"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Grafos y Especies

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Maria Susana Dominguez Felix

Directora de tesis: M.C. Paulina Danae López Ceballos

Hermosillo, Sonora, México, 16 de diciembre de 2021

SINODALES

M.C. Paulina Danae López Ceballos

Directora de tesis

Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Asesor de tesis

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro

Dr. Héctor Alfredo Hernández Hernández.

Dedicatoria

Dedicada a mis hijos Diego y Davros y a mi esposo Alfredo (mis chavales).

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mi mamá Elsia y a mis hermanos: Jesus Octavio, Gerardo y Carlos por apoyarme desde el inicio y hasta el final de mi carrera.

Agradezco a mi directora de tesis, M.C. Paulina Danae López Ceballos, por su paciencia, confianza y apoyo incondicional durante mi trabajo de tesis. También agradezco a mis sinodales, Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro, Dr. Hector Hernández Hernández y Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, por el tiempo brindado en la revisión de este trabajo y por motivarme a conocer más sobre el área. A L.C.C. Emanuel Vidal López por la ayuda que me brindó.

A todos los profesores y profesoras, que durante mi carrera me apoyaron, aconsejaron, asesoraron y me motivaron a seguirme superando, en especial a mi tutora Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, quien siempre estuvo para escucharme en los momentos más difíciles.

A mis compañeros y amigos de carrera, Fernanda, Carlos, Carolina, Lizeth, Mario, entre otros, por hacer más alegres mis días. También a Katya por su apoyo antes de mi presentación de tesis.

A mis amigas: Michelle por siempre estar cuando más la necesito, a mi mejor amiga desde la infancia Diana y a Yadira por su generosidad y acompañarme en momentos complicados. A mis cuñadas: Jhovis y Allie por todo su cariño. También al profesor Calcáneo por prestarme a la Halo para poder terminar de escribir mi tesis.

Quiero agradecer muy en especial a Jose Manuel Valenzuela Salcido por su gran apoyo durante toda mi preparación académica.

Por último, no puedo expresar con palabras lo agradecida que estoy con mi familia. Doy gracias infinitas a mi esposo, mi mejor amigo, por todas sus enseñanzas profesionales y de vida que son las que más valoro. Por su paciencia, asesoría, consejos, amor y por estar conmigo en todo momento, por ayudarme a llegar hasta donde estoy y por ayudarme a cumplir mis metas. Le agradezco por tener un papel fundamental en mi formación. A mis hijos Diego y Davros por todo su amor. Por recargarme de energía día tras día, e inspirarme para que no me rinda.

Contenido

Lista de Figuras III

Introducción 1

1 Grafos 2

1.1. Grafos . . . 2

1.1.1. Representaciones matriciales de los grafos . . . 11

1.2. Grafos simples . . . 13

1.3. Subgrafos . . . 14

1.4. Grafos conexos . . . 15

1.5. Caminos y ciclos eulerianos . . . 20

1.6. Caminos y ciclos hamiltotianos . . . 24

1.7. Grafos dirigidos . . . 25

1.8. Estructuras arboreas . . . 30

2 Funciones entre grafos 34

2.1. Permutaciones . . . 34

2.1.1. Permutaciones cíclicas . . . 38

2.2. Homomorfismo entre grafos . . . 39

2.3. Isomorfismo entre grafos . . . 40

2.4. Automorfismo . . . 43

2.5. Involuciones . . . 45

2.6. Conteo de aristas . . . 46

2.7. Conjunto potencia . . . 50

3 Especies de estructuras **58**

3.1. Especies de estructuras 58

3.2. Transporte de estructuras 60

3.3. Especie $\mathcal{G}$ 64

3.4. Ejemplos de las diferentes formas de obtener especies de estructuras 69

3.4.1. Especies definidas usando los axiomas teóricos de conjuntos 69

3.4.2. Construcción explícita de especies 72

3.4.3. Definición de especies usando operaciones combinatorias 76

3.4.4. Especies de estructuras que se describen mediante una ecuación funcional 78

4 Series asociadas de estructuras **79**

4.1. Series asociadas a especies de estructuras 79

4.1.1. Serie exponencial de F 80

4.1.2. Serie generadora de tipos de F 87

4.1.3. Serie de índices de ciclo de F 91

Conclusiones **96**

Bibliografía **100**

Lista de Figuras

1.1. Vértice. 2
1.2. Ejemplo de aristas unidas a vértices. 2
1.3. Ejemplo de dominio y contradominio de la función de incidencia. 3
1.4. Ejemplo de grafos y de no grafos. 4
1.5. Correspondencia entre el conjunto A y el conjunto V por medio de la función φ. 5
1.6. Grafo. 6
1.7. Grafo singletón. 6
1.8. Grafos sin aristas. 7
1.9. Grafo etiquetado y no etiquetado. 7
1.10. Grafo con dos lazos. 9
1.11. Caminos. 10
1.12. Ciclos. 11
1.13. Grafo con lazo. 13
1.14. Grafo con aristas múltiples. 13
1.15. Grafos simples. 13
1.16. Tres subgrafos. 14
1.17. Dos subgrafos. 15
1.18. Grafo no conexo y grafo conexo. 15
1.19. Ejemplo de relación de equivalencia. 17
1.20. Grafo para ejemplo de clases de equivalencia. 18
1.21. Componentes conexas. 19
1.22. Grafo con camino de Euler. 20
1.23. Grafo con ciclo de Euler. 21
1.24. Ciclo de Euler $v_i v_i$. 23

1.25. Grafo con camino y ciclo de Hamilton. 24
1.26. Arista. 25
1.27. Ejemplo de dominio y contradominio de grafos dirigidos. 26
1.28. Grafo dirigido. 27
1.29. Grafo asociado a G_D. 30
1.30. Árbol y no árbol. 30
1.31. Bosque. 31
1.32. Árbol con raíz. 32
1.33. Árbol binario. 33
2.1. Grafo construido a partir de la función de incidencia. 35
2.2. Permutación P_4 aplicada a V de G. 35
2.3. Segunda permutación. 36
2.4. Permutaciones con grafos parte 1. 37
2.5. Permutación circular. 38
2.6. Homomorfismo. 40
2.7. Isomorfismo. 41
2.8. Automorfismo. 43
2.9. Función identidad de automorfismo. 44
2.10. Involución. 46
2.11. Un solo vértice. 47
2.12. Dos vértices. 47
2.13. Tres vértices. 48
2.14. Cuatro vértices. 48
2.15. Cinco vértices. 48
2.16. Grafo G_1. 51
2.17. Grafos con dos vértices. 52
2.18. Grafo con tres vértices. 53
2.19. Formas de un grafo. 54
2.20. Tres vértices. 55
2.21. Árbol con raíz. 56
2.22. Ciclo orientado. 57
3.1. Estructura s: Árbol con raíz. 59

3.2. Estructura lineal. 60
3.3. Diagrama de transporte de estructuras. 60
3.4. El transporte de estructuras como re-etiquetado de vértices. 61
3.5. Diagrama de transporte de grafos. 62
3.6. Tipo de isomorfismo. 62
3.7. Grafos G_1 y G_2. 63
3.8. Tipo de isomorfismo con etiqueta. 64
3.9. Elementos del conjunto $\mathcal{G}$[V]. 65
3.10. Elementos de la especie $\mathcal{G}$[V] y de la especie $\mathcal{G}$[U], respectivamente. 66
3.11. Esquema que ilustra la definición de especie de estructura $\mathcal{G}$. 67
3.12. Aplicando $\mathcal{G}$ [(123)] a los ocho grafos etiquetados en tres vértices. 68
3.13. Especie E. 72
3.14. Elementos de V y especie ϵ. 73
3.15. Especie singletón. 74
3.16. Especie E_2. 75
4.1. Especie de orden lineal. 81
4.2. Especie de permutación cíclica para $n = 2$ y $n = 3$ respectivamente. 83
4.3. Permutaciones cíclicas para $n = 3$. 83
4.4. Permutaciones cíclicas para n elementos. 84
4.5. Ejemplo de especies isomorfas. 87
4.6. Conjunto $\mathcal{G}$[3] que tiene 8 $\mathcal{G}$-estructuras. 89
4.7. Cuatro clases de equivalencia de $\mathcal{G}$[3]. 89
4.8. Los cuatro elementos del producto cociente $\mathcal{G}[3]/\sim$, es decir 4 tipos de isomorfismo. 89
4.9. Permutación de tipo (2, 1, 0, 1). 92
4.10. Permutación σ dada por el conjunto V. 93
5.1. Figura C.1: Los 7 puentes de Königsberg. 97
5.2. Figura C.2: Abstracción del mapa. 97
5.3. Figura C.3: Grafo con tres aristas menos. 98
5.4. Figura C.4: Grafos agregando una y dos aristas respectivamente. 98
5.5. Figura C.5: Grafos agregando 3 aristas (grafo abstracto de la ciudad de Königsberg). 99

Introducción

El objetivo principal de este trabajo, es realizar una revisión y presentación de los conceptos básicos de la teoría de grafos, que permita adentrarnos a la teoría combinatoria de especies de estructuras de una manera más amigable que la comúnmente abordada en los libros especializados en el área.

Para lograr este objetivo, las definiciones y conceptos se presentan acompañados de una representación visual, una descripción detallada de los elementos que la estructuran, así como ejemplos para lograr una conceptualización clara, esperando con esto que, aquellas personas que comienzan el estudio en el área de grafos y especies de estructuras encuentren una guía clara en este trabajo.

El documento lleva una secuencia de lo más básico o particular a lo más abstracto o general comprendido en cuatro capítulos: El Capítulo 1 abarca la teoría de grafos, comenzando por los elementos básicos de un grafo hasta su construcción. Además, se establecen diferentes clasificaciones de grafos que permiten entender toda su estructura. Una vez que el concepto de grafo y algunas de sus características y/o propiedades quedaron claras, se avanza al Capítulo 2 donde se presentan las relaciones (funciones) entre grafos; con el análisis de este tema se pueden comenzar a "manipular" los grafos, un tema de mucha utilidad en las aplicaciones de esta teoría. En este capítulo se incluye también una breve presentación del tema de "conteo de aristas". Para abordar los temas presentados en los Capítulos 1 y 2 de forma más exhaustiva de la que aquí se presenta, se recomienda al lector consultar las referencias [2] y [3]. El Capítulo 3 comienza con el estudio del concepto de especies de estructuras que consiste básicamente en considerar estructuras y morfismos para establecer relaciones con otras estructuras y morfismos mediante biyecciones [5]. En 1981 A. Joyal [4] mostró que el concepto de especie de estructura es efectivo en el tratamiento combinatorio de series formales de potencias. Finalmente, en el Capítulo 4 se asignan series formales de potencia a especies de estructuras y se realiza un análisis sobre estas series, para introducir el estudio de especies de una manera algebraica. En las conclusiones se incluye el problema que dio origen a la teoría de grafos: El problema de los 7 puentes de Königsberg, donde, utilizando parte de la teoría discutida a lo largo de la tesis, se presenta una solución a este problema con el objetivo de que el lector pueda visualizar el amplio campo de aplicación de la Teoría de Grafos.

Capítulo 1 | *Grafos*

En este capítulo se presenta una breve introducción a la teoría de grafos. La cual parte de la idea principal de representar de forma visual conjuntos de objetos abstractos en forma de vértices y la relación que estos pueden tener o no con otros vértices por medio de aristas. Se comienza presentando la definición formal de los elementos fundamentales de esta teoría que son los vértices y las aristas, con estos objetos se define el concepto de grafo y se realizan caracterizaciones y clasificaciones a lo largo del capítulo, los cuales serán de utilidad para los capítulos posteriores.

1.1. Grafos

Definición 1.1.1. *Vértice: Es cualquier elemento representado por un punto. Se denotará con* v_i*, donde* $i \in \mathbb{N}$*. En la Figura 1.7 se ilustra a un vértice etiquetado como* v_1*.*

Figura 1.1: Vértice.

Definición 1.1.2. *Arista: Es cualquier línea que se utiliza para unir dos vértices que se denominan extremos de la arista, la arista puede ser cerrada formando un ciclo (lazo o bucle), en este caso se dice que los extremos de la arista comparten el mismo vértice. Se denota con* a_i *a la arista donde* $i \in \mathbb{N}$*. En la Figura 1.2 se ilustra una arista etiquetada como* a_1*, unida con dos vértices y otra arista* a_2 *unida con un vértice formando un lazo.*

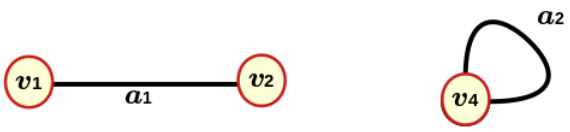


Figura 1.2: Ejemplo de aristas unidas a vértices.

Definición 1.1.3. *Función de incidencia φ: Es una regla de correspondencia que a cada elemento a_i de un conjunto de aristas A, le asigna un conjunto o subconjunto (elementos de un conjunto $V_{1,2}$) que consta de uno o dos vértices v_i de un conjunto de vértices V.*

Note que la función de incidencia φ tiene como dominio un conjunto A de aristas y como contradominio un subconjunto de V, denotado por $V_{1,2}$; es decir, $V_{1,2} \subseteq V$ y está formado por subconjuntos de 1 o 2 elementos de V que son extremos de las aristas; de aquí que $\varphi : A \to V_{1,2}$. Es importante señalar que φ puede o no ser sobreyectiva, es decir, puede o no asignar aristas del conjunto A a todos los vértices de V.

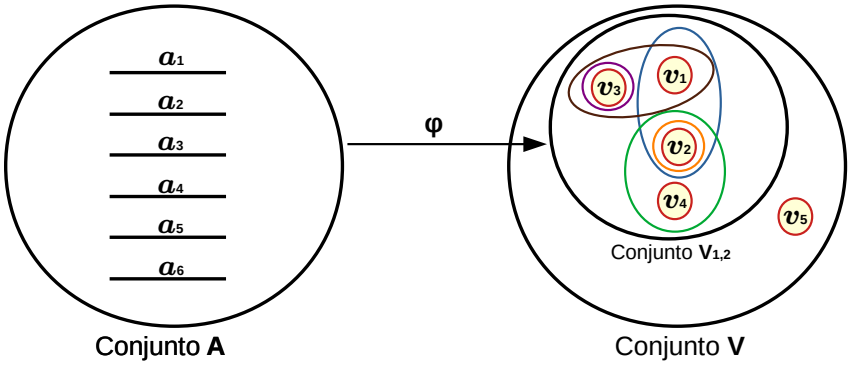


Figura 1.3: Ejemplo de dominio y contradominio de la función de incidencia.

En la Figura 1.3 se muestra en particular a una función φ que tiene como dominio un conjunto A compuesto por 6 elementos (seis aristas); como contradominio, se muestra a un conjunto $V_{1,2}$ que es un subconjunto de V y contiene cuatro vértices (v_1, v_2, v_3, v_4), los cuales forman los subconjuntos de $V_{1,2}$. En este mismo ejemplo, el conjunto $V_{1,2}$ está compuesto por cinco subconjuntos de 1 ó 2 elementos de V los cuales se muestran encerrados por óvalos de colores: el subconjunto encerrado de color café está formado por los vértices v_1, v_3. El subconjunto encerrado de color verde tiene a los elementos v_2, v_4. Los subconjuntos encerrados de color naranja y morado tienen un solo vértice, v_2 y v_3 respectivamente. Por último el subconjunto que está encerrado de azul contiene a v_1, v_2.

Definición 1.1.4. *Un grafo G es una estructura*[1] *no vacía formada por un conjunto de vértices (nodos) V, un conjunto de aristas (arcos) A y una función de incidencia φ. Se denotará con la siguiente terna.* [7]

$$G = (V, A, \varphi)$$

A manera ilustrativa se puede decir que un grafo es: un vértice o una arista con vértice en sus extremos o todas las combinaciones posibles entre las dos opciones anteriores tal y como se muestra en la Figura 1.4 donde también se presentan ejemplos de figuras que no cumplen con la definición de grafo, porque sus aristas no tienen vértice en todos sus extremos.

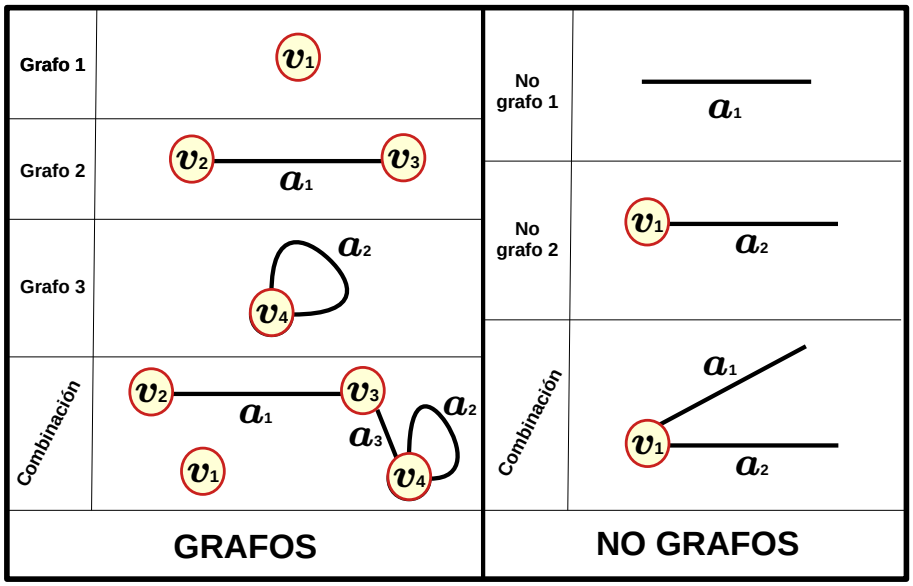


Figura 1.4: Ejemplo de grafos y de no grafos.

Es útil imaginar el siguiente escenario: Se tiene un conjunto de aristas A y un conjunto de vértices V y se desea construir algunos grafos con ellos, la función de incidencia es la regla que indica **cómo construir esos grafos** uniendo qué aristas con que vértices o dejando vértices aislados.

[1] Una estructura matemática se define como un conjunto de operaciones definidas sobre un conjunto de objetos y las relaciones o propiedades que se cumplen (o no) al operar los elementos del conjunto bajo las operaciones definidas.

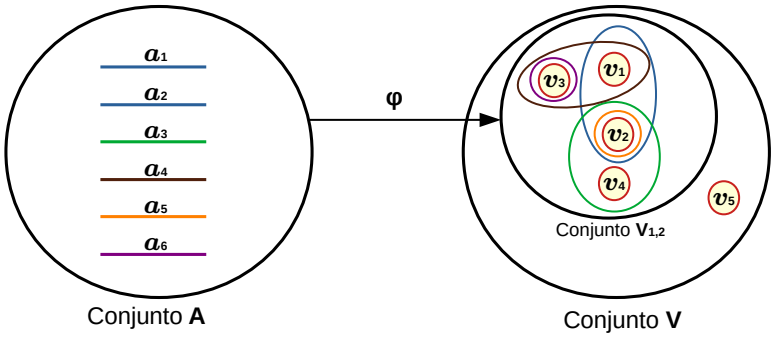


Figura 1.5: Correspondencia entre el conjunto A y el conjunto V por medio de la función φ.

Ejemplo 1.1.1. Dado un conjunto de aristas A, un conjunto de vértices V y una función de incidencia φ se puede construir un grafo utilizando la Figura 1.5.

1.- Sea A un conjunto de aristas.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

2.- Sea V un conjunto de vértices.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

3.- Sea φ la función de incidencia que relaciona los elementos del conjunto de aristas A con el conjunto $V_{1,2} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \} \subseteq V$ de la siguiente manera:

- $\varphi(a_1) = \{v_1, v_2\}$, esto quiere decir, si se aplica la función de incidencia a la arista a_1 (color azul) tendrá en sus extremos a los vértices v_1, v_2 (subconjunto azul).
- $\varphi(a_2) = \{v_1, v_2\}$, esto quiere decir, si se aplica la función de incidencia a la arista a_2 (color azul) tendrá en sus extremos a los vértices v_1, v_2 (subconjunto azul).
- $\varphi(a_3) = \{v_2, v_4\}$, esto quiere decir, si se aplica la función de incidencia a la arista a_3 (color verde) tendrá en sus extremos a los vértices v_2, v_4 (subconjunto verde).
- $\varphi(a_4) = \{v_1, v_3\}$, esto quiere decir, si se aplica la función de incidencia a la arista a_4 (color café) tendrá en sus extremos a los vértices v_1, v_3 (subconjunto café).
- $\varphi(a_5) = \{v_2\}$, esto quiere decir, si se aplica la función de incidencia a la arista a_5 (color naranja) tendrá en sus extremos al vértice v_2 (subconjunto naranja).
- $\varphi(a_6) = \{v_3\}$, esto quiere decir, si se aplica la función de incidencia a la arista a_6 (color morado) tendrá en sus extremos al vértice v_3 (subconjunto morado).

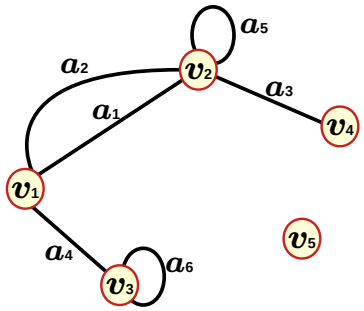


Figura 1.6: Grafo.

El grafo se puede estructurar como se muestra en la Figura 1.6. Observe que la función φ toma todos los elementos del conjunto de aristas A, pero en su contradominio (conjunto $V_{1,2}$) no necesariamente se eligen todos los elementos del conjunto de vértices V; ya que, el vértice v_5 no está relacionado con la función de incidencia φ. También observe que se puede relacionar una arista con un solo vértice o con dos vértices (de ahí el subíndice 1,2). La función φ de este ejemplo construye la Figura 1.6 al relacionar aristas con vértices específicos, si se toman otros vértices se tiene un grafo diferente. El diagrama de la Figura 1.6 cumple con la definición de grafo ya que, todas sus aristas tienen vértice en sus extremos.

Definición 1.1.5. *Un* **grafo singletón** *consta de un conjunto V con un solo vértice y un conjunto de aristas A que es vacío.*

Figura 1.7: Grafo singletón.

La Figura 1.8 muestra ejemplos de grafos donde el conjunto de aristas es vacío, los cuales pueden estar estructurados por 1, 2, 3 o más vértices.

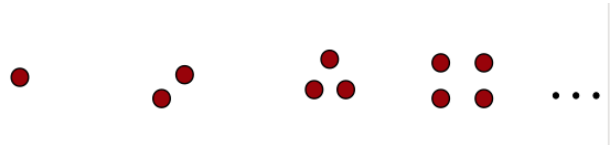


Figura 1.8: Grafos sin aristas.

Definición 1.1.6. *Un grafo etiquetado es un grafo con todos sus vértices y aristas etiquetados, es decir, nombrados de diferente manera, ya sea con números, letras o alguna otra asignación que los distinga; normalmente se representan con números enteros.*

Hasta ahora, los grafos que se han presentado en las Figuras 1.4 y 1.6 están etiquetados, sin embargo, un grafo puede estar no etiquetado, es decir que sus elementos (vértices y aristas) no tengan nombres, como se muestra en la Figura 1.9.

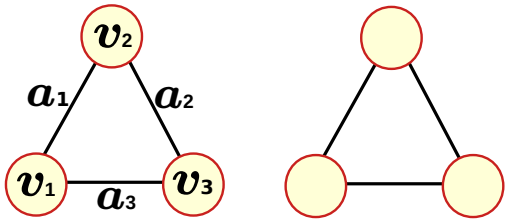


Figura 1.9: Grafo etiquetado y no etiquetado.

Utilizando el grafo de la Figura 1.6, se definirán y ejemplificarán algunas características que lo forman.

Definición 1.1.7. *Se llaman* **vértices adyacentes***, a los vértices que están unidos por una arista.*

En el grafo de la Figura (1.6)

v_1 es adyacente a v_2 y v_3

v_2 es adyacente a v_1, v_2 y v_4

v_3 es adyacente a v_1 y v_3

v_4 es adyacente a v_2

v_5 no es adyacente a ningún vértice.

Observe que los vértices v_2 y v_3 son adyacentes a sí mismos, ya que tienen una arista (bucle) que incide en ellos mismos.

Definición 1.1.8. *A los vértices que no son adyacentes a ningún otro se les conoce como* **vértices aislados**.

En el grafo de la Figura 1.6 v_5 es aislado.

Definición 1.1.9. *Las* **aristas incidentes en un vértice** *son aquellas que tienen a dicho vértice por extremo.*

En el grafo de la Figura 1.6

a_1, a_2 y a_4 son incidentes en el vértice v_1

a_1, a_2, a_3 y a_5 son incidentes en el vértice v_2

a_4 y a_6 son incidentes en el vértice v_3

a_3 es incidente en el vértice v_4

Ninguna arista incide en el vértice v_5

Definición 1.1.10. *Las aristas que tienen un único vértice en común se llaman* **aristas adyacentes**.

