = n$$

A partir de lo anterior, la aprendiz fue capaz de explicar que simbolizaba cada término y después de eso decidió empezar a buscar una ecuación que expresara lo que le pedía el desafío.

Para ello la aprendiz realizó la siguiente:

# Fig	# Diag
1	0
2	2
3	5
4	9
5	14

Decidió que su n en este caso sería el número de la figura.

Comenzó así: (las preguntas presentadas se hicieron para guiar a la aprendiz)

A: $a_1 = 0,$ *Si tomo* $a_1 = n = 1 \neq 0$ *el resultado no es el esperado,*

T: ¿Qué le falta a la ecuación para que el resultado sea 0?

A: Entonces puedo tomar $a_n = n - 1$ *, pero tiene que funcionar para los demás.*

T: ¿Qué pasa con $n = 2$*? ¿Funciona?*

A: escribió lo siguiente: $a_2 = 2 - 1 = 1 \neq 2$ *"Por lo tanto, la fórmula no funciona para* $n = 2$*".*

T: ¿Qué le podemos agregar o quitar a la fórmula para que siga funcionando para $n = 1$ *, pero que también funcione para* $n = 2$*?*

A: Como el resultado para $n = 1$ *es cero, lo podemos multiplicar por 2 y sigue funcionando y además también funciona para* $n = 1$*. Por lo que la ecuación queda de la siguiente manera:* $a_n = 2(n - 1)$

T: Muy bien, ya tienes una ecuación que funciona cuando $n = 1$ *y cuando* $n = 2$*, ¿Funciona también para* $n = 3$*?*

A: Si $n = 3$*, entonces* $a_3 = 2(3 - 1) = 4$*, no resulta, ya que queremos que nos de 5. Pero si le agregamos un +1 a la ecuación deja de funcionar para los casos anteriores.*

T: ¿Qué otra cosa se puede hacer? ¿Podemos cambiarle algo a la ecuación y que siga funcionando?...

Después de varios intentos, la aprendiz llegó a la siguiente ecuación:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Se le pidió que lo expresara de otra forma y lo expresó de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{n^2 + n - 2}{2}$$

La aprendiz logró terminar este desafío, pero por el tiempo de las tutorías ya no pudo avanzar más. Con ayuda de algunas preguntas, se llegó a la conclusión de que la aprendiz ya era capaz de asesorar a alguien más en la solución de los desafíos trabajados.

La aprendiz logró entender el significado de “término general” gracias a este desafío y afirmó que, aunque se le podían presentar dificultades al momento de tratar de resolver desafíos en done la variable sea vista como número general, ya tenía algunas bases que pudieran ayudar bastante al momento de enfrentarse a situaciones de ese tipo.

Sugerencias de formas en las que se podría abordar el problema

- Lo principal será percatarnos de que el aprendiz comprenda lo que se pide en el problema, así como cada uno de los conceptos involucrados. Por ejemplo, iniciar con un problema más sencillo, es decir, que el aprendiz trate de encontrar el término general de una sucesión más sencilla.
- Hacerle ver el comportamiento de las diagonales, es decir, que se den cuenta de que cada diagonal se cuenta dos veces, que cada diagonal se une con todos los puntos excepto con el mismo donde se inicia y los dos consecutivos, para que se den una idea de la forma que tendrá la fórmula.

Estos dos puntos se pusieron en práctica durante la tutoría, ayudaron a los aprendices a comprender mejor el desafío, aunque dos de ellos tenían claro lo que se pretendía, mas no tenían claro cómo hacerlo. Es necesario proponer otras alternativas para que los aprendices comprendan mejor el tema de la generalización, ya que se buscaron varias opciones y no tuvieron buenos resultados.

Al no ser capaces de llegar por si solos a la ecuación que se pedía en el desafío, los aprendices encontraron la expresión en internet, lo cual obviamente no fue lo mejor. Por falta de ideas y al ser la primera vez que se enfrentaba al proceso de tutorías, se presentaron muchas dificultades y se considera este desafío como uno de los que causó mayor problemática a los aprendices y al tutor, es por eso que es en este desafío en donde hay que buscar más estrategias para que puedan resolverlo sin tanto problema, ya que, si los tutores se enfrentaron a estas dificultades, los aprendices con los que ellos se encuentren no recibirán la guía necesaria en ellos.

Desafío 4

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío, te recomiendo poner principal atención en las cantidades y en cómo se relacionan. Además, es una oportunidad para construir lenguaje algebraico a partir de procesos concretos, te invito a que descubras cómo.

Una granjera llevó huevos al mercado. Pensaba venderlos a 10 centavos cada uno. Como en el camino se le rompieron 6 huevos, decidió vender los que le quedaban en 15 centavos cada uno. Cuando regresó a su casa, se dio cuenta que había ganado 1 pesos más de lo pensaba ganar.

¿Cuántos huevos llevaba al inicio?

Figura 4.22 Desafío 4, CONAFE, 2016b, p.61

Caso 2

Dificultades: El aprendiz pudo resolver el desafío fácilmente, pero lo hizo con el método de prueba y error. Al preguntarle si podía expresarlo mediante una ecuación dijo que no sabía cómo.

Solución: Con ayuda del diálogo, el aprendiz comprendió poco a poco cómo podía expresar lo que encontró por medio de una expresión, además de que se percató de la importancia de dicha ecuación, pues en ese caso se le facilitó hacerlo a prueba y error, pero comprendió que podría encontrarse casos que no fuesen tan sencillos de resolver de esa forma.
No presentó mayor problema para encontrar esta ecuación.
La solución dada por el aprendiz fue la siguiente (explicó que h representaba al número de huevos que llevaba al inicio y y los huevos que le quedaron):

$y = h - 6$

$0.15\ y = 0.10h + 1$

$0.15\ (h - 6) = 0.10\ h + 1$

$0.15\ h - (0.15)(6) = 0.10\ h + 1$

$0.15\ h - 0.9 = 0.10\ h + 1$

$0.15\ h - 0.10\ h = 1 + 0.9$

$0.05\ h = 1.9$

$h = \frac{1.9}{0.05}$

$h = 38$

El procedimiento de solución proporcionado por el aprendiz, mostró un avance con relación a los usos de la variable involucradas en el desafío. Aunque posiblemente no tenía claro que la variable puede tener varios usos, se le hicieron preguntas que fue capaz de responder correctamente, lo que indicó que comprendía que su solución era representada por un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, en donde una incógnita dependía de la otra. Además de encontrar la solución al desafío el aprendiz decidió comprobar su resultado sustituyendo valores en la ecuación a la que llegó.

Desafío 5

ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el desafío de la vida de Diofanto, te invito a buscar diferentes formas de resolverlo. Te recomiendo recuperar poco a poco la información que te ofrece el enunciado y cómo se relaciona con lo que te pide.

"Larga fue la vida de Diofanto, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia; su mentón cubrióse de vello después de otro doceavo de su vida; la séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril; pasó un quinquenio más y le nació un hijo, cuya vida sólo duró la mitad de la de su padre, que sólo sobrevivió cuatro años a la de su amado hijo". ¿A qué edad murió Diofanto?

Figura 4.23 Desafío 5, CONAFE, 2016b, p.61

Caso 2

Dificultades: Al igual que en el desafío anterior, el aprendiz encontró la solución numéricamente con el mismo método y dejó de lado lo importante de la unidad, que es el uso de ecuaciones.

Solución: Con ayuda del desafío anterior, rápidamente llegó a la expresión que le daba el resultado esperado.

Desafío 6

ACEPTA EL DESAFÍO
Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Seguro hay varias formas de resolver el siguiente desafío, pero te invito a que una de tus estrategias de solución sea la algebraica. Te recomiendo poner especial atención en las incógnitas y en cómo se relacionan con los datos que el enunciado te ofrece.

Un pequeño restaurante tiene un total de 8 mesas. Cuenta con mesas para dos personas y con mesas para cuatro personas. Si el restaurante tiene capacidad para un total de 24 personas sentadas, ¿Cuántas mesas para dos personas hay en el restaurante y cuántas para cuatro personas?

Figura 4.24 Desafío 6, CONAFE, 2016b, p.62

Caso 2

Dificultades: Expresar los resultados algebraicamente**.**

Solución: Al igual que en los desafíos anteriores, lo primero que hizo el aprendiz fue resolver el desafío a prueba y error. Rápidamente llegó a la solución, pero al momento de querer expresarlo algebraicamente hizo lo siguiente:

$x \coloneqq \#\ de\ mesas$
$4x \coloneqq mesas\ para\ 4\ personas$
$2x \coloneqq mesas\ para\ 2\ personas$
$4x + 2x = 24$
$6x = 24$
$x = 4$

Conclusión: hay 4 mesas para 2 personas y 4 mesas para 4 personas.

Aunque el aprendiz encontró una ecuación que llegaba a la solución correcta, se le hizo ver que su ecuación solo tenía una incógnita mientras que en el desafío había dos incógnitas (x= número de mesas para 4 personas; y=número de mesas para 2 personas). Con ayuda de preguntas, se guio al aprendiz a que llegara a las siguientes ecuaciones:

$$4x + 2y = 24$$
$$x + y = 8$$

Y al resolverlas se dio cuenta que sí llegaba a los resultados esperados y comprendió el porqué de las dos incógnitas, pues él creía que al ser mesas (para 2 y 4 personas) seguía siendo una sola incógnita. Hasta este punto pudo llegar este aprendiz, ya que no le alcanzó el tiempo para continuar con más desafíos.

<u>Sugerencias de formas en las que se podría abordar el problema</u>

- Lo principal que hay que hacer en este desafío es hacerlos comprender que se habla de dos incógnitas y no de sólo una.
- Guiarlos a la solución de cualquier tipo, ya sea numérica, algebraica, etc. Para que comprenda primero el problema, si la solución a la que llega no es algebraica, guiarlo para que encuentre este tipo de solución.
- Presentarle problemas más sencillos donde se hable de dos incógnitas para que el aprendiz comprenda que no puede sumar mesas para dos personas con mesas para cuatro personas.

Estos puntos se abordaron con el único aprendiz que llegó hasta este desafío. No presentó gran dificultad ya que dijo haberse enfrentado a desafíos más complicados anteriormente que le ayudaron a poder resolver éste.

El análisis que se hizo sobre los usos de la variable involucrados en cada uno de los desafíos, así como cada uno de los procesos de solución a la que llegaron los aprendices, permitió identificar los mayores conflictos que se les presentaban. Principalmente, el que ocasionó mayores problemas fue el Desafío 3, en el que se involucra a la variable como término general. Ninguno de los aprendices logró llegar a la expresión algebraica que se requería, todos ellos la encontraron en internet y solo dos pudieron explicar lo que representaba cada uno de los términos de ésta.

Además de que este desafío fue el que más problemas ocasionó a los aprendices, la unidad no contiene ningún otro en el que se haga uso de la variable como término general, es por ello que se cree necesario agregar más de este tipo.

4.4 Los niveles de aprendizaje y los 3UV

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Usas diferentes formas de expresión para representar y comunicar información de lo que sucede a tu alrededor.	Resuelves problemas de suma de dígitos, comunicas de manera oral y escrita.	Resuelves problemas que implican realizar sumas cuyo resultado es menor a 100 y el valor faltante es la suma o alguno de los sumandos.	Resuelves problemas usando habilidades básicas de interpretación y razonamiento, que involucran a la suma y la resta, modificando el lugar de la incógnita.	Resuelves problemas que implican trabajar con representaciones múltiples y comunicas tus interpretaciones y explicaciones.	Resuelves problemas multiplicativos usando números naturales que incluyen interpretar y razonar en contextos familiares.	Resuelves problemas que implican multiplicar o dividir, modificando el lugar de la incógnita. Comunicas tu estrategia y argumentaciones.	Resuelves problemas que implican crear y analizar diversas representaciones de la información. Comunicas tus explicaciones y argumentaciones.	Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: ax+b=c, donde a, b y c son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.	Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: ax+b=cx+d, donde a, b, c y d son números racionales. Reflexionas y comunicas razonamientos y argumentos.	Resuelves problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones y el uso de ecuaciones de segundo grado. Utilizas conocimientos y convenciones para resolver diversas situaciones del mundo real.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

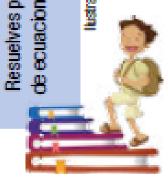


Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

Ilustración 4.25 Revisa tu avance. CONAFE 2016 p. 68

Si se revisa la tabla que contiene los niveles de aprendizaje esperados de la unidad, se puede observar que al igual que en la presentación, el uso de la variable como término general no viene incluido, esto hace pensar que a este uso de la variable no se le da tanta importancia como a la incógnita y a la relación funcional en esta unidad de aprendizaje.

4.5 Conclusiones a partir del análisis

Como conclusiones a partir de la elaboración de este capítulo se puede agregar que, el Modelo 3UV propone una serie de preguntas que puede realizar en este caso el tutor a sus aprendices como guía, no solo para la resolución de cada uno de los desafíos, sino que además de contribuir en ese proceso, los encamine a comprender cada uno de los distintos usos que puede tener la variable y que además los domine.

