



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARÁ MI GRANDEZA

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

**Conceptos de Integración Analítica y Aplicaciones**

## T E S I S

Que para obtener el título de:

**Licenciada en Matemáticas**

Presenta:

Pastora Margarita Bautista Sanchez

Director de tesis:

Dra. Inna K. Shingareva

Hermosillo, Sonora, México, 8 de Enero de 2016



## SINODALES

**Dr. Daniel Olmos Liceaga**

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

**Dr. Martín Gildardo García Alvarado**

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

**Dr. Rodrigo González González**

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

**Dra. Inna K. Shingareva**

Universidad de Sonora, Hermosillo, México



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción: Varias Integrales Analíticas</b>	<b>11</b>
1.1	Nociones Geométricas . . . . .	11
1.2	Hipócrates, Eudoxo y Arquímedes . . . . .	12
1.3	Newton y Leibniz . . . . .	25
1.4	Fermat y Wallis . . . . .	32
1.5	Stirling, Fourier y Dirichlet . . . . .	34
1.6	Cauchy y Riemann . . . . .	36
1.7	Darboux . . . . .	39
1.8	Stieltjes y Lebesgue . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Integración Analítica Clásica</b>	<b>45</b>
2.1	Integrales de Newton–Leibniz . . . . .	47
2.2	Integrales de Cauchy . . . . .	50
2.3	Integrales de Riemann . . . . .	51
2.4	Integrales de Darboux . . . . .	57
2.5	Aplicaciones: Integrales con Parámetros . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Integración Analítica Aproximada</b>	<b>71</b>
3.1	Integración por Partes . . . . .	71

---

3.2	Aproximación Analítica de Integrales del tipo Laplace . . . . .	73
3.3	Aproximación Analítica de Integrales de Fourier . . . . .	76
3.4	Lema de Watson . . . . .	78
3.5	Aplicaciones: Integrales con Parámetros . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Integración Analítica Generalizada</b>	<b>85</b>
4.1	Integrales de Riemann–Stieltjes . . . . .	85
4.2	Integral de Lebesgue . . . . .	90
4.2.1	Medida Exterior de Lebesgue . . . . .	91
4.2.2	Conjuntos Medibles y Medida de Lebesgue . . . . .	93
4.2.3	Funciones Simples . . . . .	96
4.2.4	Integral de Lebesgue para Funciones Simples . . . . .	97
4.2.5	Funciones Medibles . . . . .	98
4.2.6	Integración de Funciones No-negativas . . . . .	101
4.2.7	Integración de Funciones Medibles . . . . .	104
4.2.8	Teoremas de Convergencia . . . . .	105
4.3	Integrales de Lebesgue–Stieltjes . . . . .	109
	<b>Conclusiones</b>	<b>121</b>
	<b>Appendix A. Definiciones y Teoremas</b>	<b>122</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>

# List of Figures

1.1	Reorganización de un círculo en un paralelogramo . . . . .	12
1.2	Ejemplo de redistribución de áreas . . . . .	12
1.3	Ejemplo de redistribución de áreas . . . . .	13
1.4	Ejemplo de redistribución de áreas . . . . .	13
1.5	Ejemplo de escalamiento de áreas . . . . .	14
1.6	Luna de Hipócrates . . . . .	14
1.7	La suposición de Hipócrates . . . . .	15
1.8	La primera conclusión . . . . .	15
1.9	La segunda conclusión . . . . .	15
1.10	Área de la luna . . . . .	16
1.11	Tres lunas más . . . . .	17
1.12	Representación de curvas a integrar . . . . .	18
1.13	Polígonos inscritos . . . . .	20
1.14	Segmentos . . . . .	20
1.15	Triángulo de Arquímedes . . . . .	21
1.16	Construcción de triángulos . . . . .	22
1.17	Construcción de triángulos . . . . .	23
1.18	Triángulos inscritos . . . . .	24

---

1.19	Construcción de triángulos . . . . .	24
1.20	Sucesión de ordenadas $y_1, y_2, \dots, y_7$ . . . . .	29
1.21	Construcción de $\frac{\pi}{4}$ . . . . .	31
1.22	Integral de Cauchy . . . . .	36
1.23	Integral de Riemann . . . . .	38
1.24	Masas en la recta real . . . . .	41
1.25	Distribución de masas . . . . .	41
2.1	Representación gráfica de región $R$ . . . . .	67
3.1	Resultados analíticos aproximados y numéricos, $F_a$ y $F_n$ ( $a=b=c=1$ )	75
3.2	Gráficas de $y = e^{-xt}$ para $x = 1, 2, 3$ y $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$ . . . . .	79

# Dedicatoria

*A mi padre, Fermin Bautista Rodarte, quien siempre me apoyo desde el inicio de mi carrera y hasta el final de sus días, te guardo en mi corazón para siempre.*

*A mi madre de gran corazón, Pastora Margarita Sanchez Medina, quien ha tenido que ser padre y madre para mi y para muchos más.*

*A mi hermana, Flor Eunice Bautista Sanchez, el sustento de nuestro hogar a quien le debo mucho.*

*Al amor de mi vida, Luis Angel Franco, por su paciencia.*

*A mi familia y amigos, por no dejarme sola y por darme siempre su apoyo incondicional.*

*A mis maestros, pues sin ellos yo no estaría donde estoy.*



# Agradecimientos

*Primero que nada, agradezco a Dios por tener la oportunidad de vivir esta experiencia, al pasar de los años el tiempo se encarga de poner en tu vida, el material, las herramientas y las ideas, solo es cuestión de reunir las fuerzas y el ánimo para trabajar y construir tu propio futuro.*

*En lo largo de mi vida, he tenido a mi lado a las mejores personas que pude haber conocido, agradezco a mis padres Fermin Bautista Rodarte y Pastora Margarita Sanchez Medina por darme la vida, el amor, los valores y apoyo incondicional que me hacen ser lo que ahora soy, gracias a ustedes y a mi hermana Flor Eunice Bautista Sanchez que han trabajado tan duro, he podido salir adelante.*

*A toda mi familia, gracias por apoyarme todo este tiempo, por permanecer unidos incluso en los momentos difíciles. Agradezco al amor de mi vida, Luis Angel Franco Quijada quien siempre estaba para alentarme y regañarme de vez en cuando para que no flaqueara y siguiera hasta alcanzar mis metas y a su familia que me han hecho parte de ella. A mi cuñado Mario Ibarra, ya diez años en la familia, gracias por estar al pendiente.*

*A mis mejores amigas, amigos(as) y compañeros(as) de la Licenciatura en Matemáticas, que siempre estuvieron en mis momentos de debilidad, cuando me sentía cansada y decía que no podía más me animaban a seguir dando lo mejor, por creer en mí, gracias. Me abstengo de nombrarlos(as) uno(a) a uno(a), por temor a olvidar a alguno(a) de ustedes, se que se identificarán al leer esto.*

*Durante la Licenciatura aprendí mucho mas que sólo Matemáticas, conocí el valor que tiene la palabra esfuerzo, sobre todo cuando tienes claro a donde quieres llegar, aprendí a apreciar grandemente a las personas y aprovechar al máximo todo lo que te ofrecen, pues siempre puedes aprender algo nuevo que te haga mejor ser humano.*

*Agradezco a mis maestros, quienes fueron la guía e inspiración de mis estudios con su dedicación, principalmente, agradezco a mi Directora de Tesis: Dra. Inna K. Shingareva por su atención y paciencia a lo largo del desarrollo de este trabajo y por la amistad que construimos en el proceso. Así como a mis Sinodales: Dr. Daniel Olmos Liceaga, Dr. Rodrigo González González y el Dr. Martín Gildardo García Alvarado. Siendo este último un gran ejemplo, amigo y apoyo en mi vida universitaria, por su paciencia y atención, pero sobre todo por siempre brindarme un poco de su tiempo a pesar de su agenda ocupada, de corazón, ¡muchas gracias!.*

*Por darme su confianza y creer en mí, gracias. El camino apenas comienza.*

# Prefacio

Las leyes de la naturaleza se expresan mediante ecuaciones que involucran funciones y sus derivadas e integrales, y el análisis de estas ecuaciones se realiza mediante las herramientas del cálculo.

Por esa razón los cursos de Cálculo aparecen en los planes de estudio de todas las carreras científicas y técnicas. El Cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad, la integración es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático. Básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

El proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la ciencia también; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de estos últimos y los aportes de Newton generaron el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

Este trabajo de tesis se divide en cuatro capítulos, en los que se describen conceptos y métodos de integración, propiedades y algunas aplicaciones.

En el primer capítulo se tratan nociones históricas de la evolución de la integración, se enfoca principalmente en ofrecer al lector una breve reseña de los matemáticos destacados que sustentaron el desarrollo de la integración y sus resultados más importantes.

En el segundo capítulo se define el concepto de integración analítica clásica, se describen métodos de integración clásicos y se presenta el desarrollo de la teoría según el enfoque de distintos matemáticos cuyas integrales llevan sus nombres, como: Newton, Leibniz, Cauchy, Riemann y Darboux.

En el tercer capítulo se definen algunos métodos de aproximación analítica de integrales, técnicas disponibles para ciertas clases de integrales, así como la determinación del método de aproximación más apropiado, se definen integrales de Laplace, Fourier, Lema de Watson y se muestran algunas aplicaciones.

En el cuarto y último capítulo se definen algunas de las generalizaciones de las integrales mencionadas en el Capítulo 2, como lo son la integral de Riemann–Stieltjes, integral de Lebesgue e integral de Lebesgue–Stieltjes, presentando su desarrollo y propiedades, así como algunas relaciones entre ellas.

# Notación

$\Delta L$	el área de L;
$y(x), x$	variable dependiente (función), variable independiente;
$y'(x)$	la primera derivada de una función, también se denota $\frac{dy(x)}{dx}$ ;
$y''(x)$	la segunda derivada de una función, también se denota $\frac{d^2y(x)}{dx^2}$ ;
$y^{(n)}(x)$	la $n$ -ésima derivada de una función, también se denota $\frac{d^ny(x)}{dx^n}$ ;
$\frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i}$	La $i$ -ésima derivada parcial con respecto a la variable $x$ ;
$\mathcal{C} \int_a^b$	Integral de Cauchy sobre $[a, b]$ ;
$\mathcal{R} \int_a^b$	Integral de Riemann sobre $[a, b]$ ;
$\mathcal{D} \int_a^b$	Integral de Darboux sobre $[a, b]$ ;
$\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^b$	Integral de Newton–Leibniz sobre $[a, b]$ ;
$\mathcal{L} \int_a^b$	Integral de Lebesgue sobre $[a, b]$ ;
$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_a^b$	Integral de Riemann–Stieltjes sobre $[a, b]$ ;
$\int_a^b$	Integral en sentido clásico sobre $[a, b]$ ;

$\  \mathcal{P} \ $	Norma de una partición $\mathcal{P}$ ;
$\mathcal{P}_e$	Partición etiquetada;
$c_i (i = 1, 2, \dots)$	Constantes de integración;
$S(f, \mathcal{P}_e)$	Suma de Riemann asociada a la partición $\mathcal{P}_e$ ;
$S(P, g, F)$	Suma parcial de Riemann–Stieltjes;
$\mathcal{L}(f, \mathcal{P})$	Sumas inferiores de $f$ asociadas a $\mathcal{P}$ ;
$\mathcal{U}(f, \mathcal{P})$	Sumas superiores de $f$ asociadas a $\mathcal{P}$ ;
$\mu^*(X)$	Medida exterior de Lebesgue;
$\mu(X)$	Medida de Lebesgue;
$m$	Ínfimo de un conjunto;
$M$	Supremo de un conjunto;
$J_n(x)$	Función de Bessel;
$J_\nu(x)$	Función de Anger;
$E_\nu(x)$	Función de Weber;
$A_\nu(x)$	Función de Anger–Weber;
$K_0(x)$	Función de Bessel modificada;

# Capítulo 1

## Introducción: Varias Integrales Analíticas

*Cada uno de nosotros es tocado de una u otra manera, por los problemas de la comunicación matemática. Cada uno de nosotros puede hacer alguna contribución, grande o pequeña, dentro de su propia esfera de actividad. Cada contribución es necesaria para que la matemática pueda crecer de forma saludable, útil y maravillosa.*

— E. J. McShane

El desarrollo de la integración tiene una larga y distinguida historia. En este capítulo vamos a considerar algunos puntos históricos y resultados importantes e interesantes, así como los conceptos correspondientes en el desarrollo de la integración.