En el grafo de la Figura 1.6

a_1 y a_4 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_1.

a_2 y a_4 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_1.

a_1 y a_3 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2.

a_1 y a_5 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2.

a_2 y a_3 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2.

a_2 y a_5 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2.

a_3 y a_5 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2.

a_4 y a_6 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_3.

Definición 1.1.11. *Las* **aristas paralelas** *son aristas que en ambos extremos tienen los mismos vértices.*

En el grafo de la Figura 1.6

Las aristas a_1 y a_2 son paralelas ya que tienen los vértices v_1 y v_2 en común. Estas aristas (a_1 y a_2) también son un ejemplo de aristas no adyacentes.

Definición 1.1.12. *Como se mencionó en la definición de arista, los* **bucles o lazos** *son aristas con ambos extremos en el mismo vértice.*

En el grafo de la Figura 1.6

a_5 y a_6 son lazos. La arista a_5 tiene sus extremos en el vértice v_2 y en la arista a_6 ambos extremos inciden en el vértice v_3.

El grafo de la Figura 1.10 está formado con un solo vértice y dos aristas que son lazos que inciden sobre el mismo vértice.

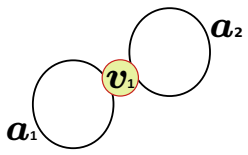


Figura 1.10: Grafo con dos lazos.

Observe que, en este grafo el único vértice (v_1) cumple con ser un vértice adyacente a él mismo y las aristas a_1 y a_2 cumplen con ser aristas paralelas ya que la función de incidencia en este grafo se define como: $\varphi(a_1) = \{v_1\}$ y $\varphi(a_2) = \{v_1\}$, ambas funciones tienen el mismo contradominio (subconjunto que tiene como único elemento a v_1) lo que cumple con la definición de aristas paralelas.

Definición 1.1.13. *El* **grado** *de un vértice v_i denotado por $g(v_i)$, indica la cantidad de aristas que inciden en v_i. Los lazos se cuentan dobles.*

En el grafo de la Figura 1.6

$$g(v_1) = 3$$
$$g(v_2) = 5$$

$$g(v_3) = 3$$
$$g(v_4) = 1$$
$$g(v_5) = 0$$

Definición 1.1.14. *Un* **camino o trayectoria** *es una sucesión de aristas adyacentes que llevan de un vértice a otro. Si todos los vértices del camino son distintos se le llama* **camino simple** *y si algún vértice se repite entonces el camino es* **no simple**. *Para cuantificar* **la longitud de un camino** *se cuentan la cantidad de aristas que llevan de un vértice a otro.*

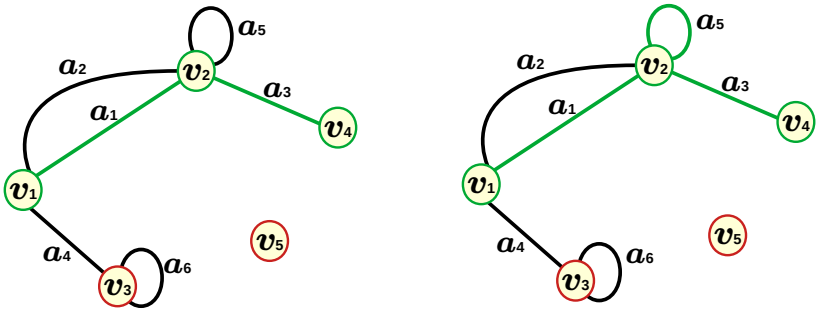


Figura 1.11: Caminos.

Ejemplo 1.1.2. La Figura 1.11 muestra dos posibles caminos del vértice v_1 al vértice v_4 (líneas de color verde). Para el primer camino se utilizan las aristas adyacentes a_1 y a_3 y se denotará $CA_1 = (v_1; a_1; v_2; a_3; v_4)$, este camino es un **camino simple** ya que su trayectoria no repite ningún vértice. Para el segundo camino se utilizan las aristas adyacentes a_1, a_5 (lazo) y a_3 y se denota $CA_2 = (v_1; a_1; v_2; a_5; v_2; a_3; v_4)$, este camino es un **camino no simple** ya que se repite el vértice v_2.

La **longitud** del primer camino es 2, ya que está compuesto por las aristas a_1 y a_3. La **longitud** del segundo camino es 3, ya que, las aristas a_1, a_5 y a_3 forman el camino (trayectoria).

Definición 1.1.15. *Un* ***ciclo*** *es un camino cerrado, es decir, es un camino que comienza y termina en el mismo vértice. Si todos los vértices del camino son distintos se le llama* ***ciclo simple*** *y si algún vértice se repite entonces el* ***ciclo es no simple***.

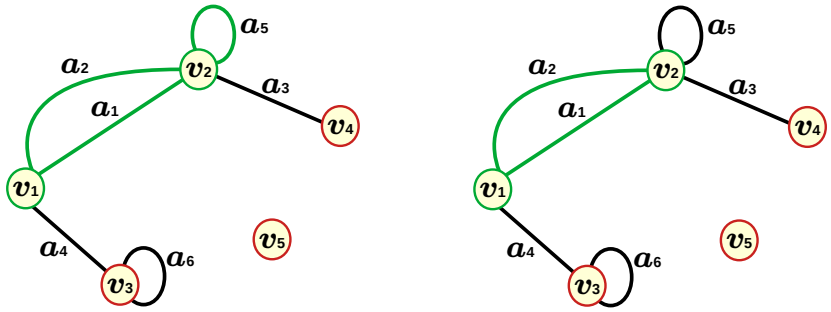


Figura 1.12: Ciclos.

Ejemplo 1.1.3. La Figura 1.12 nos muestra dos posibles ciclos que comienzan y terminan en el vértice v_1 (líneas de color verde). El primer ciclo se denota $CI_1 = (v_1; a_1; v_2; a_5; v_2; a_2; v_1)$, este ciclo es un **ciclo no simple** ya que este camino repite el vértice v_2. El segundo ciclo se denota $CI_2 = (v_1; a_1; v_2; a_2; v_1)$, este ciclo es un **ciclo simple** ya que su trayectoria no repite ningún vértice.

1.1.1. Representaciones matriciales de los grafos

Se verán dos formas matriciales de almacenar información de los grafos que son de mucha utilidad a la hora de utilizar la teoría de grafos en la resolución de problemas.

La **matriz de adyacencia** de un grafo G, denotada por $M_a(G)$, es una representación matricial de los vértices de un grafo G. Tanto las filas como las columnas representan a los vértices de G; por tanto, la matriz es cuadrada $(n \times n)$. Las entradas son exclusivamente ceros (0) cuando los vértices no son adyacentes entre sí o unos (1) cuando ambos vértices son adyacentes, de modo que se trata de una matriz booleana.

Ejemplo 1.1.4. Se obtendrá la matriz de adyacencia del grafo de la Figura 1.12.

M_a(G)=

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	1	0	1	0
v_3	1	0	1	0	0
v_4	0	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

Observe que la primera columna indica que el vértice v_1 es adyacente a los vértices v_2 y v_3, esto quiere decir que existe una arista de v_1 a v_2 y también una arista de v_1 a v_3. Las otras entradas de la primera columna tienen 0 ya que el vértice v_1 no es adyacente a los vértices v_1, v_4 y v_5, es decir, no hay una arista que una a v_1 con alguno de estos vértices.

La **matriz de incidencia** de un grafo G, denotada por $M_i(G)$, es una representación matricial de vértices y aristas de un grafo G. En esta matriz, las filas representan los vértices y las columnas representan las aristas de G. Es una matriz que no necesariamente cumple con ser cuadrada (como la matriz adyacente) pero sí es una matriz booleana donde sus entradas son uno (1) si el vértice es extremo de la arista, y cero (0) en caso contrario.

Ejemplo 1.1.5. Se construirá la matriz de incidencia del grafo de la Figura 1.12.

M_i(G)=

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	1	0	1	0	0
v_2	1	1	1	0	1	0
v_3	0	0	0	1	0	1
v_4	0	0	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0

Observe que la primera columna indica que la arista a_1 tiene en sus extremos a los vértices v_1 y v_2, la segunda columna a_2 tiene valor uno en los vértices v_1 y v_2, eso quiere decir que la arista a_2 tiene en sus extremos a esos vértices. La arista a_3 tiene en sus extremos a los vértices v_2 y v_4, la arista a_4 tiene en sus extremos a los vértices v_1 y v_3, como las aristas a_5 y a_6 son lazos solo tienen un único 1 en sus entradas.

Observe que la fila del vértice V_5 es una fila donde sus entradas son todos ceros, ya que este vértice es aislado.

1.2. Grafos simples

Definición 1.2.1. *Un grafo G es simple si y sólo si no tiene lazos ni aristas múltiples o paralelas.*

Observe que el grafo de la Figura 1.13 es un **grafo no simple**, ya que tiene una arista de color verde (a_2) que es un lazo.

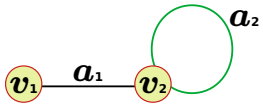


Figura 1.13: Grafo con lazo.

El grafo de la Figura 1.14 es un **grafo no simple**, ya que las aristas a_2 y a_3 (líneas de color verde) son aristas paralelas o aristas múltiples.

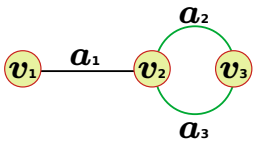


Figura 1.14: Grafo con aristas múltiples.

La Figura 1.15 es un ejemplo de grafos simples, es decir son grafos que no tienen bucles ni aristas paralelas.

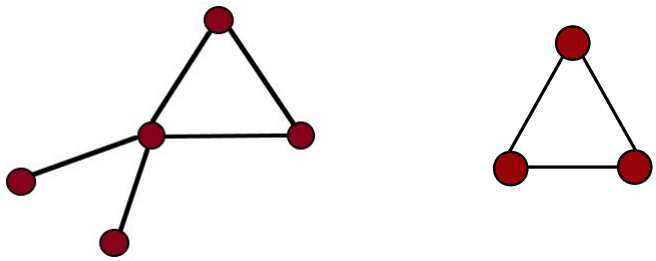


Figura 1.15: Grafos simples.

1.3. Subgrafos

Definición 1.3.1. *Dado $G = (V, A, \varphi)$ un grafo. Un subgrafo de G es un grafo G' donde su terna está formada por un conjunto de vértices V' que cumple con ser un subconjunto de V esto es $V' \subseteq V$, un conjunto de aristas A' que es un subconjunto de A esto es $A' \subseteq A$ y una función de incidencia $\varphi_{A'}$.*

$$G' = (V', A', \varphi_{A'})$$

Una forma de obtener un subgrafo G' a partir de un grafo G es suprimiendo o eliminando vértices y/o aristas. Cuando se eliminan o **suprimen uno o varios vértices** de un grafo, también se tienen que suprimir las aristas que inciden en esos vértices para que, la estructura obtenida cumpla con la definición de grafo (subgrafo). Cuando se **suprime una o varias aristas** de un grafo, no se necesitan quitar los vértices que inciden, ya que si quedan vértices sin aristas entonces se tienen vértices aislados en el nuevo grafo (subgrafo).

Ejemplo 1.3.1. La Figura 1.16 muestra tres ejemplos de subgrafos del grafo de la Figura 1.6. Observe que, para obtener el primero subgrafo (Figura 1.16 lado izquierdo) se suprimió un vértice (v_3) y con ello las aristas que incidían en él, es decir las aristas a_4 y a_6. Para obtener el subgrafo ubicado al centro de la Figura 1.16 se le suprimieron los vértices v_1 y v_3 y con ellos las aristas a_1, a_2, a_4 y a_6. Al último subgrafo (Figura 1.16 lado derecho) se le suprimieron 3 vértices (v_2, v_4 y v_5) y las aristas que incidían en esos vértices.

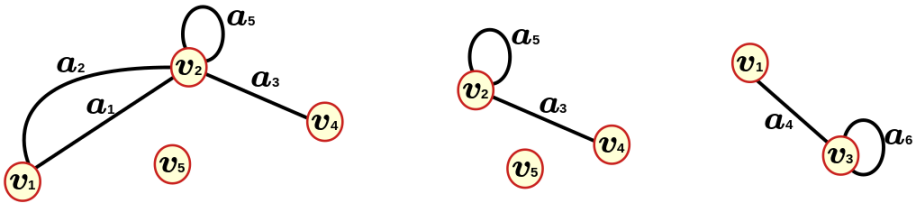


Figura 1.16: Tres subgrafos.

Ejemplo 1.3.2. La Figura 1.17 muestra también dos ejemplos de subgrafos del grafo de la Figura 1.6. El primer subgrafo (Figura 1.17 lado izquierdo) se obtuvo al suprimir solamente a la arista a_2, con esta modificación ahora se tiene un grafo que no tiene aristas paralelas. Al segundo subgrafo (Figura 1.17 lado derecho) también se le suprimió una sola arista (a_3), y ahora el nuevo grafo (subgrafo) tiene dos vértices aislados que son el v_4 y v_5.

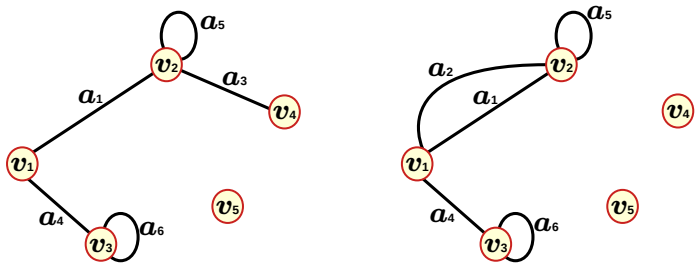


Figura 1.17: Dos subgrafos.

1.4. Grafos conexos

Definición 1.4.1. *Un grafo $G = (V, A, \varphi)$ es conexo si y sólo si cada par de vértices está conectado por un camino (trayectoria), es decir, si para cualquier par de vértices (v_i, v_j) de G, existe al menos una arista que los conecta.*

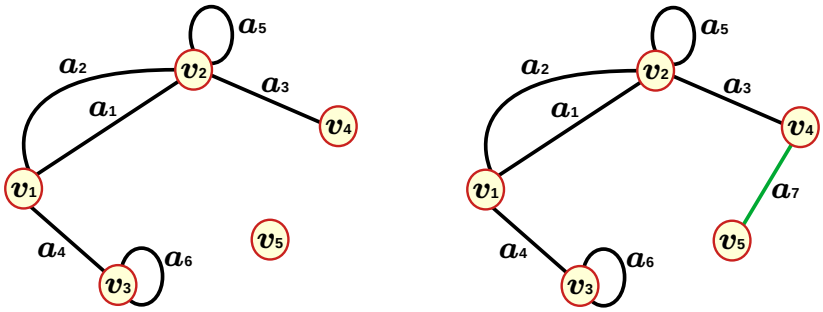


Figura 1.18: Grafo no conexo y grafo conexo.

Ejemplo 1.4.1. La Figura 1.18 (lado izquierdo) nos muestra un ejemplo de un **grafo no conexo** ya que no hay un camino del vértice v_5 a cualquier otro vértice del grafo.

Si se agrega una nueva arista a_7 (línea verde) a la Figura 1.18 (lado derecha) que conecta al vértice aislado (v_5) con cualquier vértice del grafo, en este caso se conectó con el vértice v_4 se obtiene un **grafo conexo**, ya que para cualquier par de vértices del grafo existe al menos un

camino que los conecta.

Definición 1.4.2. *Sea V el conjunto de vértices no vacío de un grafo $G = (V, A, \varphi)$. Tomando $v_i, v_j \in V$. Se define la* ***relación de conectividad*** *$\mathcal{R}$ en V como:*

$$v_i \ \mathcal{R} \ v_j \Leftrightarrow \exists \text{ un camino de } v_i \text{ a } v_j \vee V_i{=}V_j$$

Esto se lee: V_i está conectado con V_j o V_j está conectado con V_i (ya que no se ha establecido dirección en el grafo por lo que se dirá que es un **grafo no dirigido**) si existe un camino de V_i a V_j o si V_i es igual a V_j.

Esta función $\mathcal{R}$ cumple con las propiedades de **relación de equivalencia** sobre V, es decir, cumple:

- **Reflexividad:** Todo vértice de V está relacionado consigo mismo. Es decir,

$$\forall \quad v_i \in V : v_i \ \mathcal{R} \ v_i$$

- **Simetría:** Si un vértice de V está relacionado con otro, entonces ese otro vértice también se relaciona con el primero. Es decir,

$$\forall \ v_i, \ v_j \in V : \text{Si } v_i \ \mathcal{R} \ v_j \Rightarrow v_j \ \mathcal{R} \ v_i$$

- **Transitividad:** Si un vértice de V está relacionado con otro, y ese otro a su vez se relaciona con un tercer vértice, entonces el primero estará relacionado también con este último. Es decir,

$$\forall \ v_i, \ v_j, \ v_k \in V : \text{Si } v_i \ \mathcal{R} \ v_j \wedge v_j \ \mathcal{R} \ v_k \Rightarrow v_i \ \mathcal{R} \ v_k$$

Ejemplo 1.4.2. Se usará el grafo de la Figura 1.19 para ejemplificar las propiedades de equivalencia definidas anteriormente.

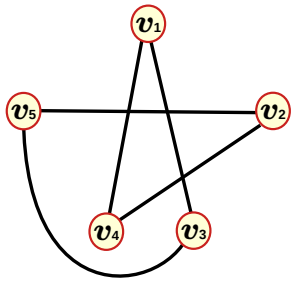


Figura 1.19: Ejemplo de relación de equivalencia.

- **Reflexividad:** Cada vértice del grafo esta relacionado consigo mismo, ya que no es necesario que exista un camino para poder llegar a el mismo.

$$v_1 \mathcal{R} v_1$$
$$v_2 \mathcal{R} v_2$$
$$v_3 \mathcal{R} v_3$$
$$v_4 \mathcal{R} v_4$$
$$v_5 \mathcal{R} v_5$$

- **Simetría:** Si un vértice del grafo está conectado a otro vértice mediante una arista entonces están relacionados entre sí.

$$v_1 \mathcal{R} v_3 \Rightarrow v_3 \mathcal{R} v_1$$
$$v_1 \mathcal{R} v_4 \Rightarrow v_4 \mathcal{R} v_1$$
$$v_2 \mathcal{R} v_5 \Rightarrow v_5 \mathcal{R} v_2$$
$$v_2 \mathcal{R} v_4 \Rightarrow v_4 \mathcal{R} v_2$$
$$v_3 \mathcal{R} v_5 \Rightarrow v_5 \mathcal{R} v_3$$

- **Transitividad:** Si un vértice del grafo está conectado con otro mediante una arista, entonces están relacionados, y si ese otro vértice a su vez se relaciona con un tercero (están conectados por una arista), entonces el primero estará relacionado también con este último.

Tomando v_1, v_3, v_5 del grafo. Entonces

$$v_1 \mathcal{R} v_3 \wedge v_3 \mathcal{R} v_5 \Rightarrow v_1 \mathcal{R} v_5$$

Esto significa que el vértice v_1 está conectado (relacionado) con el vértice v_5 mediante un camino (trayectoria) que está formado por 2 aristas. Observe que no se necesitaron etiquetar las aristas para poder probar estas propiedades.

Como $\mathcal{R}$ cumple con ser una relación de equivalencia sobre el conjunto de vértices V de los grafos no dirigidos entonces se puede determinar las clases de equivalencia.

Definición 1.4.3. *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre un grafo $G = (V, A, \varphi)$. El conjunto de todos los vértices de V que están relacionados (conectados por un camino) a un vértice v_i^* con $i = 1, 2, 3 \ldots n$ de V, es llamado clase de equivalencia de G y se denota por $[v_i^*]$. Es decir:*

$$[v_i^*] = \{v_i \in V | v_i \mathcal{R} v_i^*\} \text{ donde } [v_i^*] \text{ es una partición de } G.$$

Ejemplo 1.4.3. Se obtendrán las clases de equivalencia del grafo de la Figura 1.20.

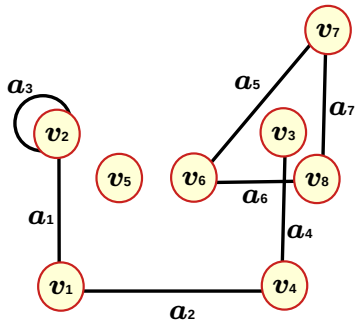


Figura 1.20: Grafo para ejemplo de clases de equivalencia.

En este caso las clases de equivalencia son:

$$\begin{aligned} [v_1] &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = [v_2] = [v_3] = [v_4] \\ [v_5] &= \{v_5\} \\ [v_6] &= \{v_6, v_7, v_8\} = [v_7] = [v_8] \end{aligned}$$

Observe que la clase de equivalencia de v_1, que se denota $[v_1]$, representa al subconjunto que tiene como elementos a todos los vértices que están conectados a v_1 mediante un camino. Las clases $[v_2]$, $[v_3]$ y $[v_4]$ son iguales a la clase $[v_1]$ ya que todos los vértices están relacionados entre sí, es decir $[v_1] = [v_2] = [v_3] = [v_4]$.

La clase de v_5 ($[v_5]$) está formada solo por el vértice v_5, ya que es un vértice aislado y no está conectado con otro vértice por algún camino.

La clase de v_6 ($[v_6]$) representa al subconjunto que tiene como elementos a todos los vértices que se pueden conectar con v_6 mediante un camino o trayectoria. Las clases $[v_7]$, $[v_8]$ son iguales a la clase $[v_6]$ ya que todos los vértices están relacionados entre sí.

Se obtuvieron tres clases de equivalencia distintas del grafo de la Figura 1.20, la clase $[v_1]$ que será la que representa a los elementos v_1, v_2, v_3 y v_4, ya que las otras son equivalentes a la clase de v_1. La segunda clase será $[v_5]$ que es la que representa solo al elemento v_5 y la clase $[v_6]$ que es la que representa a los vértices v_6, v_7 y v_8.

Gráficamente las tres clases de equivalencia del grafo de la Figura 1.20 se representan de la siguiente manera (ver Figura 1.21):

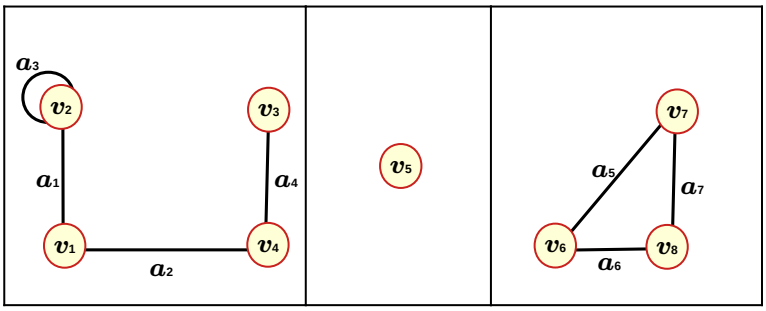


Figura 1.21: Componentes conexas.

Observe que las clases de equivalencia hacen una partición en el grafo original, es decir parte al conjunto de vértices con sus aristas incidentes, en **subconjuntos disjuntos de** G (subconjuntos que no tienen ningún vértice en común), llamados **componentes conexas de** G. Estas componentes conexas son subgrafos que cumplen con ser conexos y además son los subgrafos conexos más amplios posibles, es decir, son subgrafos conexos que no están estrictamente contenidos en ningún otro subgrafo conexo. Todo grafo se puede descomponer en sus componentes conexas y al unirlas forman el grafo original G.

1.5. Caminos y ciclos eulerianos

Definición 1.5.1. *A un camino que recorre todas las aristas de un grafo G solo una vez se le conoce como* ***camino de Euler o camino euleriano****.*

Una condición necesaria para que un grafo G tenga un camino euleriano es que sea un grafo conexo y todos sus vértices tengan grado par, o a lo más dos vértices tengan grado impar.

Ejemplo 1.5.1. Observe el grafo de la Figura 1.22.

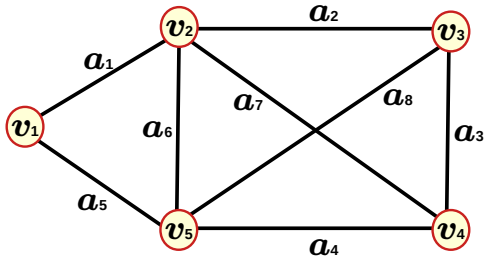


Figura 1.22: Grafo con camino de Euler.

Este grafo cumple con la condición mencionada anteriormente, ya que todos los vértices están conectados o tienen un camino entre ellos, esto quiere decir que es un **grafo conexo** y los grados de sus vértices son los siguientes:

$$g(v_1) = 2$$
$$g(v_2) = 4$$
$$g(v_3) = 3$$
$$g(v_4) = 3$$
$$g(v_5) = 4$$

Este grafo tiene **3 vértices de grado par (v_1, v_2, v_5) y 2 vértices de grado impar** (v_3, v_4), entonces tiene un **camino euleriano**. El camino euleriano se comienza y se termina en los vértices de grado impar, si se comienza por el vértice v_3, se terminará en el vértice v_4. El camino euleriano no puede repetir aristas, pero sí vértices, si repite algún vértice se dice que

es un **camino euleriano no simple** y si no repite vértices se tiene un **camino euleriano simple**.