Debido a la poca experiencia que comúnmente tienen los LEC, al ser en su mayoría egresados se bachillerato y al no dominar los tres usos de la variable, la guía que ellos ofrecen a sus aprendices en la mayoría de los casos no es la más adecuada. Aunado a esto, la falta de secuenciación entre los desafíos, no permite que los aprendices logren comprender de manera adecuado los distintos usos de la variable ya que no se logra identificar el paso de uno de los usos a otro. Esto significa que hace falta agregar actividades de integración, como el Modelo 3UV lo propone, para permitir que los aprendices logren identificar las diferencias que existen entre estos distintos usos.

Por otro lado, algunas de las cosas favorables que se lograron encontrar fueron las actitudes por parte de los LEC que fueron tutorados, ya que al estar tan adaptados a la forma de trabajo del Modelo del ABCD con el que trabaja el CONAFE, tenían siempre una actitud positiva. Aun cuando les costaba trabajo resolver los desafíos siempre buscaban por cuenta propia la manera de hacerlo sin necesidad de que se les dijera qué hacer.

Esto hace ver que la forma de trabajo del CONAFE funciona, pero hace falta una mejor capacitación para los Líderes Educativos que van a participar como tutores en las comunidades, para que el proceso funcione con mayor efectividad.

Como contribución propia, en este trabajo y a partir de la valoración que se hizo de cada uno de los desafíos de dicha unidad de aprendizaje y los usos de la variable que se vieron involucrados en ella, se consideró necesario proponer distintos desafíos en los que se haga uso de la variable como término general. Además de proporcionar también, algunas sugerencias para el tutor que tenga a su cargo la unidad, sobre cómo intervenir para guiar a los estudiantes de manera adecuada, a la resolución de cada uno de los desafíos. Estas sugerencias se hicieron con base en el modelo 3UV propuesto por Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. Esto es justamente lo que se expondrá en el Capítulo 5.

Capítulo 5

La propuesta

En este capítulo se presenta una propuesta de algunos desafíos que pudieran agregarse al momento de tutorar la unidad de aprendizaje: “El lenguaje del álgebra”, esto se hizo con base en el Modelo 3UV. El propósito es proporcionar herramientas tanto para los tutores como para los aprendices, que les faciliten a ambos la comprensión del uso de la variable como número general, tomando en consideración que es uno de los usos de la variable que está ligado al desarrollo del pensamiento algebraico. Recuérdese que en la unidad de aprendizaje abordada, solamente aparece un desafío de este tipo y que además ninguno de los LEC que fueron tutorados logró resolverlo por cuenta propia, lo que de alguna manera da indicios de la necesidad de su promoción.

Es necesario que los tutores y aprendices logren comprender que, en algunos casos, existe la necesidad de hacer uso de la variable como número general, siendo esta la manera más adecuada de resolver dichas situaciones problemas.

Además de los desafíos propuestos como alternativa para involucrarse con el uso de la variable como número general, se proponen otros como “actividades integradoras”, siguiendo la idea del Modelo 3UV. Estas actividades son aquellas que involucran los tres usos de la variable y en las cuales se espera que tanto aprendices como tutores, logren pasar de un uso de la variable a otro (Ursini, S., 2016).

En cada uno de los desafíos, se agregan algunas sugerencias de cómo involucrar a los aprendices en su resolución, para lo cual se agregarán algunas preguntas que los LEC podrían hacerles, para tratar de guiarlos durante ese proceso, pero sobre todo a darse cuenta de que uso de la variable se está involucrando.

5.1Diseño de desafíos. La variable como número general

A continuación se presentarán los desafíos propuestos en este trabajo, los cuales promoverán el uso de la variable como número general, así como lo que necesitará el aprendiz para poder resolverlo correctamente y algunas posibles preguntas que podría hacerle el tutor para guiarlo en su proceso de resolución y aprendizaje.

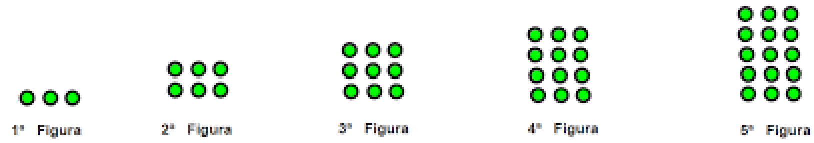
Es necesario recordar que para poder trabajar exitosamente con este tipo de problemas (desafíos), en los cuales se involucra el uso de la variable como número general, es necesario:

> G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
> G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
> G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
> G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
> G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales (Ursini, S., Op. Cit. p. 36-37).

Las preguntas que se propondrán para que los LEC realicen a sus aprendices estarán encaminadas al cumplimiento de cada uno de los aspectos mencionados anteriormente, mismos que se proponen en el Modelo 3UV.

Desafío 1

Observe las siguientes figuras



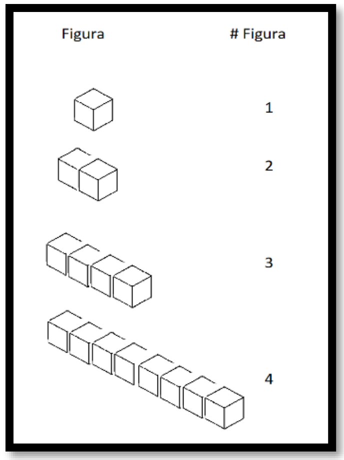
- ¿Cuántos puntos hay en la figura 15?
- ¿Cuántos puntos hay en la figura 50?
- Imagine que puede seguir dibujando figuras hasta la figura n, ¿Cuántos puntos tendría esa figura?

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué información nos proporciona cada una de las figuras?
- ¿Existen similitudes entre la figura 1 y la figura 2?, ¿y entre la figura 2 y la figura 3?, ¿ambas relaciones tienen algo en común una con otra?
- ¿Qué nos dice esa relación?, ¿Podemos encontrar la figura 6?, ¿y la 7?, ¿hasta que figura podemos encontrar?
- ¿Qué representa la n en el desafío?, ¿es un número específico o puede variar?, ¿se está pidiendo una figura en específico?

Desafío 2

Observe la siguiente secuencia figurativa:



- Dibuje las figuras 5,6 y 7.
- ¿Cuántos cubos habrá en la Figura 20?
- ¿Cuántos cubos tendrá la Figura 50?
- A partir de la secuencia anterior, encuentre la expresión general que la representa.

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué se tiene que hacer para obtener la Figura 2 a partir de la Figura 1?, ¿hay que agregar o quitar cubos?
- ¿Puedes encontrar el número de cubos que habrá en la Figura 5? ¿Y en la Figura 6?
- ¿Hasta qué Figura podrías encontrar el número de cubos que contiene?
- ¿La figura m cuántos cubos tendría?

Desafío 3

Dada la siguiente secuencia de números:

2, 8, 18, 32,50…

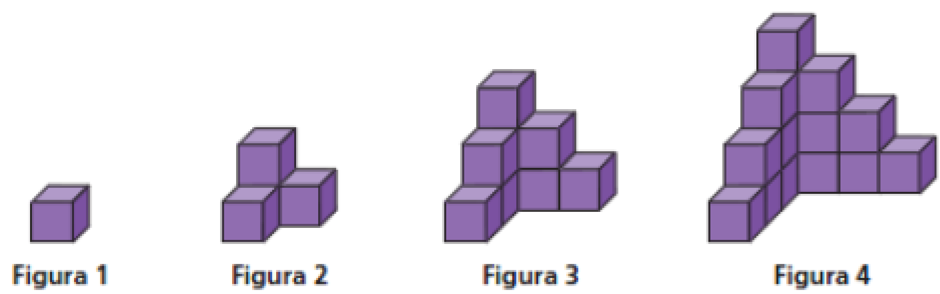
- ¿Qué número se encuentra en la posición 1?,¿cuál en la posición 3?
- ¿Qué número se encuentra en la posición 30?
- ¿Qué número se encuentra en la posición 60?
- ¿Qué número se encuentra en la posición n?

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué puedes decir acerca de esta secuencia? (G1)
- ¿Cómo se obtiene el segundo número de la secuencia a partir del primero? ¿y el tercero a partir del segundo? (G1)
- La operación que se debe hacer para pasar de un número al que le sigue, ¿es siempre la misma o cambia? (G1)
- ¿Podrías escribir con tus palabras qué es lo que se hace para pasar de un número al siguiente? (G3)

Desafío 4

Observe la siguiente sucesión de figuras:



- ¿Cómo son las tres figuras que siguen en la secuencia?
- ¿Cuántos cubos se necesitan para formar la figura 8?
- ¿Cuántos cubos se necesitan para formar la figura 15?
- ¿De qué manera va creciendo el patrón de esta secuencia de figuras?
- ¿Qué expresión representa la cantidad de cubos que tendrá la Figura n?

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Cuántos cubos tiene cada una de las figuras que se muestran en la secuencia?
- ¿Qué figura sigue en la secuencia?
- ¿Puedes decir como es la figura 8? ¿y la 15?

En este tipo de desafíos conviene pedir a los aprendices que registren los datos en una tabla en la que aparezca, por ejemplo, el número de la figura y en otra columna el número de cubos, con la finalidad de que los aprendices puedan observar con mayor claridad el patrón que siguen las figuras.

Desafío 5

Dada la siguiente secuencia de figuras:

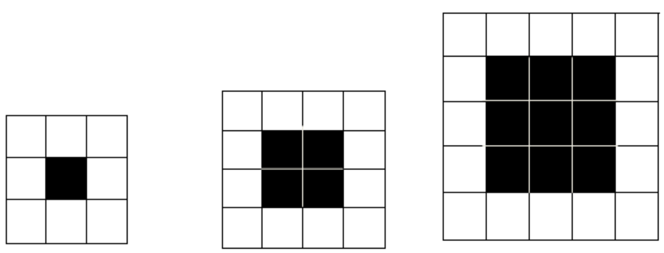


Figura 1 Figura 2 Figura 3

- **¿Cuántos cuadros de color blanco tendrá la figura n?**

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

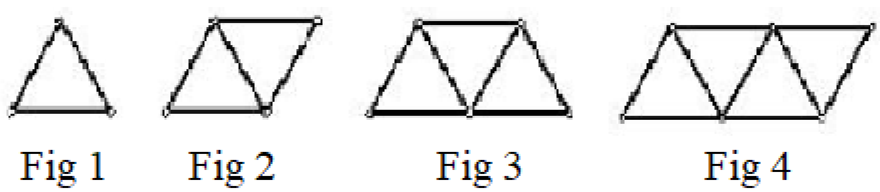
- ¿Cómo será la Figura 4?, ¿y la 5?
- ¿Hay algo en que permanece constante entre las figuras?, ¿hay algo que está cambiando?

- ¿Qué cambió de la Figura 4 a la Figura 5?, ¿ese cambio es el mismo entre la Figura 5 y la Figura 6?
- ¿Cómo expresarías ese cambio algebraicamente?
- ¿Existe una expresión con la que puedas expresar el número de cuadros blancos que tendrá cierta figura, según el número de la misma?

Este desafío también se pudiera agregar, haciendo las mismas preguntas, pero en el caso para los cuadros de color negro.

Desafío 6

Observe la siguiente secuencia de figuras formada por palillos:



- **¿Cuántos palillos tendrá la figura 40?**

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Cómo será la Figura 5?, ¿y la 10?
- ¿Hay algo que permanece constante entre las figuras?, ¿hay algo que está cambiando?
- ¿Qué cambió de la Figura 1 a la Figura 2?, ¿ese cambio es el mismo entre la Figura 5 y la Figura 6?
- ¿Cómo expresarías ese cambio algebraicamente?
- ¿Existe una expresión algebraica con la que puedas encontrar el número de palillos que tendría la figura 40? Esa misma expresión, ¿servirá para encontrar el número de palillos de cualquier otra figura?

Desafío 7

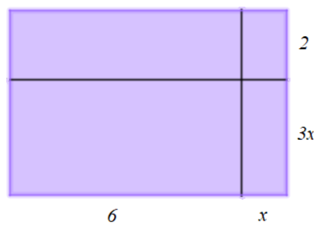
- **¿Qué expresión algebraica representa el número de puntos que tendrá cada figura?, ¿qué representa cada término de dicha expresión?**

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué es lo que cambia de la Figura 1 a la Figura 2?
- ¿Qué operación hay que realizar para pasar, del número de puntos de la Figura 1 al número de puntos de la Figura 2?
- ¿Qué operación hay que realizar para pasar, del número de puntos de la Figura 3 al número de puntos de la Figura 4?, ¿es la misma operación que en el caso anterior?
- ¿Existe una forma de representar el número de puntos que tiene la Figura 5?, ¿Cuál es?
- Esa representación, ¿también sirve para encontrar el número de puntos de cualquier otra figura?, si no es así, ¿en qué falla?
- ¿Puedes entonces encontrar una expresión que indique el número de puntos que tendrá cualquier figura?, ¿cuál es?
- ¿Qué representa cada término en esa expresión?