### 1.1 Nociones Geométricas

Consideramos la idea general de la reordenación de cierta área para crear otra forma y mostramos algunos ejemplos.

En el primer ejemplo, reorganizamos un círculo en un paralelogramo, utilizando la manipulación de áreas.

Las Figuras 1.1–1.4 muestran ejemplos de redistribución de áreas.

La Figura 1.5 representa una manipulación de área llamada *escalamiento*,

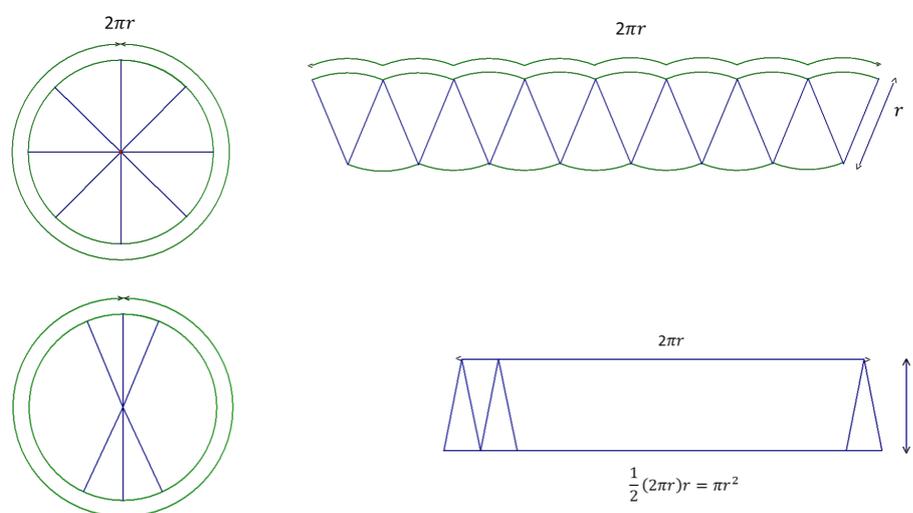


Figura 1.1: Reorganización de un círculo en un paralelogramo

donde, a pesar de la ampliación o reducción de tamaño, la forma y proporción se conservan.

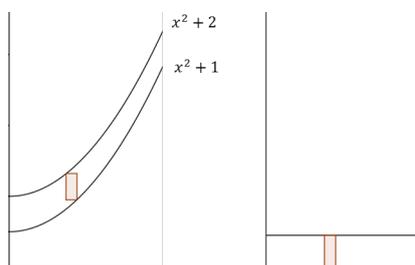


Figura 1.2: Ejemplo de redistribución de áreas

## 1.2 Hipócrates, Eudoxo y Arquímedes

**Hipócrates** (430 a.C.), un comerciante (Atenas), fue uno de los primeros en encontrar el área de una figura plana delimitada por arcos de circunferencia (conocida comúnmente como luna).

La región de media luna cuya área se va a determinar, se muestra en la Figura 1.6. En esta figura,  $ABC$  y  $AFC$  son arcos circulares con centros  $E$  y  $D$ ,

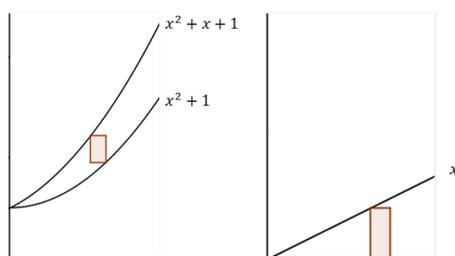


Figura 1.3: Ejemplo de redistribución de áreas

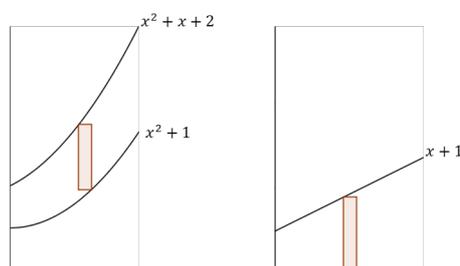


Figura 1.4: Ejemplo de redistribución de áreas

respectivamente. Hipócrates mostró que el área de la región sombreada delimitada por los arcos circulares  $ABC$  y  $AFC$  es exactamente el área sombreada del cuadrado cuyo lado es el radio del círculo.

La demostración depende de la siguiente suposición, ilustrada en la Figura 1.7: *Las áreas de dos círculos están en razón igual al cuadrado de sus radios.*

A partir de esta hipótesis se llega a dos conclusiones:

1. Los sectores de dos círculos con ángulos centrales están en razón igual al cuadrado de sus radios (ver Figura 1.8).
2. Los segmentos de dos círculos con ángulos centrales están en razón igual al cuadrado de sus radios (ver Figura 1.9).

La prueba de Hipócrates procede de la siguiente manera (ver Figura 1.10).

De la segunda conclusión, tenemos  $\frac{A_1}{A_4} = \frac{r^2}{(\sqrt{2}r)^2} = \frac{1}{2}$ . De aquí  $A_1 = \frac{1}{2}A_4$  y

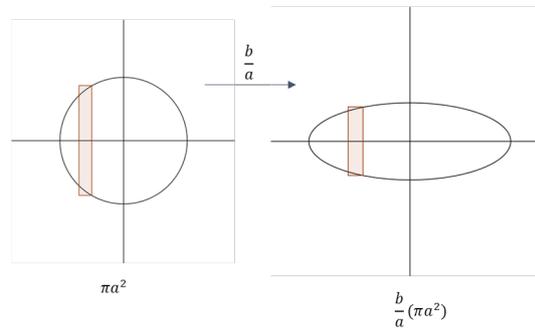


Figura 1.5: Ejemplo de escalamiento de áreas

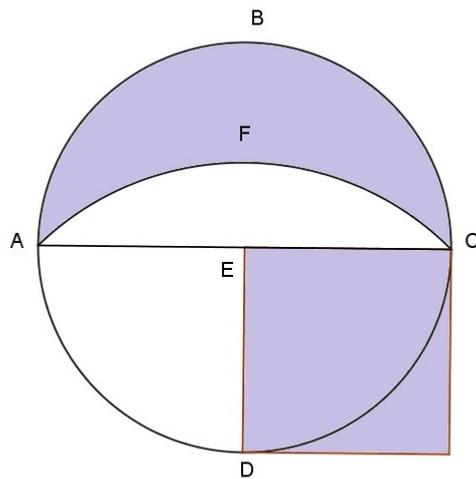


Figura 1.6: Luna de Hipócrates

$A_2 = \frac{1}{2}A_4$ , entonces  $A_1 + A_2 = A_4$ . Luego obtenemos el área de la luna:

$$\Delta L = A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_3 = \Delta T = \frac{1}{2}(\sqrt{2}r)(\sqrt{2}r) = r^2 = \Delta C,$$

donde área de la luna es  $\Delta L$ , área del triángulo es  $\Delta T$ , y área del cuadrado es  $\Delta C$ .

Un razonamiento similar se puede utilizar para las tres lunas de la Figura 1.11.

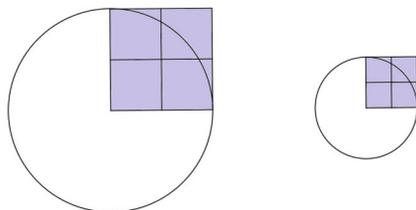


Figura 1.7: La suposición de Hipócrates

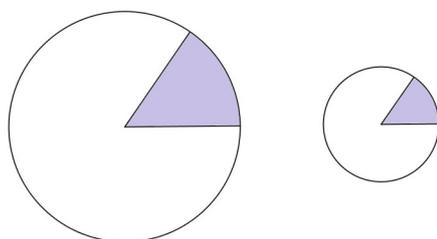


Figura 1.8: La primera conclusión

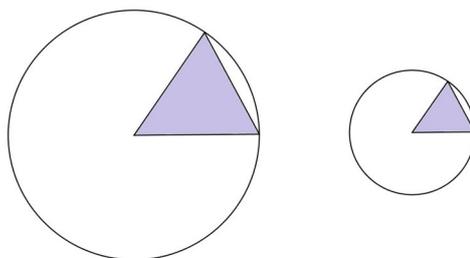


Figura 1.9: La segunda conclusión

Mediante integración clásica (sentido Cauchy–Riemann), podemos verificar el resultado anterior (observar Figura(1.12)).

*Demostración.* Obtengamos primeramente el área bajo la curva  $C_1 = \sqrt{r^2 - x^2}$  restringida al intervalo  $[0, r]$ . Claramente, debemos obtener como resultado  $\frac{\pi r^2}{4}$ , ya que estamos calculando un cuarto del área total de la circunferencia de radio  $r$ .

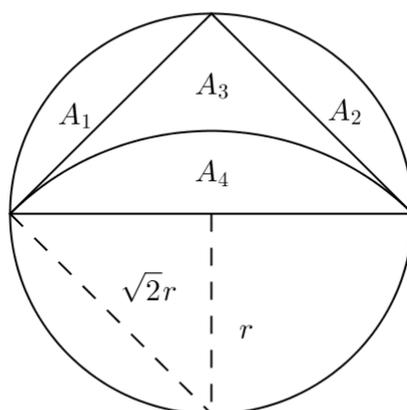


Figura 1.10: Área de la luna

Podemos expresar el área bajo la curva  $C_1$  como la siguiente integral definida:

$$\Delta C_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Utilizando la siguiente sustitución trigonométrica:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}(\theta), \\ \sqrt{r^2 - x^2} &= r \cos(\theta), \\ dx &= r \cos(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

resolvemos la integral y obtenemos que,

$$\begin{aligned} \Delta C_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2(\theta) d\theta \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= r^2 \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

De aquí que el área del semicírculo de radio  $r$  es igual a  $\frac{\pi r^2}{2}$ .