Camino euleriano del grafo de la figura (1.22):

$$CA_E = (v_3; a_2; v_2; a_1; v_1; a_5; v_5; a_4; v_4; a_7; v_2; a_6; v_5; a_8; v_3; a_3; v_4)$$

Definición 1.5.2. *Un ciclo que pasa o recorre todas las aristas de un grafo G solo una vez, se le conoce como* ***ciclo de Euler o ciclo euleriano****.*

Una condición necesaria para que un grafo G tenga un ciclo euleriano es que sea un grafo conexo y todos sus vértices tengan grado par.

Ejemplo 1.5.2.

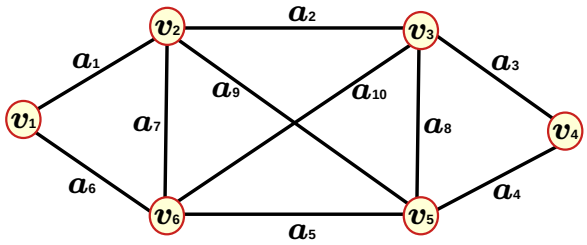


Figura 1.23: Grafo con ciclo de Euler.

La Figura 1.23 es un grafo que cumple con ser **conexo** y los grados de sus vértices son:

$$g(v_1) = 2$$
$$g(v_2) = 4$$
$$g(v_3) = 4$$
$$g(v_4) = 2$$
$$g(v_5) = 4$$
$$g(v_6) = 4$$

Todos los vértices de este grafo tienen **grado par** entonces tiene un **ciclo euleriano**. El ciclo euleriano comienza y termina en el mismo vértice, si se comienza por el vértice v_2, se

terminará en el vértice v_2. El ciclo euleriano no puede repetir aristas, pero sí vértices, si repite algún vértice entonces se le llama **ciclo euleriano no simple**, si no repite vértice entonces es un **ciclo euleriano simple**.

Ciclo euleriano del grafo de la figura (1.23):

$CI_E = (v_2; a_2; v_3; a_3; v_4; a_4; v_5; a_8; v_3; a_{10}; v_6; a_5; v_5; a_9; v_2; a_7; v_6; a_6; v_1; a_1; v_2)$

Definición 1.5.3. *Un grafo con un ciclo de Euler es un grafo de Euler.*

Proposición 1.5.1. *Sea G un grafo. Entonces si G tiene un ciclo de Euler, el grado de cada vértice es par, mientras que si G tiene un camino de Euler, G tiene exactamente dos vértices de grado impar (exactamente los vértices donde empieza y termina el camino).*

Demostración. Sea G un grafo en el que se tiene un ciclo de Euler. Suponga que se quiere conocer el grado de un vértice v_i, es decir, contar cuántos lados inciden en dicho vértice. Para esto, se toma el ciclo de Euler, y se recorre empezando en un vértice diferente al considerado. Conforme se recorre el ciclo de Euler se van contando las aristas que son incidentes en v_i. Ahora bien, cada vez que se pasa por v_i se tienen dos aristas incidentes en él, aquella por la que se llega a v_i y aquella por la que se sale de v_i, por tanto, el número total de aristas incidentes en v_i será el doble del número de veces que, al recorrer el ciclo se pase por el vértice v_i, dicho de otra manera, el grado de v_i es $g(v_i) = 2k$, donde k es el número de veces que se pasó por el vértice v_i por lo que siempre es un número par. Si se tiene un camino de Euler que empieza en v_i y termina en v_j, se añade al grafo una arista que une los vértices v_i y v_j. Con esta nueva arista se tiene un ciclo de Euler en el nuevo grafo. El grado de cada vértice es entonces par. Al eliminar la arista que se ha añadido, el grado de todos los vértices se mantiene igual, salvo el de los vértices v_i y v_j que disminuye en 1. Por tanto, estos dos vértices tendrán grado impar, y el resto tendrán grado par, lo que hace un camino de Euler. □

Se ha visto hasta el momento que existen condiciones necesarias para que un grafo tenga un ciclo o un camino de Euler. La siguiente condición es también suficiente.

Teorema 1.5.1. *Sea G un grafo conexo. Entonces G es un grafo de Euler si, y solo si, el grado de cada vértice es par.*

Antes de pasar a la demostración del teorema, veasé el siguiente lema:

Lema 1.5.2. *Sea G un grafo en el que cada vértice tiene grado mayor que 1. Entonces G contiene un ciclo.*

Demostración. Se elige un vértice cualquiera de V, por ejemplo, v_0. Puesto que el grado de v_0 es mayor que 1, se toma una arista que incida en v_0. Sea esta a_0 , y sea v_1 el otro vértice sobre el que incide a_0. Podría darse el caso de que $v_0 = v_1$, en cuyo caso se tiene un lazo y ese representa el recorrido. Si $v_0 \neq v_1$ y dado que v_1 tiene grado mayor que 1, debe haber otra arista incidente con v_1; sea esta a_1 y sea v_2 el otro vértice sobre el que incide a_1. Se tiene entonces el camino dado por C= $(v_0; a_0; v_1; a_1; v_2)$. Se continúa el proceso comenzando ahora con v_2 y recorriendo la arista que incide en v_2 y que sea distinta de a_1 hasta que se repita algún vértice (sin haber repetido ninguna arista). En cuanto esto ocurra, ya se habrá encontrado el ciclo que se busca. □

Nota: Los grafos que se están considerando son aquellos con un número finito de vértices y de aristas.

Teorema 1.5.1. Se hará la demostración por inducción sobre el número de aristas. El primer caso es para grafos con una sola arista. Como el grafo es conexo y tiene una sola arista, el grado del único vértice debe ser par, por definición, por lo que, la única posibilidad es que el grafo tenga un lazo, es decir, como el de la figura 1.24, en cuyo caso, hay un ciclo de Euler ya que se comienza y termina en el mismo vértice (camino $v_i v_i$) y por lo tanto es un grafo de Euler.

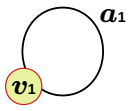


Figura 1.24: Ciclo de Euler $v_i v_i$.

Suponga que se tiene ahora un grafo conexo con n aristas, donde el grado de cada vértice es par, y suponga también que el resultado es cierto para cualquier grafo conexo con menor número de aristas. Por el lema precedente 1.5.2 se deduce que el grafo tiene un ciclo (C), puesto que el grado de cada vértice es mayor a 1.

Si se eliminan del grafo G todas las aristas que intervienen en el ciclo C_i, nos queda un grafo en el que todos los vértices tienen grado par (pues de cada vértice se han eliminado un número

par de lados que inciden en él). El grafo resultante no tiene que ser conexo necesariamente (ya que puede tener vértices aislados), pero cada una de sus componentes conexas sí lo es. Cada componente conexa debe tener al menos un vértice por el que se recorre el ciclo C. Para cada una de ellas que tenga al menos una arista, se tiene un ciclo de Euler. Sean estos ciclos $C_1, C_2, \ldots, C_r$. Para cada uno de estos ciclos C_i, se tiene un vértice v_i que también está en el ciclo C. Se recorre entonces el ciclo C. En cuanto se llegue a algún vértice v_i y se inserta el ciclo C_i, se continua con el ciclo C. De esta forma, al cerrar el ciclo C se habrá recorrido todos las aristas del grafo G una sola vez, es decir, se tiene un ciclo de Euler y por lo tanto es un grafo euleriano. □

1.6. Caminos y ciclos hamiltotianos

Definición 1.6.1. *Un camino que recorre todos los vértices de un grafo G sólo una vez (camino simple, donde el vértice de partida es distinto al vértice de llegada) se le conoce como* ***camino de Halmilton o camino hamiltoniano****.*

Definición 1.6.2. *Un ciclo que recorre todos los vértices de un grafo G sólo una vez (ciclo simple, donde el vértice de llegada coincide con el vértice de partida) se le conoce como* ***ciclo de Halmilton o ciclo hamiltoniano****.*

Ejemplo 1.6.1.

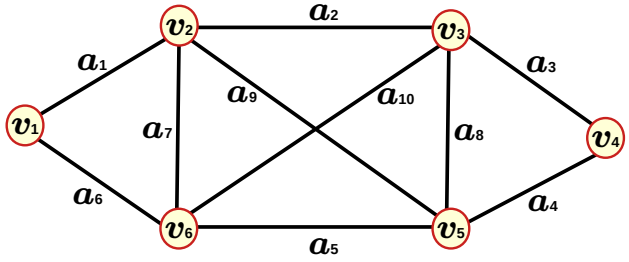


Figura 1.25: Grafo con camino y ciclo de Hamilton.

Observe que la Figura 1.25, es el mismo grafo que el de la Figura 1.23. Este grafo tiene camino y ciclo euleriano y también camino y ciclo hamiltoniano.

Camino y ciclo hamiltoniano del grafo de la Figura 1.25:

$CA_H = (v_1; a_1; v_2; a_2; v_3; a_3; v_4; a_4; v_5; a_5; v_6)$

$CI_H = (v_1; a_1; v_2; a_2; v_3; a_3; v_4; a_4; v_5; a_5; v_6; a_6; v_1)$

En el caso de los caminos y ciclos hamiltonianos no necesariamente tienen que recorrer todas las aristas del grafo G (como en los ciclos y caminos de Euler), en el ejemplo anterior Figura 1.25 en el caso del camino se recorrieron 5 aristas y en el caso del ciclo 6 aristas de las 10 que lo estructuran.

1.7. Grafos dirigidos

Definición 1.7.1. *Un grafo dirigido G_D es una estructura (terna) formada por un conjunto de vértices V (nodos), un conjunto de aristas (arcos) dirigidas A_D y una función de incidencia β. Esta estructura no debe ser vacía, es decir debe tener al menos un vértice.*

$$G_D = (V, A_D, \beta)$$

Donde el **conjunto de aristas dirigidas** A_D consta de todas las líneas que en uno de sus extremos tiene una flecha, es decir, son aristas que tienen una dirección. Estas líneas unen a dos vértices y permite identificar el vértice inicial del vértice final (de cada arista) como se ilustra en la Figura 1.26.

Figura 1.26: Arista.

En este caso, la función de incidencia β tiene como dominio al conjunto de aristas A_D y como contradomio a un conjunto $v_i \times v_j$ de V, donde a cada arista le hace corresponder un par ordenado $(v_i \times v_j)$ de vértices que son los extremos de las aristas. Esta función β nos permite realizar el diagrama o la estructura de un grafo dirigido.

$$\beta : a_i \to (v_i \times v_j)$$

donde v_i es el extremo inicial (origen) de la arista a_i y v_j es el extremo final de la arista a_i.

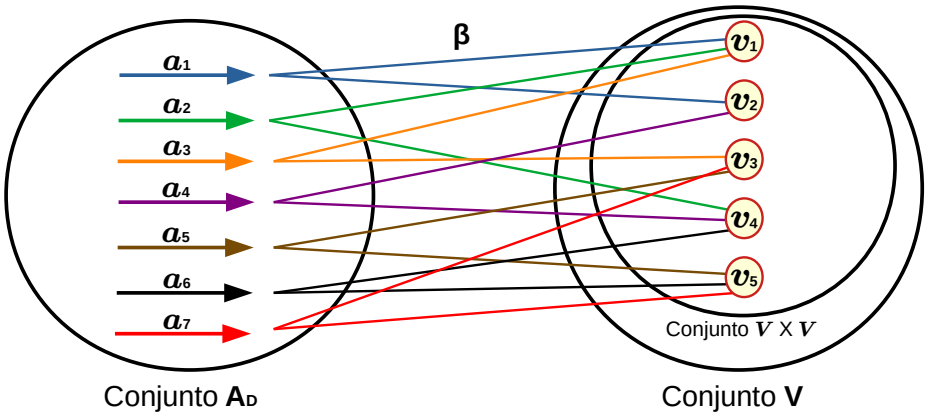


Figura 1.27: Ejemplo de dominio y contradominio de grafos dirigidos.

Observe la Figura 1.27, la función β va del conjunto de aristas dirigidas a un par ordenado (v_i, v_j) de $(v_i \times v_j)$ de V. Los colores de las aristas están relacionadas con el par ordenado de vértices que les asigna la función β, lo que no se puede apreciar con este diagrama de conjuntos es el orden de los vértices, es decir no se puede identificar cuál es el vértice inicial y final de las aristas.

Ejemplo 1.7.1. Utilizando la Figura 1.27 se construirá un grafo dirigido.

1.- Sea A_D un conjunto de aristas dirigidas.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

2.- Sea V un conjunto de vértices.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

3.- Sea β la función de incidencia que relaciona los elementos del conjunto de aristas A_D con el conjunto $v_i \times v_j$ de la siguiente manera:

$$\beta(a_1) = (v_1, v_2)$$
$$\beta(a_2) = (v_2, v_1)$$
$$\beta(a_3) = (v_2, v_4)$$
$$\beta(a_4) = (v_2, v_4)$$
$$\beta(a_5) = (v_3, v_1)$$
$$\beta(a_6) = (v_4, v_5)$$
$$\beta(a_7) = (v_3, v_5)$$

Si se toma $\beta(a_1) = (v_1, v_2)$, esto quiere decir, que si se aplica la función de incidencia a la arista a_1 tendrá en sus extremos a los vértices v_1, v_2, con v_1 como vértice inicial (extremo sin flecha) y a v_2 como vértice final (extremo con flecha).

El grafo se estructura parecido al de los grafos no dirigidos, solo que la diferencia es que en estos grafos se tienen extremos inicial y final de las aristas. Una manera de realizar el diagrama del grafo dirigido es la siguiente (ver Figura 1.28):

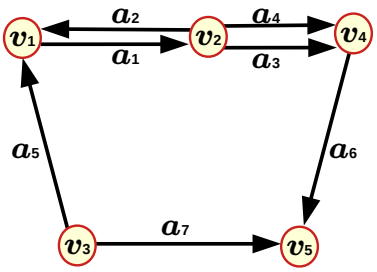


Figura 1.28: Grafo dirigido.

Ejemplo 1.7.2. Utilizando el grafo de la Figura 1.28 (anterior), se definirán y ejemplificarán algunas características de los grafos dirigidos.

Definición 1.7.2. *Se define* ***extremo inicial*** *de una arista al vértice origen (sin flecha) y* ***extremo final*** *de una arista al vértice final (con flecha).*

- Extremo inicial de a_1 es v_1 y el final es v_2
- Extremo inicial de a_2 es v_2 y el final es v_1
- Extremo inicial de a_3 es v_2 y el final es v_4
- Extremo inicial de a_4 es v_2 y el final es v_4
- Extremo inicial de a_5 es v_3 y el final es v_1
- Extremo inicial de a_6 es v_4 y el final es v_5
- Extremo inicial de a_7 es v_3 y el final es v_5

Los **bucles** en los grafos dirigidos se definen igual que en los grafos no dirigidos. En este grafo dirigido (Figura 1.28) no hay bucles.

Definición 1.7.3. *Las **aristas paralelas** son las que están definidas entre los mismos vértices y apuntan en el mismo sentido.*

Las aristas a_3 y a_4 son paralelas ya que tienen los vértices v_2 y v_4 en común y las dos aristas tienen como vértice inicial (origen) v_2 y como vértice final v_4.

Definición 1.7.4. *Las **aristas antiparalelas** son las que tienen vértices en común y apuntan en sentido contrario.*

Las aristas a_1 y a_2 son antiparalelas ya que tienen los vértices v_1 y v_2 en común, donde la arista a_1 apunta al vértice v_2 y la arista a_2 apunta al vértice v_1.

Definición 1.7.5. *Los grafos dirigidos tienen cuatro tipos de **grados**: Grado positivo, grado negativo, grado total y grado neto.*

1. ***Grado positivo** es la cantidad de aristas que entran al vértice.*

$$g_+(v_1) = 2$$
$$g_+(v_2) = 1$$
$$g_+(v_3) = 0$$
$$g_+(v_4) = 2$$
$$g_+(v_5) = 2$$

2. ***Grado negativo** es la cantidad de aristas que salen del vértice.*

$$g_-(v_1) = 1$$
$$g_-(v_2) = 3$$
$$g_-(v_3) = 2$$
$$g_-(v_4) = 1$$
$$g_-(v_5) = 0$$

3. ***Grado total** es la suma de los grados positivos y negativos. Si se quitarán los sentidos (flechas de las aristas) sería el grado de los grafos no dirigidos.*

$$g_t\ (v_1) = 3$$
$$g_t\ (v_2) = 4$$
$$g_t\ (v_3) = 2$$
$$g_t\ (v_4) = 3$$
$$g_t\ (v_5) = 2$$

4. ***Grado neto*** *es la diferencia entre los grados positivos y negativos.*

$$g_n\ (v_1) = 1$$
$$g_n\ (v_2) = -2$$
$$g_n\ (v_3) = -2$$
$$g_n\ (v_4) = 1$$
$$g_n\ (v_5) = 2$$

Definición 1.7.6. *El* ***pozo*** *es un vértice v_i que su grado negativo es igual a cero ($g_-(v_i) = 0$), esto quiere decir que v_i no es extremo inicial de ninguna arista.*

El vértice v_5 es un pozo, ya que las aristas a_6 y a_7 inciden en él de manera positiva (no hay aristas que salen del vértice).

Definición 1.7.7. *Se considera* ***fuente*** *a un vértice v_i que su grado positivo (grado entrada) es igual a cero ($g_+(v_i) = 0$), esto quiere decir que v_i no es extremo final de ninguna arista.*

El vértice v_3 es una fuente, ya que las aristas a_5 y a_7 inciden en él de manera negativa (no hay aristas que llegan al vértice).

Definición 1.7.8. Grafo asociado a un grafo dirigido *es el grafo que resulta cuando se elimina el sentido o la dirección de las aristas de un grafo dirigido. Las aristas paralelas o antiparalelas se deben representar con una sola arista.*

Ejemplo 1.7.3.

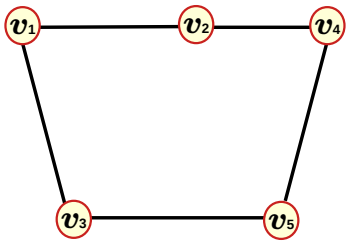


Figura 1.29: Grafo asociado a G_D.

Observe que la Figura 1.29 es el grafo asociado del grafo dirigido de la Figura 1.28, donde las aristas no tienen sentido y las aristas paralelas y antiparalelas se representan con una sola arista que no tienen flecha.

1.8. Estructuras arboreas

Las siguientes estructuras de árboles son grafos particulares, es decir cumplen con algunas características de los grafos.

Definición 1.8.1. *Un* **árbol** *es un grafo en el que todo par de vértices están conectados por un único camino y además no debe de tener caminos cerrados. Es decir, un árbol es un grafo conexo y sin ciclos (acíclico).*

Figura 1.30: Árbol y no árbol.

Observe que la Figura 1.30 (lado izquierdo) es una estructura o grafo que cumple con la definición de árbol, ya que, al ser conexo, se puede llegar de un vértice a otro mediante una sucesión de aristas. El grafo de la Figura 1.30 (lado derecho) no cumple con la definición de árbol ya que hay un ciclo o camino cerrado, lo que implica que, se puede iniciar y terminar en el mismo vértice.

Definición 1.8.2. *Un* **bosque** *es un grafo no conexo, el cual está formado por varios árboles.*

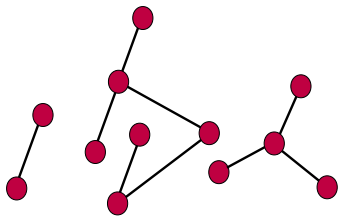


Figura 1.31: Bosque.

El grafo de la Figura 1.31 está compuesto por tres componentes conexas, que cumplen con ser árboles, es decir, cada componente es conexa y no tiene ciclos.

Definición 1.8.3. *Un* **grafo dirigido simple** *(sin lazos, sin aristas paralelas y sin aristas antiparalelas) es un árbol dirigido si su grafo asociado es un árbol.*

El grafo de la Figura 1.28 no es un árbol dirigido, ya que su grafo asociado (Figura 1.30) tiene ciclo y entonces no cumple con la definición de árbol.

Definición 1.8.4. *Un* **árbol con raíz** *es un árbol dirigido donde cada vértice tiene grado positivo 1, excepto un vértice que tiene grado positivo cero (fuente), llamado raíz del árbol.*

Ejemplo 1.8.1. Sea $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ el conjunto de vértices del grafo G. Ver Figura 1.32.

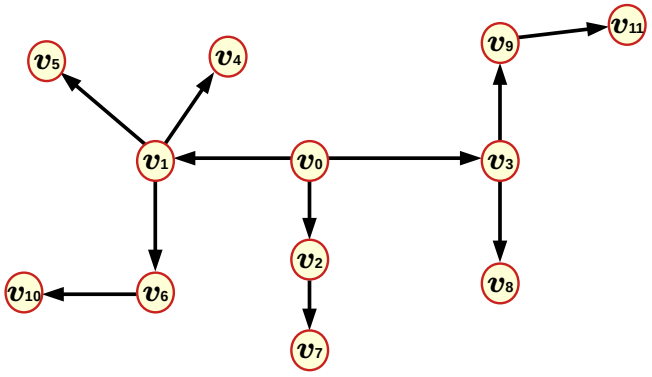


Figura 1.32: Árbol con raíz.

Observe que el vértice v_0 (raíz) está conectado con todos los vértices de G mediante una trayectoria o camino (único). Una trayectoria puede componerse de varías aristas, por ejemplo, el vértice v_5 está conectado a la raíz (v_0) mediante dos aristas, la que une v_0 con v_1 y la que une v_1 con v_5 . El vértice once (v_{11}) está conectado a la raíz v_0 mediante una trayectoria compuestas de tres aristas (ver Figura 1.32).

Se dice que G es un árbol con raíz (G, V_R) y se denota (G, v_0), donde v_0 se denomina raíz del árbol G y cualquier otro vértice de V es un vértice en G.

Definición 1.8.5. *Un* **árbol con raíz** (G, V_R) **es** n**-ario** *si y sólo si, todo vértice de V es un árbol con n vértices, con uno de ellos como raíz (V_R), el cuál está conectado con todos los demás vértices mediante una trayectoria única. En este árbol al menos un vértice tiene n subárboles (hijos).*

Un ejemplo particular de un árbol n-ario es el árbol binario o el árbol 2-ario.

Definición 1.8.6. *Un* **árbol binario** *es un árbol (conexo y acíclico), en el que ningún vértice puede tener más de dos subárboles (hijos, ramificaciones o sucesores). A cada subárbol se le llama grado, es decir, el vértice que tenga el mayor número de hijos (subárboles) definirá el grado del grafo. En los árboles binarios el grado de cada vértice es a lo sumo dos. Si en un grafo hay al menos un vértice que tiene tres subárboles (hijos) entonces es un árbol ternario.*

Ejemplo 1.8.2. Sea $G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ un árbol (ver Figura 1.33).

Observe que el vértice v_1 es la raíz porque está conectado con todos los vértices de G mediante una trayectoria o camino (única). El vértice v_1 tiene dos hijos (v_2 y v_3). Los vértice v_2 y v_5 también tienen dos hijos (Ver Figura 1.33), los vértices v_3 y v_6 tienen un solo hijo, observe que el vértice v_3 tiene como hijo el vértice v_6 y el vértice v_6 tiene como hijo el vértice v_9. Los vértices v_4, v_7, v_8 y v_9 no tienen hijos, en alguna literatura se le llaman hojas. Como el número máximo de hijos que se tienen en algún vértice es dos, entonces el grafo es de grado dos y se le llama árbol binario.

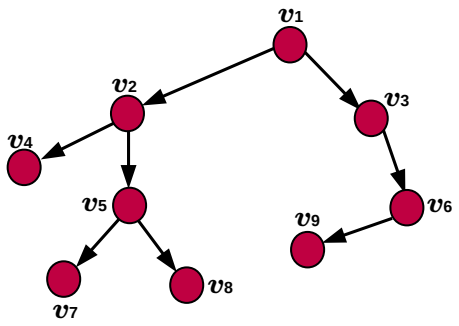


Figura 1.33: Árbol binario.

Hasta aquí se han construido algunos conceptos que permiten tener un panorama básico de la teoría de grafos y algunas de sus propiedades. En el siguiente capítulo se ampliará el panorama revisando parte de la teoría de grafos que involucra el estudio de funciones entre grafos.

Capítulo 2 | *Funciones entre grafos*

En el Capítulo 1 se caracterizaron y clasificaron los grafos, en este capítulo se construyen herramientas que permitan manipular grafos ya sea modificando su estructura, transformándolos o comparándolos con otros, lo que se conoce como funciones entre grafos. Además, se incluye una breve sección donde se aprende a cuantificar la cantidad de aristas que debe tener un grafo que se denomina completo.