Desafío 8

¿Qué expresión representa el área de la siguiente figura?



Para que el aprendiz logre resolver el desafío correctamente, según el modelo 3UV, debe ser capaz de:

- Interpretar a la x como un número general.
- Usar la letra para representar simbólicamente la base y la altura de la figura dada.
- Expresar simbólicamente el área de la figura.
- Resolver la multiplicación de la expresión anterior, en términos de x.

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué forma tiene la figura dada?,¿es una figura conocida?
- ¿Existe una fórmula para encontrar el área de esa figura?, ¿cuál es?
- ¿Qué datos te proporciona la figura?
- ¿Qué representa la x que aparece en la figura?, ¿es un número en específico o puede tomar distintos valores?
- ¿Cuánto mide la base de la figura?, ¿y la altura?
- ¿Cómo representarías su área en términos de x?, ¿se puede escribir de otra manera?
- ¿Por qué la expresión aparece en términos de x?

Desafío 9

Desarrolle la expresión $3\ (5x\ + 3)\ +\ 4x$

Para que el aprendiz logre resolver el desafío correctamente, según el modelo 3UV, debe ser capaz de:

- Interpretar a la x como número general
- Manipular la variable simbólica para desarrollar la expresión.

Desafío 10

Encuentre la expresión que representa la siguiente secuencia de números:

1, 3, 5, 7,9,…

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué puedes decir acerca de esa secuencia de números?
- ¿Cómo se obtiene el segundo número de la secuencia a partir del primero? (G1)
- ¿Cómo se obtiene el tercer número a partir del segundo?
- La operación que se hizo para pasar del primer número al segundo, ¿es la misma que se hizo para pasar del segundo número al tercero? (G1)
- ¿Puedes escribir con tus palabras lo que se hace para pasar de un número al siguiente?
- ¿Puedes escribirlo mediante una expresión algebraica?

Desafío 11

Encuentre la expresión que representa la siguiente secuencia de números:

2, 4, 6, 8,10,…

Algunas preguntas que el tutor pudiera hacer al aprendiz:

- ¿Qué puedes decir acerca de esa secuencia de números?
- ¿Cómo se obtiene el segundo número de la secuencia a partir del primero? (G1)
- ¿Cómo se obtiene el tercer número a partir del segundo?
- La operación que se hizo para pasar del primer número al segundo, ¿es la misma que se hizo para pasar del segundo número al tercero? (G1)
- ¿Puedes escribir con tus palabras lo que se hace para pasar de un número al siguiente?
- ¿Puedes escribirlo mediante una expresión algebraica?

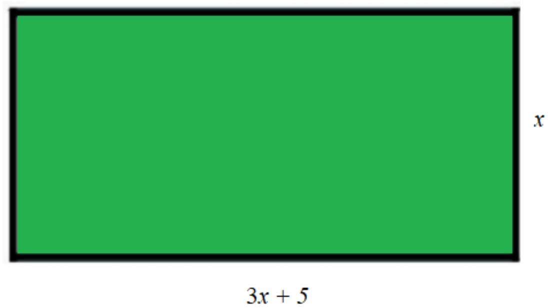
5.2 Diseño de desafíos. Actividades integradoras

En el Modelo 3UV se plantea la necesidad de agregar situaciones problema, a las que se les denominó “Actividades de integración”, las cuales implican los tres usos de la variable en la resolución de un mismo problema. Se considera importante agregar algunos desafíos de este tipo, con la finalidad de que se motive a los aprendices a poder pasar de uno de los usos de la variable a otro sin mayores complicaciones. Estos desafíos pudieran agregarse al final de toda la unidad de aprendizaje, lo cual se podría hacer incluyendo alguno de los que aquí se propondrán o algún otro que cumpla la función antes mencionada.

A continuación se presenta la propuesta para estas actividades integradoras, así como las posibles preguntas que el LEC puede hacer a sus aprendices para guiarlos en la resolución y aprendizaje de los mismos.

Actividad integradora 1

Observe la siguiente figura:



Encuentre el valor de x si el área del rectángulo es 100.

Es necesario que, al guiar a los aprendices, se logre destacar los distintos usos de la variable que se ven implicados en su resolución. Para ello, el Modelo 3UV propone que se planteen los siguientes aspectos:

a) Interpretar a la variable como **número general**, lo cual debe hacerse notar en el uso de las expresiones "$3x + 5$" que representa la base del rectángulo y en la expresión "x" que representa la altura del mismo.

Algunas preguntas que pudieran hacerse para lograr esto son:

- ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?
- ¿Cuánto mide la base?
- En este desafío, ¿qué valor puede tomar la x? ¿ese valor es único o puede variar?
- Si no se proporciona el área del rectángulo, ¿qué valor o valores puede tomar la x en ese problema?

b) Interpretar a la variable como **incógnita,** es decir, que el aprendiz se dé cuenta de la existencia de un número desconocido x y que su valor puede ser determinado.

La pregunta clave que pudiera hacérsele al aprendiz, para que se dé cuenta de que se está tratando de encontrar el valor de la incógnita x pudiera ser:

- Al resolver la ecuación $(3x + 5)(x) = 100$, ¿qué se está tratando de encontrar?

c) Identificar el uso de la variable como parte de una **relación funcional**.

Para guiar al aprendiz a esta interpretación, las preguntas del LEC pudieran ser las siguientes:

- Cuando el área del rectángulo es 100, ¿cuánto vale x?
- Si queremos que el área del rectángulo sea mayor que 100, ¿qué valores puede tomar x?, ¿y si queremos que sea menor que 100?
- Si el valor de x es 10, ¿cuál es el área del rectángulo?, ¿y si x vale 20?

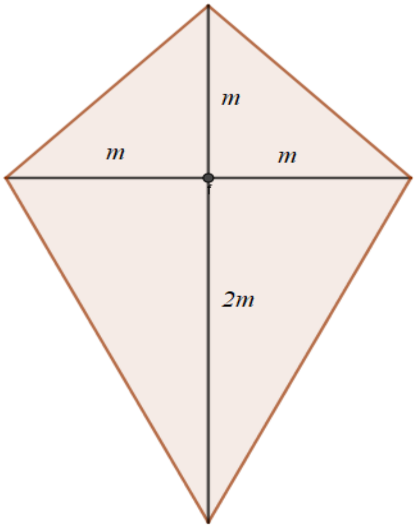
Además de guiar al aprendiz en la identificación de los tres distintos usos de la variable, se les debe guiar en la resolución del desafío, es decir, en la manipulación de los mismos. Para ello, el LEC pudiera incluir en su diálogo preguntas como las siguientes:

- ¿Qué operación debes efectuar para obtener el área de un rectángulo?
- ¿Cómo representas esa operación con los datos proporcionados por el desafío?
- ¿Cómo se efectúa esa operación?
- ¿Se puede representar esa expresión de otra manera?
- ¿Cómo se resuelven las ecuaciones de ese tipo?
- ¿Cuál de las dos soluciones encontradas es la adecuada para este desafío?,¿por qué?

Actividad integradora 2

En una comunidad se pidió a los estudiantes que crearan un papalote con palos y bolsas de plástico, de tal forma que se viera como la siguiente imagen:

Para esto, se dio la instrucción de que dos de los palos utilizados para su elaboración debían medir $3m$ y $2m$, de tal manera que los palos quedaran perpendiculares como se muestra a continuación:



- ¿Cuál es el perímetro de la figura del papalote?

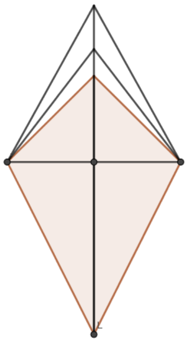
Después de que los aprendices intenten dar alguna solución al desafío, el LEC pudiera ayudar haciéndole las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa la letra m?, ¿Qué valor tiene? (G2) ¿qué operaciones deben hacerse para encontrar el perímetro de la figura?

Para involucrar el uso de la variable como incógnita pudieran agregarse preguntas como las siguientes:

- Si el perímetro de la figura es 100, ¿qué valor tendría m?, ¿puede tener cualquier valor o tiene un valor en específico? (I2, I4), ¿cómo puede comprobarse que el valor de m es el que encontraste? (I3)

Qué pasaría si la figura se estirara de la siguiente manera:



Las preguntas que pudiera hacer el tutor a sus aprendices para comprender el uso de la variable como una relación funcional podrían ser las siguientes:

- ¿El valor del perímetro P es el mismo en los tres casos?
- ¿De qué depende su valor? (F1)
- Si la figura se alarga 5cm más, ¿cuál es el perímetro de la figura? (F2)
- Si cambia el valor de m ¿cambia el valor de P? (F4)

Es importante que al momento de involucrar a los aprendices (que en este caso serán alumnos de primaria y secundaria), con el uso de la variable como número general, la guía por parte de los tutores sea la más adecuada. Si esto no se hiciera así, aún si el desafío está diseñado adecuadamente para ser resuelto de esta manera, pero la tutoría no es apropiada a las necesidades de cada uno de los aprendices, sucederá lo mismo que ocurrió en la tutoría en la que se participó, en la cual nadie logró resolver el desafío por cuenta propia y por lo tanto su aprendizaje no fue el esperado.

Debido a que cuando se participó en la tutoría a los Líderes Comunitarios no se había estudiado la propuesta de Ursini, S. (2016), del Modelo 3UV, se llegó a la conclusión de que hacía falta tener una base como guía para una tutoría más adecuada. Esto llevó a la necesidad de realizar un análisis exhaustivo de la propuesta del Modelo 3UV, lo que permitió el diseño de esta propuesta. Se espera que, en un futuro, esta propuesta pueda ser de utilidad al personal del CONAFE, al momento de llevar a cabo las tutorías de la unidad de aprendizaje “El lenguaje del álgebra”.

Conclusiones

En cada uno de los capítulos que integran el presente trabajo se describieron los aspectos más relevantes del mismo, por lo que ahora se considera pertinente finalizar este trabajo con algunas conclusiones sobre los asuntos principales que fueron expuestos en el presente documento. Para ello, las conclusiones se han organizado por secciones, cuyos títulos representan aquellos aspectos a los que se está haciendo alusión.

1. Sobre los objetivos planteados y la pregunta de investigación.

Recuérdese que la interrogante que fungió como guía fue la siguiente:

¿Cuáles son los usos de la variable impulsados institucionalmente por CONAFE en la unidad de aprendizaje "El lenguaje del álgebra" y cuál es el nivel de manejo que los líderes educativos comunitarios (LEC) manifiestan a este respecto?

Para poder dar respuesta a esta pregunta, se consideró necesario de primer momento el involucrarse en el tipo de trabajo que se realiza en el CONAFE, así como la exploración y resolución de la unidad de aprendizaje de interés mediante el modelo educativo con el que ahí se trabaja. Posterior a eso se planteó la necesidad de estudiar lo que el Modelo 3UV aborda acerca de los distintos usos de la variable.

El planteamiento de esta interrogante permitió dar pie a la determinación de los objetivos generales y los objetivos específicos, con el fin de dar respuesta a la misma. A continuación se presenta cada uno de los objetivos específicos de este trabajo junto con la descripción de las acciones que se llevaron a cabo para el cumplimiento de los mismos.

Objetivo específico 1

OE1.- Conocer el modelo educativo con el que trabaja el CONAFE e identificar los niveles de aprendizaje de la unidad de interés.

Para el cumplimiento de este objetivo fue necesario realizar una revisión documental, para lo que se proporcionaron una serie de documentos oficiales del CONAFE, lo que permitió posteriormente pasar a involucrarse con el mismo interactuando y tomando el papel de aprendiz para posteriormente participar como tutor.

Estas acciones permitieron conocer el modelo educativo con el que se trabaja en el CONAFE, así como la relación que existe entre quienes participan en él, es a lo que se le llama: "la relación tutora". Este modelo educativo es distinto al de la educación pública "ordinaria", por lo que era necesario conocerlo para poder dar respuesta a otros de los objetivos de este trabajo.

Uno de los elementos importantes que se identificaron durante la revisión documental, fueron los 11 niveles de aprendizaje que se espera que los estudiantes del CONAFE logren desarrollar al abordar la unidad de aprendizaje de interés. Después de conocerlos se pasó a lo que interesaba para el logro del segundo objetivo específico.

Con respecto al Modelo del ABCD, a partir de que se enfrentó a trabajar con éste, se llegó a la conclusión de que parece proporcionar resultados efectivos con respecto al aprendizaje autónomo que adquieren los aprendices. A diferencia del modelo educativo con el que se trabaja en la educación pública, en éste llama la atención como los aprendices no esperan que el tutor les proporcione ningún tipo de información, fórmulas, técnicas para resolver problemas, etc. Mientras que en la escuela pública quien hace la mayor parte del trabajo es el profesor, el Modelo del ABCD está centrado realmente en el estudiante.