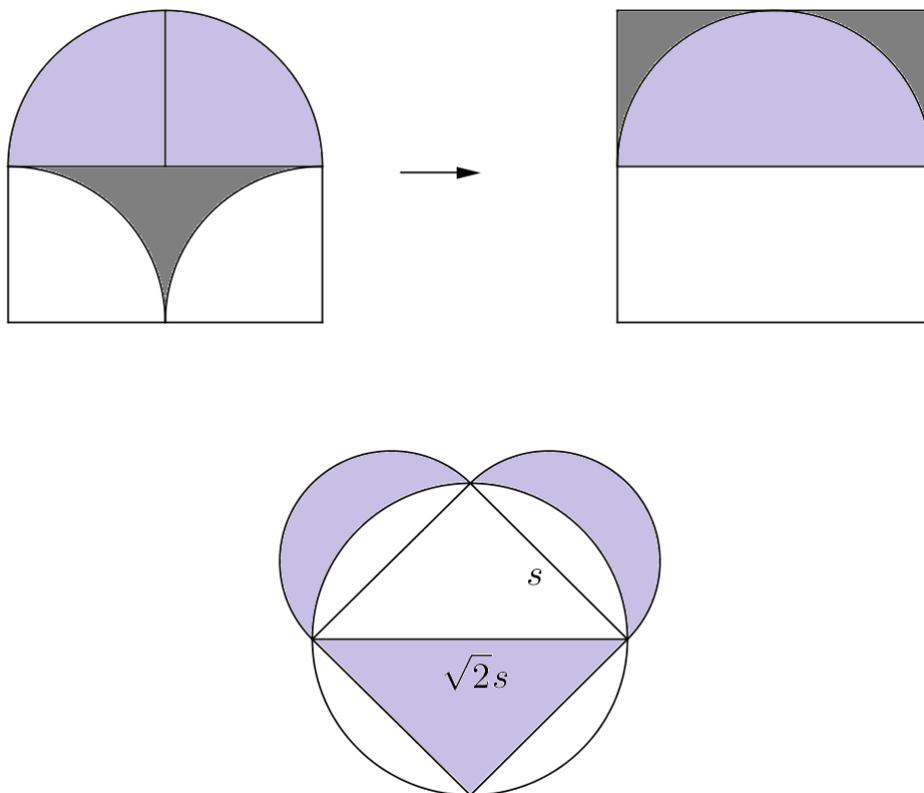


Figura 1.11: Tres lunas más

Análogamente, podemos obtener el área bajo la curva  $C_2 = \sqrt{(\sqrt{2}r)^2 - x^2} - r$ .

Utilicemos ahora la siguiente sustitución trigonométrica:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}r \operatorname{sen}(\theta), \\ dx &= \sqrt{2}r \cos(\theta) d\theta, \\ \sqrt{2}r \cos(\theta) &= \sqrt{2r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Al resolver la integral, tenemos que:

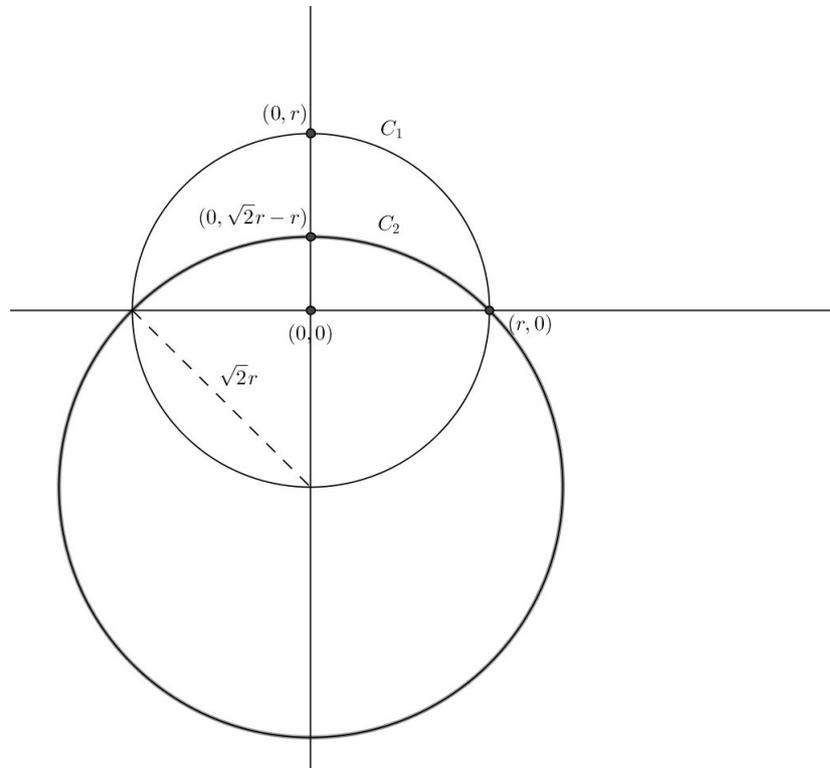


Figura 1.12: Representación de curvas a integrar

$$\begin{aligned}
 \Delta C_2 &= \int_0^r \sqrt{2r^2 - x^2} - r dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}r \cos(\theta))(\sqrt{2}r \cos(\theta)) d\theta - \int_0^r r dx \\
 &= 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta) d\theta - \int_0^r r dx \\
 &= 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos(\theta)}{2} d\theta - \int_0^r r dx \\
 &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(\theta)) d\theta - \int_0^r r dx \\
 &= r^2 \left[ \theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - rx \Big|_0^r \\
 &= r^2 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] - r^2 \\
 &= \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Entonces, el área bajo la curva  $C_2$  en el intervalo  $[-r, r]$  es igual a  $\frac{\pi r^2}{2} - r^2$ .

Finalmente, obtenemos que el área de la luna es la sustracción:

$$\Delta L = \Delta C_1 - \Delta C_2 = r^2 = \Delta C,$$

que era lo que queríamos mostrar. ■

**Eudoxo** (408–355 a.C.) fue el responsable de la idea de aproximar áreas curvadas con polígonos.

En otras palabras, Eudoxo propone que podemos utilizar en regiones curvadas, los resultados que obtengamos para regiones poligonales, basándose en el siguiente resultado<sup>1</sup>:

**Proposición 1.1** *Dadas dos magnitudes distintas, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que su mitad, del resto se sustrae una magnitud mayor que la mitad del resto y si este proceso se repite continuamente, quedará alguna magnitud más pequeña que la menor de las magnitudes dadas inicialmente.*

*Demostración.* Sean  $M > 0$  y  $\varepsilon > 0$ , donde  $0 < \varepsilon < M$ . Formamos  $M$  de tal forma que

$$M - rM = (1 - r)M, \quad (1 - r)M - r(1 - r)M = (1 - r)^2M, \quad \dots, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

Entonces para  $n$  suficientemente grande, digamos  $N$ , tenemos  $(1 - r)^N M < \varepsilon$ . ■

Utilizaremos el resultado de Eudoxo para mostrar que las áreas de los círculos están en razón igual al cuadrado de sus diámetros (un resultado obvio para los polígonos regulares).

**Proposición 1.2** *Sean  $c, C$ , círculos con áreas  $a, A$ , y diámetros  $d, D$ , respectivamente. Entonces  $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ , dado que el resultado es cierto para polígonos regulares y dado el resultado de Eudoxo.*

<sup>1</sup>Este resultado se conoce históricamente como el *Axioma de Eudoxo*.

*Demostración.* Suponiendo que  $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ , existe  $a^* < a$ , de modo que  $a - a^* > 0$  y  $\frac{a^*}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ . Sea  $a - a^* > \varepsilon$ . Inscribiendo polígonos regulares de áreas  $p_n, P_n$  en círculos  $c, C$ , consideremos las áreas  $a - p_n, A - P_n$  (ver la Figura 1.13).

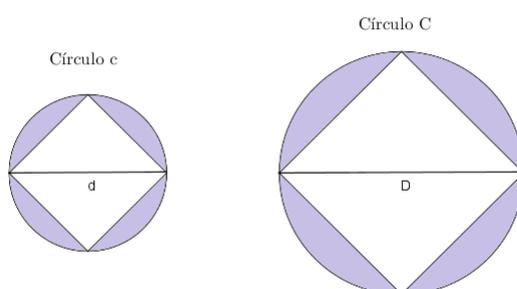


Figura 1.13: Polígonos inscritos

Ahora, doblando el número de lados, obtenemos la relación entre  $a - p_n$  y  $a - p_{2n}$  (observe la Figura 1.14). Sin duda  $a - p_{2n} < \frac{1}{2}(a - p_n)$ .

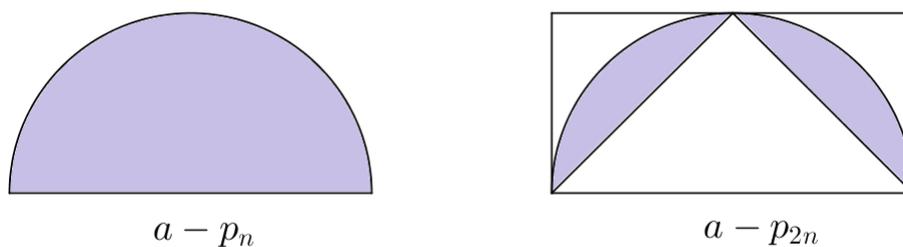


Figura 1.14: Segmentos

Si restamos más de la mitad cada vez, duplicamos el número de lados. Del resultado de Eudoxo, podemos determinar  $N$  de tal modo que

$$0 < a - p_N < \varepsilon < a - a^*,$$

esto es, tenemos inscrito un polígono regular de  $N$  lados, donde el área  $p_N > a^*$ . Pero  $\frac{p_N}{P_N} = \frac{d^2}{D^2}$ . Como  $\frac{a^*}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ , tenemos que  $\frac{p_N}{P_N} = \frac{a^*}{A}$ , entonces  $P_N > A$ . Esto no puede ser, pues  $P_N$  es el área de un polígono inscrito en el círculo  $C$  de área  $A$ .

Similarmente, se puede mostrar que  $\frac{a}{A}$  no puede ser menor que  $\frac{d^2}{D^2}$ . Así tenemos una doble reducción al absurdo (*double reductio ad absurdum*). ■

**Arquímedes de Siracusa** (287–212 a.C.) es uno de los grandes intelectos de todos los tiempos. Arquímedes, mediante el *método de exhaustión*, en su obra sobre *La cuadratura de la parábola* probó que el área definida por una parábola y una línea recta equivalía exactamente a  $\frac{4}{3}$  el área del correspondiente triángulo inscrito, tal y como se puede observar en la Figura (1.15).

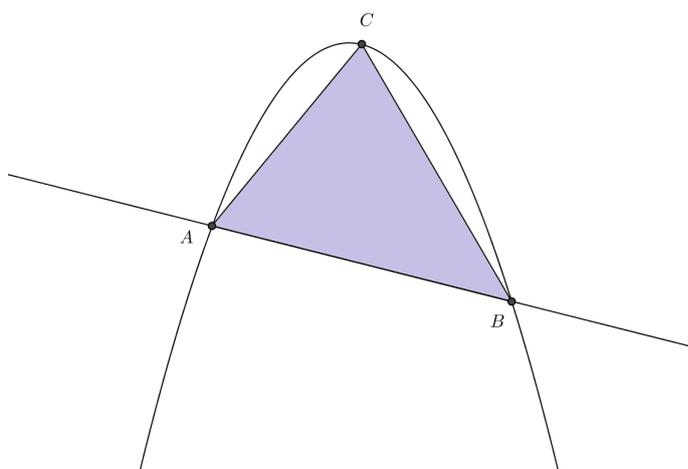


Figura 1.15: Triángulo de Arquímedes

Para fines prácticos, utilizaremos el símbolo  $\triangle$  para denotar “el área de”.

Primero, mostramos un resultado sobre la relación de las áreas de triángulos (ver la Figura 1.18) para la parábola  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ).

**Lema 1.3**  $\triangle ADC + \triangle BEC = \frac{1}{4} \triangle ACB$  para la parábola  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ).