2.1. Permutaciones

Definición 2.1.1. *Una permutación $P_n(v_i)$ de un conjunto*[1] *V es una función biyectiva de dicho conjunto en sí mismo, es decir $P_n : v_i \subset V \to V$, que establece un orden en los elementos v_i del conjunto V. Donde $n \in \mathbb{N}$ es un número que etiqueta a cada ordenación de los elementos de V.*

Se puede notar que dado un grafo $G(A, V, \varphi)$ al aplicarle una permutación P_n a sus correspondientes elementos de V se terminará con un grafo en general distinto que se denota por $G'(A, V, \varphi')$. Observe que la diferencia entre G y G' radica en que la permutación P_n modifica indirectamente a la función de incidencia; la cambia de φ a φ'. Tal y como se ilustra a continuación.

Ejemplo 2.1.1. Sea G un grafo donde $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ es el conjunto de vértices, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ el de aristas y $\varphi(v_i) = \{v_i, v_{i+1(mod3)}\} = a_i$ la función de incidencia. Utilizando la permutación $P_n(v_i)$, $i = 1, 2$ ó 3. Se encontrarán las formas diferentes de ordenar los elementos del conjunto V.

[1] En general se aplica sobre un conjunto numerable de elementos, como por ejemplo, se puede usar el conjunto de aristas. Se elige el conjunto de vértices ya que conviene para el análisis que se hará en el Capítulo 3 del tema de especies.

Se comenzará por construir el grafo G considerando la función de incidencia ϕ dada, es decir

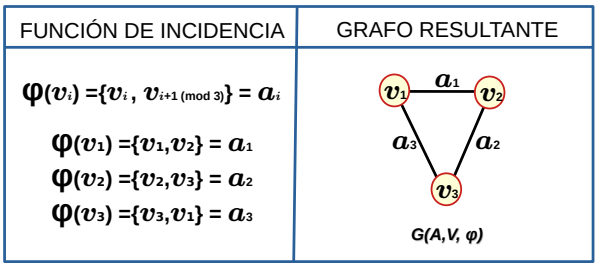


Figura 2.1: Grafo construido a partir de la función de incidencia.

Ahora se analizarán las posibles formas de permutar los vértices de G.

Una posible primera permutación $(n = 1)$ es

$$\begin{aligned} P_1(v_i) : v_1 &\mapsto v_1 \\ v_2 &\mapsto v_2 \\ v_3 &\mapsto v_3 \end{aligned}$$

A esta primera permutación que deja fijos a los elementos v_i se le llama *permutación identidad* de V. En la Figura 2.2 se comienza (de izquierda a derecha) mostrando al grafo inicial, la permutación identidad y el grafo final.

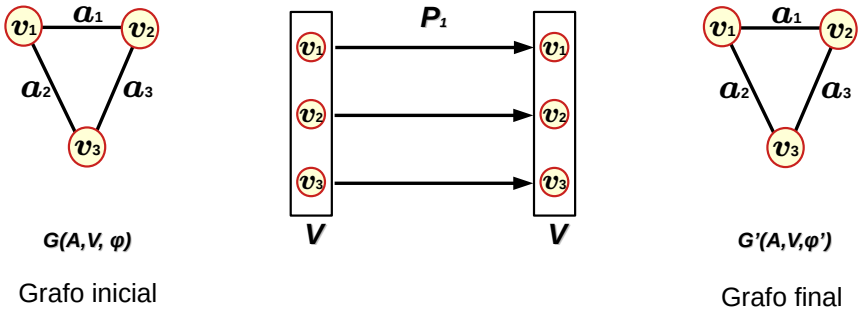


Figura 2.2: Permutación P_4 aplicada a V de G.

Una segunda permutación sería el conjunto de pares $\{(v_1, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$ que permuta la terna (v_1, v_2, v_3) en la terna (v_1, v_3, v_2).

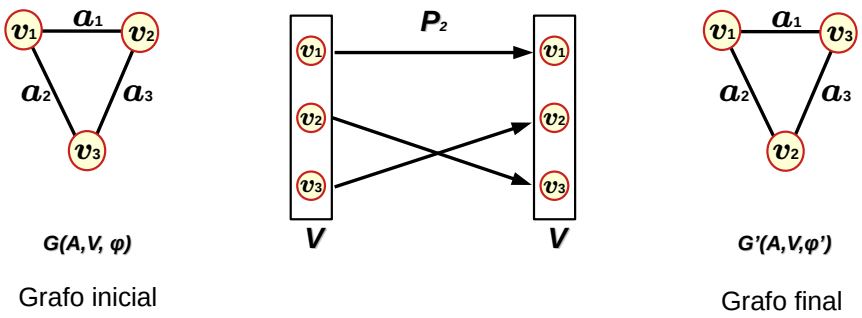


Figura 2.3: Segunda permutación.

Observe la Figura 2.3 que nos muestra que la permutación solo deja fijo a el vértice v_1 e intercambia a los vértices v_2 y v_3. La cual se denotará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_2(v_i) : v_1 &\mapsto v_1 \\ v_2 &\mapsto v_3 \\ v_3 &\mapsto v_2 \end{aligned}$$

En general, el total de permutaciones que se pueden obtener de V sobre V son 6 ya que son las permutaciones posibles sobre el conjunto V que tiene 3 elementos, estas permutaciones son $3! = 6$ y son igual al número de ordenaciones posibles sobre el conjunto V. Estas permutaciones se presentan como las siguientes 6 ternas:

$$(v_1, v_2, v_3),\ (v_1, v_3, v_2),\ (v_2, v_1, v_3),\ (v_2, v_3, v_1),\ (v_3, v_2, v_1),\ (v_3, v_1, v_2).$$

Las primeras dos permutaciones ya se ilustrarón en las figuras anteriores 2.2 y 2.3. En la Figura 2.4 se ilustran el resto. Con dichas figuras se observa que ninguna terna o grafo se repite, así una permutación es un caso particular de una variación sin repetición.

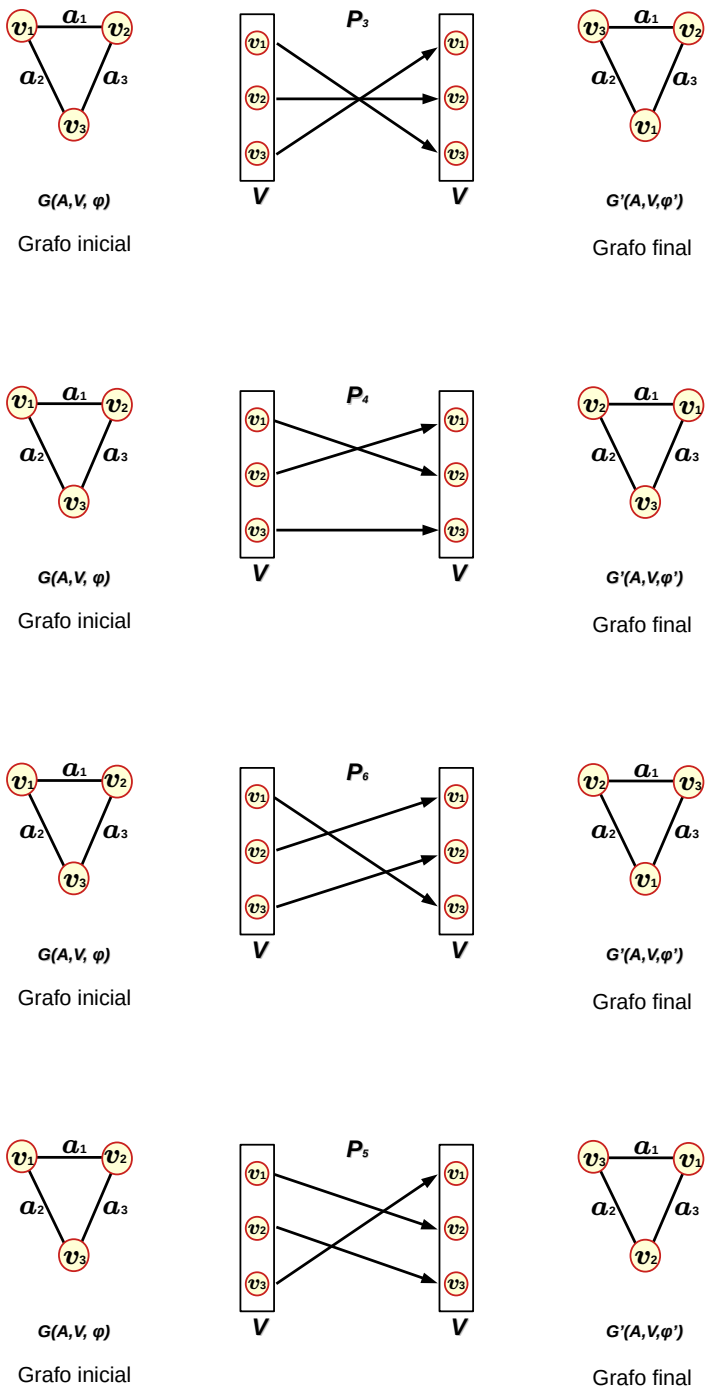


Figura 2.4: Permutaciones con grafos parte 1.

2.1.1. Permutaciones cíclicas

Definición 2.1.2. *Una permutación cíclica (o ciclo) es un tipo de permutación que fija cierto número de elementos (o quizá ninguno) mientras que mueve cíclicamente el resto de forma recíproca. En caso de no fijar ninguno, se denomina permutación circular.*

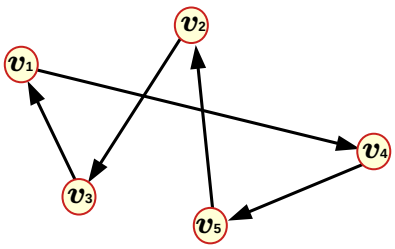


Figura 2.5: Permutación circular.

El grafo de la Figura 2.5 es un ejemplo de una **permutación circular**, cada uno de los vértices se permuta hacia otro vértice sin dejar ninguno fijo.

2.2. Homomorfismo entre grafos

Definición 2.2.1. *Dados G y G' dos grafos. Un homomorfismo entre G y G' es una función γ: $G \to G'$ que satisface lo siguiente: Para cada par de vértices adyacentes en G, sus imágenes $\gamma(v_i)$ y $\gamma(v_j)$ son vértices adyacentes de G'. Es decir, γ denominado homomorfismo de G y G' preserva la adyacencia en el conjunto de vértices.*

Un homomorfismo γ es una **función inyectiva** [2] pero no necesariamente sobreyectiva.

Ejemplo 2.2.1. A continuación se presenta un ejemplo de homomorfismo entre el grafo G cuyo conjunto de vértices está denotado como $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ y el de aristas como $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y el grafo G' con su respectivo conjunto de vértices representado por $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ y el de aristas como $A' = \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5, a'_6\}$.

En este caso se define al homomorfismo γ como sigue:

$$\gamma(\{f_1, f_2\}) = \gamma(a_1) = \{h_1, h_2\} = a'_1$$
$$\gamma(\{f_1, f_3\}) = \gamma(a_2) = \{h_1, h_3\} = a'_2$$
$$\gamma(\{f_2, f_3\}) = \gamma(a_3) = \{h_2, h_3\} = a'_3$$
$$\gamma(\{f_2, f_4\}) = \gamma(a_4) = \{h_2, h_4\} = a'_4$$
$$\gamma(\{f_4, f_5\}) = \gamma(a_4) = \{h_4, h_5\} = a'_5$$

Se ilustra la acción de γ en la Figura 2.6 donde, si se observa al grafo G' se puede notar que la función γ no manda ninguna arista o par de vértices del grafo G a la arista a'_6, que corresponde al par de vértices $\{h_3, h_6\}$ en G'. Esto ilustra que la función γ es una función inyectiva pero no sobreyectiva.

[2] Sea f una función cuyo dominio es el conjunto X, se dice que la función f es inyectiva si para todo a y b en X, si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$, esto es $f(a) = f(b)$ implica $a = b$.

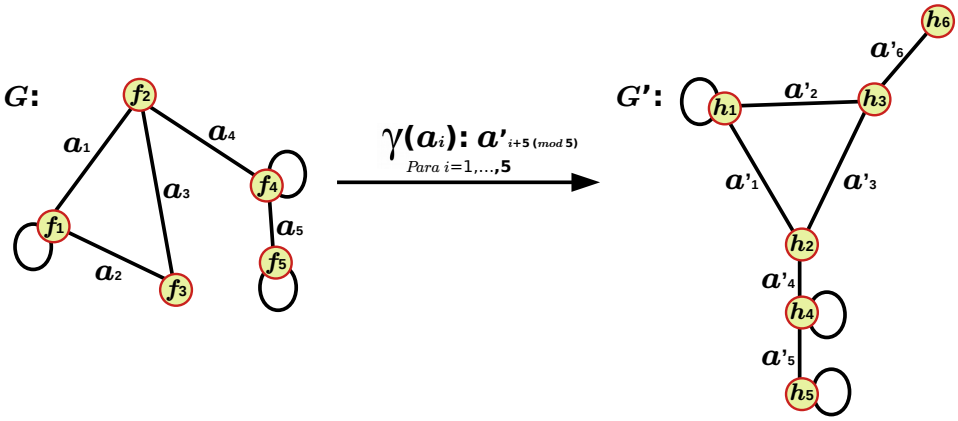


Figura 2.6: Homomorfismo.

Si un homomorfismo γ de los grafos G y G' cumple con ser una función biyectiva, es decir inyectiva y sobreyectiva entonces se dice que los grafos son isomorfos, lo cual se define a continuación (Sección 2.3).

2.3. Isomorfismo entre grafos

Definición 2.3.1. *Se dice que dos grafos G y G' son isomorfos, denotado por $G \simeq G'$, si y solo si existe una función biyectiva σ entre los conjuntos de sus vértices que preserva la relación de adyacencia. Esto es, $G \simeq G'$ si y sólo si existe $\sigma : V(G) \to V(G')$ tal que $\{v_i, v_j\} \in G$ si y sólo si $\{\sigma(v_i), \sigma(v_i)\} \in G'$.*

Considerando la definición de homomorfismo, se puede decir que un isomorfismo es un homomorfismo que admite un inverso, esto significa que hay una función biyectiva entre los grafos.

Con el siguiente análisis se puede verificar si dos grafos son isomorfos:

1. Deben tener la misma cantidad de vértices.
2. Deben tener la misma cantidad de aristas.
3. Deben tener el mismo grado, de manera que la función biyectiva envíe un vértice a otro vértice con el mismo grado.

Ejemplo 2.3.1. Utilizando los grafos de la Figura 2.7 se verificará si cumplen con la Definición 2.3.1.

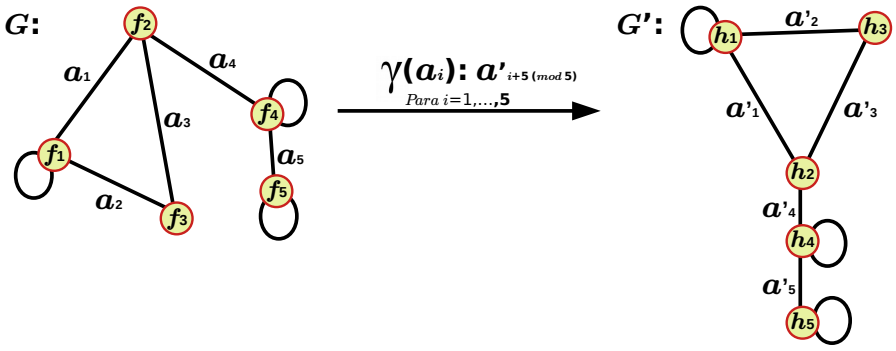


Figura 2.7: Isomorfismo.

Primero se verificará que cumplen con las tres condiciones:

1. Tiene la misma cantidad de vértices (ambos grafos tienen 5 vértices).

2. Tiene la misma cantidad de aristas (ambos grafos tienen 8 aristas).

3. Tienen el mismo grado (ambos son de grado 16).

La función biyectiva σ hace corresponder los vértices de la siguiente manera:

$$\sigma(f_1) = h_1, \text{ ambos tienen grado 4}$$
$$\sigma(f_2) = h_2, \text{ ambos tienen grado 3}$$
$$\sigma(f_3) = h_3, \text{ ambos tienen grado 2}$$
$$\sigma(f_4) = h_4, \text{ ambos tienen grado 4}$$
$$\sigma(f_5) = h_5, \text{ ambos tienen grado 3}$$

Para verificar si la relación de adyacencia se preserva, se utiliza la matriz de adyacencia de cada grafo.

Matriz adyacente del grafo G:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	1	1	1	0	0
f_2	1	0	1	1	0
f_3	1	1	0	0	0
f_4	0	1	0	1	1
f_5	0	0	0	1	1

Matriz adyacente del grafo G':

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
h_1	1	1	1	0	0
h_2	1	0	1	1	0
h_3	1	1	0	0	0
h_4	0	1	0	1	1
h_5	0	0	0	1	1

Observe que las matrices adyacentes coinciden, esto quiere decir que los grafos G y G' son isomorfos, en estos grafos solo varía la apariencia, estos conservan sus propiedades, es decir, se mantiene: la adyacencia, grados, estructura, caminos y ciclos.

Un isomorfismo entre dos grafos define una relación de equivalencia (reflexiva, transitiva y simétrica).

2.4. Automorfismo

Definición 2.4.1. *Un automorfismo Σ de un grafo G es un isomorfismo de G con el mismo.*

Ejemplo 2.4.1. Observe el automorfismo que cumplen los grafos de la Figura 2.8.

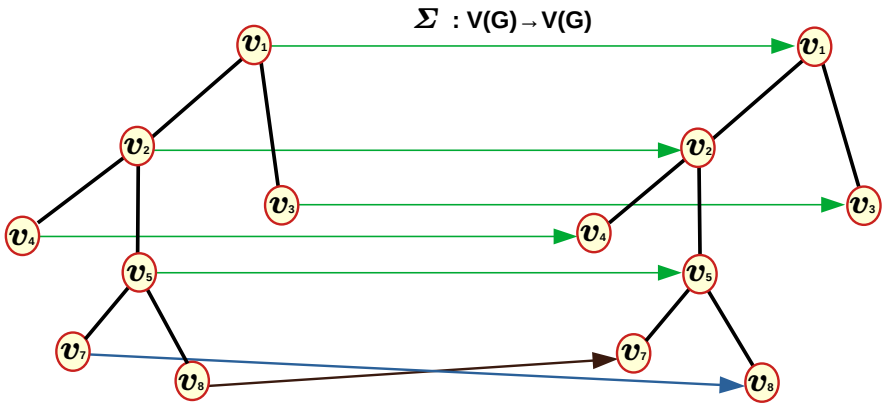


Figura 2.8: Automorfismo.

La Figura 2.8 se permuta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Sigma\colon\ & v_1 \mapsto v_1 \\
& v_2 \mapsto v_2 \\
& v_3 \mapsto v_3 \\
& v_4 \mapsto v_4 \\
& v_5 \mapsto v_5 \\
& v_6 \mapsto v_6 \\
& v_7 \mapsto v_8 \\
& v_8 \mapsto v_7
\end{aligned}$$

Observe que la función Σ manda al vértice v_7 al vértice v_8 y al vértice v_8 al vértice v_7. Se puede notar que los pares de vértices que se modificaron siguen unidos a los mismos vértices en la imagen G, por lo que, conservan el mismo grado y la adyacencia, es decir:

$$\{v_1, v_2\} \text{ su imagen es } \{\Sigma(v_1), \Sigma(v_2)\}$$
$$\{v_1, v_3\} \text{ su imagen es } \{\Sigma(v_1), \Sigma(v_3)\}$$

$$\{v_2, v_4\} \text{ su imagen es } \{\Sigma(v_2), \Sigma(v_4)\}$$
$$\{v_2, v_5\} \text{ su imagen es } \{\Sigma(v_2), \Sigma(v_5)\}$$
$$\{v_5, v_7\} \text{ su imagen es } \{\Sigma(v_5), \Sigma(v_8)\}$$
$$\{v_5, v_8\} \text{ su imagen es } \{\Sigma(v_5), \Sigma(v_7)\}$$

Los automorfismos no son únicos, en la Figura 2.8 solo nos muestra una posible permutación que se puede obtener con estos grafos, estas permutaciones no deben cambiar las propiedades que tiene el grafo, ya que los automorfismos son isomorfismos que van sobre el mismo conjunto de vértices.

Existe una segunda permutación que se puede realizar a esta estructura que es la función identidad (ver Figura 2.9).

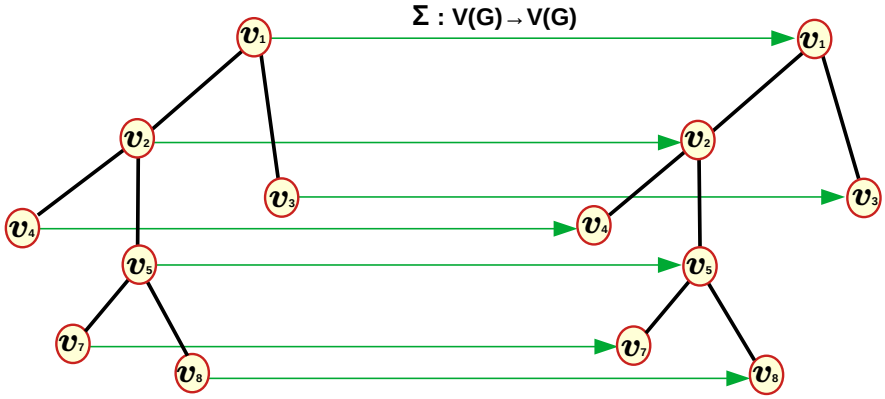


Figura 2.9: Función identidad de automorfismo.

Esta permutación Σ manda cada vértice en si mismo y se denota de la siguiente manera:

$$\Sigma: v_1 \mapsto v_1$$
$$v_2 \mapsto v_2$$
$$v_3 \mapsto v_3$$
$$v_4 \mapsto v_4$$
$$v_5 \mapsto v_5$$
$$v_6 \mapsto v_6$$
$$v_7 \mapsto v_7$$
$$v_8 \mapsto v_8$$

Para saber cuántos automorfismos tiene cierta estructura, primero se analizan los grados y las adyacencias de los vértices para saber cuáles se pueden permutar y cuáles quedan fijos. En la Figura 2.8 se observa que solo se puede intercambiar dos vértices para que la estructura siga cumpliendo con sus propiedades. Utilizando la fórmula $n!$ sobre el conjunto de vértices que se pueden permutar, dos en este caso, se obtiene el número de automorfismos sobre un grafo $2! = 2$.

2.5. Involuciones

Definición 2.5.1. *Una involución sobre un grafo G, es un automorfismo Σ: $V(G) \to V(G)$ que cumple lo siguiente: para todo v_i en G, la función de la función de v_i es v_i. Es decir:*

$$\forall \quad v_i \in G : \Sigma(\Sigma(v_i)) = v_i$$

Esto implica que, es un automorfismo que cumple con la propiedad de ser su propia inversa.

Ejemplo 2.5.1. Sean G y G' dos grafos tales que $G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ y $G' = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$. Considérese el siguiente isomorfismo Σ

$$\begin{array}{ll} \Sigma : v_1 \mapsto b_1 & v_5 \mapsto b_5 \\ b_1 \mapsto v_1 & b_5 \mapsto v_5 \\ v_2 \mapsto b_2 & v_6 \mapsto b_6 \\ b_2 \mapsto v_2 & b_6 \mapsto v_6 \\ v_3 \mapsto b_3 & v_7 \mapsto b_7 \\ b_3 \mapsto v_3 & b_7 \mapsto v_7 \\ v_4 \mapsto b_4 & v_8 \mapsto b_8 \\ b_4 \mapsto v_4 & b_8 \mapsto v_8 \end{array}$$

En la Figura 2.10 se ilustra que, en este caso, Σ resulta ser un automorfismo que es su propia inversa, por tanto es una involución, lo que implica que $G = G'$.

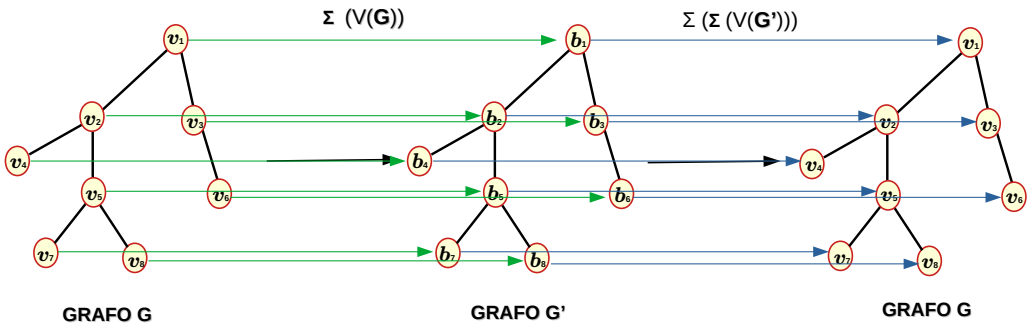


Figura 2.10: Involución.

2.6. Conteo de aristas

Dado un conjunto de n vértices, se puede contar el número de aristas que tiene un grafo simple que cumple con la **condición de que todos los vértices estén conectados entre sí, por una arista**, al cual se llamará **grafo completo**. Una forma de calcular el número de aristas para un grafo completo, sería con una suma que indica el número de aristas que hay en los n vértices dados.