Resulta interesante ver que tan fácilmente se adaptan quienes estudian con este modelo educativo, aunque en un inicio pudiera presentar dificultades, al momento de irse familiarizando con él se van adaptando fácilmente. Sobre todo el hacer ver que no existe ningún tipo de jerarquías entre quienes participan en este modelo, tanto los aprendices como los tutores aprenden unos de otros, comparten sus experiencias y se ayudan unos a otros sin ningún problema.

Una de los aspectos que se consideró más atractivo, fue el ver cómo la actitud de las personas va cambiando al trabajar con este modelo educativo. Al momento de comenzar a involucrarse con el CONAFE y el trabajo que aquí se hace, se creía que dicho modelo educativo solamente serviría para grupos de personas reducidos o para quienes desde un inicio comienzan a trabajar de esta manera. Solo fue necesario ver un video que personal del CONAFE presentó, en el que se experimentó desde un inicio el proceso de ciertas personas que recién comenzaban a trabajar con este modelo educativo, para notar el gran cambio de actitud que presentaban. Un alumno en particular comenzó presentando señales de timidez, parecía tener miedo a expresar sus ideas al tutor y siempre estaba muy callado. Con el paso del tiempo mostró un cambio de actitud impresionante, incluso resultó participativo y decía que en un futuro él quería realizar el trabajo que hacen sus Líderes Educativos.

Esta actitud positiva es algo que en lo personal se considera muy importante, ya que es un gran paso que la mayoría de los estudiantes necesitan dar, para que al momento de enfrentarse a las matemáticas en general, no se llegue con una actitud de desapego o desinterés, como normalmente se hace en las escuelas públicas.

El que este modelo educativo provoque esa actitud en sus estudiantes ya dice mucho y da elementos suficientes para ver que los resultados que se obtendrán a partir de esto serán mucho más positivos que si simplemente se les proporciona información a los estudiantes y se espera que ellos solamente participen como receptores.

Objetivo específico 2

OE2.- Identificar si los niveles del modelo educativo con el que trabaja el CONAFE promueven los 3 usos de la variable contemplados en el Modelo 3UV.

A partir de que se realizó la revisión documental mencionada en el OE1, fue necesario investigar detalladamente acerca del Modelo 3UV (Ursini, S. et al, 2016), con el fin de poder realizar un análisis de los niveles de aprendizaje que se pretenden alcanzar con la unidad de aprendizaje de interés, identificando aquellos usos de la variable que se ven promovidos en esta parte de la unidad. En otras palabras, para el logro de este objetivo era necesario identificar si los niveles del modelo educativo con el que se trabaja en el CONAFE, promueven los tres usos de la variable que se contemplan en el Modelo 3UV o si solo se promueven algunos de ellos o ninguno.

El logro de este objetivo permitió contar con un panorama acerca de lo que pareciera tener mayor importancia o mayor impulso con respecto a los niveles de aprendizaje de la unidad de aprendizaje.

Según lo presentado en la unidad y el análisis realizado según el Modelo 3UV, permitió ver que la unidad de aprendizaje si pretende promover los tres usos de la variable, aunque unos en mayor medida que otros. Por ejemplo, el uso de la incógnita fue el que estuvo presente en la mayoría de los problemas, mientras que el uso de la variable como número general, solo apareció en una de las situaciones-problema planteadas.

En lo personal, se considera necesaria la promoción del uso de variable como número general, pero sobre todo el hacer ver a quienes aborden la unidad de aprendizaje la importancia de la generalización. La mayoría de las veces que se aprende a representar situaciones mediante una expresión general, no se logra entender el porqué de la necesidad de esto. Plantear problemas que exijan el uso de las expresiones generales y sobre todo proporcionar una guía adecuada en la resolución de los mismos, motivará a los estudiantes a tratar de comprender este uso de la variable.

Objetivo específico 3

0E3.- Analizar cada uno de situaciones problema de la unidad de aprendizaje de interés, (conocidos como desafíos), identificando en cada uno de ellos qué uso o usos se le da a la variable.

El logro de este objetivo se llevó a cabo a partir de las revisiones documentales y la investigación mencionada anteriormente sobre el Modelo 3UV. A partir de esto se pudo concluir que las situaciones problema (conocidos como desafíos) presentados en la unidad de aprendizaje seleccionada, promovían los tres usos de la variable, pero se identificó solo una situación problema que promovía el uso de la variable como número general y que además de eso, fue el que presentó mayores dificultades a los aprendices y que por lo tanto no lograron resolverlo por cuenta propia.

Además de esto, se lograron identificar algunas situaciones problema que intentaban promover ciertos usos de la variable, pero el planteamiento de las mismas no era el más adecuado para hacerlo. Proponer una situación problema que los aprendices puedan resolver mentalmente, aritméticamente o mediante algún otro método que no ponga en acción habilidades de su pensamiento algebraico, conduce a pensar que su diseño no es el más apropiado justamente en el sentido de que no promueve el desarrollo de su pensamiento algebraico. En este sentido, una propuesta que se podría hacer es que en el material de apoyo se planteen situaciones problema en las que sí se promueva esto, es decir que involucren algún uso o usos de la variable.

Objetivo específico 4

0E4.- Describir las soluciones dadas por los LEC en cada desafío, identificando en cada una si el uso que le dio el LEC a la variable es el esperado.

Esta parte del trabajo fue muy interesante, pues para el logro de este objetivo el investigador tomó el papel de tutor según el Modelo del ABCD. En esta participación se tutoró a 3 Líderes Educativos Comunitarios que nunca habían tomado la unidad de aprendizaje “El lenguaje del álgebra”. Algunos de ellos eligieron tomar la unidad por decisión propia, mientras que otros fueron seleccionados para tomarla.

El proceso de tutorías duró dos días en los que el papel del investigador, quien participaba como tutor, era solamente guiar a cada uno de los aprendices por separado. El tutor en ningún momento debía dar respuestas, fórmulas, técnicas, documentos con información ni nada que diera una pista a los aprendices sobre lo que debían hacer para resolver los desafíos. Esto permitió conocer una forma de trabajo con la que no se estaba familiarizado. En un inicio costaba un poco de trabajo el interactuar con los aprendices sin decir respuestas o algún dato necesario para resolver los desafíos. Con el transcurso de la tutoría y la adaptación que tienen los LEC al modelo educativo del CONAFE, se fue facilitando dicho proceso y el diálogo entre tutor – aprendiz fue cada vez más fluido y dirigido hacia donde tenía que ir, la guía de los aprendices.

Todo este proceso de tutorías, permitió identificar los distintos procedimientos de resolución de algunos desafíos por parte de los aprendices. A partir de esto y con ayuda del Modelo 3UV, se logró este objetivo específico, es decir, se consiguió realizar el análisis de las soluciones dadas por los LEC con respecto a los tres usos de la variable contemplados en dicho modelo.

Al realizar esto se pudo observar que, en la mayoría de los casos, los LEC comenzaban la resolución de los problemas por métodos distintos a los que realmente se pretendían promover. Uno de ellos pudo resolver la mayoría de los problemas mentalmente, sin necesidad de hacer uso de ningún tipo de expresión algebraica. La principal dificultad que se presentó aquí fue el convencerlo de hacer uso de ellas, pues no se lograba hacerle ver alguna necesidad de este uso. Es por ello que, en lo personal, se considera necesario revisar a detalle cada uno de las situaciones-problemas planteadas y posteriormente decidir si dichos problemas son adecuados para promover el uso de la variable que se pretende.

Al plantear situaciones en las que el hacer uso de expresiones algebraicas para su resolución, no es el camino más efectivo, dichas situaciones no contribuyen mucho, pues a los estudiantes les resulta ilógico o innecesario tener que hacerlo si se puede encontrar la respuesta de maneras mucho más sencillas.

Objetivo específico 5

OE5.- A partir de la información encontrada al alcanzar los objetivos específicos anteriores, diseñar desafíos que complementen, en caso de que se considere necesario, a aquellos con los que se cuenta en la unidad de aprendizaje autónomo "El lenguaje del álgebra".

A partir del nivel de logro alcanzado en cada uno de los objetivos específicos anteriores, se asumieron las tareas realizadas con el diseño. El análisis de cada uno de los usos de la variable que se ven promovidos por los desafíos en la unidad de aprendizaje, así como los que emplearon los aprendices en cada una de sus soluciones, permitió identificar la falta que hace incluir uno o varios desafíos que involucren el uso de la variable como número general.

Debido a que solo un desafío promueve el uso de la variable en la unidad de aprendizaje, mismo que no fue posible resolver por ninguno de los aprendices que fueron tutorados y que además el tutor no logró dar una guía adecuada para la resolución del mismo, se consideró necesario realizar el diseño de algunos desafíos que promuevan este uso de la variable.

Además de proporcionar el diseño de dichos desafíos se optó por proponer una guía que pudieran seguir los LEC al momento de tutorarlos, dicha propuesta y guía se propusieron según lo que se plantea en el Modelo 3UV.

Se considera que este diseño puede ayudar tanto a los aprendices como a los tutores, ya que en lo personal el conocimiento de las propuestas que se hacen en el Modelo 3UV, con respecto a cómo abordar los problemas y cómo guiar a los estudiantes en su resolución, fue de gran ayuda. Si los aprendices comenzaran recibiendo tutoría según lo plantea este modelo, seguramente al momento de participar como tutores les será más fácil hacerlo, pues tendrán más bases y herramientas para la guía correcta a la resolución de los problemas planteados. Lo mismo se puede hacer con cada uno de los demás problemas que se presentan en la unidad de aprendizaje con la que se trabajó.

Es importante pues que los LEC reciban primeramente una tutoría de calidad para que posteriormente ellos puedan proporcionarla a sus estudiantes. En lo personal se cree que tomar como base lo planteado en el Modelo 3UV, puede resultar de gran ayuda, sobre todo porque este modelo se adapta demasiado al Modelo del Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo, con el que trabaja el CONAFE.

Los objetivos generales

El logro de cada uno de los objetivos específicos descritos anteriormente, contribuyó para alcanzar ambos objetivos generales, mismos que a su vez permitieron dar respuesta a la interrogante de investigación. Dichos objetivos generales fueron planteados en el Capítulo 1.

La realización de este trabajo permitió evidenciar una serie de problemáticas que se ven involucradas en la forma de trabajo del CONAFE. Aunque los tutores con los que se tuvo contacto en este caso eran personas que no habían resuelto la unidad de aprendizaje “El lenguaje del álgebra”, es decir, que no necesariamente tenían por qué dominar el tema, el hecho de que la mayoría de los que participan como tutores en las comunidades atendidas por el CONAFE cuenten con estudios solamente de bachillerato, perjudica en parte en la guía que se estará proporcionando a los niños y jóvenes que estudian ahí. Esto es, al no contar con una preparación como profesores y al ser en su mayoría jóvenes recién egresados de bachillerato, los resultados obtenidos a partir de sus procesos de tutoría pudieran no ser los más favorables.

Otro aspecto que se considera muy importante señalar, es el tiempo dedicado a las tutorías en las que los LEC deciden tomar una nueva unidad de aprendizaje, con el fin de posteriormente poder tutorar dicha unidad. En este caso se brindó la oportunidad de participar como tutores, para lo cual la duración de la tutoría fue de dos días, empezando a las 9:00 am y terminando alrededor de las 6:00 pm con aproximadamente una hora de descanso reservado para la comida. Cabe destacar que dicha tutoría no se programó con el fin del desarrollo de este trabajo, sino que fue a partir de ella que se dio la oportunidad del mismo, es decir, la duración del proceso de tutorías para los LEC en la que se participó es la que normalmente se tiene.

Con relación a la unidad de aprendizaje “El lenguaje del álgebra” y el Modelo 3UV, las dificultades que se presentan tienen que ver con la poca experiencia con la que los mismos LEC cuentan con relación a los tres diferentes usos de la variable. Esto se verá reflejado al momento de enfrentarse a sus aprendices y querer guiarlos en la resolución de los desafíos que ellos mismos no dominan al 100%. Se puede añadir además que, los mismos estudiantes pueden pasar a tomar el lugar del tutor y guiar a sus compañeros en la resolución de los desafíos, lo que quiere decir que si el tutor ya presentaba dificultades o falta de dominio del tema y ahora el aprendiz que va a tutorar a sus compañeros logra dominar aún menos el tema que el LEC, este último aprendiz alcanzará quizás un menor aprendizaje.

Se pueden agregar como desventajas además de lo anterior, todos aquellos problemas que tienen que ver con los aspectos sociales involucrados como son: la situación de pobreza en la que viven los estudiantes, que algunos de ellos asisten sin comer, los contextos sociales a los que se enfrentan estos niños al ser evaluados mediante pruebas estandarizadas como PLANEA y que en algunos casos no logran comprender lo planteado debido a la situación en la que viven, entre otros.