*Demostración.* La recta tangente a  $y = ax^2$  en el punto  $C$  es paralela al segmento que une  $A$  con  $B$  cuyo punto medio es  $P$ . De ello se desprende que  $\triangle BEC =$



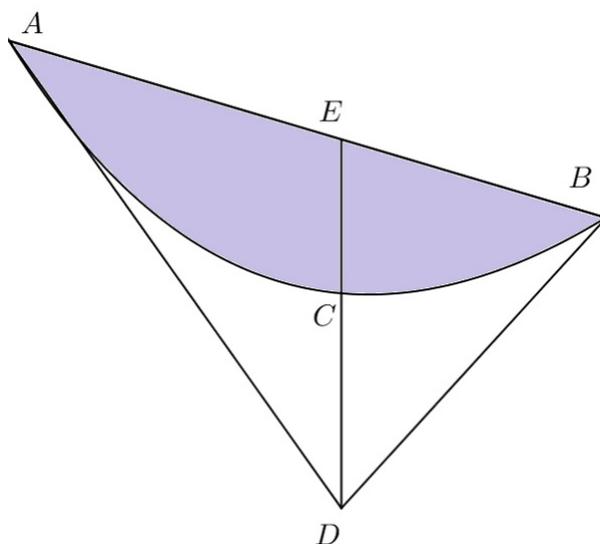


Figura 1.17: Construcción de triángulos

Ahora mostramos el resultado de Arquímedes.

**Proposición 1.4** Sean  $\Delta P$  el área del segmento parabólico y  $\Delta ACB$  el área del triángulo inscrito  $ACB$ . Entonces  $\Delta P = \frac{4}{3}\Delta ACB$ .

*Demostración.* De acuerdo al Lema 1.3 (ver la Figura 1.18), el área de los triángulos  $ADC$  y  $BEC$  es  $\frac{1}{4}$  el área del triángulo  $ACB$ ; esto es,

$$\Delta ADC + \Delta BEC = \frac{1}{4}\Delta ACB.$$

Repitiendo el proceso mediante el *método de exhaustión*, el área entre la curva parabólica y los triángulos inscritos, obtenemos el área del segmento parabólico  $\Delta P$ :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \Delta ACB + \frac{1}{4}(\Delta ACB) + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4}(\Delta ACB) \right] + \dots \\ &= \Delta ACB \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = \frac{4}{3}\Delta ACB. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Se puede considerar otro problema, es decir, mostrar que el área del segmento parabólico es  $\frac{2}{3}$  del área del triángulo circunscrito  $ADB$  formado por las líneas tangentes a la parábola en  $A$  y  $B$  con base  $AB$  ( $EC = CD$ ), vea Figura 1.17.

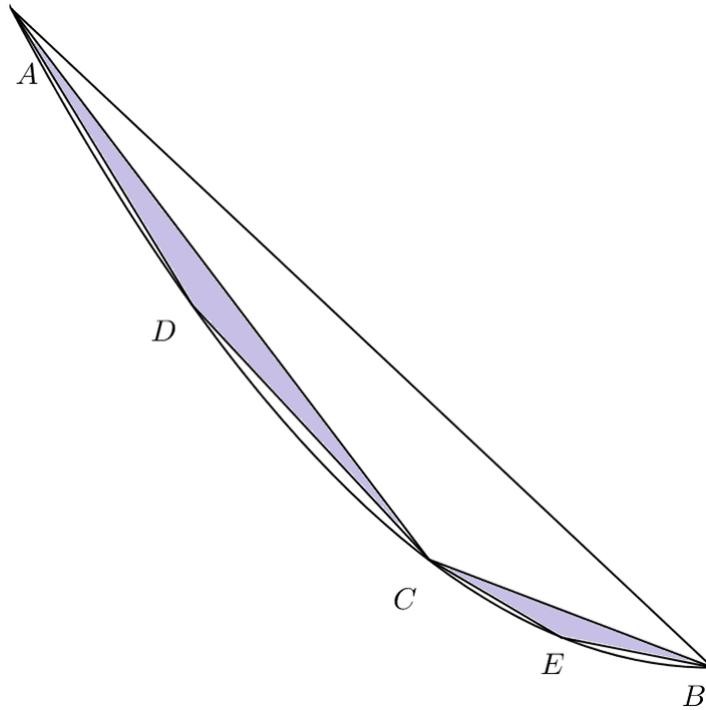


Figura 1.18: Triángulos inscritos

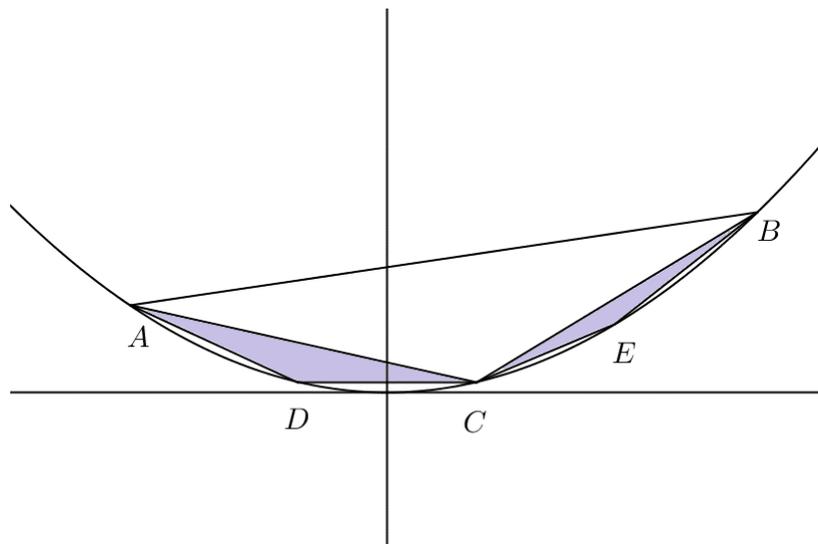


Figura 1.19: Construcción de triángulos

Hemos considerado algunos resultados interesantes desarrollados en tiempos antiguos (nociones geométricas, el método de reordenación de áreas, el método de exhaustión). Ahora nos trasladaremos a principio de los tiempos modernos (siglos XVII, XVIII) y consideraremos resultados importantes en integración analítica (área bajo la curva, interpretaciones geométricas, antiderivadas para funciones específicas).

### 1.3 Newton y Leibniz

**Isaac Newton** y **Gottfried Wilhelm Leibniz** en 1664–1666 y 1675, respectivamente, descubrieron independientemente el cálculo diferencial e integral. Sus enfoques y conceptos son distintos, pero llegaron básicamente a los mismos resultados. Hasta entonces, en el periodo 1615-1660, se había usado el cálculo infinitesimal por matemáticos de gran talla como Kepler, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat, Wallis, Gregory, Barrow, etc. Pero los métodos para encontrar cuadraturas y tangentes a curvas o problemas relacionados, resolvían problemas concretos, bien adaptados a la forma particular de cada objeto en cuestión. El gran mérito de lo que llamamos cálculo diferencial e integral es el de ser un algoritmo general que vale para todas expresiones analíticas a la vez y que se basa en que los procesos de cálculo de tangentes (derivación) y cuadraturas (integración) son procesos inversos el uno del otro.

**Isaac Newton** (1642–1727).

La *serie del binomio* fue descubierta por Newton en 1664. Aparece expuesta en dos cartas, la Epistola prior de Junio de 1676 y la Epistola posterior de Octubre de 1676. Newton observa que el desarrollo

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}x^2 + \dots + x^n$$

se puede generalizar para exponentes fraccionarios  $\alpha = \frac{p}{q}$  como una suma infinita, a saber,

$$(a+x)^\alpha = a^\alpha + \frac{\alpha}{1}a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}a^{\alpha-2}x^2 + \dots$$

Newton encontró este resultado cuando estaba intentando estudiar la cuadratura del círculo  $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ . Comparó las fórmulas para  $y = (1-x^2)^0$ ,  $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ,

$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $y = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}$ , ... De la primera, tercera, quinta, etc. se pueden hallar sus cuadraturas entre 0 y  $x$  ya que son sumas de cuadraturas de terminos en  $x^n$  ya conocidos. De esta forma la

- cuadratura de  $y = (1 - x^2)^0$  es  $x$
- cuadratura de  $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  es  $x - \frac{1}{3}x^3$
- cuadratura de  $y = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$  es  $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$
- cuadratura de  $y = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}$  es  $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$
- cuadratura de  $y = (1 - x^2)^{\frac{7}{2}}$  es  $x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$

etc.

Examinando los coeficientes de estas expresiones, Newton observa que los denominadores que aparecen son los impares 1, 3, 5, 7, ..., mientras que los numeradores son sucesivamente  $\{1\}$ ,  $\{1, 1\}$ ,  $\{1, 2, 1\}$ ,  $\{1, 3, 3, 1\}$ ,  $\{1, 4, 6, 4, 1\}$ , etc. que son los números combinatorios que aparecen en el triángulo aritmético de Pascal, cuya fila  $n$  está formada por

$$1, n, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

Por analogía, supone que las mismas expresiones deben de ser válidas para exponentes fraccionarios, esto es, que para  $n = \frac{p}{q}$ , los numeradores sigan la sucesión anterior (ahora infinita) poniendo este valor de  $n$ . Por ejemplo para  $n = \frac{1}{2}$ , la cuadratura de  $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  sería

$$x - \frac{(1/2)}{3}x^3 - \frac{(1/8)}{5}x^5 - \frac{(1/16)}{7}x^7 - \frac{(5/128)}{9}x^9 - \dots$$

Puesto que las combinaciones son

$$\binom{1/2}{0} = 1, \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{(1/2)(1/2-1)}{2} = -\frac{1}{8}, \dots$$

de la cual se deduce que para obtener esta cuadratura integrando término a término,  $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  debe de tener el siguiente desarrollo infinito

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

Para asegurarse de que esta analogía da resultados correctos, Newton supone que estas series infinitas se comportan como polinomios con un número infinito de términos, a los que se les puede aplicar las reglas aritméticas usuales de suma, producto, división, extracción de raíces, etc. Comprueba por ejemplo que la anterior suma infinita del desarrollo de  $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  multiplicada por sí misma, da después de simplificar efectivamente  $1 - x$ . De manera análoga comprueba también por un algoritmo aritmético de extracción de raíces cuadradas, que aplicado a  $1 - x$  le da formalmente el mismo resultado. La misma fórmula del binomio vale también para exponentes negativos. Así por ejemplo

$$(1 + x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Expresión que Newton comprueba también al aplicar el algoritmo de la división de polinomios a  $\frac{1}{1+x}$ .

El uso de estas series infinitas da dos ventajas importantes. Por un lado permite extender muchos algoritmos del cálculo, tales como cuadraturas, de una manera sistemática a todo tipo de curvas, incluso trascendentes, simplemente integrando término a término. Por otro lado simplifica y aproxima las fórmulas si no se tienen en cuenta términos de orden superior.

Por ejemplo, Newton observa que

$$\begin{aligned} \sqrt{7} &= \sqrt{9 \left(1 - \frac{2}{9}\right)} = 3 \left(1 - \frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{162} - \frac{1}{52488} - \frac{7}{472392} - \dots\right) \approx 2.64576 \end{aligned}$$

y obtiene una gran precisión con sólo unos pocos términos.

También, utilizando el desarrollo

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e integrando término a término, Newton encuentra de esta manera la *serie de Mercator* de  $\log(1+x)$ , esto es, la cuadratura de la hipérbola.

**Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716).

Después de revisar el problema de sumar los inversos de los números triangulares

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots,$$

Leibniz observó que cada término se puede descomponer como

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

de donde

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots = 2.$$

Leibniz, tal como hizo en la suma de la serie de los inversos de los números triangulares, consideraba sumas y diferencias de sucesiones de números. Observó que dada la sucesión  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , si consideramos la sucesión de diferencias  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , donde  $d_i = a_i - a_{i-1}$ , obtenemos que

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0,$$

es decir, la suma de diferencias consecutivas es igual a la diferencia entre el último y el primer término de la sucesión original.