Para motivar la forma explícita de dicha suma, se hará el siguiente ejemplo en el que se llegará al caso general de un grafo completo con n vértices, partiendo desde el caso del grafo con un vértice y agregando, paso por paso, un nuevo vértice a la vez y contando la cantidad de aristas que implica la condición mencionada sobre los grafos completos. En cada caso se dirá que la cantidad de aristas que implica esta condición se generan por agregar vértices.

Ejemplo 2.6.1. Se comenzará con el conjunto $V = \{v_1\}$ que consta de un elemento o vértice (ver Figura 2.11).

Figura 2.11: Un solo vértice.

El número de aristas que hay en este grafo con $V = \{v_1\}$ es cero, ya que no hay otro vértice para conectar con el vértice v_1.

Si se agrega un nuevo vértice al conjunto anterior V, el grafo cuenta ahora con los vértices $V = \{v_1, v_2\}$, observe la Figura 2.12:

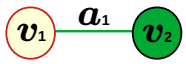


Figura 2.12: Dos vértices.

Se puede considerar a este grafo como el resultado de incluir un vértice v_2 en el conjunto del caso anterior. En color rojo se marca el vértice que ya se tenía (v_1) y en color verde se identifica el vértice añadido (v_2). El nuevo vértice se une al vértice anterior por una arista que los conecta (a_1).

Entonces, se puede visualizar el conteo de aristas como sigue: sumando las aristas del grafo correspondiente al conjunto $V = \{v_1\}$ y las aristas del nuevo grafo, es decir $0 + 1 = 1$, se tiene que **el número de aristas del grafo con vértices** $V = \{v_1, v_2\}$ **es 1**.

Al agregar un nuevo vértice v_3 al conjunto V, de igual manera se utiliza el color verde para representarlo en la Figura 2.13, este genera dos nuevas aristas a_2 y a_3, que resultan de conectar el nuevo vértice v_3 con los vértices anteriores (de color rojo) para que el grafo cumpla con la propiedad de ser completo.

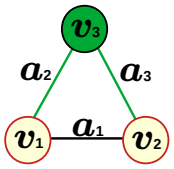


Figura 2.13: Tres vértices.

Nuevamente el conteo de aristas se puede visualizar como: $0 + 1 + 2 = 3$. Esto es, grafo completo con tres vértices y tiene tres aristas.

Continuando con el ejemplo se agrega un nuevo vértice v_4 (ver Figura 2.14).

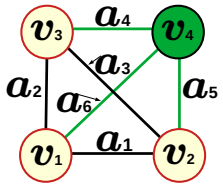


Figura 2.14: Cuatro vértices.

Se obtienen tres aristas a_4, a_5 y a_6 nuevas, que son las que resultan de conectar al nuevo vértice v_4 con cada uno de los vértices anteriores.

$$\mathbf{0 + 1 + 2 + 3 = 6}$$

Es decir, el número de aristas que se generan con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 6$.

Para finalizar, se agrega un último vértice v_5, de manera que el conjunto sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ (ver Figura 2.15).

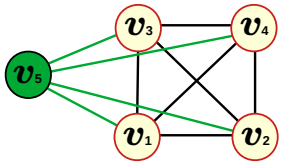


Figura 2.15: Cinco vértices.

Se obtienen cuatro aristas nuevas, que son las uniones del nuevo vértice con los vértices anteriores. Esto se escribe así

$$\mathbf{0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10,}$$

Es decir, **el número de aristas que se generan con** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 10$.

El patrón que se puede observar en este procedimiento permite concluir que si se generaliza el procedimiento anterior para n vértices, la cantidad de aristas resultantes sería la **suma de Gauss** de 0 a $n-1$, donde n es el número de vértices, esto es:

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}. \tag{2.1}$$

Ahora, dado que la combinación de n objetos en k formas distintas viene dada por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{2.2}$$

y considerando el hecho de que dos vértices se unen por una arista, se puede concluir que se tendrá $\binom{n}{2}$ combinaciones posibles para unir todos los pares de vértices cada uno con una arista. Es decir $\binom{n}{2}$, indica que el número n de vértices que tiene un grafo se pueden unir en pares por selección aleatoria de dos vértices del conjunto V, para generar una arista que los conecte.

De modo que, por la ecuación (2.2) se tiene que:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}, \tag{2.3}$$

Lo cual corresponde a la ecuación (2.1) de la suma de Gauss.

Es decir, las siguientes tres maneras de obtener el número de aristas dado un conjunto de n vértices son equivalentes: Se pueden sumar las aristas obtenidas al agregar un nuevo vértice, se pueden utilizar la suma de Gauss o utilizar combinaciones de n en 2.

2.7. Conjunto potencia

Como ya se vio, dado un grafo completo con n vértices, la cantidad de aristas N que tiene es $N = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Para obtener el número de grafos simples que se pueden construir con esa cantidad de aristas N, sería:

$$2^N = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} = 2^{\binom{n}{2}} \tag{2.4}$$

Esto permite obtener el número de grafos dado un conjunto de n vértices; estos grafos forman un conjunto que se conoce como **conjunto potencia** y está denotado por $P(V)$.

Definición 2.7.1. *Dado un conjunto V de vértices, se define el conjunto potencia como el conjunto formado por todas los subconjuntos (grafos simples) que se pueden obtener con la combinación de estos vértices (dos a dos).*

Ejemplo 2.7.1. Para este ejemplo se consideraron tres conjuntos distintos de vértices: $V = \{v_1\}$, $V' = \{v_1, v_2\}$ y $V'' = \{v_1, v_2, v_3\}$ con ellos se construirán los subconjuntos de cada uno de estos conjuntos distintos. Primero, se debe obtener el número de aristas que se pueden generar con los elementos de cada conjunto utilizando las combinaciones de n en 2, es decir $\binom{n}{2}$ con $n = 1, 2, 3$. Como ya se menciono anteriormente esto se lee como, tomar 2 elementos del conjunto V para generar la arista que los conecta.

Para obtener el número de subconjuntos (grafos simples) se eleva 2 al número de aristas generadas anteriormente, es decir $2^{\binom{n}{2}}$, para indicar que este conjunto de aristas se va a unir de dos en dos (vértices).

El primer conjunto $V = \{v_1\}$, es un conjunto que consta de un solo elemento (vértice). Como se puede observar no se puede generar una arista con un solo vértice, por lo que $\binom{1}{2} = 0$.

El número de aristas del conjunto V es igual a 0, es decir no hay *candidatos* a ser aristas. Se puede construir un conjunto que se denota de la siguiente manera:

$$A_1 = \{\{\emptyset\}\} \text{ conjunto de cero aristas.}$$

El subconjunto (grafo simple) que se puede obtener sería $2^0 = 1$, que se define como $G_1 = (V, A_1)$, formado por el conjunto V y con el conjunto A_1 que es vacío y se ilustra de la siguiente manera (ver Figura 2.16):

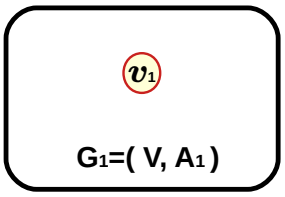


Figura 2.16: Grafo G_1.

Observe que G_1 tiene al vértice v_1 y no tiene aristas, en este caso se llamará **conjunto vacío**.

El conjunto potencia del conjunto $V = \{v_1\}$ es:

$$P(V) = \{G_1\} \quad \text{ó} \quad P(V) = \{\{\emptyset\}\}$$

El segundo conjunto es $V = \{v_1, v_2\}$, un conjunto que consta de dos vértices. Se puede seleccionar dos elementos donde hay dos elementos y se puede hacer solo una vez $\binom{2}{2} = 1$.

El número de aristas del conjunto V es igual a 1, es decir hay un *candidato* a ser arista, entonces se pueden obtener dos conjuntos: la arista vacía y la nueva arista generada, los cuáles se denotan de la siguiente manera:

$A_1 = \{\{\emptyset\}\}$ conjunto de cero aristas.

$A_2 = \{\{v_1, v_2\}\}$ conjunto que tiene a la arista que une a los vértices v_1 y v_2.

El número de subconjuntos (grafos simples) que se puede obtener sería $2^1 = 2$, que se definen como $G_1 = (V, A_1)$ y $G_2 = (V, A_2)$ y se ilustran de la siguiente manera (ver Figura 2.17):

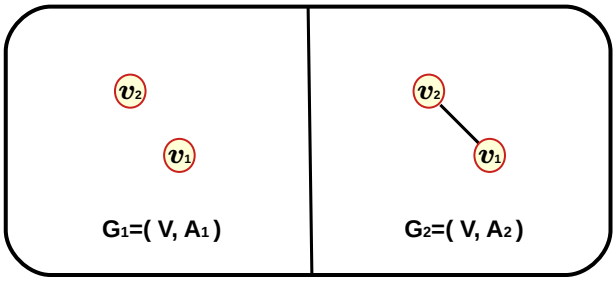


Figura 2.17: Grafos con dos vértices.

El conjunto potencia del conjunto $V = \{v_1, v_2\}$ es:

$$P(V) = \{G_1, G_2\} \quad \text{ó} \quad P(V) = \{\{\emptyset\}, \{v_1, v_2\}\}$$

El tercer y último conjunto que se ejemplifica es $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Un conjunto que consta de tres vértices, las aristas que se pueden generar en V son $\binom{3}{2} = 3$, es decir hay 3 *candidatos* a ser arista y son $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ y $\{v_2, v_3\}$.

Los posibles conjuntos que se pueden obtener con la combinación de estas tres aristas son:

$A_1 = \{\{\emptyset\}\}$ conjunto que no tiene aristas.

$A_2 = \{\{v_1, v_2\}\}$ conjunto que tiene solo una arista que conecta los vértices v_1 con v_2.

$A_3 = \{\{v_1, v_3\}\}$ conjunto que tiene solo una arista que conecta los vértices v_1 con v_3.

$A_4 = \{\{v_2, v_3\}\}$ conjunto que tiene solo una arista que conecta los vértices v_2 con v_3.

$A_5 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$ conjunto que tiene dos aristas que conecta a los tres vértices de la siguiente manera v_1 con v_2 y v_1 con v_3 .

$A_6 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$ conjunto que tiene dos aristas que conecta a los tres vértices de la siguiente manera v_1 con v_2 y v_2 con v_3 .

$A_7 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$ conjunto que tiene dos aristas que conecta a los tres vértices de la siguiente manera v_1 con v_3 y v_2 con v_3 .

$A_8 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$ conjunto que tiene tres aristas que conecta a los tres vértices de la siguiente manera v_1 con v_2, v_1 con v_3 y v_2 con v_3 .

El número de subconjuntos que se pueden obtener es $2^3 = 8$, es decir son 8 grafos simples que se pueden construir dadas 3 aristas y se ilustra de la siguiente manera (ver Figura 2.18):

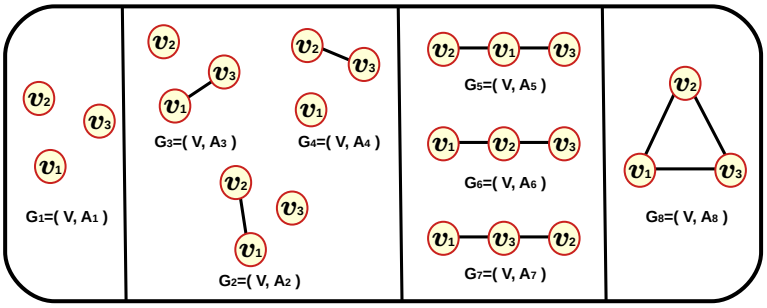


Figura 2.18: Grafo con tres vértices.

El conjunto potencia del conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ es:

$$P(V) = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8\}$$

ó

$$\begin{aligned} P(V) \quad = \quad & \{\{\emptyset\}, \{\{v_1, v_2\}\}, \{\{v_1, v_3\}\}, \{\{v_2, v_3\}\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}, \\ & \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}\} \end{aligned}$$

En la Figura 2.18 se puede observar que $G_1 = (V, A_1)$ es un grafo formado por cero aristas, los grafos $G_2 = (V, A_2)$, $G_3 = (V, A_3)$, $G_4 = (V, A_4)$ son 3 subconjuntos (grafos simples) que están construidos con una sola arista, los grafos $G_5 = (V, A_5)$, $G_6 = (V, A_6)$, $G_7 = (V, A_7)$ están formados por 2 aristas cada uno y por último el grafo $G_8 = (V, A_8)$ está formado por las 3 aristas que genera el conjunto V que es la que une a los 3 vértices.

Estos son grafos simples no dirigidos, entonces se cumple:

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2\} &= \{v_2, v_1\} \\ \{v_2, v_3\} &= \{v_3, v_2\} \\ \{v_1, v_3\} &= \{v_3, v_1\}. \end{aligned}$$

En particular observe que el grafo $G_5 = (V, A_5)$ se puede ver de cualquiera de estas formas (ver Figura 2.19):

Lo que implica que

$$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\} = \{\{v_2, v_1\}, \{v_1, v_3\}\} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_1\}\} = \{\{v_2, v_1\}, \{v_3, v_1\}\}$$

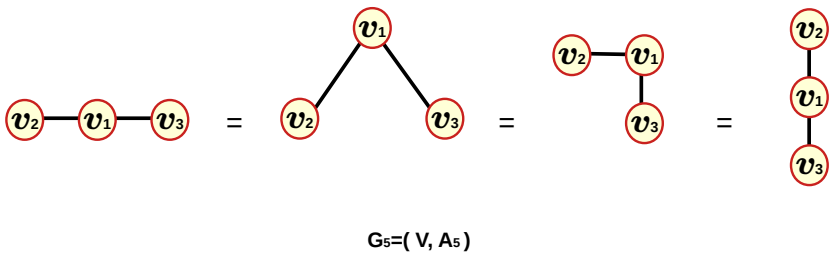


Figura 2.19: Formas de un grafo.

En general si el conjunto tiene n vértices, por ejemplo $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, entonces se tiene:

$\#\{\text{número de aristas generadas de } \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}\} = \binom{n}{2}$ candidatos para ser aristas.

#{número de grafos distintos con vértices $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$}= $2^{\binom{n}{2}}$ tantos como subconjuntos se puedan seleccionar de $\{1, \ldots, \binom{n}{2}\}$.

Dado un conjunto de cuatro vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, el número de grafos simples que se pueden obtener son:

$$P(V) = 2^6 = 64$$

El exponente se obtiene de las combinaciones de $\binom{4}{2} = 6$, que se interpreta como todas las combinaciones posibles para unir todos los pares de vértices con una arista de cuatro que se tienen disponibles. Observe que el número de subconjuntos crece de manera exponencial a medida que se agregan vértices, para un subconjunto de cinco vértices el número será $\binom{5}{2} = 10$ donde $P(V) = 2^{10} = 1,024$.

Todos los grafos simples del conjunto potencia se denotan por una pareja de la siguiente manera:

$$G = (V, A)$$

donde V es un conjunto de vértices y A el subconjunto de aristas que generan una construcción llamada grafo que se realiza sobre el conjunto V.

Note que se ha omitido a la función de indicencia φ para denotar a estos grafos, es decir, la forma de representar a los grafos será como el par $G = (V, A)$.

Ejemplo 2.7.2. Se presentan a continuación 3 ejemplos de grafos donde se utilizará esta notación de su construcción.

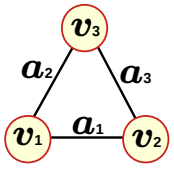


Figura 2.20: Tres vértices.

La Figura 2.20 nos muestra un **grafo simple** que se denotará como la pareja $G = (V, A)$ donde

$V = \{v_1, v_2, v_3\}$

$A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\} = \{a_1, a_2, a_3\}$

Un **árbol con raíz** es la pareja $G = (A, V_R)$ donde

$$\begin{aligned} V_R &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\} \\ A &= (\{v_0\}, \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \\ &\quad \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_8\}, \{v_3, v_9\}, \{v_6, v_{10}\}, \{v_9, v_{11}\}\}) \end{aligned}$$

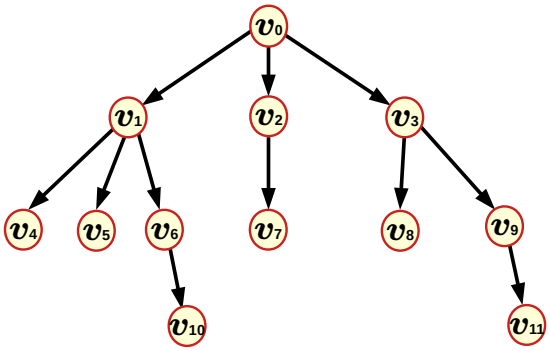


Figura 2.21: Árbol con raíz.

Recuerde que este tipo de estructura recibe el nombre de **árbol con raíz** si hay un vértice fuente (cuyo grado positivo es cero), en este caso caso la raíz de la Figura 2.21 es $\{v_0\}$, además las aristas tienen una orientación natural hacia o desde la raíz, en este caso se tiene un grafo dirigido cuyas aristas tienen una orientación hacia abajo.

Definición 2.7.2. *Un* **grafo ciclo o ciclo orientado** *es un camino simple cerrado, es decir, en el que no se repite ningún vértice, salvo el primero con el último. Un grafo ciclo con n vértices tiene n aristas, es decir el número de vértices es igual al número de aristas.*

Para este caso se tiene la pareja $G = (A, V)$ donde

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ A &= \{(v_1, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \end{aligned}$$

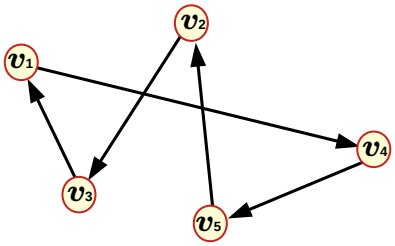


Figura 2.22: Ciclo orientado.

En los capítulos anteriores se menciona qué es un ciclo y cuándo un grafo tiene un ciclo, pero no se había definido un grafo ciclo hasta este punto. Con las bases de la teoría de grafos que se revisaron en los dos primeros capítulos se puede incursionar en el tema de teoría de especies que se abordará en el siguiente capítulo.

Capítulo 3 | *Especies de estructuras*

El capítulo comienza con la definición del concepto de especie de estructuras y se (analizan) presentan algunos ejemplos con el objetivo de desarrollar elementos de la teoría de especies que sirvan para analizar estructuras discretas, tanto etiquetadas como no etiquetadas, entre las que se pueden encontrar: árboles, grafos y permutaciones, entre otras.

3.1. Especies de estructuras

Definición 3.1.1. *Una especie de estructuras es una regla F que produce,*

i) para cada conjunto finito V, un conjunto finito $F[V]$,

ii) para cada biyección entre conjuntos finitos $\sigma : V \mapsto U$, una función

$$F[\sigma] : F[V] \mapsto F[U].$$

Las funciones $F[\sigma]$ deben satisfacer además las siguientes propiedades funtoriales[1]*:*

a) Para las biyecciones $\sigma : V \to U$ y $\tau : U \to W$,

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma].$$

b) Para la función identidad $Id_V : V \to V$,

$$F[Id_V] = Id_{F[V]}.$$

Un elemento $s \in F[V]$ se llama una F-estructura sobre V o una F-especie de estructura sobre V (también se conoce como una estructura de especies F en V). La función $F[\sigma]$ se llama transporte de F-estructuras a lo largo de σ. Las tres expresiones siguientes se consideran equivalentes:

- *s es una estructura de especie F en V;*

[1] Un funtor o functor es una función de una categoría a otra que lleva objetos a objetos y morfismos a morfismos de manera que la composición de morfismos y las identidades se preserven.

- $s \in F[V]$;
- *s es una F-estructura en V.*

Para explicar de forma detallada la Definición 3.1.1, se definirá primero una estructura y se dará un ejemplo, seguido de esto se usará otro ejemplo para mostrar el transporte de estructuras.

Definición 3.1.2. *Una estructura s es como se denomina a cualquier resultado de aplicar una construcción γ sobre un conjunto V, donde V es el conjunto subyacente de la estructura s, o s es una estructura construida desde (o etiquetada por) el conjunto V y se denota por el par*

$$s = (V, \gamma).$$

Un grafo $G = (V, A)$ es un ejemplo de **estructura** o una construcción que se realiza en un conjunto V de vértices.

Ejemplo 3.1.1. Un ejemplo de estructura

Sea $G = (V, A)$ un **árbol con raíz** donde:

$$\begin{aligned} V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\} \text{ es el conjunto subyacente.} \\ A &= (\{v_0\}, \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \\ &\quad \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_8\}, \{v_3, v_9\}, \{v_6, v_{10}\}, \{v_9, v_{11}\}\}) \text{ es la construcción sobre } V. \end{aligned}$$

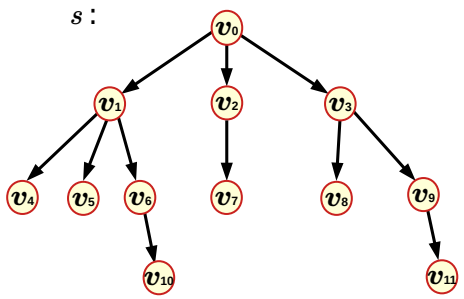


Figura 3.1: Estructura s: Árbol con raíz.

Observe que el grafo G representa a la estructura s que se menciona en la Definición 3.1.2.

También existen estructuras que son lineales (grafos lineales), estas tienen la forma de línea recta, comienzan en un vértice y va dirigido vértice a vértice hasta llegar al último.

Ejemplo 3.1.2. Ejemplo de estructura lineal

Sea $G = (V, A)$ un grafo, donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $A = \{(v_1, v_2), \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$, con él se construye la estructura lineal mostrada en la Figura 3.2.

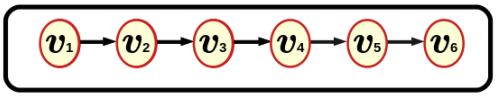


Figura 3.2: Estructura lineal.

Una forma de generalizar los ejemplos anteriores es mediante un enfoque al transporte de las estructuras a lo largo de biyecciones.

3.2. Transporte de estructuras

Una estructura s se puede transportar a otra estructura r mediante un isomorfismo σ que toma a los elementos de la primer estructura (dominio) y los manda a los elementos de la segunda estructura (contradominio), es decir:

$$\sigma : s \to r$$

Observe que gráficamente se puede describir el transporte de estructuras a través de σ, donde los elementos de las estructuras se denotan como $s_i, s_j \in s$ y $r_i, r_j \in r$. El siguiente diagrama conmutativo mostrado en la Figura 3.3 es un ejemplo.

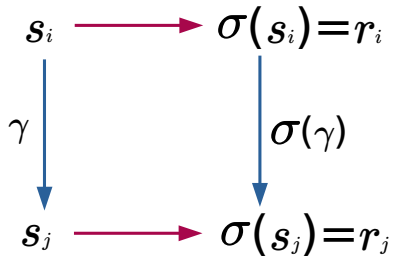


Figura 3.3: Diagrama de transporte de estructuras.

Este diagrama muestra el transporte de la estructura s a la estructura r mediante la función σ, donde σ toma los elementos $s_i, s_j \in s$ y los manda a los elementos $r_i, r_j \in r$ de la siguiente manera:

$\sigma(s_i) = r_i$, quiere decir, que la función σ toma al elemento s_i y lo manda al elemento r_i.

$\sigma(s_j) = r_j$, quiere decir, que la función σ toma al elemento s_j y lo manda al elemento r_j.

Ejemplo 3.2.1. Se transportará un árbol con raíz $G_1 = (V, A)$ donde su conjunto de elementos son los vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, a otro árbol con raíz $G_2 = (W, A)$ donde su conjunto de vértices es $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ mediante la función σ.

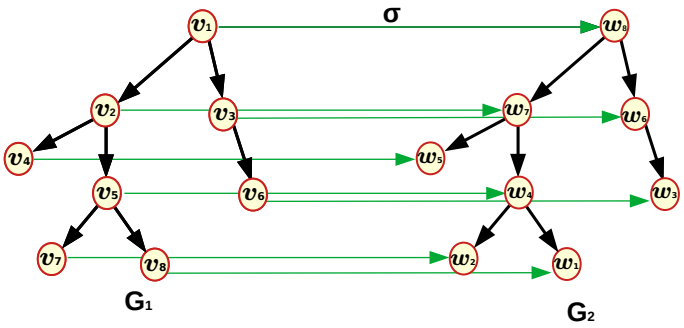


Figura 3.4: El transporte de estructuras como re-etiquetado de vértices.