No solo se encontraron desventajas en la forma de trabajo del CONAFE, pues a pesar de que existen algunos detalles que pudieran ser afinados, cuenta con muy buenos elementos para que el programa pretendido por dicha institución funcione adecuadamente. El principal de ellos es el Modelo del Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo.

Al participar en el proceso de tutorías, se pudo destacar la actitud que cada uno de los aprendices (en este caso los LEC que fueron tutorados) que, aunque unos eran más rápidos que otros o lograban comprender mejor a lo que se estaban enfrentando, ninguno de ellos se dio por vencido en ningún momento. Su adaptación a este modelo educativo era siempre muy notoria en cada uno de ellos, siempre estaban muy activos y participativos y sobre todo se involucraban totalmente en la resolución del desafío, sin esperar que se les diera ninguna fórmula, técnica, etc.

Otro de los elementos involucrados con la particular forma de trabajo del CONAFE, que consiguió destacar y hacer ver su gran importancia fue el Registro del Proceso de Aprendizaje (RPA). Normalmente al planteárseles un problema a los estudiantes, los profesores esperan recibir un procedimiento de resolución con el fin de evaluar dicho procedimiento, dando lugar a la aprobación o reprobación del mismo.

En el CONAFE, aunque claramente es importante que los aprendices resuelvan los desafíos de manera correcta, es aún más importante hacerlos darse cuenta de qué y cómo aprendieron. El que cometan errores, que resuelvan un desafío con el método más complicado y después se den cuenta de que existía otro más eficiente, que se den cuenta de que existe la necesidad de investigar algo porque lo desconocen, todos esos detalles que llevan a los aprendices a la resolución más adecuada de los desafíos son importantes en este modelo y parece enriquecer el aprendizaje de sus estudiantes.

2. Aportaciones

Al finalizar la investigación propuesta en este trabajo, queda como aportación personal el diseño de algunos desafíos que pudieran ser de utilidad para el modelo educativo con el que se trabaja en el CONAFE. Estos desafíos pretenden que los aprendices se involucren con el uso de la variable como número general.

Mediante esta propuesta se espera que tanto tutores como aprendices que participen en el CONAFE, logren identificar la importancia que tiene la generalización como una de las habilidades importantes para un desarrollo apropiado del pensamiento algebraico.

Además de los desafíos propuestos que promueven el uso de la variable como número general, se proponen otros dos desafíos que toman el lugar de lo que en el Modelo 3UV se le conoce como “Actividades integradoras”. El propósito de estos desafíos es que los aprendices logren pasar por los tres usos de la variable en la resolución de un mismo problema.

Lo que interesa con esta propuesta no solo es que los aprendices logren resolverlos por cuenta propia y de manera correcta, sino que además se espera que los tutores los ayuden a identificar y diferenciar cada uno de los usos de la variable. Para ello se proponen una serie de preguntas que pudieran servir como guía a los tutores para ayudar a los aprendices en este proceso.

3. Algunas reflexiones derivadas de la investigación

Al desarrollar este trabajo se adquirieron muchos aprendizajes y experiencias personales. Con relación a la forma de trabajo del CONAFE, al involucrarse con ellos se aprendieron muchísimas cosas, tales como la realización del Registro del Proceso de Aprendizaje (Anexo 2), el cual fue una parte muy complicada ya que no se estaba familiarizado con esto. Al momento de resolver algún problema de álgebra, la experiencia que se tiene al respecto hace resolverlo casi mecánicamente, sin pensar en porque se hace así, qué errores se comenten al momento de tratar de resolverlo, si se llegó a una solución incorrecta en algún momento, que cosas del problema no se conocían y cuáles de ellas si, entre otras.

Al involucrarse con la forma de trabajo del CONAFE y tener que registrar todo el proceso que llevó a la solución de cada uno de los desafíos se complicó demasiado. En un principio no se comprendía su importancia, pues al ya dominar el tema y poder resolver los desafíos sin complicaciones, debido a que eran problemas para nivel primaria y secundaria, no se lograba comprender la importancia que tiene este registro.

Al ver que el registro que se realizó no decía mucho debido a que no había aprendizajes nuevos, el personal del CONAFE decidió que se participara ahora como aprendices de una unidad de aprendizaje que no se dominara. Se vivió el mismo proceso, pero esta vez en una unidad de aprendizaje de Historia, en ese momento se logró comprender la importancia que el RPA tiene, ya que al momento de registrar el proceso que lleva al aprendizaje de algún tema, es necesario recordar cada una de las acciones realizadas y los errores cometidos. Esto permite un mejor aprendizaje y retención de la información, además de que permite que, al momento de intentar responder algún otro problema similar, se pueda revisar lo que se hizo antes para ver si se puede hacer de la misma manera.

El proceso de tutorías fue otra de las experiencias que quedó más marcada, el ver cómo trabajan en el CONAFE, donde los aprendices saben que son ellos quienes tienen que resolver los problemas por cuenta propia sin que los tutores les den ningún tipo de información y sobre todo esa actitud que se tiene de nunca rendirse y seguir hasta dar con la solución dejó una gran experiencia que de ser posible se volvería a repetir.

Además de todo el proceso que se vivió para involucrarse con el CONAFE, el conocer el Modelo 3UV cambió la perspectiva con la que se veía el álgebra. Sobre todo, proporcionó herramientas que antes no se tenían para poder guiar a los aprendices en la resolución de los desafíos, facilitando algunas ideas sobre las preguntas que se les pueden hacer a los aprendices para guiarlos de manera más eficiente.

Se considera que el trabajo que se hace en CONAFE es muy bueno y que tiene las mejores intenciones por contribuir en la educación de calidad de los niños y jóvenes que viven en situaciones vulnerables y que no tienen los recursos para asistir a las escuelas públicas. Sin embargo se cree también que aún hay mucho trabajo por hacer para mejorar los resultados de su trabajo y que pudiera incrementar la calidad de sus tutorías.

Para la realización de este trabajo, el contar con una formación de Licenciatura en Matemáticas resultó de gran ayuda, ya que como se mencionó anteriormente, quienes participan como tutores normalmente no cuentan con la experiencia necesaria para poder atender a las dificultades que presentan los aprendices, debido a la falta de dominio en el tema abordado en la unidad de aprendizaje, en este caso el tema de las Ecuaciones. La licenciatura proporcionó esas bases necesarias para poder resolver cada uno de los problemas presentados en dicha unidad, pero no solamente eso, sino que además permitió entender que existían varios procedimientos para un mismo problema y se logró enfrentar de manera adecuada a las dificultades que presentaron algunos de los LEC al momento de ser tutorados.

La realización de este trabajo dejó una variedad de experiencias, entre ellas se encuentra el conocimiento de un nuevo modelo educativo, el cual que en lo personal se considera muy efectivo y que quizá pudiera aplicarse incluso en la educación pública, aunque claramente tendría que adaptarse a la forma de trabajo de la misma. Al ver la respuesta de los aprendices ante cada situación a la que se enfrentaban, así como la facilidad con la que se adaptaban a la forma de trabajo de dicho modelo, dejó ver que los resultados arrojados por este modelo educativo son muy positivos.

Aunado a esto, el conocimiento del Modelo 3UV proporcionó una visión muy distinta a la que se tenía en un inicio al momento de enfrentarse a las tutorías. Desde que se participó como aprendiz en un primer momento y solamente con los conocimientos que la Licenciatura en Matemáticas había proporcionado, se resolvieron los problemas desde el punto de vista única y exclusivamente matemático. Esto es, se aplicaron las fórmulas y técnicas, así como los conceptos que ya se dominaban, sin pensar en el uso que se le estaba dando a la variable en cada uno de los casos. De igual manera, al momento de tutorar y enfrentarse a los conflictos de los aprendices, la tutoría siempre los guiaba a la resolución de los desafíos, pero nunca a la identificación de los distintos usos de la variable.

Es por ello que el estudio de este modelo proporcionó más herramientas que, si se toman en cuenta estos nuevos aprendizajes al momento de llevar a cabo nuevamente este proceso, seguramente los resultados serían todavía más efectivos de lo que fueron sin la utilización de lo que el Modelo 3UV propone.

Referencias bibliográficas

Ayala, R. (2016). *Las competencias matemáticas en estudiantes universitarios de primer ingreso. Un estudio exploratorio.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad de Sonora. Hermosillo, México.

Balanced Assessment Project (2000). Advanced High School Assessment, Parsippany, New Jersey, Dale Seymour Publications.

Barriga, F., Hernández, G. (2002) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México: McGraw-Hill Interamericana.

Castro, E., Fernández, F., Gil, F., Moreno, F., Olmo, A., Rico, L., Castro, E., Segovia, I. (1993*). La evaluación en matemáticas: Revisión y estado de la cuestión.* En Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Ed.), *VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (pp. 205-225). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Clarke, D. (1997), *Constructive Assessment in Mathematics: practical steps for classroom teachers*, Berkeley, California, Key Curriculum Press.

CONAFE (2016a). *Marco curricular de la educación comunitaria, modelo ABCD*. Ciudad de México: Consejo Nacional de Fomento Educativo.

CONAFE (2016b). *Unidad de aprendizaje: Pensamiento matemático.* Ciudad de México: Consejo Nacional de Fomento Educativo.

CONAFE (2017). *Consejo Nacional de Fomento Educativo.* Recuperado el 07 de junio de 2017 de http://www.gob.mx/conafe

CONEVAL (2017). *Medición de la pobreza en México y en las Entidades Federativas.* Recuperado el 11 de septiembre de 2017 de: http://coneval.org.mx/Medicion/MP/Paginas/Pobreza_2016.aspx

Flores, A., Gómez, A. (2009) *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula.*

Gobierno del Estado de Sonora e Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2016). *Programa Estatal de Educación y Mejora Educativa.* Sonora. Documentos del Sistema Nacional de Evaluación Educativa. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE (s.f.) *Resultados Nacionales 2015*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE (2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE (2009). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe sobre los resultados del Excale 09, aplicación 2008*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE (2012) *La Educación en México: Estado actual y consideraciones sobre su evaluación.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE (2013) *¿Qué es PLANEA?* Recuperado el 19 de septiembre de 2017 de: http://www.inee.edu.mx/index.php/planea

INEE. (2017). *Acerca del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.* Recuperado el 07 de junio de 2017 de http://www.inee.edu.mx

Kaput,J. (1995). *Transforming algebra from an engine of inequitiy to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Documento presentado en el Congreso de la NCTM, San Francisco.

Kieran, C. y Chalouh,L. (1993) *Prealgebra: transition from arithmetic to algebra.* En D.T. Owens (Ed.) Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics. (p. 179 - 198). New York: Macmillan.

Mancera, E. y Perez, C. (2007). *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática XII* Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado el 20 de noviembre de 2017 de: http://www.tutoriaaprendizajeadolescentes.org/mate/4.pdf

Mena, R. (2002). *Un estudio sobre la enseñanza del álgebra*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Sonora. Hermosillo, México.

PLANEA (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes.* Recuperado el 19 de septiembre de 2017 de: http://planea.sep.gob.mx/ba/

PLANEA (2017). Resultados nacionales 2017 de Planea tercero de secundaria. Recuperado el 26 de enero de 2018 de: https://www.youtube.com/watch?v=OP3btZzK0Aw

Santamaría, G. (2014). *La evaluación de las matemáticas en Educación Primaria.* Recuperado el 16 de noviembre de 2017 de: http://studylib.es/doc/7066762/la-evaluaci%C3%B3n-de-las-matem%C3%A1ticas-en-educaci%C3%B3n-primaria

SEP (s.f.). *Planea.* Secretaría de Educación Pública. Recuperado el 19 de septiembre de 2017 en: http://planea.sep.gob.mx

SEP (2012). *El enfoque formativo de la evaluación.* Subsecretaría de Educación Básica. México.

SEP (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes. Resultados Nacionales 2015.* Recuperado el 19 de septiembre de 2017 en: http://www.inee.edu.mx/images/stories/2016/planea/Planea10.pdf

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M., (2016). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa.* México: Trillas (año en el que el libro original fue publicado; 2005)

Anexo 1

EL LENGUAJE DEL ÁLGEBRA

ECUACIONES

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

Día a día todos vivimos diversas situaciones que en las que necesitamos poner en juego nuestros conocimientos e ingenio para buscar las mejores soluciones y aprender mucho de cada experiencia. ¿Sabías que las matemáticas son un lenguaje que nos ayuda a modelar situaciones complicadas para encontrar soluciones más certeras y rápidas? ¿Sabías que una expresión matemática tiene mucha información que ofrecerte? Aprender el lenguaje de las Matemáticas y en particular del álgebra te abre las puertas para comprender lo que ellas tienen para ti. Sí, es un lenguaje en código que tienes la oportunidad de aprender y comprender.