Por ejemplo, dada la sucesión de cuadrados

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots, n^2,$$

sus primeras diferencias son

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n-1,$$

ya que  $i^2 - (i-1)^2 = 2i-1$ . Luego se sigue que la suma de los  $n$  primeros números impares es  $n^2$ , es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

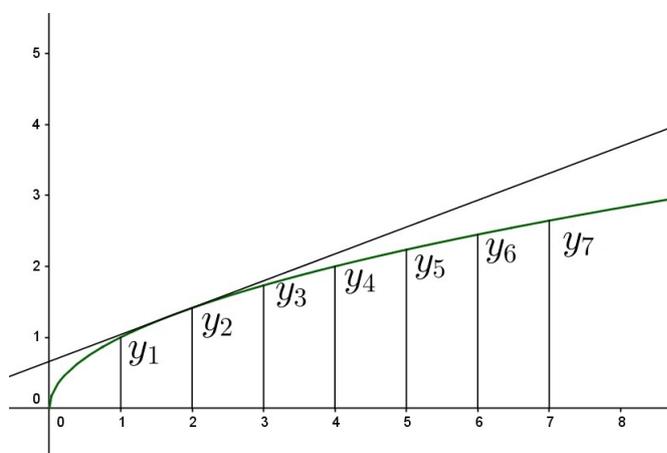


Figura 1.20: Sucesión de ordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_7$

Leibniz utiliza este método en otros casos. Por ejemplo en relación a la serie geométrica

$$1, q, q^2, \dots, q^n, \dots,$$

de donde obtiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Leibniz no tardó en aplicar a la geometría sus observaciones de que las sumas de sucesiones y sus diferencias consecutivas son procesos inversos el uno del otro. Consideremos una curva como la de la Figura 1.20 donde aparece una sucesión de ordenadas  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ .

Si suponemos que la distancia entre las abscisas es 1, entonces la suma  $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$  es una aproximación de la cuadratura de la curva, mientras que la diferencia entre dos sucesivas  $y_i$ 's da aproximadamente la pendiente de su tangente. Además, cuanto más pequeña sea la unidad 1 elegida, mejor será la aproximación. Si la unidad se pudiera elegir infinitamente pequeña, entonces las aproximaciones serían exactas, la cuadratura sería igual a la suma de ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de ordenadas. De esta forma y por su analogía con las sucesiones numéricas, Leibniz observa que la determinación de cuadraturas y el cálculo de tangentes son operaciones inversas la una de la otra.

Leibniz considera una curva como una poligonal de infinitos lados donde  $dy$  es la diferencia infinitesimal de dos ordenadas consecutivas,  $dx$  la diferencia de dos

abscisas consecutivas e  $\int y dx$  representa la suma de los pequeños rectángulos infinitesimales  $y dx$ . De esta forma el teorema fundamental del cálculo aparece como obvio. Esto es, para hallar el área debajo de una curva con ordenada  $y$ , debemos hallar una curva con ordenadas  $z$  de tal manera que  $\frac{dz}{dx} = y$ , en cuyo caso es también  $\int y dx = z$ . En la primera notación de sus manuscritos Leibniz escribe

$$omn \cdot l = y,$$

donde  $omn$  es omnia, que en latín significa suma, y donde  $l$  son diferencias.

Con ello empieza a desarrollar su cálculo y la expresión simplemente significa que la suma de las primeras diferencias de una sucesión que empieza por 0 es igual al último término. Después irá cambiando su notación y escribe la anterior relación como  $\int dy = y$  que es la simbología actual. El signo integral  $\int$  no es más que una  $S$  elongada que significa suma.

A continuación mostraremos una demostración de Leibniz y un resultado importante de Newton que ilustra su razonamiento para la determinación de  $\frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ , respectivamente.

**Gottfried Wilhelm Leibniz**, tomando una cuarta parte del círculo  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , cuya área es  $\frac{\pi}{4}$  (véase Figura 1.21), determinó el área del sector circular en la Figura 1.21 dividiéndolo en triángulos infinitesimales  $OAB$  (donde  $A$  y  $B$  son puntos cercanos sobre el círculo) y sumándolos.

### Proposición 1.5

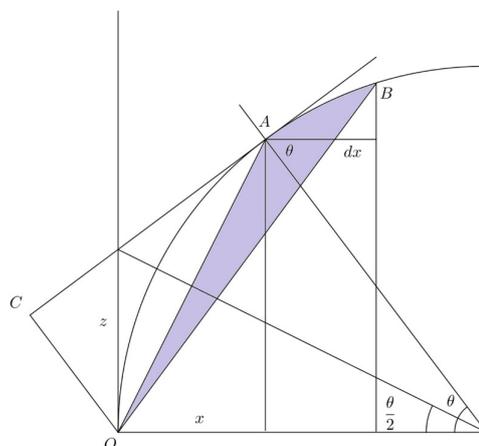
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

*Demostración.* La forma de estimar el área de  $\triangle OAB$  es construir una tangente al círculo en  $A$ , con una perpendicular a  $C$  que pase por el origen. Entonces,  $\triangle OAB \approx \frac{1}{2}(AB)(OC)$ . Para triángulos similares,  $\frac{AB}{dx} = \frac{z}{OC}$ , así  $\triangle OAB = \frac{1}{2}z dx$ .

Observemos que

$$x = 1 - \cos \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{y} \quad z = \tan \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

Esto es,  $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$ , sabiendo que  $2xz = \int z dx + \int x dz$ .

Figura 1.21: Construcción de  $\frac{\pi}{4}$ 

Por consiguiente, el área del sector circular en la Figura 1.21 es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2} z dx &= \frac{1}{2} \left[ xz \Big|_0^1 - \int_0^1 x dz \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+z^2} dz \right] \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 z^2 (1 - z^2 + z^4 - \dots) dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \end{aligned}$$

Sumando  $\frac{1}{2}$  en ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \blacksquare$$

Se puede demostrar que

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

**Isaac Newton** a su vez, determinó el valor analítico de  $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ .

### Proposición 1.6

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

*Demostración.* Considerando la expresión  $\frac{1+x^2}{1+x^4}$  y simplificando, obtenemos la serie geométrica:

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = (1+x^2)(1-x^4+x^8-\dots) = 1+x^2-x^4-x^6+\dots.$$

Luego, integrando la serie término a término, tenemos el siguiente resultado:

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots.$$

Observamos que el integrando se puede simplificar

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} \right).$$

Evaluando las integrales apropiadas con la sustitución

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \theta,$$

obtenemos

$$\left( \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2} \right) = \frac{3}{8} \sqrt{2} \pi, \quad \left( \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} \right) = \frac{1}{8} \sqrt{2} \pi,$$

y

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} \sqrt{2} \pi + \frac{1}{8} \sqrt{2} \pi \right) = \frac{\pi}{4} \sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

## 1.4 Fermat y Wallis

**Pierre de Fermat** (1601–1665) mostró que

$$\int_0^b x^q dx = \frac{b^{q+1}}{q+1}, \quad q \in \mathbb{Q}^+, \quad b > 0.$$

Esta fórmula puede justificarse de la siguiente manera. Dividimos el intervalo  $[0, b]$  en una secuencia infinita de subintervalos de diferentes anchos con puntos finales  $br^n$ ,  $0 < r < 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , y construimos un rectángulo de altura  $(br^n)^q$

sobre el subintervalo  $[br^{n+1}, br^n]$ . Sumamos las áreas de los rectángulos “exteriores”, y mostramos que esta suma es  $\frac{br^{q+1}(1-r)}{(1-r^{q+1})}$ . Finalmente evaluamos el límite de esta suma cuando  $r \rightarrow 1$ .

**John Wallis** (1616–1703) nos da la siguiente fórmula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

La cual se puede mostrar utilizando el siguiente argumento.

Aplicando integración por partes, obtenemos que

$$\int_0^\pi \text{sen}^{n+2}(x) dx = \frac{n+1}{n+2} \int_0^\pi \text{sen}^n(x) dx.$$

Sabemos que

$$\text{sen}^{2n+2}(x) \leq \text{sen}^{2n+1}(x) \leq \text{sen}^{2n}(x)$$

puesto que  $0 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ . Ahora integramos para obtener lo siguiente,

$$\int_0^\pi \text{sen}^{2n+2}(x) dx \leq \int_0^\pi \text{sen}^{2n+1}(x) dx \leq \int_0^\pi \text{sen}^{2n}(x) dx,$$

dividiendo por  $\int_0^\pi \text{sen}^{2n}(x) dx$  podemos concluir que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\int_0^\pi \text{sen}^{2n+1}(x) dx}{\int_0^\pi \text{sen}^{2n}(x) dx} \leq 1. \quad (1.1)$$

Se puede mostrar que

$$\int_0^\pi \text{sen}^{2n}(x) dx = \pi \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2n}\right)$$

y

$$\int_0^\pi \text{sen}^{2n+1}(x) dx = 2 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2n}{2n+1}\right).$$

Dividiendo y reacomodando términos, obtenemos que

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\int_0^\pi \text{sen}^{2n+1}(x) dx}{\int_0^\pi \text{sen}^{2n}(x) dx} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Finalmente, al tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  debido a la desigualdad (1.1), se desprende el resultado deseado.

## 1.5 Stirling, Fourier y Dirichlet

**James Stirling** (1692–1770) nos proporciona la siguiente fórmula:

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Sea  $f(x) = \ln x$ , donde  $1 \leq x \leq n$ . Usando la regla del trapecio, mostramos que

$$\int_1^n \ln x dx - \frac{1}{2} \{(\ln 1 + \ln 2) + (\ln 2 + \ln 3) + \dots + [\ln(n-1) + \ln n]\} = \text{Err},$$

donde Err son “terminos de error”. Puesto que  $\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1$ , tenemos  $\ln(n!) = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + E_n$ , donde  $E_n$  tiene límite cuando  $n \rightarrow \infty$ . En conclusión, obtenemos

$$s_n = \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \rightarrow C \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, C > 0.$$

Luego, por la *Fórmula de Wallis*, tenemos

$$\frac{s_n^2}{s_{2n}} = \sqrt{2} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} \rightarrow \sqrt{2\pi}.$$

Así  $\frac{n!}{\left[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right]} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Joseph Fourier** (1768–1830).

Series del tipo

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sen x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sen 2x) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sen nx),$$

donde  $a_n, b_n$  son independientes de  $x$ , son llamadas *series trigonométricas*.

Si hay una función  $f(t)$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$  existe como una integral de Riemann o como una integral impropia la cual converja absolutamente y tal que

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sen nt dt,$$

entonces la serie trigonométrica es llamada una serie de Fourier.

Fourier, en su trabajo “Teoría del calor” investigó varias series trigonométricas y mostró que, en un gran número de casos particulares, las series de Fourier convergían a la suma  $f(x)$ . Poisson intentó una prueba general de este teorema, dos pruebas más fueron dadas por Cauchy, las cuales se basan en la teoría de la integración de contorno, se asocian con clases de funciones particulares y una de ellas es inválida. Fue hasta 1829, que Dirichlet dio la primera prueba rigurosa.

**Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805–1859). Después de que varios matemáticos trataron de descubrir las condiciones que garantizaran la convergencia de la serie de Fourier, una demostración exitosa fue dada por Dirichlet en 1829.