Observe en la Figura 3.4 que la función σ transporta cada vértice (elemento) de la primera estructura a la segunda, además el vértice v_1 es la raíz del árbol en la primera estructura y es transportado al vértice w_8 que es la raíz del árbol de la segunda estructura. Los demás vértices se transportan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma(v_1) &= w_8 & \sigma(v_5) &= w_4 \\ \sigma(v_2) &= w_7 & \sigma(v_6) &= w_3 \\ \sigma(v_3) &= w_6 & \sigma(v_7) &= w_2 \\ \sigma(v_4) &= w_5 & \sigma(v_8) &= w_1 \end{aligned}$$

Esta correspondencia que realiza σ sobre los vértices de la primera estructura, permite conservar los grados y la adyacencia de los vértices, entonces se dice que el árbol con raíz G_1 se ha

transportado a un árbol con raíz G_2 a través del isomorfismo σ, donde el árbol con raíz G_2 se ha obtenido de la siguiente manera:

$$G_2 = \sigma \cdot G_1.$$

El transporte de estructuras es un re-etiquetado de vértices del conjunto V de G_1 en el conjunto de vértices W de G_2.

Observe en la Figura 3.5 que gráficamente se puede describir el transporte de grafos a través de σ, con el siguiente diagrama conmutativo:

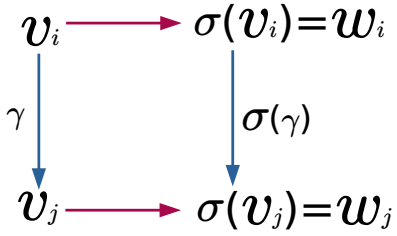


Figura 3.5: Diagrama de transporte de grafos.

Se dice que los árboles con raíz G_1 y G_2 son **isomorfos**, y σ se le llama un **isomorfismo de G_1 a G_2**.

Se utilizará la Figura 3.6 para ejemplificar las dos estructuras anteriores G_1 y G_2 sin etiquetar.

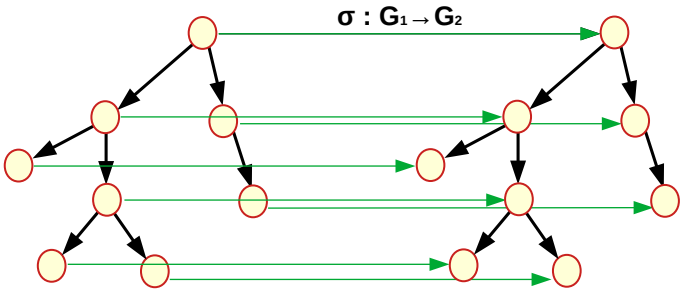


Figura 3.6: Tipo de isomorfismo.

Observe que las estructuras o grafos de la Figura 3.6 muestran dos estructuras idénticas cuando se eliminan las etiquetas, a este tipo de estructura se le conoce como **tipo de isomor-**

fismo, es decir los grafos o árboles con raíz G_1 y G_2 comparten la misma estructura o tienen el mismo tipo de isomorfismo.

Un tipo de isomorfismo no tan obvió se analiza en la Figura 3.7.

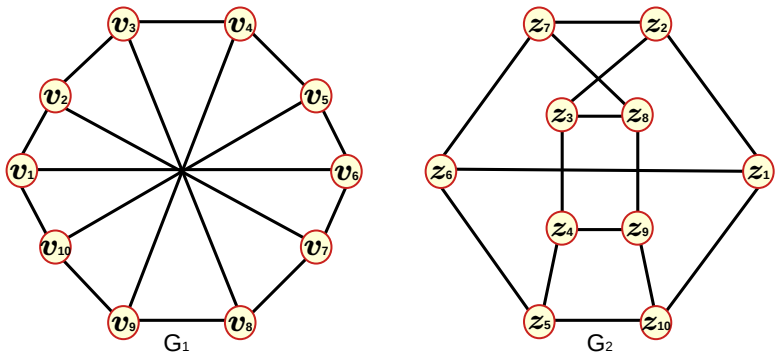


Figura 3.7: Grafos G_1 y G_2.

Intuitivamente no se puede ver a simple vista si los dos grafos de la Figura 3.7 tienen la misma estructura, es decir, el mismo tipo de isomorfismo. Se utilizarán etiquetas y la definición de isomorfismo (Definición 2.3.1) para verificar si son o no del mismo tipo de isomorfismos.

Primero note que el conjunto de vértices del grafo G_1 es
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ y el conjunto de vértices del grafo G_2 es
$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}\}$. Aplicando la función σ a los vértices del G_1 de esta manera:

$$\begin{aligned} \sigma(v_1) &= z_1 & \sigma(v_6) &= z_6 \\ \sigma(v_2) &= z_2 & \sigma(v_7) &= z_7 \\ \sigma(v_3) &= z_3 & \sigma(v_8) &= z_8 \\ \sigma(v_4) &= z_4 & \sigma(v_9) &= z_9 \\ \sigma(v_5) &= z_5 & \sigma(v_{10}) &= z_{10} \end{aligned}$$

Este isomorfismo σ sobre el conjunto V permite el transporte del grafo G_1 sobre el grafo G_2, reemplazando cada vértice $v_i \in V$ por el correspondiente vértice $\sigma(v_i) \in Z$. Se dice que el grafo G_2 se ha obtenido transportando el grafo G_1 a lo largo del isomorfismo σ, y se denotará como:

$$G_2 = \sigma \cdot G_1.$$

Además esta función mantiene la adyacencia entre cada par de vértices.

Ahora observe la Figura 3.8 a la cual se le colorearon algunas de sus aristas.

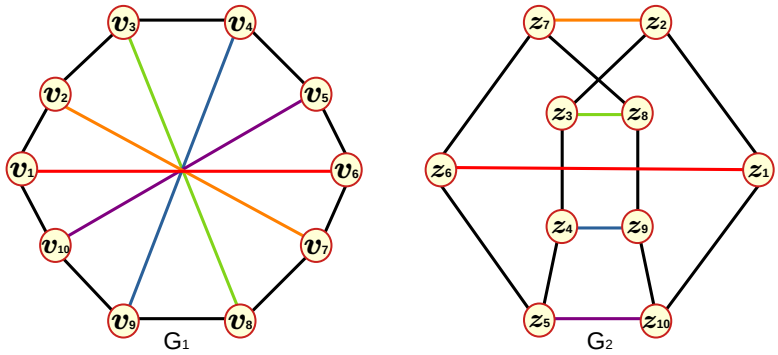


Figura 3.8: Tipo de isomorfismo con etiqueta.

Si se recorren todos los vértices del grafo G_1 iniciando desde el vértice v_1 hacia el vértice v_2, es decir en sentido de las manecillas del reloj, y se recorren todas las aristas de color negro se llegará al mismo vértice v_1, obteniendo un **ciclo hamiltoniano**; este mismo ciclo se puede observar en la estructura G_2, si se recorren todas las aristas de color negro iniciando desde z_1 hacia el vértice z_2 se finalizará en el mismo vértice z_1.

Los demás colores de las aristas permiten observar los vértices correspondientes en ambas estructuras, mostrando que, efectivamente son del mismo tipo de isomorfismo.

Hasta este momento ya se ha explicado el concepto de estructura utilizando grafos, también se revisó el concepto de transporte, el cuál fue ilustrado con un ejemplo, de manera natural se abordará el concepto de conjunto de estructuras que se conoce como especie.

3.3. Especie $\mathcal{G}$

La **especie** $\mathcal{G}$ es una regla que toma a los elementos del conjunto V y produce un conjunto $\mathcal{G}[V]$ formado por todos los grafos simples (G-estructuras) que se pueden formar sobre V. En este caso el conjunto V es finito y la naturaleza de sus elementos son vértices etiquetados. Se denota al conjunto $\mathcal{G}[V]$ como

$$\mathcal{G}[V] = \{G | G = (V, A) \text{ , es un grafo simple}\}.$$

Hablando naturalmente, la especie de grafos simples $\mathcal{G}$ es una función que convierte un conjunto de etiquetas en el conjunto de grafos con esas etiquetas.

Ejemplo 3.3.1. Dado el conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, se obtendrá el conjunto $\mathcal{G}[V]$ de todos los grafos simples posibles que se pueden formar con 3 vértices. En este caso en particular, el conjunto $\mathcal{G}[V]$ está formada por 8 grafos simples que se pueden formar en el conjunto dado V como ya se explicó en la Sección 2.7 (ver Figura 3.9).

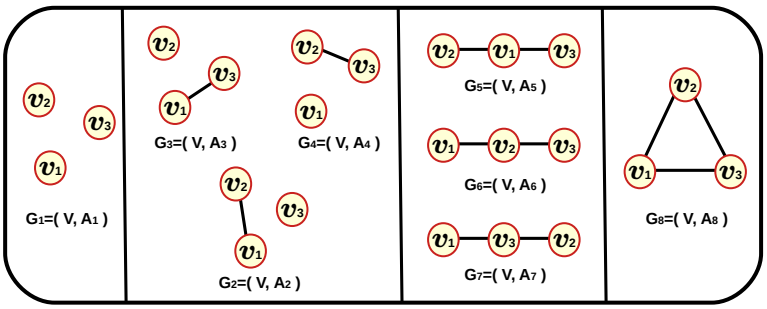


Figura 3.9: Elementos del conjunto $\mathcal{G}$[V].

En este caso particular los elementos de la especie $\mathcal{G}[V]$ son:

$$\mathcal{G}[V] = \mathcal{G}[\{V_1, V_2, V_3\}] = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8\}.$$

Es importante destacar que ahora los grafos son elementos de la especie $\mathcal{G}$[V], donde $\mathcal{G}$[V] es un conjunto finito.

Observe que las siguientes expresiones de los elementos del conjunto $\mathcal{G}$[V] son equivalentes:

- $G = (V, A)$ es un grafo simple que se puede formar con el conjunto dado V.
- $G = (V, A)$ es un elemento de $\mathcal{G}[V]$, es decir $G \in \mathcal{G}[V]$.
- $G = (V, A)$ es una $\mathcal{G}$-estructura en V.

Cada isomorfismo $\sigma : V \to U$ induce, por transporte de estructura, una función

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}[\sigma] : \mathcal{G}[V] & \to & \mathcal{G}[U] \\ G & \longmapsto & \sigma \cdot G \end{array}$$

que describe el transporte de grafos a lo largo de σ. Si se tiene un grafo G (elemento) de la especie $\mathcal{G}$, es decir, $G = (V, A) \in \mathcal{G}[V]$ entonces $\mathcal{G}[\sigma](G) = (V, \sigma \cdot A)$ donde $\sigma \cdot A$ es el conjunto de pares $\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}$ que forman una arista en U, que son las imágenes de las aristas $\{v_i, v_j\}$ de V. Por tanto, cada arista $\{v_i, v_j\}$ de G está re-etiquetada como $\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}$ en U por $\sigma \cdot G$.

Ejemplo 3.3.2. Dados dos conjuntos $V = \{v_1, v_2\}$ y $U = \{u_1, u_2\}$, se obtiene la especie de gráfica simple que se puede formar con cada uno de ellos.

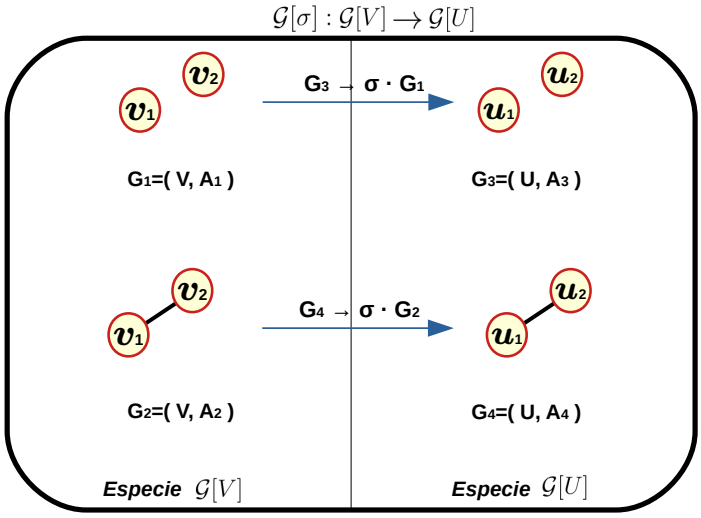


Figura 3.10: Elementos de la especie $\mathcal{G}$[V] y de la especie $\mathcal{G}$[U], respectivamente.

En la Figura 3.10 se puede observar que los conjuntos V y U tienen la misma cantidad de elementos (vértices) entonces las especies tienen también la misma cantidad de elementos (grafos simples), es decir:

$$\textbf{Especie 1: } \mathcal{G}[V] = \mathcal{G}[\{v_1, v_2\}] = \{G_1 = (V, A_1), G_2 = (V, A_2)\}$$

$$\textbf{Especie 2: } \mathcal{G}[U] = \mathcal{G}[\{u_1, u_2\}] = \{G_3 = (U, A_3), G_4 = (U, A_4)\}$$

Observe además que, como existe un isomorfismo σ entre los conjuntos V y U, entonces se puede transportar cada elemento (grafo) de la primer especie a otro elemento (grafo) de la segunda especie, este transporte de estructuras induce la función:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}[\sigma] & : & \mathcal{G}[V] \to \mathcal{G}[U] \\ G & \longmapsto & \sigma \cdot G \end{array}$$

Entonces como este transporte de grafos es solo un re-etiquetado de vértices y aristas por σ, se puede tener otro isomorfismo τ que lleve al conjunto U en W re-etiquetando de nuevo los vértices y las aristas:

$$\sigma : V \to U \text{ y } \tau : U \to W$$

Entonces se cumple que:

$$\mathcal{G}[\tau \circ \sigma] = \mathcal{G}[\tau] \circ \mathcal{G}[\sigma].$$

Además esta función σ manda la identidad de un conjunto a otro, es decir:

$$\begin{aligned} Id_V &: V \to V, \quad \text{se tiene} \\ \mathcal{G}[Id_V] &= Id_{\mathcal{G}[V]} \end{aligned}$$

Estas dos igualdades expresan la funtorialidad de los transportes de las estructuras $\mathcal{G}[\sigma]$.

Observe la Figura 3.11. La especie $\mathcal{G}$ envía un conjunto de etiquetas a un conjunto de estructuras $\mathcal{G}[V]$. Este esquema ilustra la definición dada, particularmente con la especie $\mathcal{G}$, así como sus propiedades funtoriales.

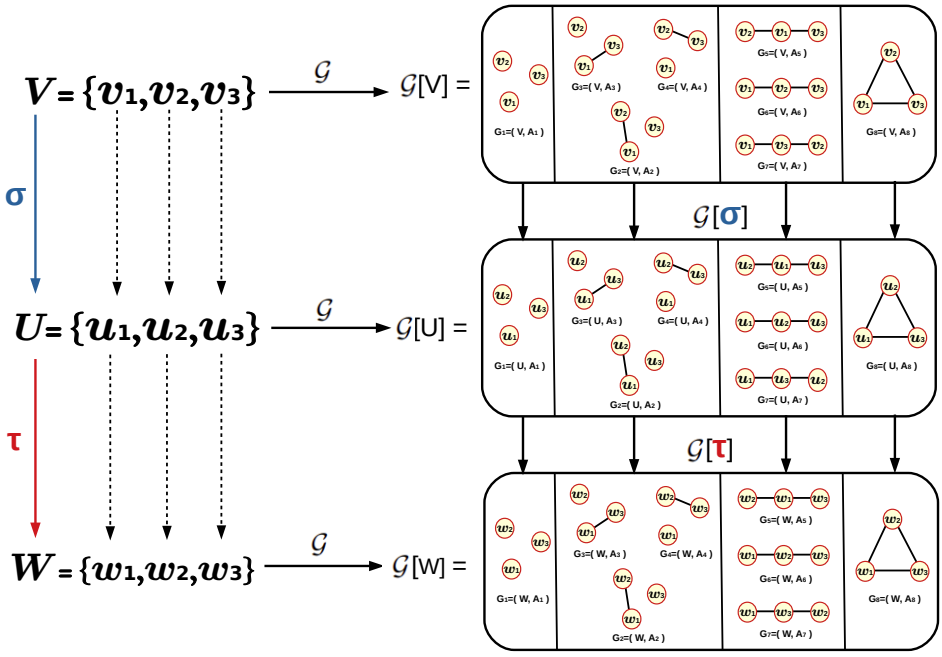


Figura 3.11: Esquema que ilustra la definición de especie de estructura $\mathcal{G}$.

Usando transporte de especies, se puede permutar las etiquetas de los grafos de la Figura 3.9, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sigma\colon v_1 &\mapsto v_2 \\ v_2 &\mapsto v_3 \\ v_3 &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

El transporte $G[\sigma]$ mapea el grafo sin aristas en sí mismo y el grafo completo (grafo con tres aristas) también en sí mismo. Además, crea un ciclo de longitud tres entre los grafos con exactamente una arista, un ciclo también de longitud tres entre los grafos con exactamente dos aristas, representados en la Figura 3.12.

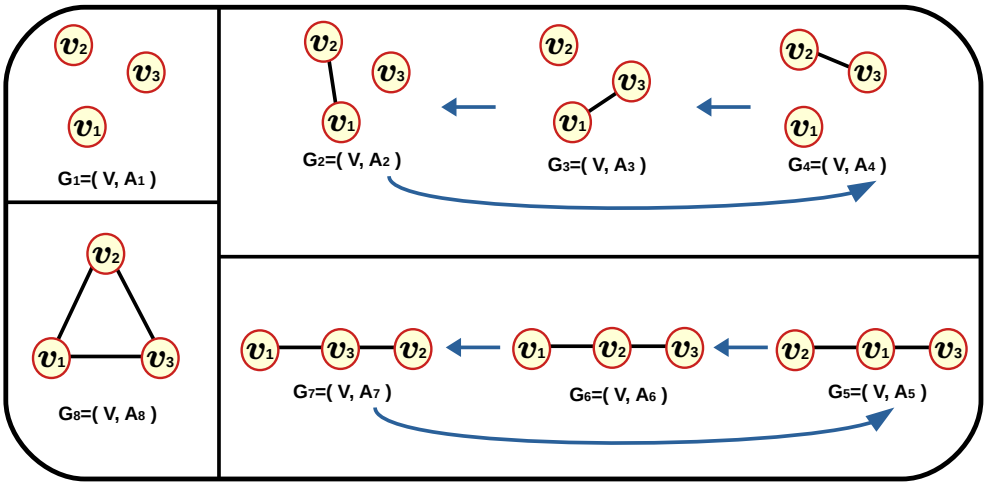


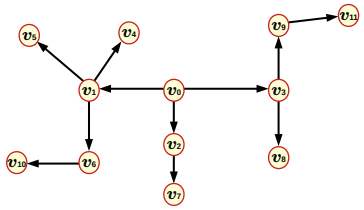
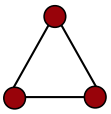
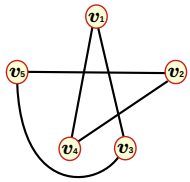
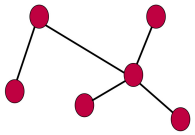
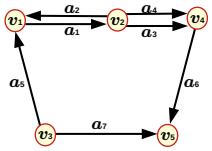
Figura 3.12: Aplicando $\mathcal{G}$ [(123)] a los ocho grafos etiquetados en tres vértices.

Existen diferentes formas de obtener especies de estructuras: 1) Usando axiomas teóricos de conjuntos, 2) Mediante una descripción explícita de los conjuntos $F[V]$ y las funciones de transporte $F[\sigma]$, 3) Mediante la aplicación de operaciones a especies conocidas y 4) Describiéndolas mediante ecuaciones funcionales.

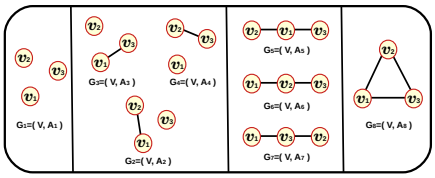
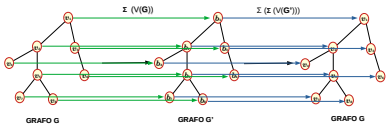
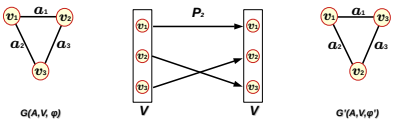
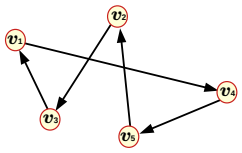
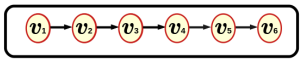
3.4. Ejemplos de las diferentes formas de obtener especies de estructuras

3.4.1. Especies definidas usando los axiomas teóricos de conjuntos

En las tablas 3.1 y 3.2 se listan varios ejemplos de especies que están definidas por medios de axiomas teóricos de conjuntos. Además, se da a conocer su notación, una breve descripción de cada una de ellas y un ejemplo de sus elementos (estructuras).

Especies definidas usando los axiomas teóricos de conjuntos		
Especie	Descripción	Ejemplo
Especie $\mathcal{A}$	Esta especie representa a los árboles con raíz, que son un tipo de grafo en el cual un vértice se distingue del resto.	
Especie $\mathcal{G}$	Esta especie representa a las grafos simples, que son los que a lo sumo tienen una arista uniendo dos vértices cualesquiera.	
Especie $\mathcal{G}^c$	Esta especie representa a los grafos simples conexos, es decir a los grafos simples que cumplen que, para todo par de vértices v_i y v_j de G existe una trayectoria de v_i a v_j.	
Especie $\mathfrak{a}$	Esta especie representa a los árboles, es decir a los grafos simples conexos y sin ciclos.	
Especie $\mathcal{D}$	Esta especie representa a los grafos dirigidos, es decir a los grafos en los cuales sus aristas tienen un sentido definido.	

Cuadro 3.1: Especies definidas usando los axiomas teóricos de conjuntos.

Especies definidas usando los axiomas teóricos de conjuntos		
Especie	Descripción	Ejemplo
Especie $\wp$	Esta especie representa al conjunto potencia de un conjunto V, que es otro conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto V, $\wp[V] = \{S \mid S \subseteq V\}$.	
Especie Inv	Esta especie representa a las involuciones, es decir, a las funciones ψ (endofunciones) que son su propia inversa.	
Especie S	Esta especie representa a las permutaciones, es decir, endofunciones biyectivas.	
Especie C	Esta especie representa a las permutaciones cíclicas o ciclos orientados.	
Especie L	Esta especie representa a los órdenes lineales o totales.	

Cuadro 3.2: Especies definidas usando los axiomas teóricos de conjuntos.

Existen dos especies más: 1) **La Especie Par**, la cual representa a las particiones de conjuntos, que cumplen con estar formados por subconjuntos tales que, al unirlos son iguales al conjunto inicial. 2) **La Especie End**, la cual representa a las endofunciones, aquellas funciones cuyo dominio es igual a su contradominio,

$$\text{End[V]} = \{\psi \mid \psi\text{: V} \to \text{V}\}.$$

3.4.2. Construcción explícita de especies

Algunas especies de estructuras se pueden definir con una descripción explícita, si la estructura de la especie F es particularmente simple o no es muy numerosa, tal descripción se hace con los conjuntos $F[V]$ y la función transporte $F[\gamma]$.

Se muestran a continuación algunos ejemplos de este tipo de especies.

1. La especie de conjuntos E. Dado un conjunto V, la especie E es igual al conjunto V y se denota por:

$$E[V] = \{V\}$$

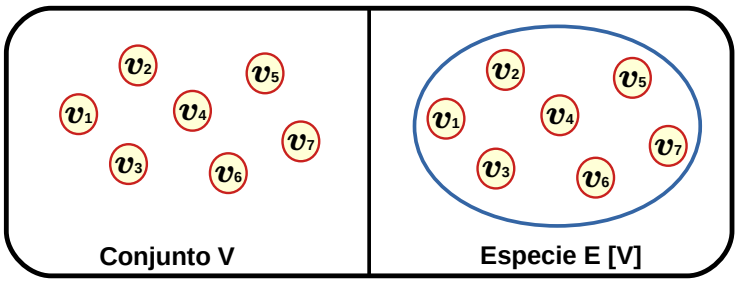


Figura 3.13: Especie E.

Ejemplo 3.4.1. La Figura 3.13 nos muestra a los elementos del conjunto V, es decir, se tiene $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ donde la especie E sobre V es:

$$E[V] = E[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}] = \{V\} = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}\}$$

Para cada conjunto finito V, existe una única E-estructura sobre V (elemento de la especie E) por lo tanto la cardinalidad de la especie E es 1, es decir $|E(V)| = 1$.

2. La especie de elementos ϵ. Dado un conjunto V, la especie ϵ es igual a los elementos de V, es decir las estructuras en ϵ son simplemente los elementos del conjunto V y se denota por:

$$\epsilon[V] = V.$$

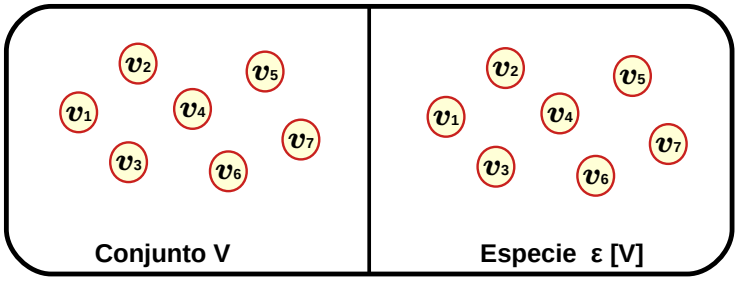


Figura 3.14: Elementos de V y especie ϵ.