Esta Unidad de Aprendizaje te ayudará a conocer el código del álgebra para que puedas expresar y comunicar diversas situaciones utilizando este lenguaje secreto, así como también te ayudará a descifrar los mensajes que otros han escrito.

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO LÓGICO

Ecuaciones

Ecuaciones lineales				Sistema de ecuaciones	Ecuaciones cuadráticas
Expresiones de la forma a+b=____ _	Expresiones de la forma a+___=b	Expresiones de la forma a(___)=b	Expresiones de la forma ax+b=cx+d	Expresiones de la forma ax+by=n dx+cy=m	Expresiones de la forma ax2+bx+c

PROPÓSITO GENERAL

Reconoceremos las ventajas del lenguaje algebraico para modelar situaciones problemáticas diversas en busca de su solución. Resolveremos problemas que impliquen realizar operaciones con expresiones algebraicas y que involucren el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Aprenderemos a describir y comunicar nuestros procesos de solución a problemas que implican la suma de números naturales, mediante representaciones gráficas o de manera oral.
- Desarrollaremos diversas estrategias para resolver problemas que implican sumas en las que el valor desconocido puede ser cualquiera de los sumandos o el resultado, así como problema que impliquen realizar multiplicaciones. Y compartiremos nuestros procesos de solución.
- Desarrollaremos diversas estrategias para resolver problemas que implican realizar sumas o multiplicaciones con números reales en las que el valor desconocido puede ser cualquiera de los elementos de la suma o de la multiplicación. Y compartiremos nuestros procesos de solución.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El desafío en ecuaciones es descubrir las relaciones entre los datos conocidos y los datos desconocidos del problema, para modelarlo y construir una estrategia que le dé solución. No olvides reflexionar respecto a los objetos y resultados matemáticos que están involucrados en el problema o que consideras te pueden ayudar. Resuelve el siguiente problema con la estrategia que prefieras.

En el cuadrilátero ABCD, el ángulo A mide 120°, el ángulo B mide 90° y el ángulo C es dos tercios del ángulo D. ¿Cuánto miden los ángulos C y D?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra y analiza tu proceso de solución y describe qué conceptos o qué información implícita o explícita en el problema fueron de ayuda para encontrar la solución. Puedes plantearte preguntas como las siguientes:

¿Hubo necesidad de hacer un esquema?, ¿qué información de los cuadriláteros fue necesaria?, ¿qué información de los ángulos fue importante en la solución?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Al construir otras formas de resolver el problema se aprenden otros aspectos de las ecuaciones y de las matemáticas que quizá no utilizaste en tu proceso de solución inicial.

Por lo anterior te invito a ibuscar otras maneras de resolver el problema!

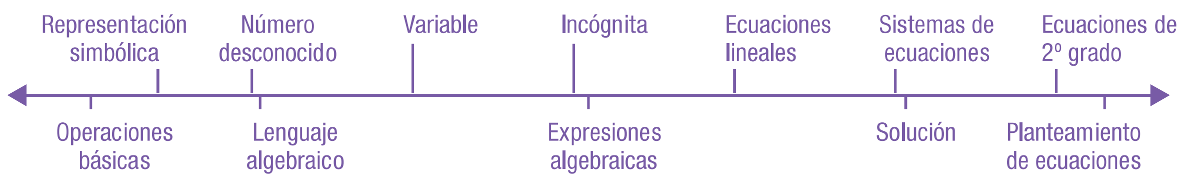
ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra los procesos y los aprendizajes nuevos que construiste con cada una de las otras formas de solución que trabajaste.

Retoma tus intereses iniciales y escribe en tu cuaderno si lograste satisfacerlos, si surgieron otros intereses durante el estudio del tema y si aún tienes dudas respecto a las ecuaciones. Investiga para resolverlas.

REVISA TU AVANCE

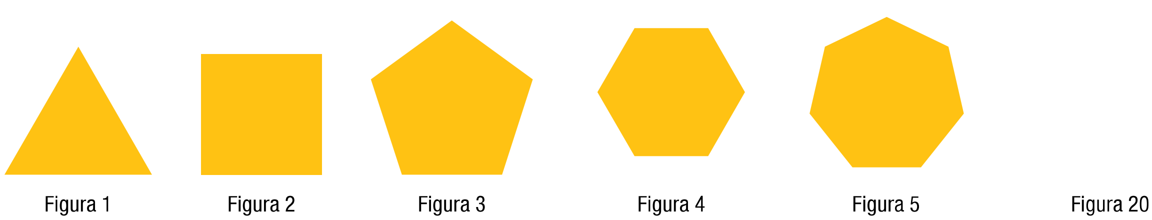
Revisa los siguientes aspectos del tema Ecuaciones e identifica cuáles trabajaste en tu estudio a profundidad y puedes dar cuenta de ellos y cuáles te falta trabajar.



ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para ampliar tu conocimiento de las ecuaciones te invito a elegir otro problema. Resuélvelo y estúdialo a profundidad. Es importante que analices cómo se construye la sucesión y cuál es el término general.

En la sucesión de polígonos regulares, ¿cuántas diagonales tiene la figura 20?



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu cuaderno los aprendizajes nuevos y cómo fue que los construiste. Reflexiona respecto a qué significa generalizar y al uso de las expresiones algebraicas para la generalización.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío, te recomiendo poner principal atención en las cantidades y en cómo se relacionan. Además, es una oportunidad para construir lenguaje algebraico a partir de procesos concretos, te invito a que descubras cómo.

Una granjera llevó huevos al mercado. Pensaba venderlos a 10 centavos cada uno. Como en el camino se le rompieron 6 huevos, decidió vender los que le quedaban en 15 centavos cada uno. Cuando regresó a su casa, se dio cuenta que había ganado 1 pesos más de lo pensaba ganar.

¿Cuántos huevos llevaba al inicio?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje, describiendo tu experiencia con este problema y anota tus reflexiones respecto a la importancia de los ejemplos concretos para construir el lenguaje algebraico.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el desafío de la vida de Diofanto, te invito a buscar diferentes formas de resolverlo. Te recomiendo recuperar poco a poco la información que te ofrece el enunciado y cómo se relaciona con lo que te pide.

"Larga fue la vida de Diofanto, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia; su mentón cubrióse de vello después de otro doceavo de su vida; la séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril; pasó un quinquenio más y le nació un hijo, cuya vida sólo duró la mitad de la de su padre, que sólo sobrevivió cuatro años a la de su amado hijo". ¿A qué edad murió Diofanto?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Descubre con detalle tu experiencia de aprendizaje con este problema. No olvides asegurarte de que puedes dar cuenta de todo lo aprendido.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Seguro hay varias formas de resolver el siguiente desafío, pero te invito a que una de tus estrategias de solución sea la algebraica. Te recomiendo poner especial atención en las incógnitas y en cómo se relacionan con los datos que el enunciado te ofrece.

Un pequeño restaurante tiene un total de 8 mesas. Cuenta con mesas para dos personas y con mesas para cuatro personas. Si el restaurante tiene capacidad para un total de 24 personas sentadas, ¿Cuántas mesas para dos personas hay en el restaurante y cuántas para cuatro personas?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

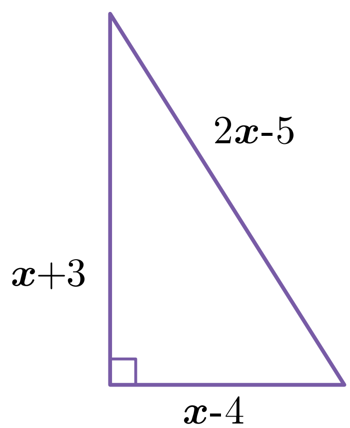
Reflexiona respecto a cuándo se requiere utilizar más de una ecuación para resolver un problema y anota tus reflexiones y argumentos.

Investiga diferentes métodos que te pueden ayudar cuando tienes dos ecuaciones o más de una misma situación problemática y anota tus aprendizajes.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el desafío del triángulo algebraico es necesario que analices con cuidado la información que te ofrece y lo que te pide; no olvides que los esquemas también te ofrecen información.

¿Cuál es el área y el perímetro del triángulo cuyos lados están dados por las expresiones $x+3$, $x-4$ y $2x-5$?



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro describiendo tu proceso de solución, tus aprendizajes y tus reflexiones respecto a la relación entre el álgebra y la geometría.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto ofrece información que te puede ayudar en la tarea de resolver ecuaciones. Identifica aquello que fortalece tus reflexiones realizadas con el estudio de los problemas y también los elementos nuevos que te ofrece el texto.

LENGUAJE ALGEBRAICO

Una ecuación es una igualdad entre expresiones matemáticas que contiene valores desconocidos, a estos valores desconocidos se les llama incógnitas.

$$2m+4=36 \qquad 5(3-y)=-2y \qquad 15=7w^2-15w$$

Donde m y w son incógnitas.

Resolver una ecuación significa determinar el valor de la incógnita que satisface la igualdad, es decir, que al sustituir el valor determinado en la ecuación y realizar las operaciones correspondientes, se obtiene el mismo valor en ambos lados de la igualdad. Para la ecuación $2m+4=36$, se puede verificar que m=16 cumple con la igualdad y que ningún otro número la satisface.

Para determinar el valor de la incógnita es necesario despejarla, es decir, dejarla sola en uno de los lados de la igualdad. Para despejar la incógnita es importante realizar operaciones que permitan eliminar los números que le “estorban” para quedarse sola. Las frases como “está sumando pasa restando” son para memorizar y realizar el proceso de manera mecánica, lo cual ayuda a realizar de manera rápida un despeje; sin embargo, las estrategias mecánicas suelen descuidar aspectos específicos de la estructura de la ecuación, lo que lleva al fracaso en su solución. Por ello es prioritario desarrollar y cuidar cada paso del proceso de despeje de la incógnita y verificar la solución de la ecuación y del problema. En el trabajo de despeje de la incógnita es necesario tener en cuenta y respetar las propiedades de la igualdad:

- Propiedad 1: Cuando se suma o resta un número a ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 2: Cuando se multiplica o divide por un mismo número, distinto de cero, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 3: Cuando se eleva a una potencia distinta de cero ambos miembros de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 4: Cuando se extrae la misma raíz, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso anotando tus reflexiones y argumentos.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Resuelve una por una las siguientes ecuaciones lineales:

a) $X + 4 = 17$
b) $7 + X = 15$
c) $Y + 11 = 6$
d) $4W = 28$
e) $3Z + 4 = 19$
f) $Y/6 = 13$ y
g) $4J + 5 = 14 + J$

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra el proceso de solución de cada una, explicitando la propiedad de las igualdades que hayas utilizado y registra los aprendizajes generados.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto muestra una nueva forma de ver una ecuación.

.

WHAT MAKES AN EQUATION BEAUTIFUL[16]

By Kenneth Chang

The wonder of mathematics is that it captures precisely in a few symbols what can only be described clumsily with many words. Those symbols, strung together in meaningful order, make equations -- which in turn constitute the world's most concise and reliable body of knowledge.

[16] Kenneth Chang, "What Makes an Equation Beautiful," The best of Physics. (The New York Times, 24 Oct. 2004), http://www.nytimes.com/2004/10/24/weekinreview/what-makes-an-equation-beautiful.html

Readers of Physics World magazine recently were asked an interesting question: Which equations are the greatest?

A half-dozen of respondents, including Richard Harrison, chose one of the simplest possible equations.

Mr. Harrison wrote: "'$1 + 1 = 2$' is the fairy tale of mathematics, the first equation I taught my son, the first expression of the miraculous power of the mind to change the real world. I remember my son holding up the index finger, the 'one finger,' of each hand as he learned the expression, and the moment of wonder, perhaps his first of true philosophical wonder, when he saw that the two fingers, separated by his whole body, could be joined in a single concept in his mind."

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro tu opinión respecto al lenguaje algebraico y en especial respecto a las ecuaciones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

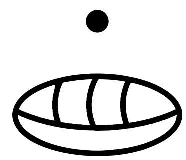
El cero fue una aportación de la comunidad maya a la humanidad, ¿quieres saber por qué? En el siguiente texto descubrirás una razón más para asegurar con admiración que iel cero tiene un valor mucho mayor al que representa!

EL CERO[17]

Las matemáticas mayas han dejado una huella en el tiempo; antes que cualquier otra civilización, los mayas originaron un concepto revolucionario: el cero.

[17] Silvia María Poveda Pilarte y José David Alemán Pérez. Matemática Maya. *Operaciones fundamentales en la aritmética maya,* (Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Recinto universitario "Rubén Darío," Facultad de Educación e Idiomas. Managua: 2006, Departamento de Matemática), 22-25, https://www.google.com.mx/search?q=Bra.+Silvia+María+Poveda+Pilarte%2C+Br.+José+David+Alemán+Pérez.+Matemática+Maya.+Operaciones+fu (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016)

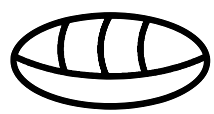
El cero es un símbolo comúnmente utilizado para representar la nada; sin embargo, el concepto maya del cero no implica una ausencia ni una negación; para los mayas, el cero posee un sentido de plenitud. Por ejemplo, al escribir la cifra 20, el cero, puesto en el primer nivel, únicamente indica que la veintena está completa.