**Teorema 1.7** (*Teorema de convergencia para series de Fourier, Dirichlet 1829*). *Supongamos que  $f$  es una función acotada, continua por partes (un número finito de discontinuidades de salto) y monótona por partes en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , con período  $2\pi$ . La representación en series de Fourier de  $f$  en  $x$  es*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

los cuales convergen a

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

donde  $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x+0)$  y  $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x-0)$ .

Mientras estudiaba problemas de convergencia para series de Fourier, Dirichlet comenzó a considerar las funciones que toman un valor en los números racionales y un valor distinto en los irracionales. Por ejemplo, supongamos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional,} \\ 0 & x \text{ irracional,} \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ racional,} \\ 1 & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Ciertamente,  $1 = \mathcal{C} \int_0^1 (f + g)(x) dx$  y la linealidad de la integral haría exigir que  $1 = \mathcal{C} \int_0^1 f(x) dx + \mathcal{C} \int_0^1 g(x) dx$ . Estas dos *integrales de Cauchy*<sup>2</sup> no están definidas, pues tanto  $f$  como  $g$  tienen un número infinito de discontinuidades.

Dirichlet mantuvo conversaciones con Riemann para tratar de encontrar un proceso de integración que pudiera superar esa dificultad. Riemann no encontró tal proceso de integración (que sería descubierto por Lebesgue), pero desarrolló otro proceso de integración más poderoso que el de Cauchy, el que conoceremos como *Integral de Riemann*.

## 1.6 Cauchy y Riemann

**Augustin–Louis Cauchy** (1789–1857) es considerado el fundador de la teoría de la integración. En 1823, Cauchy formuló una definición constructiva de una integral.

Dada una función arbitraria  $f$  en un intervalo  $[a, b]$ , partiendo el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ , con  $a = x_0 < x_1, \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , y formando la suma

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

(ver Figura 1.22),

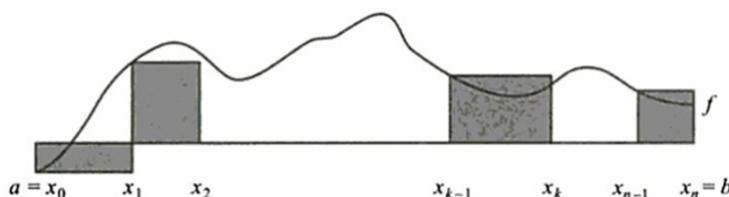


Figura 1.22: Integral de Cauchy

la *Integral de Cauchy* sería el límite de las sumas cuando la longitud del mayor

<sup>2</sup> $\mathcal{C} \int_a^b f(x) dx$  denota integrales de Cauchy, las cuales se estudiarán posteriormente en el Capítulo 2.

subintervalo,  $\|\Delta x\|$ , se aproxime a cero:

$$\mathcal{C} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Cauchy nos dice que para funciones continuas este límite siempre existe. En cuanto a un procedimiento de evaluación, la recuperación de una función a partir de su derivada, tenemos un resultado fundamental:

$$\mathcal{C} \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

para cualquier función  $F$  con derivada continua.

**Ejemplo 1.1** Sea

$$F(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$F'(x) = \begin{cases} -\pi x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es continua en el intervalo  $[0, 1]$ . Por lo cual

$$\mathcal{C} \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - F(0) = 0. \quad \square$$

Aparentemente un número finito de discontinuidades de salto no generan dificultades. Pero, ¿Qué tal un número contable, o incluso un conjunto denso en discontinuidades de salto? ¿Qué tan discontinua puede ser una función y todavía tener una integral?

**Riemann** (1826–1866), después de haber investigado series de Fourier, problemas de convergencia y funciones de tipo Dirichlet (por ejemplo, la función 1 en los racionales y 0 en los irracionales), fue motivado para desarrollar otra definición constructiva de una integral (1854).

A partir de una función  $f$  acotada en el intervalo  $[a, b]$ , que particionar (al igual que Cauchy) en subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ , donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  (se “etiqueta” cada subintervalo con un punto  $c_k$ , donde  $x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$ ), formamos la suma

$$f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

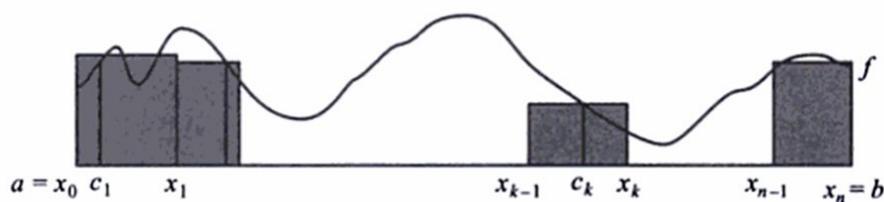


Figura 1.23: Integral de Riemann

(observe Figura 1.23).

<sup>3</sup> De nuevo, al tomar el límite cuando la longitud del mayor subintervalo se aproxima a cero, se obtiene la *Integral de Riemann*

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

En 1902, Lebesgue mostró que para funciones acotadas, la continuidad es tanto necesaria y suficiente para la existencia de la integral de Riemann (con la posible excepción de un conjunto de medida 0). Cada función Cauchy integrable es Riemann integrable y tiene el mismo valor. Se tiene el Teorema Fundamental del Calculo (TFC) más general para recuperar una función a partir de su derivada.

### Teorema 1.8 La integral

$$\mathcal{R} \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

es válida para cualquier función con derivada acotada y continua casi en toda parte.

### Ejemplo 1.2 La función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{x} \right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

tiene derivada

$$F'(x) = \begin{cases} -\pi \cos \left( \frac{\pi}{x} \right) + 2x \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{x} \right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

<sup>3</sup>Mientras que la etiqueta  $c_k$  fue el punto final de la izquierda en la definición de Cauchy ( $c_k = x_{k-1}$ ), en la definición de Riemann tenemos más variabilidad.

la cual es acotada y continua excepto en  $x = 0$ . Por lo tanto, la integral de Riemann de  $F'(x)$  existe y es

$$\mathcal{R} \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - F(0) = 0. \quad \square$$

## 1.7 Darboux

**Jean Gaston Darboux** (1842–1917) hizo importantes contribuciones a la geometría diferencial y el análisis matemático, hoy en día es mejor conocido por la integral que lleva su nombre. La integral de Darboux se dio a conocer en un documento sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden que escribió en 1870.

En 1875, Darboux dió su propia visión de la integral de Riemann, definiendo sumas superiores e inferiores y la definición de una función para ser integrable si la diferencia entre las sumas superior e inferior tiende a cero a medida que el tamaño de la malla se hace más pequeño, también se le conoce la siguiente definición.

**Definición 1.1** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Diremos que  $f$  es una función de Darboux, o posee la Propiedad del Valor Intermedio (PVI) si, para cualesquiera  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$  y cualquier número  $c$  entre  $f(x)$  y  $f(y)$ , existe un  $t \in (x, y)$  tal que  $f(t) = c$ .

**Teorema 1.9** (Bolzano, Teorema del Valor Intermedio). Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  posee la PVI.

*Demostración.* Puesto que  $f$  es continua en el compacto  $[a, b]$  entonces  $f$  es acotada. Sean

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{y} \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Si  $m = M$ , entonces  $f$  es constante y la conclusión es inmediata. Suponga que  $m < M$  y sea  $c$  tal que  $m < c < M$ . Las propiedades del ínfimo y del supremo implican la existencia de puntos  $a_1, b_1$  en  $[a, b]$  tales que

$$m \leq f(a_1) < c < f(b_1) \leq M.$$

Supondremos ahora que  $a_1 < b_1$  (el caso  $a_1 > b_1$  se trata de modo similar). Definimos

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}.$$

Observamos que  $E \neq \emptyset$  ya que  $a_1 \in E$  y, además, está acotado superiormente por  $b$ . Sea  $t = \sup E$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por las propiedades del supremo existe un elemento  $x_n \in E$  tal que  $t - \frac{1}{n} < x_n \leq t$  y, por consiguiente, la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $t$ , y entonces, por continuidad,  $f(x_n) \rightarrow f(t)$ . Pero como  $x_n \in E$  resulta que  $f(x_n) \leq c$  y, así,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq c.$$

Por otra parte, puesto que  $t$  es el supremo de  $E$ , entonces cualquier  $x \in (t, b]$  es cota superior de  $E$  y, en consecuencia,  $f(x) > c$ . De nuevo, por continuidad,

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \geq c,$$

de donde se concluye que  $f(t) = c$ . ■

En el siglo XIX muchos matemáticos compartían la creencia de que la Propiedad del Valor Intermedio era equivalente a la continuidad. Sin embargo, en el año 1875, Darboux, probó que esa creencia era totalmente falsa, es decir, el recíproco del Teorema de Valor Intermedio es falso. Para ver esto, considere la aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Es claro que  $f$  es discontinua en  $x = 0$ . Sin embargo, puesto que el rango de  $f$  es el intervalo  $[-1, 1]$  se tiene que  $f$  posee la PVI. El resultado anterior establece que la PVI no es una propiedad exclusiva de las funciones continuas.

**Teorema 1.10 (Darboux)** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en  $[a, b]$ , entonces  $f'$  posee la Propiedad del Valor Intermedio.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$  y suponga que  $c$  es cualquier punto entre  $f'(x)$  y  $f'(y)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $f'(x) > f'(y)$ . Definamos la función  $G : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $G(t) = f(t) - ct$ . Puesto que  $G$  es diferenciable sobre  $[a, b]$ ,  $G$  es continua sobre dicho intervalo y, en consecuencia, alcanza

su máximo en algún punto  $t_0 \in [x, y]$ . En particular,  $G'(t_0) = 0$ . Observe ahora que  $G'(x) = f'(x) - c > 0$ , por lo que  $t_0 \neq x$ . Similarmente,  $G'(y) = f'(y) - c < 0$  y, entonces,  $t_0 \neq y$ . Esto nos garantiza que  $t_0 \in (x, y)$  y, por lo tanto,  $0 = G'(t_0) = f'(t_0) - c$ . ■

## 1.8 Stieltjes y Lebesgue

**Stieltjes** (1856–1894) estaba interesado en los modelos matemáticos de distribución de masas en la recta real.

Supongamos que tenemos masas puntuales distribuidas como se indica en la Figura 1.24. Si  $\phi(x)$  denota el total de masa menor o igual a  $x$ , entonces la gráfica de  $\phi$  aparece como se muestra en la Figura 1.25. En general,  $\phi$  es una función no decreciente.

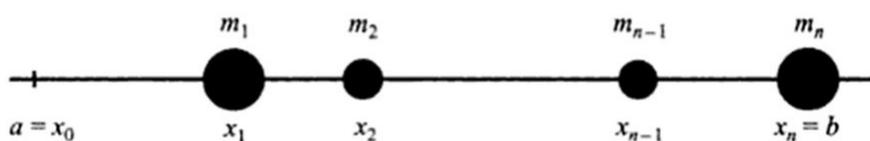


Figura 1.24: Masas en la recta real

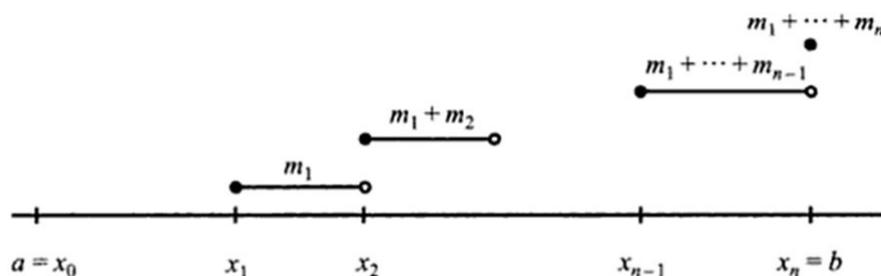


Figura 1.25: Distribución de masas

Ahora consideremos el “momento de fuerza” de cada distribución de masas. La “masa” de  $[x_{k-1}, x_k]$  es  $\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})$  con “palanca”  $c_k$  para  $x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$ . Esto nos lleva a sumas de la forma  $\sum_{i=1}^n c_i m_i$  ó  $\sum_{i=1}^n c_i [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]$ .