Ejemplo 3.4.2. La Figura 3.14 nos muestra un ejemplo de un conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, donde la especie ϵ sobre V es:

$$\epsilon[V] = \epsilon[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}] = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}.$$

Para cada conjunto finito V, existe una única ϵ-estructura sobre V (elemento de la especie ϵ). La cardinalidad de la especie ϵ es igual al número de los elementos de V, es decir $|\epsilon(V)| = |V|$, donde $|V|$ representa al número de elementos de V.

3. La especie X. Dado un conjunto V, la especie X es característica de los conjuntos con un elemento (singletones) y se define por:

$$X[V] = \begin{cases} \{V\} & \text{si } |\mathrm{V}| = 1 \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

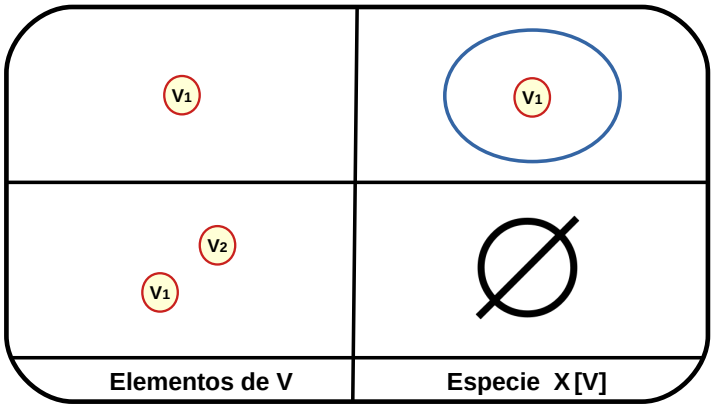


Figura 3.15: Especie singletón.

Ejemplo 3.4.3. La Figura 3.15 nos muestra un ejemplo de un conjunto $V = \{v_1, v_2\}$, donde $|V| = 2$, dado este conjunto está claro que no se puede formar ninguna X-estructura (elemento de la especie) entonces la especie X es vacía, es decir:

$$X[V] = X[\{v_1, v_2\}] = \emptyset, \text{ ya que } |V| \neq 1$$

En cambio si se da un conjunto que tiene un solo elemento (ver Figura 3.15), por ejemplo $V = \{V_1\}$, donde la cardinalidad del conjunto V es 1, entonces se puede formar una X-estructura sobre V, que es la siguiente:

$$X[V] = X[V_1] = \{V_1\}, \text{ ya que } |V| = 1$$

La cardinalidad de la especie X es:

$|X(V)| = 1$ si el conjunto V tiene un elemento.

$|X(V)| = 0$ si el conjunto V tiene dos o más elementos.

4. La especie 1. Dado un conjunto V, la especie característica del conjunto vacío $\emptyset$ de el conjunto dado, se denota por:

$$1[V] = \begin{cases} \{V\} & \text{si V} = \emptyset, \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.4. Dado un conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ que tiene 7 elementos, no se puede formar una 1-estructura (elemento de la especie 1) con este conjunto dado. En cambio se puede ver que si se da un conjunto $V = \emptyset$, el cual no tiene elementos, la definición de esta especie nos permite formar un elemento de la misma.

$1[V] = 1[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}] = \emptyset$, es decir la especie 1 no tiene elementos.

$1[V] = 1[\emptyset] = \{\emptyset\}$, es decir la especie tiene al elemento vacío.

La cardinalidad de la especie 1 es:

$|1(V)| = 1$ si el conjunto V no tiene elementos, es decir es vacío.

$|1(V)| = 0$ si el conjunto V tiene dos o más elementos.

5. La especie E_2. Esta especie es característica de un conjunto de dos elementos y se denota por:

$$E_2[V] = \begin{cases} \{V\} & \text{si } |\text{V}| = 2, \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solo para un conjunto con dos elementos, se puede formar una E_2-estructura de la especie E_2 (ver Figura 3.16).

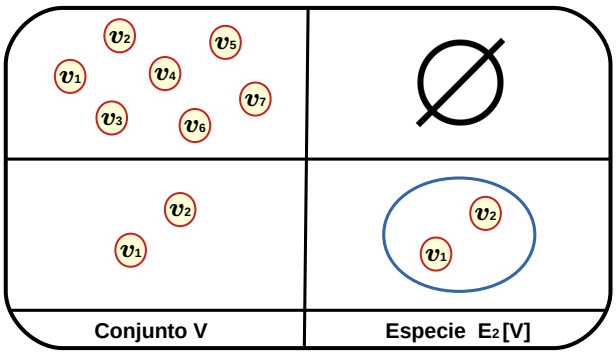


Figura 3.16: Especie E_2.

6. La especie vacía. Dado un conjunto V, la especie se representa con el conjunto vacío $\emptyset$ del conjunto dado, y se denota por:

$$0[\mathrm{V}] = \emptyset.$$

Es decir, para cualquier conjunto dado V, siempre habrá un 0-estructura (elemento de la especie vacía) sobre V.

3.4.3. Definición de especies usando operaciones combinatorias

Algunas especies de estructuras se pueden definir mediante operaciones que se realizan a especie conocidas, las operaciones que se utilizan para obtenerlas son: la suma, multiplicación, sustitución, diferenciación, entre otras.

ESPECIES DEFINIDAS USANDO OPERACIONES COMBINATORIAS		
Especie	**Operación**	**Descripción**
E	$E = 1 + E_+$	Esta especie de conjuntos E también resulta de la suma de la especie 1 y la especie E_+ (la especie E_+ representa a los conjuntos no vacios).
E^3	$E^3 = E \cdot E \cdot E$	E^3 es la especie de tricoloración y se obtiene de multiplicar tres veces la especie de conjuntos E.
S	$S = E \cdot \mathrm{Der}$	La especie S de permutaciones o endofunciones biyectivas y resulta de multiplicar la especie E y la especie Der (Der es la especie que representa a los desarreglos).
H	H = L ($\mathcal{A}$)	La especie H representa a los setos (o listas) de árboles enraizados, y se obtiene de sustituir a la especie $\mathcal{A}$ en la especie L.
Bol	Bol = L(E_+)	La especie Bol representa a las particiones ordenadas y resulta de la sustitución de la especie E_+ en la especie L.

Cuadro 3.3: Especies definidas usando operaciones combinatorias.

3.4.4. Especies de estructuras que se describen mediante una ecuación funcional

La tabla (3.4) muestra las especies que satisfacen una ecuación funcional.

ESPECIES DESCRITAS POR UNA ECUACIÓN FUNCIONAL		
Especie	**Descripción**	**Función**
$\mathcal{A}$	Esta especie representa a los árboles con raíz.	$\mathcal{A} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{E}(\mathcal{A})$
L	Esta especie representa a los ordenes lineales.	$\mathrm{L} = 1 + \mathrm{X} \cdot \mathrm{L}$
$\mathcal{A}_L$	Esta especie representa a los árboles con raíz con ramas ordenadas.	$\mathcal{A}_L = \mathrm{X} \cdot \mathrm{L}(\mathcal{A}_L)$

Cuadro 3.4: Especies descritas por una ecuación funcional.

Hasta aquí se han presentados los conceptos básicos de la teoría de especies de estructuras. Como se vió la definición de especie de estructuras pone énfasis en el transporte de estructuras a lo largo de biyecciones, lo cual es útil para la numeración de estructuras etiquetadas y no etiquetadas, así como para analizar el concepto de *series de potencias* el cual se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 4 | *Series asociadas de estructuras*

En este capítulo se verá que existen series formales de potencias que se pueden asignar a una especie F, las cuales están relacionadas con el conteo de sus elementos, es decir, con el conteo de F-estructuras. Con estas series se pueden tener representaciones algebraicas de las especies que permiten manipularlas y/o analizarlas.

4.1. Series asociadas a especies de estructuras

Como se vió en el Capítulo 3, las F-estructuras pueden estar etiquetadas o no, ya que si se tiene $s \in F[V]$ en un conjunto V, este se denomina estructura etiquetada, mientras que, una estructura sin etiqueta es un tipo de isomorfismo de F-estructuras. Se ejemplifican tres series que se pueden asociar a las especies F.

1.- **Serie generadora o exponencial de** F. Esta serie está relacionada con el conteo de F-estructuras etiquetadas y se denota como $F(x)$.

2.- **Serie generadora de tipos de** F: Esta serie está relacionada con el conteo de F-estructuras no etiquetadas y se denota como $\tilde{F}(x)$.

3.- **Serie de índices de ciclo de** F. Esta serie se utiliza como una herramienta general de conteo y se denota como $Z_F(x_1, x_2, \ldots)$.

Estas series sirven para "codificar" toda la información relativa a la enumeración de F-estructuras etiquetadas o no etiquetadas. Observe que para cualquier conjunto finito V, el número de F-estructuras sobre V solo depende de la cantidad de elementos de V (y no de los elementos de V), es decir, $|F[V]|$ sólo depende de $|V|$, sin importar la naturaleza de los elementos del conjunto V.

Notación

- Se utilizará $[n]$ para designar el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Se usará $F[n]$ para designar el conjunto $F[\{1, 2, \ldots, n\}]$, en lugar de $F[[n]]$.

Si la cantidad de elementos del conjunto V es n, entonces el conjunto V se definirá de la siguiente manera:

$V := [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, ya que las cardinalidades $|F[V]|$ están caracterizadas por la sucesión de valores f_n, y por lo tanto $f_n = |F[n]| :=$ número de estructuras que se pueden formar con el conjunto $[n]$.

4.1.1. Serie exponencial de F

La serie generadora exponencial es una herramienta que nos permite enumerar las F-estructuras etiquetadas en $F[U]$ para una especie F. Esta información se registra en los coeficientes de la serie infinita.

Definición 4.1.1. *La* **serie generadora** *o* **serie exponencial** *de una especie de estructura F es la serie formal de potencias:*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n x^n}{n!} \tag{4.1}$$

donde $f_n = |F[n]|$ representa al número de F-estructuras etiquetadas sobre un conjunto V de n elementos.

Observe que esta serie es de tipo exponencial en la variable x, es decir, es del siguiente tipo

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

En general, si

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

entonces el coeficiente que acompaña al término x^n se representa de la siguiente manera

$$[x^n]\mathrm{G(x)} = g_n$$

Recuerde que $g_n = |G[n]|$, ya que este coeficiente representa al número de G-estructuras etiquetadas sobre un conjunto V de n elementos.

En cambio para la serie formal de potencias de la ecuación (4.1), el coeficiente está representado por:

$$n![x^n]F(x) = f_n.$$

Además al utilizar la serie de Taylor de $F(x)$ y evaluarla en cero se obtiene

$$n![x^n]F(x) = \frac{d^n F(x)}{dx^n}|_{x=0} \tag{4.2}$$

Definición 4.1.2. *La serie de Taylor de una función $f(x)$ infinitamente derivable definida alrededor de $x = a$ con a un intervalo abierto, se define como la siguiente suma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(a)}{dx^n} \frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \tag{4.3}$$

En el caso donde $a = 0$ se le conoce como la serie de Maclaurin.

A continuación se darán dos ejemplos de especies de estructuras: Especie L y la especie C mencionadas anteriormente, donde la naturaleza de sus elementos serán vértices de un grafo. Obteniendo la cardinalidad de estas especies y utilizando la serie de Maclaurin se calculará el número de F-estructuras sobre V y se demostrará su respectiva identidad.

Definición 4.1.3. *Sea V un conjunto finito, $L[V]$ denota los órdenes lineales sobre $[V]$.*

Ejemplo 4.1.1. Sea $V = [3] = \{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto que consta de tres vértices (elementos), el conjunto $L[V]$ de órdenes lineales se puede expresar de la siguiente manera:

$$L[V] = \{(v_1v_2v_3), (v_2v_1v_3), (v_3v_1v_2), (v_1v_3v_2), (v_2v_3v_1), (v_3v_2v_1)\}.$$

En la Figura 4.1 se pueden analizar utilizando estructuras de grafos.

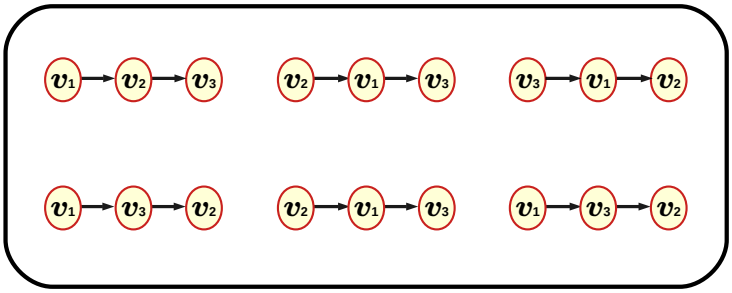


Figura 4.1: Especie de orden lineal.

Como $L[n]$ son los órdenes lineales sobre $[V]$ entonces $|L[n]| = n!$. Observe que se pueden construir 6 L-estructuras etiquetadas sobre $[V]$, ya que si se sustituye $n = 3$ se tiene que $|L[3]| = 3! = 6$. De aquí se puede concluir que:

$$|L[n]| = l_n = n!$$

Proposición 4.1.1. *Si L es una especie, entonces se cumple la siguiente igualdad combinatoria*

$$L(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Demostración. Usando la Definición 4.1 se tiene: □

$$L(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{l_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |L[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

□

Al aplicar $\frac{d^n F(x)}{dx^n}|_{x=0}$ al ejemplo en particular, se deben obtener las primeras tres derivadas de la función $L(x)$ ya que L se forma con el conjunto V que consta de tres elementos, lo que implica que sólo se obtendrán los primeros tres términos de la serie de Maclaurin, por lo que se tiene

$$\frac{dL(x)}{dx}|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)|_{x=0} = \frac{1}{(1-x)^2}|_{x=0}$$

$$\frac{d^2L(x)}{dx^2}|_{x=0} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)|_{x=0} = \frac{2}{(1-x)^3}|_{x=0}$$

$$\frac{d^3L(x)}{dx^3}|_{x=0} = \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1-x}\right)|_{x=0} = \frac{6}{(1-x)^4}|_{x=0} = 6$$

Observe que 6 es el mismo resultado obtenido en la Sección 2.1 donde el total de permutaciones que se pueden obtener con tres elementos (vértices) es 3!=6, el cuál es un caso particular de esta generalización.

Definición 4.1.4. *Sea V un conjunto finito, $C[V]$ denota las permutaciones cíclicas sobre $[V]$.*

Ejemplo 4.1.2. Analizando las C-estructuras que se pueden formar con los conjuntos $V^1 = [2] = \{v_1, v_2\}$ y $V^2 = [3] = \{v_1, v_2, v_3\}$, se obtendrá $|C[n]|$.

En el conjunto V^1 solo se puede construir una C-estructura $C[V^1] = \{(v_1, v_2)\}$ (Esta permutación manda a v_1 a v_2 y a v_2 a v_1.) y en el conjunto V^2 se forman dos C-estructuras: $C[V^2] = \{(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_2)\}$

En el conjunto V^1 se tiene que $n = 2$ entonces se obtiene que $|C[2]| = 1$. En el conjunto V^2 se tiene que $n = 3$ entonces $|C[3]| = 2$. En la Figura 4.2 se analizan mediante estructuras de grafos.

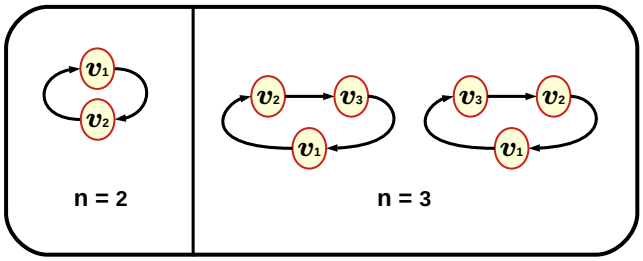


Figura 4.2: Especie de permutación cíclica para $n = 2$ y $n = 3$ respectivamente.

Se analizará la especie de permutación cíclica para $n = 3$:

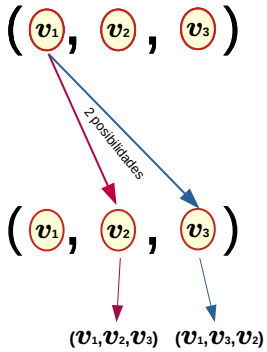


Figura 4.3: Permutaciones cíclicas para $n = 3$.

Observe la Figura 4.3, al tomar un elemento para permutar, por ejemplo el vértice v_1 se tienen dos posibles permutaciones el v_2 o el v_3, suponga que v_1 permutó en v_2 (por lo tanto v_2

permutó en v_1), entonces v_3 solo puede permutar en sí mismo, ya que sólo queda un elemento disponible, esto se escribe como $(2)(1) = 2!$.

En general para un conjunto de n-elementos, la especie cíclica se puede analizar de la siguiente manera (ver Figura 4.4):

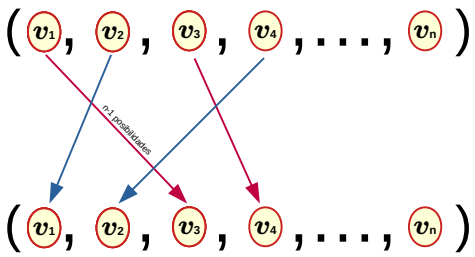


Figura 4.4: Permutaciones cíclicas para n elementos.

El primer elemento se tendría $n-1$ casillas disponibles, el segundo tendría $n-2$ posibilidades y el último una posible permutación.

Entonces para un conjunto V de n-elementos se tiene que la cardinalidad de la especie C se obtiene:

$|C[n]| = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)...(3)(2)(1) = (n-1)!$

Es decir, como $C[n]$ son las permutaciones cíclicas sobre [V] entonces $|C[n]| = (n-1)!$. Con esto se puede concluir que

$$|C[n]| = c_n = (n-1)!.$$

Proposición 4.1.2. *Sea C la especie de permutaciones cíclicas, entonces se tiene la siguiente igualdad combinatoria:*

$$C(x) = -\ln(1-x).$$

Demostración. Usando la Definición 4.1 se tiene:

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |C[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n} = \ln(\frac{1}{1-x}) = -\ln(1-x).$$

□

Si se aplica $\frac{d^n F(x)}{dx^n}|_{x=0}$ al ejemplo en particular para $n = 3$, se tiene que derivar 3 veces la función $C(x)$, por lo que se tiene:

$$\frac{d^3 C(x)}{dx^3}|_{x=0} = \frac{d^3(-\ln(1-x))}{dx^3}|_{x=0} = \frac{2}{(1-x)^3}|_{x=0} = 2.$$

Proposición 4.1.3. *Sean $S, E, \epsilon, X, 1$ especies, entonces se tiene la siguiente igualdad combinatoria:*

1. *Especie de permutaciones:* $S(x) = \frac{1}{1-x}$.
2. *Especie de conjuntos:* $E(x) = e^x$.
3. *Especie de elementos:* $\epsilon(x) = xe^x$.
4. *Especie de subconjuntos:* $\wp(x) = e^{2x}$.
5. *Especie singular:* $X(x) = x$.
6. *Especie característica:* $1(x) = 1$.
7. *Especie vacía:* $0(x) = 0$.
8. *Especie de gráficas simples:* $\mathcal{G} = \sum_{n\geq 0} 2^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}$.

Demostración. 1. $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{s_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |S[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

2. $E(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{e_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |E[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (1) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$

3. $\epsilon(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\epsilon_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |\epsilon[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^x$

4. $\wp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\wp_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |\wp[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$

5. $X(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |X[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |X[1]| \frac{x^1}{1!} = x$

6. $1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |1[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |1[0]| \frac{x^0}{0!} = 1$

7. $0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{0_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |0[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (0) \frac{x^n}{n!} = 0$

8. $\mathcal{G}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{g_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |g[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} 2\binom{n}{2} \frac{x^n}{n!}$

□

4.1.2. Serie generadora de tipos de F

En el Capítulo 3 se analizaron grafos, los cuales por medio de una biyección se podían transportar a otros grafos, de manera que, se mantenía la adyacencia en el conjunto de sus vértices. De esta manera, se obtiene como resultado, estructuras que eran isomorfas entre sí o bien que comparten el mismo tipo de isomorfismo. Esto se verá a detalle en la Definición 4.1.7 donde se presenta la serie generadora de tipos, que es la que se encarga de la enumeración de los tipos de isomorfismo de F-estructuras.

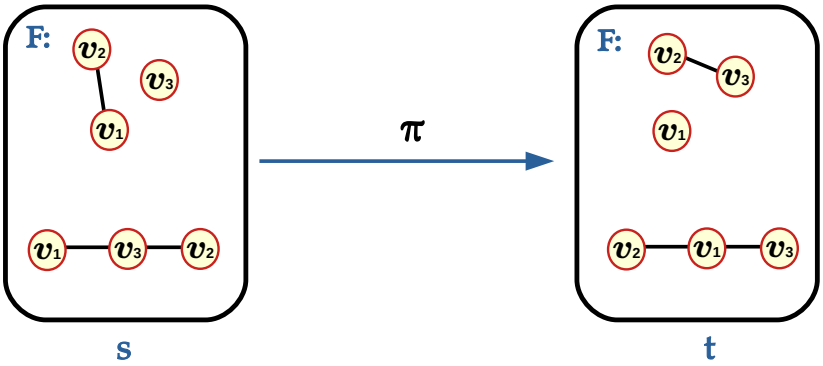


Figura 4.5: Ejemplo de especies isomorfas.

Definición 4.1.5. *Considerando el conteo de F-estructuras isomorfas, es decir la enumeración de los tipos de isomorfismo de F-estructuras. Para dicha enumeración se acotará el estudio a estructuras sobre conjuntos* $V = [n] = \{l, 2, \ldots, n\}$. *Definiendo una relación de equivalencia* $(\sim)$ *sobre el conjunto* $F[n]$ *dada por* $\forall s, t \subset F[n]$

$$s \sim t \text{ si y sólo si, } s \text{ y } t \text{ tiene el mismo tipo de isomorfismo.}$$

Dicho de otra forma, $s \sim t$ *si y sólo si existe una permutación* $\pi : [n] \to [n]$, *tal que* $F[\pi](s) = t$. *Por definición, un tipo de isomorfismo de F-estructuras de orden n es una clase de equivalencia (módulo de la relación* $\sim$*) de F-estructura sobre* $[n]$. *Una clase de equivalencia, también llamada una F-estructura de orden n no etiquetada.*

Definición 4.1.6. *Sea $T(F_n)$ el conjunto cociente $F[n]/\sim$, de los tipos de F-estructuras de orden n y sea*

$$T(F) = \sum_{n\geq 0} T(F_n). \tag{4.4}$$

Definición 4.1.7. *La* **serie generadora de tipos** *(de isomorfismo) o* **serie generatriz** *de una especie de estructura F es la serie formal de potencias:*

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n\geq 0} \tilde{f}_n x^n \tag{4.5}$$

donde $\tilde{f}_n = |T(F_n)|$ es el número de F-estructuras sin etiqueta o tipos de isomorfismo sobre un conjunto V finito.

Se puede notar que, esta serie es una serie ordinaria formal de potencias, ya que no tiene factoriales en los denominadores. Esto puede verse como el cálculo del número de "formas" diferentes que puede obtenerse una estructura F de un tamaño dado, independientemente de las etiquetas. En otras palabras, esto se puede considerar como clases de isomorfismo de estructuras etiquetadas bajo la permuta de etiquetas.

Ejemplo 4.1.3. Observe que mientras hay ocho $\mathcal{G}$-estructuras en el conjunto $\mathcal{G}[\{v_1, v_2, v_3\}]$ (Figura 4.6), sólo se pueden obtener cuatro $\mathcal{G}$-estructuras sin etiqueta sobre tres vértices (Figura 4.8), ya que existe una permutación $\pi : [n] \to [n]$, tal que

$$\begin{aligned} F[\pi](G_2) &= G_4 \\ F[\pi](G_4) &= G_3 \\ F[\pi](G_3) &= G_2 \\ F[\pi](G_5) &= G_6 \\ F[\pi](G_6) &= G_7 \\ F[\pi](G_7) &= G_5. \end{aligned}$$

De esta manera G_2, G_3 y G_4 tienen el mismo tipo de isomorfismo y entonces se cuenta como una sola estructura, del mismo modo para G_5, G_6 y G_7. La partición de la Figura 4.8 nos muestra el conjunto cociente, que tiene cuatro elementos del conjunto de la especie $\mathcal{G}$ sobre 3 vértices.

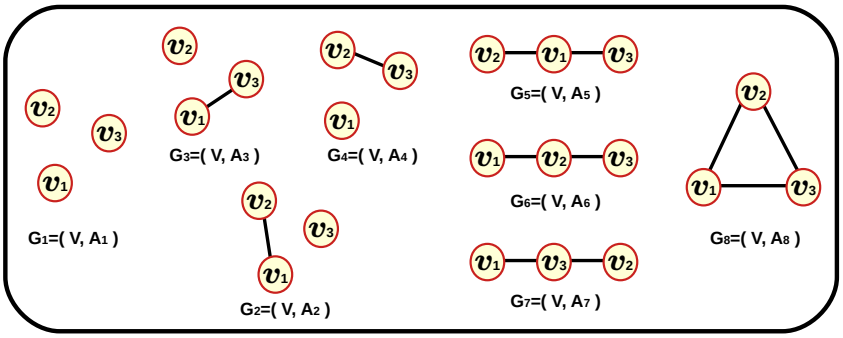


Figura 4.6: Conjunto $\mathcal{G}[3]$ que tiene 8 $\mathcal{G}$-estructuras.