1 X 20 = 20

0 X 1 = 0

La posición del cero comprueba que a este número no le falta nada, lo cual es una acepción opuesta al concepto de ausencia o carencia. En este sentido, el 20 es una unidad completa del segundo nivel y del primer nivel. Al ocupar el primer nivel, y generar uno nuevo, da la idea del cierre de un ciclo y el principio de otro. Quizá esto se relacione con las hipótesis que se han generado en torno a la naturaleza y significado original del glifo que representa:



EL CERO

En primer lugar, puede observársele como un puño cerrado: los dedos (que son los numerales con que empezó a contar el hombre) retenidos dentro de un espacio cerrado; contenidos en el puño, integrados y completos. Por otra parte, se le ve como una concha, imagen vinculada con el concepto de la muerte.

Al unir ambas acepciones, se deduce la terminación de la vida, el cierre de un ciclo, la medida que se completa, la integración final. Al ver el glifo y entenderlo como un puño cerrado, este señala que nada sobra, que todo está contenido dentro de la mano, que el conjunto está completo; la concha anuncia que un ciclo de vida ha terminado y que solo queda ahí el remanente, la huella geológica que nos informa que existió y se completó.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de aprendizaje, anota tu opinión respecto al cero.

REVISA TU AVANCE

Para que organices tu estudio futuro de las ecuaciones, enlista en tu cuaderno qué aprendiste acerca de éste y de otros conceptos matemáticos, después pide a tu Líder para la Educación Comunitaria, LEC, que revisen de manera conjunta el trayecto del aprendizajes del tema Ecuaciones y anoten qué aprendizajes lograste y cuáles faltarían de abordar.

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Usas diferentes formas de expresión para representar y comunicar información de lo que sucede a tu alrededor.	Resuelves problemas de suma de dígitos, comunicas de manera oral y escrita.	Resuelves problemas que implican realizar sumas cuyo resultado es menor a 100 y el valor faltante es la suma o alguno de los sumandos.	Resuelves problemas usando habilidades básicas de interpretación y razonamiento, que involucran a la suma y la resta, modificando el lugar de la incógnita.	Resuelves problemas que implican trabajar con representaciones múltiples y comunicas tus interpretaciones y explicaciones.	Resuelves problemas multiplicativos usando números naturales que incluyen interpretar y razonar en contextos familiares.	Resuelves problemas que implican multiplicar o dividir, modificando el lugar de la incógnita. Comunicas tu estrategia y argumentaciones.	Resuelves problemas que implican crear y analizar diversas representaciones de la información. Comunicas tus explicaciones y argumentaciones.	Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: ax+b=c, donde a, b y c son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.	Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: ax+b=cx+d, donde a, b, c y d son números racionales. Reflexionas y comunicas razonamientos y argumentos.	Resuelves problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones y el uso de ecuaciones de segundo grado. Utilizas conocimientos y convenciones para resolver diversas situaciones del mundo real.

Anexo 2

Nombre: Karla Paola Loque Alvarez

El lenguaje del álgebra 14 de junio de 2017

Ecuaciones

Esta será la primera actividad con la que trabajare:
Elegí álgebra ya que mencionaron que era la unidad a la que la mayoría de los tutores y tutorados le "sacan la vuelta".

Espero aprender a tutorar y que esta unidad tenga un poco mas de personas interesadas en el tema.

Considero que se lo suficiente del tema "Ecuaciones" para resolver las actividades, pero considero necesario aprender sobre esta forma de trabajo, sobre el R.P.A y el modelo ABCD.

Leí la presentación del tema y habla del lenguaje algebráico y de lo que nos ayudará a conocer esta unidad de aprendizaje

Sentido numérico y pensamiento lógico

Aparecen expresiones de la forma $a+b=\_\_$ lo que sé de estas expresiones, es que son utilizadas para denotar que la suma de dos variables es igual a la incógnita.

Las variables o constantes, en este caso a y b, representan valores conocidos, mientras que, el espacio "__" que también puede ser representado con una "x", "y", etc, representan a la incógnita, es decir, al valor que queremos encontrar.

Otra expresión que aparece, es $a+\_\_=b$, la cual representa lo mismo que en el primer caso, solo que ahora tenemos que un valor "a", sumado con una incógnita, nos da como resultado al valor "b".

También aparece una expresión de la forma $a(\_)=b$, lo cuál representa una multiplicación en la cual se nos proporciona el valor del multiplo y del resultado, otra forma de ver esta expresión es: $(\_\_) = \frac{b}{a}$, la cual indica que el valor de la incógnita puede ser encontrado al realizar una división.

Expresiones de la forma $ax + b = cx + d$, pueden resolverse despejando la incógnita, en este caso x, es decir

$ax + b = cx + d$ restamos b y cx en (1) ambos lados

(1) ⇒ $ax + \cancel{b} - b - cx = \cancel{cx} + d - b - \cancel{cx}$

$ax - cx = d - b$ • a, b, c, y d representan a valores que ya conocemos.

$(a-c)x = d-b$ ⟵ Por lo tanto, podemos encontrar el valor de esta incognita de esta manera.

$x = \frac{d-b}{a-c}$

Estas fueron distintas Expresiones de ecuaciones lineales.

Acerca del sistema de ecuaciones de la forma

$ax + by = n$
$dx + cy = m$

• Se que cuando hablamos de un sistema de ecuaciones, estamos tratando con dos (o más) ecuaciones que se deben de cumplir simultaneamente.

Para las ecuaciones cuadráticas, existe una fórmula general donde

ax^2+bx+c, si esto es igual a 0 podemos encontrar los valores de "x" con la sig. fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por ser una ecuación de grado 2, la solución puede ser única o tener dos soluciones válidas.

Los propósitos me parecen claros y considero que se pueden llevar a cabo en el transcurso de la unidad.

Desafío 1

Lo que sé: Sé que es un cuadrilátero, sé que propiedades de los ángulos aplican, es decir, la suma de los ángulos interiores de todo cuadrilátero siempre es 360°.

Sabemos que A mide 120° y $B=90°$ y $C=\frac{2}{3}D$ y queremos encontrar los valores C y D

conafe

La dificultad que se presenta en esta actividad de inicio es la solución de un sistema de ecuaciones, cuando aún no se han resuelto ecuaciones.

Tenemos dos ecuaciones

$$120^\circ + 90^\circ + C + D = 360^\circ \quad (1)$$
$$C = \frac{2}{3} D \quad (2)$$

Es necesario resolver el sistema para encontrar C y D.

Como ya tenemos despejada a C, sustituiremos el valor de C de (2) en (1). Entonces, tenemos

$$120^\circ + 90^\circ + \frac{2}{3} D + D = 360^\circ$$

Nos queda una sola ecuación con una incógnita (Al hacer la sustitución estamos dando por hecho que (2) se cumple). Ahora despejamos la incógnita D,

$$\left.\begin{aligned} 120^\circ + 90^\circ + \frac{5}{3} D &= 360 \\ \frac{5}{3} D &= 360 - 120 - 90 \\ D = 3\left(\frac{150}{5}\right) &= 3(30) = 90^\circ \end{aligned}\right\} \text{Ya encontramos cuanto mide el ángulo } D$$

Ahora, ya solo nos falta encontrar el valor de C. Pero tenemos lo sig.

$$120° + 90° + C + 90° = 360°$$
$$C = 360° - 120° - 90° - 90°$$
$$C = 60°$$

Los ángulos miden entonces

$C = 60°$ y $D = 90°$

Las estrategias que utilicé para resolver el desafío, fueron mis conocimientos previos sobre sistemas de ecuaciones, despeje, sustitución suma y resta.

Mi aprendizaje con respecto a matemáticas no fue mucho, pero aprendí un poco sobre como conafe trabaja y sobre el R.P.A

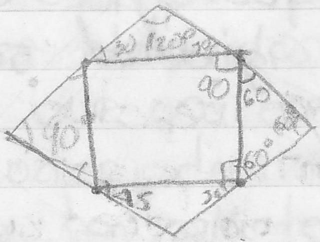
15-jun-17

Organiza y registra

Los conceptos que me fueron de ayuda fueron cuadrilátero, ya que si no sabemos que es un cuadrilátero el problema no podrá ser

resuelto. Otro concepto fue ángulo, pues para encontrar las medidas de los ángulos primero debemos saber a que nos referimos.
La información que fue necesaria para resolver este problema fue que "la suma de todos los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero siempre es 360°."

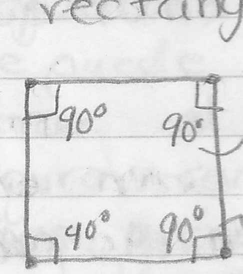
Desafío 2.



Traté de hacer una construcción que resolviera el problema pero no fue efectiva.

Supuse que el cuadrilátero era de cierta forma y tracé los puntos medios de cada lado formando un rombo. Creí que este rombo debía tener ángulos rectos pero no puedo probarlo. Intentaré de otra manera.

• La otra forma de resolverlo que se me ocurrió fue, pensar al cuadrilátero como un cuadrado o rectángulo.



Queremos que éste ángulo mida 120°

usemos el otro ángulo para hacer esto

tenemos $90° + 90° = 180$

Pero quiero que uno de 90° mida 120°
¿Que hay que hacerle? hay que sumarle algo, de la sig. forma

$$90 + x = 120°$$
$$x = 120° - 90°$$
$$x = 30$$

Pero $120 + 90 \neq 180$ y no queremos que eso suceda, queremos que la igualdad se conserve, para esto hacemos

$$120 + 90 - x = 180$$

donde $x = 30$

$$120 + 90 - 30 = 180 \checkmark \qquad 90 - 30 = \underline{60}$$

Por lo tanto, nuestros dos ángulos se modifican. Uno mide 120° y el otro 60° y los otros dos quedan igual.

- Organiza y registra

Los resultados son los mismos que obtuvimos en el problema original.

- Mis intereses iniciales eran encontrar otras formas de resolver el problema con el fin de utilizar ecuaciones. Al principio se me ocurrió una idea que no me fue útil y al final pude encontrar otra forma que si me fue de gran ayuda.

Otro interés que me surgió, fue el de buscar la manera de utilizar la tecnología para este tipo de problemas.

Hasta este punto de la UAA creo que los avances obtenidos son bastantes, ya que de la línea que aparece, solo nos faltaría usar ecuaciones de 2° grado y no se a que se refiera con planteamiento de ecuaciones. Todo lo demás ya fue aplicado en el primer desafío.

Los que se han usado mas a profundidad fueron Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones.

Desafío 8.

Acerca de este desafío, se lo que son los polígonos regulares, se que son las diagonales y se que se puede encontrar una fórmula para encontrar el número de diagonales de una figura con un número de lados "n" por mas grande que este sea.

La dificultad que representa esta desafío es el saber como encontrar esa expresión algebraica que generalice estos casos.

Tenemos lo siguente

No. de lados del polígono	No de diagonales
n 1	0
n 2	2
n 3	5
n 4	9
5	14
20	?

Queremos saber cuantas diagonales va a tener el polígono número 20.

2+1 = 3 1=0

3+2 = 5 2=2

n 4+3+2 = 9

5+4+3+2 = 14

0 2 5 9 14

2 3 4 5

1 1 1

$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$ n=1 1 X

n: = número de Figura

$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} - 1}$ ✓

$\boxed{n=1} = 0$ ✓

$\boxed{n=2} = 2$ ✓

$\boxed{n=3} = 5$ ✓

$\boxed{n=4} = 9$ ✓

$\boxed{n=5} = 14$ ✓

$\boxed{n=20} = \frac{20 \times 21}{2} - 1$

$\frac{20 \times 21}{2} - 1 = \frac{420}{2} - 1$

$= 210 - 1 = 209$

$\frac{n(n-3)}{2}$

° Organiza y registra la dificultad que tuve fue al momento de encontrar la expresión que generalice el caso. Pude encontrarla mediante pruebas hasta dar con ella.

Un logro que obtuve fue el de recordar como es que se generalizan este tipo de expresiones.

El uso de este tipo de expresiones nos facilita el proceso y nos ahorra mucho tiempo.

◦ Desafío 4.

El desafío trata de una ecuación lineal. Se como representar la información proporcionada mediante una ecuación lineal.

Creo que la única dificultad que tendría este ejercicio sería el poder escribirlo en lenguaje algebraico.

x = número de huevos que llevaba la granjera

10x := # huevos mult. por los 10 centavos a los que los iba a dar

15(x − 6) := # huevos restantes después de que se quebraran 6 mult. por los 15 centavos a los que los dará.

$15(x-6) = 10x + 100$ → 1 peso = 100 centavos; peso que ganó al venderlos a 15 cent.

$15x - 90 = 10x + 100$

$15x - 10x = 100 + 90$

$5x = 190$

$x = \frac{190}{5} = 38$ # de huevos que llevaba al inicio.

$(10)(38) = 380$ cent $= 3.80$ pesos

$(15)(32) = 480$ cent $= 4.80$ pesos

$$\begin{array}{r} 32 \\ 15 \\ \hline 160 \\ 32 \\ \hline 480 \end{array}$$

¡Sí ganó un peso más!!

• Organiza y registra

El uso de problemas donde se habla de sucesos que pueden ser reales favorecen al lenguaje del álgebra, ya que ayuda a razonar e imaginar situaciones reales donde pueden emplearse expresiones algebraicas.

Mis estrategias fueron mis conocimientos previos así como el estar familiarizada con el lenguaje algebraico y su aplicación en este tipo de problemas.

Organiza y registra.

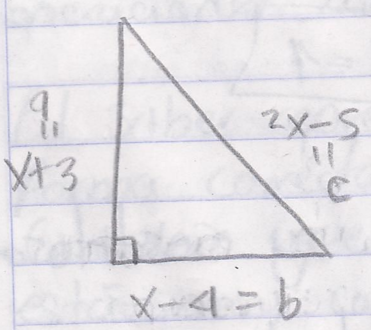
Las estrategias utilizadas en este desafío fueron la práctica en los desafíos anteriores y mis conocimientos previos sobre sistemas de ecuaciones.

Un logro que obtuve fue la idea para emplear tecnología al momento de asesorar a alguien para este desafío.

Desafío 7.

El desafío proporciona un triángulo rectángulo y conozco el teorema de pitágoras, el cual puede ser empleado para dar solución.

También conozco la formula general para ecuaciones cuadráticas.



Por teo. de pitágoras tenemos que

$$a^2+b^2=c^2$$

es decir

$$(x+3)^2+(x-4)^2=(2x-5)^2$$

$$x^2+6x+9+x^2-8x+16=4x^2-20x+25$$

$$2x^2-2x+\cancel{25}=4x^2-20x+\cancel{25}$$

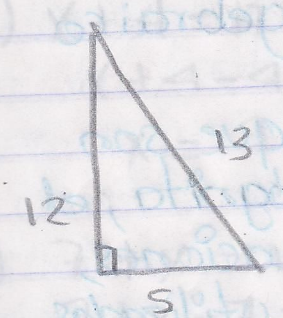
$$2x^2-18x=0$$

Formula general $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(2)(0)}}{4}$$

$$x = \frac{18 \pm 18}{4}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{36}{4} = 9$$

Si tomamos $x_1 = 0$, tendríamos dos lados del triángulo con medidas negativas, lo cual en la realidad no existe, por lo que tomaremos el valor de $x_2 = 9$



- Perimetro
  $P = 12 + 5 + 13 = 30$
- Área
  $A = \frac{(12)(5)}{2} = 30$

- Organiza y registra.

La gráfica del triángulo rectángulo podemos relacionarla con geometría, y el lenguaje algebraico utilizado relacionarlo con el algebra.

La relación que existe entre ambas en este problema, es de gran utilidad, ya que

Organiza y registra.

esta figura geométrica (el triángulo rectángulo) nos proporciona una herramienta algebraica, en este caso, la ecuación del teorema de Pitágoras.

En este caso, la relación que existe es vital para la solución del desafío.

Gracias al Teo. de Pitágoras, al triángulo proporcionado y al uso del lenguaje algebraico fue como di solución.

Desafío 8. Lectura: Lenguaje algebraico.

Esta lectura habla acerca de lo que son las ecuaciones, lo que es una incógnita, el despeje, las propiedades de las ecuaciones, entre otras cosas que ya fueron utilizadas anteriormente para dar solución a los desafíos.

Considero esta lectura muy interesante, pues proporciona los elementos necesarios para esta unidad y sobre todo para conocer (en caso de que no se conozcan) las ecuaciones, sus propiedades, etc.

No se como trabajen los demás con respecto a que esta lectura la considero una muy buena introducción al tema, pero anteriormente ya se resolvieron problemas de mayor dificultad. Si el propósito es que se investigue desde el inicio, entonces quizá este bien que este desafío no se presente al inicio, pero se podría probar ambos casos y ver cual resulta mas efectivo.

- Desafío 9.

a) $x + 4 = 17$ Prop. 1

$x + 4 - 4 = 17 - 4$

$x = 9$

b) $7 + x = 15$ Prop. 1

$7 + x - 7 = 15 - 7$

$x = 8$

c) $y + 11 = 6$ Prop. 1

$y + 11 - 11 = 6 - 11$

$y = 5$

d) $4w = 28$ Prop. 2

$\frac{4w}{4} = \frac{28}{4}$

$w = 7$

e) $3z + 4 = 19$
$3z + 4 - 4 = 19 - 4$
$3z = 15$ } Prop. 1

$\frac{3z}{3} = \frac{15}{3}$
$z = 5$ } Prop. 2

f) $\frac{y}{6} = 13$ Prop. 2

$6\frac{y}{6} = 6(13)$

$y = 78$

g) $4J + 5 = 14 + J$
$4J + 5 - 5 = 14 + J - 5$
$14J - J = 9 + J - J$ } Prop. 1

$3J = 9$
$\frac{3J}{3} = \frac{9}{3}$
$J = 3$ } Prop. 2

Desafío 10. What makes an equation beautiful
Considero que el lenguaje algebraico es una herramienta muy poderosa, nos facilita muchos procesos en donde una solución implica una suma de muchos números, por ~~ejemplo~~. ejemplo

gracias al lenguaje algebraico, podemos representar esas sumas (u otros procesos) por medio de una ecuación.

El poder representar a "eso que estamos buscando" mediante una letra, nos ayuda a darnos ideas, sin estas, no sabríamos que es lo que nos pide un problema o por donde empezar y mucho menos, como terminar.

Desafío 11. El cero.

El origen del cero fue algo muy importante en la historia de las matemáticas, al igual que cuando tratamos de representar unidades o cantidades que no se conocen, representándolas con una letra, por ejemplo "x", también existió antes la necesidad de representar la ausencia de algo por medio de un símbolo, en este caso el 0.

Aunque no solo utilizamos el cero para eso, como se menciona en la lectura, pero considero que eso fue lo que dió origen al 0.

16 - Junio - 17

Karla Paola Luque Alvarez

El lenguaje del álgebra 20 de junio de 2017

Ecuaciones

Elegí esta unidad ya que sé que es una unidad considerada como la más difícil. Me interesa poder desarrollar esta unidad para después poder apoyar a otros a desarrollarla.

Me gustaría aprender nuevas formas de representar problemas de la vida diaria por medio de expresiones algebraicas.

Respecto a la unidad, considero que me encuentro en el nivel 11 ya que soy capáz de resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales de cualquier tipo, así como sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas, las puedo utilizar para representar una situación del mundo real.

La representación del tema y los propósitos son claros, considero que se pueden lograr a lo largo de la unidad.

El desafío 1 de la unidad, habla acerca de un cuadrilátero, del cuál se nos proporcionan dos de sus ángulos interiores y se nos pide encontrar las ~~m~~ medidas de los otros dos ángulos interiores.

Tengo ciertos conocimientos que me ayudaron a resolver el desafío, ya que para poder resolverlo solo era necesario saber ciertas propiedades de los cuadriláteros y de sus ángulos interiores. También sabía que para poder resolverlo se ~~era~~ necesita plantear un sistema de ecuaciones, lo cual me es sencillo.

Con respecto a eso, no tengo ningún problema, ya que domino el tema de ecuaciones y el lenguaje del algebra, pero lo que me es complicado es el poder desarrollar mi RPA, pero con ayuda de mis tutores espero lograr hacerlo bien.

Al momento de resolver el problema, me basé en mis conocimientos ~~previos~~ previos acerca del lenguaje del álgebra, específicamente de Ecuaciones. En lo personal, no fue necesario investigar nada pues tenía claro que era lo que tenía que hacer y como hacerlo.

Este desafío ayuda a desarrollar habilidades que se encuentran en los niveles 1, 9, 10 y 11 ya que fue necesario representar información por medio de expresiones, se resolvieron ecuaciones lineales, se hicieron igualaciones de ecuaciones y se emplearon y resolvieron sistemas de ecuaciones.

*Organiza y registra

Para poder darle solución a este desafío, solo fueron necesarios los conceptos que se abordaron en el, como lo son cuadriláteros y ángulo, así como las características propias de los cuadriláteros con respecto a sus ángulos.

Para mí, no fue necesario realizar ningún dibujo o algo representativo del problema, pues fue suficiente con la información proporcionada por el desafío y lo que yo ya sabía acerca de el.

*Desafío 2. 21-junio-17

En este desafío, me piden que construya otras formas de resolver el problema anterior. Se que deben existir varias formas de resolverlo, pero al principio no entendía a que se refería exactamente con "otras formas".

Fue por eso que este desafío me tomó un poco de tiempo, ya que tenía que entender que era exactamente lo que se quería lograr con el.

Después de pensar un poco, considere que "otra forma" de resolverlo era haciendo una construcción distinta del cuadrilátero, lo cual me llevó al mismo resultado que en el problema original. Aunque tenía mis dudas, consideré esa como otra posible forma de resolverlo.

Después, hablando con mi tutora, me di cuenta de que cuando hablaba de "otras formas", no quería decir que no usaramos un sistema de ecuaciones, que fue lo que hice en el primer desafío, pero gracias al diálogo, me di cuenta de que al utilizar un método distinto para resolver un sistema de ecuaciones, estabamos empleando formas distintas.

Creo que, aunque matemáticamente no aprendí algo nuevo para mí, logré entender mejor a que se refería el problema en realidad y me di cuenta que aunque encontré una forma distinta de resolver un problema, eso no quería decir que ya no habría otra forma, lo cual me ayudará en otros problemas, a buscar varias formas de resolverlos.

*

Este desafío me motivó a mí como matemática, a buscar métodos con los cuales las personas puedan aprender mas facilmente un tema. Creo que podría hacer uso de tecnología en este u otro desafío.

*Revisa tu avance

Hasta este momento, con la solución de los dos desafíos anteriores, hemos trabajado con:

- Representación simbólica: al representar los datos faltantes,
- Operaciones básicas: realicé somas, restas, divisiones y multiplicaciones.
- Número desconocido: Eran los datos que queríamos encontrar. (al igual que la incógnita)

Se resolvieron sistemas de ecuaciones, donde fueron aplicados todos los conceptos de la línea con excepción de las ecuaciones de 2º grado.

Espero que mas adelante, se presenten desafíos para los cuales sea necesario hacer uso de ecuaciones de segundo grado.

Desafío 3.

Este desafío nos pide que encontremos el número de diagonales que tiene cierta figura, para esto nos muestra las primeras 5 figuras y nos pide específicamente el número de diagonales de la figura 20.

Para esto, se involucran sucesiones y generalización, y se nos proporcionan ciertos dibujos de figuras en los cuales podemos ir encontrando un patrón en el número de lados, número de diagonales y número de vértices.

Podemos comprobar que el número de lados siempre es igual al número de vértices, por lo tanto, para este desafío considero necesarios solo los datos como número de lados y número de diagonales.

Para poder darle solución a este desafío sólo me basé en mis conocimientos acerca de sucesiones y el conocimiento de los conceptos que ahí se manejan.

Por mis conocimientos, no aprendí algo nuevo relacionado con ecuaciones o generalización, pero me ayudó a pensar en algunas ideas que puedo usar en caso de asesorar a alguien con este tema.

conafe

Desafío 9

Este desafío habla acerca de una granjera que vende huevos, de los cuales se le rompió una cantidad y para no perder dinero los dió mas caros. Aquí se nos proporcionan datos como el precio original y el precio al que los dió y los que se rompieron y nos pide encontrar la cantidad de huevos que llevaba originalmente.

Me parece un desafío muy sencillo, donde solo es necesario pensar en que es lo que queremos saber, que tenemos y como organizar esos datos para transformarlos al lenguaje algebraico.

Con la información mencionada anteriormente y mi conocimiento del lenguaje algebráico, pude solucionar el desafío facilmente.

En lo personal, no adquirí ningún aprendizaje con respecto a matemáticas, ya que usé cosas que ya sabía,

En este desafío se desarrollan habilidades que se encuentran en el nivel 9, ya

Se hizo uso de una ecuación lineal para resolver el desafío y el nivel 11, ya que esa ecuación lineal puede transformarse en una de grado 2.

Organiza y registra

Generalizar, en matemáticas es buscar una forma de expresar un todo, por ejemplo, al usar una expresión matemático para generalizar, estamos buscando la manera de que, con una sola expresión se puedan encontrar todos los términos de una sucesión, por ejemplo.

Desafío 5.-