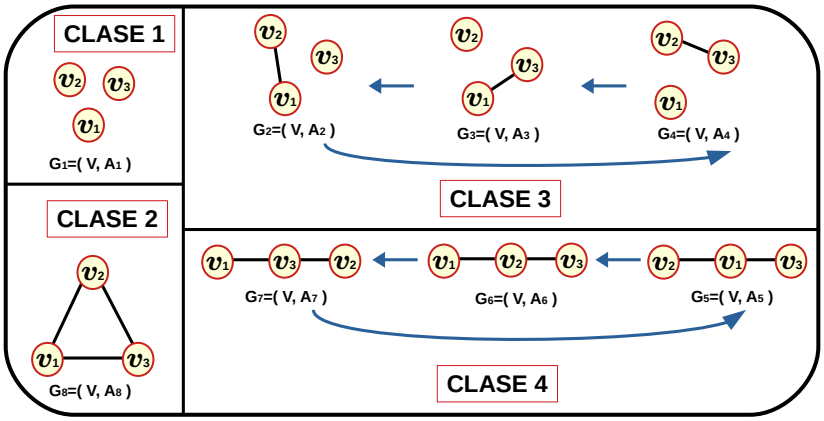


Figura 4.7: Cuatro clases de equivalencia de $\mathcal{G}[3]$.

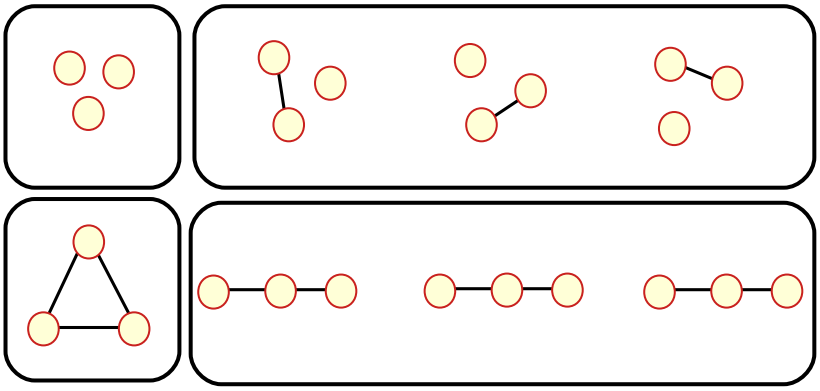


Figura 4.8: Los cuatro elementos del producto cociente $\mathcal{G}[3]/\sim$, es decir 4 tipos de isomorfismo.

Ejemplo 4.1.4. Usando la Definición 4.1.7 las series tipo generatriz para estructuras no etiquetaslas de las especies $L, S, C, E, \epsilon, \wp, X, 1, 0$, están dadas por:

1. Especie de ordenes lineales: $\tilde{L}(x) = \frac{1}{1-x}$.
2. Especie de permutaciones: $\tilde{S}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$.
3. Especie de permutaciones ciclícas: $\tilde{C}(x) = \frac{x}{1-x}$.
4. Especie de conjuntos: $\tilde{E}(x) = \frac{1}{1-x}$.
5. Especie de elementos: $\tilde{\epsilon}(x) = \frac{x}{1-x}$.
6. Especie de subconjuntos: $\tilde{\wp}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
7. Especie singular: $\tilde{X}(x) = x$.
8. Especie característica: $\tilde{1}(x) = 1$.
9. Especie vacía: $\tilde{0}(x) = 0$.

Analizando en particular las especies L y S, se puede notar que tienen la misma serie exponencial, es decir $S(x) = L(x) = \frac{1}{1-x}$, sin embargo, no tienen la misma serie generadora de tipos ($\tilde{S}(x) \neq \tilde{L}(x)$), lo que implica que las especies L y S no son iguales. De hecho, los órdenes totales y las permutaciones no se transportan de la misma manera a lo largo de las biyecciones. En particular, un orden total sólo admite un automorfismo, mientras que, en general una permutación admite varios automorfismos.

4.1.3. Serie de índices de ciclo de F

Si se permutan las etiquetas de un conjunto dado y se obtienen las estructuras que quedan fijas bajo cada permutación, se puede obtener la información sobre la forma en que se relacionan entre sí. La serie de índices de ciclo de F, denotada por Z_F, es una serie formal de potencias en un número infinito de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ y contiene más información que las series $F(x)$ y $\tilde{F}(x)$.

Definición 4.1.8. *Dado un conjunto finito V y σ una permutación de V. El tipo de ciclo de la permutación σ es la sucesión $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots)$, donde para $k \geq 1$, σ_k = número de ciclos de longitud k, en la descomposición de ciclos disjuntos de σ.*

Se utiliza la siguiente notación:

- Fix $\sigma = \{v_i \in V \mid \sigma(v_i) = v_i\}$, denota el conjunto de puntos fijos de σ.
- fix $\sigma = |\text{Fix } \sigma|$, denota el número de puntos fijos de σ.

Se puede notar que σ_1 es el número de puntos fijos de σ.

El tipo de ciclo de σ se escribe en forma de vector con n componentes, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$.

Ejemplo 4.1.5. Sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ un conjunto de vértices y sea σ la permutación dada por:

$$\begin{array}{llll} \sigma(v_1) & \mapsto & v_1 & \sigma(v_5) \mapsto v_6 \\ \sigma(v_2) & \mapsto & v_3 & \sigma(v_6) \mapsto v_7 \\ \sigma(v_3) & \mapsto & v_2 & \sigma(v_7) \mapsto v_8 \\ \sigma(v_4) & \mapsto & v_4 & \sigma(v_8) \mapsto v_5 \end{array}$$

Los ciclos disjuntos de la permutación σ son: $(v_1)(v_2, v_3)(v_4), (v_5, v_6, v_7, v_8)$. De aquí se puede obtener σ_k:

- $\sigma_1 :=$ es el número de ciclos de tamaño uno, en este caso se tienen dos ciclos de tamaño uno: (v_1) y (v_4). Observe que Fix $\sigma_1 = \{v_1, v_4\}$ y fix $\sigma_1 = 2$.
- $\sigma_2 :=$ es el número de ciclos de tamaño dos, en este caso se tiene un ciclo que es (v_2, v_3).

- $\sigma_3 :=$ es el número de ciclos de tamaño tres, en este caso no se tiene ciclos de tamaño tres.
- $\sigma_4 :=$ es el número de ciclos de tamaño cuatro, solo hay un ciclo de tamaño cuatro (v_5, v_6, v_7, v_8).

Así el tipo de ciclo de la permutación σ es $(2, 1, 0, 1)$ (observe la Figura 4.9).

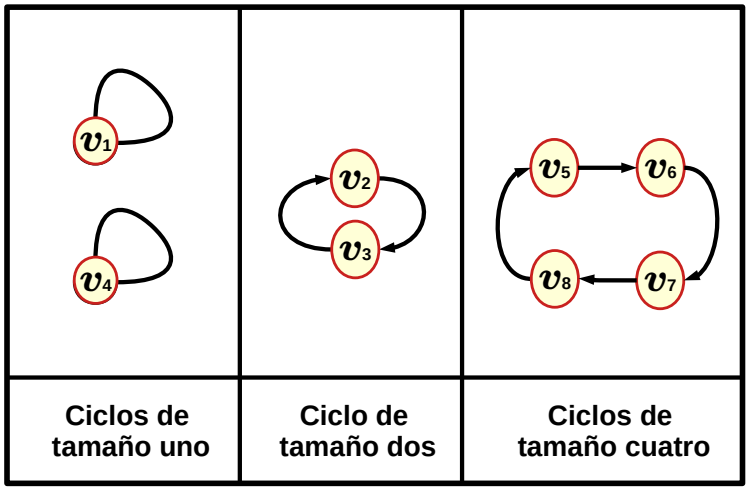


Figura 4.9: Permutación de tipo (2, 1, 0, 1).

Sea F cualquier especie. Cada permutación σ de V induce, por transporte de estructuras, una permutación $F[\sigma]$ del conjunto $F[V]$ de F-estructuras en V.

Definición 4.1.9. *La serie indicadora de ciclos de una especie de estructuras F, es una serie formal de potencia Z_F en un número infinito de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ y está dada por*

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in S_n} fixF[\sigma](x_1)^{\sigma_1}(x_2)^{\sigma_2}(x_3)^{\sigma_3}, \ldots \right), \tag{4.6}$$

donde S_n denota a las permutaciones de $[n]$, $S_n = S[n]$ y $fixF[\sigma] = (F[\sigma])_1$ corresponde al número de F-estructuras en $[n]$ fijas por $F[\sigma]$, es decir, el número de F-estructuras en $[n]$ para las que σ es un automorfismo.

Ejemplo 4.1.6. Considérese la especie $\mathcal{G}$ de grafos simples y la permutación $\mathcal{G}[\sigma]$ del conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dada por la Figura 4.10.

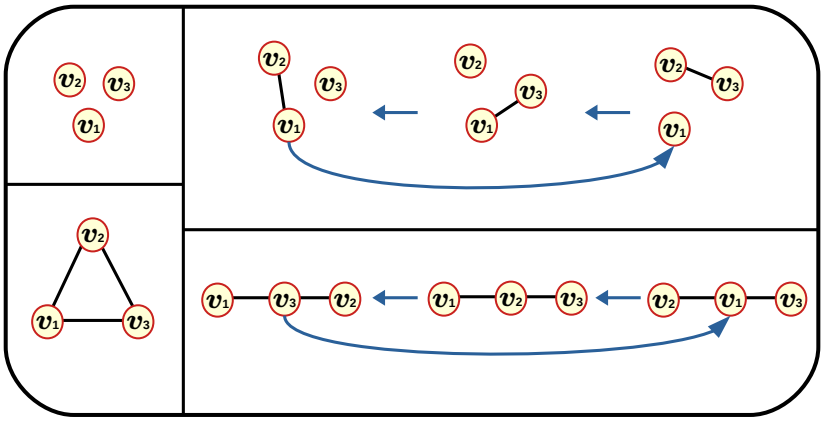


Figura 4.10: Permutación σ dada por el conjunto V.

La permutación σ es de tipo (2,0,2) permutando los 8 grafos simples de V. En particular, se obtiene fix $\mathcal{G}[\sigma] = 2$.

Ejemplo 4.1.7. El cálculo directo de la serie indicadora de ciclos sólo se puede realizar en casos simples, por ejemplo para las especies $0, 1, X, L, S, E, \epsilon$:

1. $Z_0(x_1, x_2, x_3 \ldots) = 0$.
2. $Z_1(x_1, x_2, x_3 \ldots) = 1$.
3. $Z_X(x_1, x_2, x_3 \ldots) = x_1$.
4. $Z_L(x_1, x_2, x_3 \ldots) = \frac{1}{1-x_1}$.
5. $Z_S(x_1, x_2, x_3 \ldots) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots}$.
6. $Z_E(x_1, x_2, x_3 \ldots) = exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \ldots)$.
7. $Z_\epsilon(x_1, x_2, x_3 \ldots) = x_1 exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \ldots)$.

Ejemplo 4.1.8. Sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto de vértices, S_4 las permutaciones sobre [4], y $fixE[\sigma] = (E[\sigma])_1$ el número de E-estructura fijas por $E[\sigma]$. Se calculará la serie indicadora de ciclos de la especie E de conjuntos.

Primero se obtendrá las cuatro "formas generales" de las permutaciones posibles sobre V, es decir, una primera forma es la permutación identidad (todos los elementos quedan fijos y

sólo se tiene una permutación), una segunda forma es donde quedan dos fijos (6 permutaciones posibles), la tercera "forma general" es donde hay dos ciclos de longitud dos (3 permutaciones posibles) y una última forma donde solo un elemento queda fijo (8 permutaciones posibles). De aquí se obtienen las permutaciones totales de cada "forma general".

$$\begin{array}{lll} \sigma(v_1) & \mapsto & v_1 \\ \sigma(v_2) & \mapsto & v_2 \\ \sigma(v_3) & \mapsto & v_3 \\ \sigma(v_4) & \mapsto & v_4 \end{array} \qquad \sigma(v_1) \mapsto v_2 \quad \sigma(v_2) \mapsto v_1 \quad \sigma(v_3) \mapsto v_3 \quad \sigma(v_4) \mapsto v_4$$

$$\begin{array}{lll} \sigma(v_1) & \mapsto & v_2 \\ \sigma(v_2) & \mapsto & v_1 \\ \sigma(v_3) & \mapsto & v_4 \\ \sigma(v_4) & \mapsto & v_3 \end{array} \qquad \sigma(v_1) \mapsto v_2 \quad \sigma(v_2) \mapsto v_3 \quad \sigma(v_3) \mapsto v_4 \quad \sigma(v_4) \mapsto v_1$$

Donde sustituyendo se obtiene:

$$Z_E(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in S_n} fixE[\sigma](x_1)^{\sigma_1}(x_2)^{\sigma_2}(x_3)^{\sigma_3}, \ldots \right)$$

$$\begin{aligned} = \quad & 1 + x_1 + \frac{1}{2}\left[(x_1)^2 + x_2\right] + \frac{1}{6}\left[(x_1)^3 + 3(x_1)^1(x_2)^1 + 2(x_3)^1\right] + \\ & \frac{1}{4!}\left[(x_1)^4 + 6(x_1)^2(x_2)^1 + 3(x_2)^2 + 6(x_4)^1 + 8(x_1)^1(x_3)^1\right] + \ldots \end{aligned}$$

La serie de índices de ciclo de la especie E es:

$$Z_E(x_1, x_2, x_3 \ldots) = exp(x_1 + \tfrac{x_2}{2} + \tfrac{x_3}{3} \ldots).$$

Una generalización simultánea de las series $F(x)$ y $\tilde{F}(x)$ la da la noción de serie de índice de ciclo Z_F. Observe el Teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.1. *Dada cualquier especie de estructuras F, se tiene*

$$1) F(x) = Z_F(x, 0, 0, \ldots) \tag{4.7}$$

$$2) \tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \ldots). \tag{4.8}$$

Demostración. 1) En la serie indicadora de ciclos se remplaza $x_1 = x$ y $x_j = 0$ para todo $j \geq 2$ por lo tanto se tiene:

$$Z_F(x, 0, 0, \ldots) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in S_n} fixF[\sigma](x)^{\sigma_1}(0)^{\sigma_2}(0)^{\sigma_3}, \ldots \right) \tag{4.9}$$

Ahora para cada valor de $n \geq 0$, $(x)^{\sigma_1}(0)^{\sigma_2}(0)^{\sigma_3}, \ldots = 0$ excepto si $\sigma_1 = n$ y $\sigma_i = 0$ para $i \geq 2$. Esto quiere decir que $\sigma = Id_n$. Esto contribuye a la suma, así

$$\begin{aligned} Z_F(x, 0, 0, \ldots) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(fixF[Id_n]x^n \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} fix\left(F[Id_n] \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} |F[n]| \frac{x^n}{n!} \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Ya que $F[Id_n] = Id_{f_n} = f_n$ y dado que todas las F-estructuras son fijas por el transporte de estructuras a través de la identidad.

2) Para esta igualdad se utilizará el lema de Burside[1]. De hecho, se tiene que:

$$\begin{aligned} Z_F(x, x^2, x^3, \ldots) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} fixF[\sigma] x_1^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3}, \ldots \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} fixF[\sigma] x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} |F[n]/\sim| x^n \\ &= \tilde{F}(x). \end{aligned}$$

□

Con esto se finaliza la revisión y presentación de los conceptos de la teoría de especies de estructuras.

[1]Lema Burnside. Si G es un grupo de simetrías de un conjunto X, el número de órbitas distintas de G viene dado por: # órbitas distintas $= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |F(g)|$.

Conclusiones

Se ha presentado una revisión no exhaustiva de los temas de grafos y especies de estructuras, buscando en todo momento que la explicación sea lo más explícita, sencilla e ilustrativa posible, para que, quienes lean este trabajo, como un primer acercamiento al tema, puedan hacerlo sin dificultad. En la actualidad se realizan investigaciones de frontera [6] sobre los dos principales temas tratados en este trabajo: Grafos y Especies de Estructuras, ya sea con objetivos meramente teóricos y abstractos o con interés en la aplicación práctica del tema, por ejemplo, en áreas como las ciencias de la computación, la sociología, etc.

Para finalizar este trabajo se presenta a continuación una aplicación de la teoría de grafos en la solución de un problema que se puede considerar de la vida cotidiana. Este problema fue resuelto por primera vez, por Euler en 1736 y con el método que utilizó para su solución surgió lo que hoy se conoce como la teoría de grafos.

Aplicación en teoría de grafos

Problema 1. *El siguiente problema surge en la ciudad de Kaliningrado, Rusia, que antiguamente se llamaba Königsberg. Los habitantes disfrutaban recorrer su ciudad, la cual estaba dividida en varias secciones por el río Pregolya. En el centro de la ciudad había dos grandes islas las cuales estaban conectadas a la ciudad por 7 puentes (Ver Figura C.1). Para entretenerse, los habitantes de la ciudad crearon un juego, este consistía en dar solución a la siguiente pregunta: ¿Se pueden atravesar todos los puentes pasando sólo una vez por cada puente? Esta pregunta la logró responder Leonhard Euler, dando una solución muy completa y demostrativa de por qué no existía un recorrido que cumpliera con las condiciones establecidas, con esta demostración definió y caracterizó los grafos.*

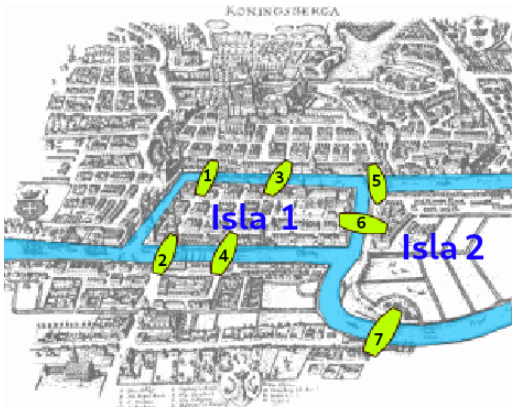


Figura C.1: Los 7 puentes de Königsberg.

Solución 1. *Lo primero que hizo Euler fue: 1.- Recurrir a una abstracción del mapa que le llamo grafo, donde representó tanto a las secciones de la ciudad como los puentes, enfocándose exclusivamente en las relaciones entre ellos (observe Figura C.2). Cada puente de la ciudad se representó mediante líneas, en la figura C.2 están etiquetados con números, que llamó aristas. Cada arista une dos puntos, cada uno de estos puntos representan las secciones de la ciudad y los nombró vértices, en la imagen están etiquetados con* v_1, v_2, v_3 *y* v_4*, donde* v_2 *y* v_4 *representan las islas 1 y 2, respectivamente.*

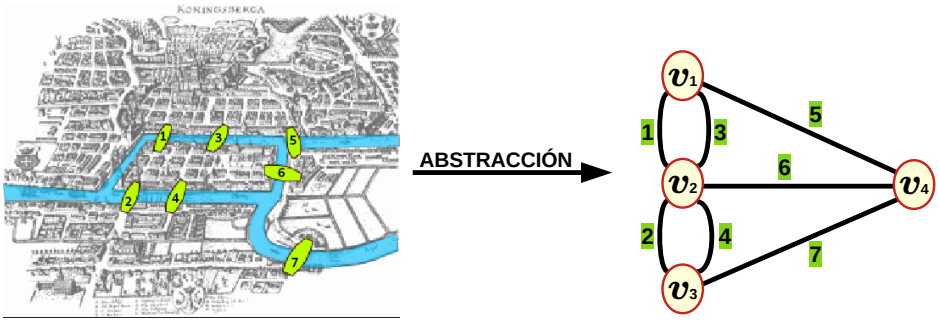


Figura C.2: Abstracción del mapa.

2.- Analizó los siguientes 3 casos, los cuáles le ayudaron a determinar que hay un punto de «inicio» y un punto de «salida».

- *Caso 1. Primero estudió el caso más simple (observe la Figura C.3), quitó 3 puentes*

(aristas) del grafo y observó que cada vértice tenía una entrada y una salida, es decir, en cada vértice incidían 2 aristas y así concluyó que en este caso si se podía recorrer cada una de las aristas una sola vez (camino de Euler).

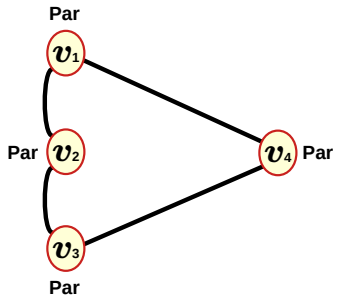


Figura C.3: Grafo con tres aristas menos.

- *Caso 2. Agregó una arista a la figura C.3 que va de v_2 a v_3, dando como resultado el grafo de la Figura C.4 lado izquierdo y observó que era posible pasar una sola vez por cada arista si comenzaba y terminaba en un vértice de grado impar. Después, agregó una segunda arista de v_1 a v_2 (ver Figura C.4 lado derecho) y también concluyó que era posible recorrer todas las aristas sólo una vez. Observe que los grafos de la Figura C.4 se diferencian del grafo de la Figura C.3 porque ambos tienen dos vértices con grado par y dos con grado impar.*

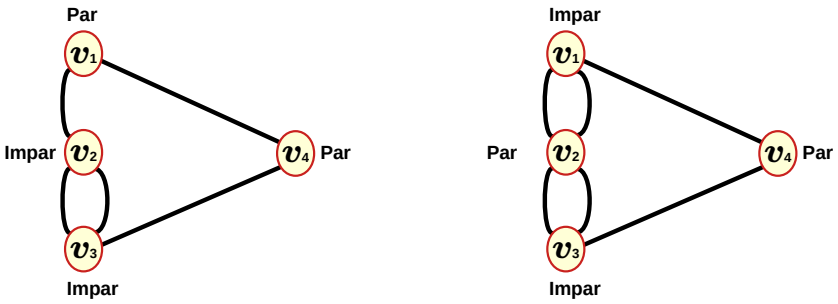


Figura C.4: Grafos agregando una y dos aristas respectivamente.

- *Caso 3. Finalmente analizó el caso de los 7 puentes o 7 aristas y se dio cuenta que era*

imposible pasar solo una vez por las 7 aristas, ya que, en este grafo todos los vértices tienen una cantidad impar de aristas que inciden en ellos. (ver Figura C.5).

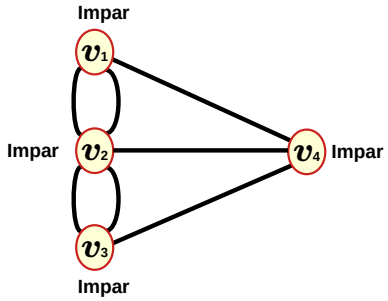


Figura C.5: Grafos agregando 3 aristas (grafo abstracto de la ciudad de Königsberg).

Concluyendo que, para los grafos que tengan las siguientes propiedades si es posible recorrer cada una de las aristas una sola vez (camino de Euler).

- *Si en un grafo todos sus vértices tienen una cantidad par de aristas, es decir si en cada vértice inciden dos aristas.*
- *Si en un grafo hay vértices con cantidad par y solo dos vértices con cantidad impar de aristas y se comienza en uno de los vértices impares.*

Hoy en día en la ciudad de Kaliningrado antes llamada Königsberg solo quedan 5 puentes de los 7 que había, ya que durante la segunda guerra mundial se destruyeron 2, debido a esta reducción de puentes, finalmente es posible recorrer todos los puentes pasando solo una vez por cada puente, lo que se le conoce como camino de Euler.

Bibliografía

[1] Khee-meng Koh, Fengming Dong, Eng Guan Tay. (2007). Introduction To Graph Theory: H3 Mathematics. Singapore: World Scientific Publishing Company.

[2] C. Vasudev. (2006). Graph Theory with Applications. Delhi, India: New Age International.

[3] AndréJoyal. (October 1981). Une théorie combinatoire des séries formelles. Elsevier, 42, 82..

[4] F. Bergeron, Bergeron F, Gilbert Labelle, Pierre Leroux. (1998). Combinatorial Species and Tree-like Structures. Cambridge : Cambridge University Press.

[5] M.E. Frías-Armenta, F. Larrión, V. Neumann-Lara, M.A. Pizaña. (july 2013). Edge contraction and edge removal on iterated clique graphs. Elsevier, 161, 1427-1439.

[6] Prelat, D., Lorusso, E., Piñeiro, M., Arriola, M., Seminara, S. y Mastrangelo. (2006-01-01). Matemática discreta a través de una instrucción didáctica. Argentina: Centro de Estudiantes de Ingeniería Tecnológica - CEIT.