Stieltjes llevó a considerar la suma de *Riemann–Stieltjes* como  $f(c_1)m_1 + \dots + f(c_n)m_n$ , teniendo una suma ponderada. El valor de la función en  $c_i$ ,  $f(c_i)$  es ponderada por  $m_i$ , con  $i = 1 \dots n$ . El promedio sería

$$\begin{aligned} \frac{\sum f(c_k)m_k}{\sum m_k} &= \frac{f(c_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})]}{[\phi(b) - \phi(a)]} \\ &\approx \frac{\sum f(c_k)\phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}{\int_a^b \phi'(x) dx} \\ &\approx \frac{\int_a^b f(x)\phi'(x) dx}{\int_a^b \phi'(x) dx}. \end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_a^b f(x)d\phi(x) = \mathcal{R} \int_a^b f(x)\phi'(x) dx,$$

donde la función  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y la función  $\phi(x)$  es monótona creciente en  $[a, b]$ .

La integral de Riemann tiene sentido para funciones acotadas y continuas en casi toda parte. Entonces, si  $f$  es continua y  $\phi$  es Riemann integrable, podemos afirmar que:

$$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_a^b f(x)d\phi(x) \equiv \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_1^n f(c_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})].$$

### Henri Lebesgue(1875-1941)

El concepto de integral desarrollado por Cauchy se aplica a funciones continuas, el cual a pesar de ser generalizado por Riemann, a funciones con cierto tipo de discontinuidades, el espacio de las funciones integrables no es cerrado bajo los

procesos de convergencia y de límite de sucesiones de funciones, lo que restringe su aplicabilidad a otras ramas de la matemática. Basado en el trabajo de **Giuseppe Peano** (1858-1932) y de **Camille Jordan** (1838-1922), **Henri Lebesgue** (1875-1941) logró dar, en 1920, una definición de conjunto medible y de medida que generalizan en la recta, las nociones de intervalo y de longitud de un intervalo, respectivamente. Con base en estos nuevos conceptos, Lebesgue introdujo una nueva clase de funciones llamadas funciones medibles, para las cuales adquiere sentido una nueva definición de integral, definida como el límite de integrales de funciones que toman valores constantes en conjuntos medibles. En este sentido, la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann, que se obtiene como el límite de funciones que toman valores constantes sobre intervalos. La clase de las funciones integrables en el sentido de Lebesgue tiene propiedades inmejorables para los propósitos del análisis matemático en tanto que límites de sucesiones y series convergentes de funciones de este tipo resultan ser también funciones integrables.

Lebesgue comenzó con el ejemplo de Volterra de una función con derivada acotada que no es Riemann integrable, ya que fue este ejemplo el que permitió a Lebesgue desarrollar una integral (1902) que recupere cualquier función a partir de su derivada acotada. Esto es,

$$\mathcal{L} \int_0^1 F'(x) dx \approx F(b) - F(a),$$

debe estar presente que la derivada  $F'$  es acotada.

La construcción de la integral de Lebesgue fue fundamentalmente diferente a la de sus predecesores, al realizar la partición sobre el rango de la función y no sobre su dominio.

Por ejemplo, enumeramos los racionales en el intervalo  $[0, 1]$  y definimos una sucesión de funciones medibles y Riemann integrables  $f_k$  por  $f_k(x) = 1$  (si  $x = r_1, r_2, \dots, r_k$ ) y  $f_k(x) = 0$  (en caso contrario). Esta sucesión es no negativa, monótona creciente uniformemente acotada por 1;  $\lim f_k$  es una función de Dirichlet, pero no es Riemann integrable:  $\lim \mathcal{R} \int_a^b f_k(x) dx = 0$  y  $\mathcal{R} \int_a^b \lim f_k(x) dx$  no está definida, pero

$$\mathcal{L} \int_a^b f_k(x) dx = 0 = \mathcal{L} \int_a^b \lim f_k(x) dx.$$

Finalmente, en respuesta a Volterra, todas las funciones con derivada acotada son Lebesgue integrables y  $\mathcal{L} \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ .

## Capítulo 2

# Integración Analítica Clásica

*Somos una civilización científica. Eso significa una civilización en la que el saber y su integridad son factores cruciales. Ciencia no es más que una palabra latina que significa conocimiento... Nuestro destino es el conocimiento.*

— *Jacob Bronowski*

A mediados del siglo XVII, Newton concibe un concepto de integral cuyo significado es simplemente el proceso inverso de la derivada. La definición descriptiva de la integral de Newton es muy natural: una función es Newton integrable si tiene una antiderivada. Tiempo después, Cauchy define una integral de manera constructiva restringiéndose a la clase de las funciones continuas. Esta integral coincide con la integral de Newton, sin embargo, debido a la existencia de derivadas no acotadas la de Newton permanece más general. Poco tiempo después, Riemann redefine la integral de Cauchy permitiendo la integración de algunas funciones discontinuas. La integral de Riemann se caracteriza por su facilidad de manejo y por la sencillez al probar teoremas básicos, sin embargo, es conocido que posee muchas limitaciones. La restricción más inmediata es que una función Riemann integrable debe ser acotada.

Por otro lado, la formulación “incompleta” que tiene el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con la integral de Riemann, como proceso inverso al proceso de derivación, es otra de las desventajas importantes de esta integral. Por su parte, Lebesgue da un revolucionario enfoque a la teoría de integración existente al presentar su tesis doctoral en 1902, superando las limitaciones de la integral de Riemann en cuanto a los teoremas de convergencia.

En este capítulo, se mostrarán los conceptos de cada integral mencionada anteriormente y sus distintas propiedades.

Las integrales surgen frecuentemente en la mayoría de problemas de ciencia e ingeniería, así como en muchas otras aplicaciones de matemáticas.

Podemos contemplar dos conceptos de integración, ya sea, como el límite de una suma o como el proceso inverso de la diferenciación. El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) nos muestra que ambos conceptos son equivalentes. Esta conexión entre integración y diferenciación es un poco desconcertante porque las reglas de derivación, a saber,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha f'(x) + \beta g'(x), \\ \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) &= g'(x)f'(g(x)),\end{aligned}$$

donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones diferenciables de  $x$ ,  $f'(x)$  y  $g'(x)$  representan sus derivadas y  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes, nos permiten tratar la diferenciación como un proceso algorítmico. En otras palabras, conocer las derivadas de un conjunto de funciones nos permite el cálculo de cualquier combinación finita de ellas. Lo cual no ocurre en el caso de la integración, parecería que ésta se lleva a cabo utilizando una colección de estrategias y casos especiales, y en realidad éstos pueden usarse sólo en pequeños subconjuntos de integrales. Para combinaciones de funciones, excepto de la adición, no hay reglas simples.

**Ejemplo 2.1** Conocemos la integral de las funciones  $e^x$  y  $x^3$ , pero no conocemos la integral de su composición  $e^{x^3}$ . □

Existen varios enfoques para evaluar integrales<sup>1</sup>, siendo los principales:

1. *Linealidad*:  $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$

<sup>1</sup>Siempre y cuando todas las integrales existan.

$$2. \text{ Cambio de Variables: } \int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt,$$

$$3. \text{ Integración por partes: } \int_a^b f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

4. *Diferenciación bajo el signo de integral*: si  $G(z, x)$  es una función que no tiene singularidades (comportamiento suficientemente bueno) que depende solamente de  $z$  y  $x$ ; y  $a(x)$  y  $b(x)$  son funciones diferenciables de  $x$ , si  $F(x)$  está definida por la integral

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} G(z, x) dz, \quad (2.1)$$

entonces, la derivada de  $F(x)$  es

$$F'(x) = b'(x)G(b(x), x) - a'(x)G(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial G(z, x)}{\partial x} dz, \quad (2.2)$$

a condición de que ambas integrales existan.

Consideraremos algunos problemas de evaluación de integrales con parámetros mediante este enfoque en la Sección 2.5.

**Ejemplo 2.2** Las integrales  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x}$  y  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$  no existen por sí solas, pero su diferencia, es decir, a integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx$  si existe.  $\square$

## 2.1 Integrales de Newton–Leibniz

El concepto de integral fue desarrollado independientemente por **Isaac Newton** y **Gottfried Leibniz**. Ellos descubrieron que el problema de determinar áreas (y otros problemas físicos) puede ser expresado como un problema de primitivas. De modo específico, y usando el lenguaje moderno, se requería resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = x_0, \quad (2.3)$$

donde  $f$  es una función arbitraria y  $(x_0, y_0)$  es un punto dado. Encontrar cualquier primitiva o antiderivada de  $f$  resolvía satisfactoriamente ese problema. La integral de Newton, dada en la siguiente definición, es una solución formal de ese problema.

Recordemos que una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice diferenciable en  $[a, b]$  si el límite

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)}$$

existe para cada  $x_0 \in (a, b)$  y, en los puntos extremos  $a$  y  $b$ , los límites

$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{(x - a)} \quad \text{y} \quad F'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{(x - b)}$$

existen. Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una derivada si existe una función diferenciable en  $[a, b]$ , digamos  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Definición 2.1** (*Integral de Newton–Leibniz*) Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *Newton–Leibniz integrable* sobre  $[a, b]$  si  $f$  es una derivada, es decir, si existe una función diferenciable  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Denotaremos por  $\mathcal{N}\text{--}\mathcal{L}([a, b])$  al conjunto de todas las funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que son *Newton–Leibniz integrables* sobre  $[a, b]$ . Si  $f$  es *Newton–Leibniz integrable* sobre  $[a, b]$  con  $F' = f$ , entonces la *Integral de Newton–Leibniz* de  $f$  se define como:

$$\mathcal{N}\text{--}\mathcal{L} \int_a^b f dx = F(b) - F(a). \quad (2.4)$$

La expresión dada en (2.4) se llama la *Fórmula de Newton–Leibniz* y el problema de recobrar una función de su derivada se le conoce como: *el Problema de las Primitivas*. La función derivable  $F$  satisfaciendo  $F' = f$  se llama una *primitiva* o *antiderivada* de  $f$ .

Éste es el concepto original de integración de Newton y Leibniz concebido como la operación inversa de la diferenciación, es decir, la anti-diferenciación.

Es importante destacar que una vez obtenida una primitiva  $F$  de  $f$ , toda función de la forma  $F + c$ , donde  $c$  es cualquier constante, también es una primitiva

de  $f$ . Por lo tanto, la definición anterior requiere examinar que  $F(b) - F(a)$  no depende sobre cuál primitiva se elige.

En efecto, si  $G$  es otra primitiva de  $f$ , entonces el *Teorema del Valor Medio* nos garantiza la existencia de una constante  $c$  tal que  $G(x) = F(x) + c$  para todo  $x \in [a, b]$ , de donde se concluye que  $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ .

$\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}([a, b])$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Además, si  $f, g \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}([a, b])$ , entonces se cumple que:

- (a)  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^b f dx \leq \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^b g dx$  y  $f \leq g$ ,
- (b)  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^b f dx = \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^c f dx + \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_c^b f dx$  para cualquier  $c \in [a, b]$ ,
- (c)  $\left| \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^b f dx \right| \leq \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_a^b |f| dx$  siempre que  $|f|$  sea Newton–Leibniz integrable sobre  $[a, b]$ .

Sin embargo, si  $f \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}([a, b])$ , entonces no siempre es cierto que  $|f| \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}([a, b])$  podemos comprobarlo utilizando el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3** Tomemos la función derivada:

$$f(x) = \left[ x \cos \left( \frac{\pi}{x} \right) \right]' \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Es claro que  $F(x) = x \cos \left( \frac{\pi}{x} \right)$  es una primitiva para  $f$  tal que  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = -1$ . Por esto

$$\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_0^1 f dx = F(1) - F(0) = -1.$$

Por otro lado, si suponemos que  $|f| \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}([a, b])$ , entonces, tomando  $b_k = \frac{1}{k}$  y  $a_k = \frac{2}{(2k+1)}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , resulta que  $F(a_k) = 0$ ,  $F(b_k) = \frac{(-1)^k}{k}$  y como

$$0 < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < \cdots < a_1 < b_1 < 1,$$

entonces

$$\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_{a_k}^{b_k} |f| dx \geq \left| \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_{a_k}^{b_k} f dx \right| = |F(b_k) - F(a_k)| = \frac{1}{k}.$$

Por lo tanto, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_{a_k}^{b_k} |f| dx \leq \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_0^1 |f| dx.$$

Puesto que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge, se concluye que  $|f| \notin \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}([a, b])$ .  $\square$

La integral de Newton–Leibniz es una integral puramente descriptiva, no ofrece ningún método para construir una integral. Por consiguiente, la fórmula de Newton–Leibniz es una solución formal del problema formulado en (2.3). Desde el punto de vista de Newton y Leibniz, la integral se concibe como el proceso inverso de la diferenciación.

## 2.2 Integrales de Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) fue el fundador de la teoría de integración. Antes de Cauchy, se hizo hincapié en el cálculo de las integrales de funciones específicas.

**Ejemplo 2.4** En nuestros cursos de cálculo utilizamos las fórmulas:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

para mostrar, mediante aproximación por rectángulos interiores y exteriores, que las áreas de las regiones entre el eje  $x$  y las curvas  $y = x$ ,  $y = x^2$  para  $0 \leq x \leq b$  están dadas por  $\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$  y  $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$ , resultados obtenidos mucho antes por Arquímedes (287–212 a.C.).

Tales resultados, la mayoría realizados con gran ingenio, requerían de extensión, siendo las siguientes algunos ejemplos: fórmulas de Fermat, Wallis, Stirling, y Stieltjes (ver Secciones 1.4, 1.5 y 1.8).  $\square$

Cauchy, en primera instancia, definió un proceso constructivo o *algoritmo* para calcular integrales; y seguido, investigó las condiciones de las funciones para ser integradas de manera que su algoritmo tuviera sentido.

Dada una función acotada  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , dividiendo el intervalo en un número finito de subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$  con  $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ .

Usaremos la siguiente terminología.

- La colección de intervalos  $(x_0, [x_0, x_1]), (x_1, [x_1, x_2]), \dots, (x_{n-1}, [x_{n-1}, x_n])$  es llamada una *partición de Cauchy* de  $[a, b]$ , denotada como  $P$ .
- Llamaremos a  $x_0, x_1, \dots, x_n$  los *puntos de división* de  $P$ .
- Los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  son llamados las *etiquetas* de  $P$ .

**Definición 2.2** (*Definición de la Integral de Cauchy dada en 1823*). Formaremos la suma de Cauchy, esto es, la función  $f$  evaluada en las etiquetas,

$$\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad \sum_P f \Delta x.$$

El límite (siempre que exista) de dichas sumas, debido a que las longitudes de los subintervalos se aproximan a 0, se conoce como la *Integral de Cauchy* de  $f$  sobre  $[a, b]$ , escrita como

$$\mathcal{C} \int_a^b f(x) dx.$$

**Definición 2.3** (*Cauchy-integrabilidad*) Una función acotada en el intervalo  $[a, b]$  se dice *Cauchy integrable* en  $[a, b]$  si hay un número  $A$  con la propiedad de que para cada  $\varepsilon > 0$  existe una constante positiva  $\delta$  tal que, para alguna partición de Cauchy  $P$  de  $[a, b]$ , cada subintervalo tenga longitud menor que  $\delta$ ,

$$\left| \sum_P f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - A \right| < \varepsilon.$$

Escribimos  $\mathcal{C} \int_a^b f(x) dx = A$ .

## 2.3 Integrales de Riemann

Cauchy fue el primero en definir, para una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , la integral de  $f$  como

$$\mathcal{C} \int_a^b f dx = \lim_{\|P_c\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

donde  $\mathcal{P}_c = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es cualquier subconjunto finito de  $[a, b]$  satisfaciendo  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  y  $\|\mathcal{P}_c\| = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\}$ . Con esa definición Cauchy logra demostrar que si  $F(x) = \mathcal{C} \int_a^x f dt$  para cada  $x \in [a, b]$ , entonces  $F$  es diferenciable sobre  $[a, b]$  y  $F' = f$ , éste es el primer enunciado riguroso del Teorema Fundamental del Cálculo.

La integral de Riemann, formulada por **Bernhard Riemann** en la década de 1850, permite integrar una clase de funciones mucho más amplia que la de las funciones continuas. Su definición, aunque es muy similar a la de Cauchy posee, sin embargo, una sutil diferencia: en lugar de elegir el extremo derecho  $x_k$  de cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y formar la suma  $\sum_{k=1}^n f(x_k, x_{k-1})$ , Riemann escoge un punto arbitrario  $t_k$  en cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y considera, como Cauchy, la suma  $\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ . Por supuesto, esa pequeña diferencia, que en apariencia parece insignificante, da origen a una integral que es mucho más amplia y poderosa que la de Cauchy. La integral de Riemann posee un amplio campo de aplicaciones, es utilizada como una herramienta fundamental para el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, centros de masas, etc.

### Construcción de la integral de Riemann

Sea  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ . Una partición de  $[a, b]$  es una colección finita de puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Denotemos dicha partición por  $\mathcal{P}_r$ . Los puntos de  $\mathcal{P}_r = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dividen al intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos cerrados no-superpuestos.

$$I_1 = [x_0, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \dots, \quad I_n = [x_{n-1}, x_n],$$

a los que llamaremos *intervalos asociados a  $\mathcal{P}_r$* . El término partición será utilizado indistintamente para referirnos a los puntos de  $\mathcal{P}_r$ , o a los intervalos asociados a  $\mathcal{P}_r$ . A cada partición  $\mathcal{P}_r = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$ , le asignaremos un número, al que llamaremos la norma de  $\mathcal{P}_r$ , y que se define como:

$$\|\mathcal{P}_r\| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1})\}.$$

Un conjunto de etiquetas para los intervalos asociados a la partición  $\mathcal{P}_r$  es cualquier colección finita de puntos de  $[a, b]$ , digamos  $e = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , tal que  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  para  $i = 1, \dots, n$ . El conjunto de pares ordenados

$$\mathcal{P}_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, \dots, n\},$$

donde  $\mathcal{P}_r = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  y  $e = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  es un conjunto de etiquetas de los intervalos asociados a  $\mathcal{P}_r$ , lo llamaremos una *partición etiquetada* de  $[a, b]$ . Dado un número positivo  $\delta$ , una partición etiquetada  $\mathcal{P}_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, \dots, n\}$  se dice que es  $\delta$ -fina, o subordinada a  $\delta$ , si para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta, t_i + \delta).$$

Si  $\mathcal{P}_e$  es una partición etiquetada de  $[a, b]$ , entonces  $\|\mathcal{P}_e\| \leq 2\delta$  si, y sólo si,  $\mathcal{P}_e$  está subordinada a  $\delta$ .

Sea  $\mathcal{B}_\infty([a, b])$  el espacio vectorial de todas las funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que son acotadas sobre  $[a, b]$ . Si  $f \in \mathcal{B}_\infty([a, b])$  y  $\mathcal{P}_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$  es una partición etiquetada de  $[a, b]$ , entonces al número

$$S(f, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (2.5)$$

se le llama una *suma de Riemann* de  $f$  asociada a  $\mathcal{P}_e$ . De esta manera, si  $f \geq 0$ , entonces las sumas de Riemann de  $f$  se pueden interpretar como áreas que, a medida que la partición se hace más fina, se aproximan al área que se encuentra debajo de la curva  $S = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$  limitada por el eje de las  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ . La definición de la integral de Riemann, formulada originalmente por B. Riemann en 1854, puede ser expresada de la siguiente manera:

**Definición 2.4** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada sobre  $[a, b]$ . Se dice que  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$ , si existe un número real  $A$  con la siguiente propiedad: para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una constante  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$|S(f, \mathcal{P}_e) - A| < \varepsilon$$

para cualquier partición etiquetada  $\mathcal{P}_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$  de  $[a, b]$  subordinada a  $\delta_\varepsilon$ .

El número  $A$  de la definición anterior, si existe, es único y se le llama la *integral de Riemann* de  $f$  y se denotará, por

$$A = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

El símbolo  $\mathcal{R}([a, b])$  será usado para denotar el conjunto de todas las funciones  $f \in \mathcal{B}_\infty([a, b])$  que son *Riemann integrables* sobre  $[a, b]$ .

No es difícil demostrar que, en caso de existir, el número  $A$  es único: pues si existen dos  $A_1 \neq A_2$ , digamos  $A_2 > A_1$ , que satisfacen la definición anterior entonces para  $\varepsilon < \frac{1}{2}(A_2 - A_1)$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que para toda  $\mathcal{P}_\varepsilon$  se tiene que si  $\|\mathcal{P}_\varepsilon\| < \delta$  entonces  $|S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - A_1| < \varepsilon$  y  $|S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - A_2| < \varepsilon$ . Entonces utilizando la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$|A_1 - A_2| \leq 2\varepsilon,$$

lo cual es una contradicción.

Es importante destacar que, en la definición de la integral de  $f$ , se exige que sea acotada; sin embargo, tal exigencia no es necesaria pues el acotamiento de  $f$  sigue si es Riemann integrable. Observemos que la existencia del número positivo  $\delta_\varepsilon$  en la definición de la integral de Riemann es, en definitiva, quien ejerce el control de las particiones: toda partición etiquetada  $\mathcal{P}$  que tenga una norma menor que  $\delta$ , permite que la diferencia  $|S(f, \mathcal{P}) - A|$  sea siempre menor que  $\varepsilon$ .

**Teorema 2.1** (*Primer Teorema Fundamental del Cálculo*).

Sea  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Si  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una primitiva de  $f$ , entonces

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  cualquier partición de  $[a, b]$ . Puesto que  $F$  es diferenciable en  $[a, b]$ , el Teorema de Valor Medio para Derivadas nos garantiza, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la existencia de un  $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Por esto,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq U(f, \mathcal{P}),$$

de donde tenemos que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Puesto que esta última desigualdad se cumple para cualquier partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , se obtiene, usando el hecho de que  $f$  es Riemann integrable, que

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Lo que completa la prueba. ■

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann trata sobre la diferenciabilidad de una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

donde  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Recordemos que una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se llama Lipschitz si existe una constante  $M > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para todo  $x, y \in [a, b]$ . Además, toda función Lipschitz es uniformemente continua.

**Teorema 2.2** (*Segundo Teorema Fundamental del Cálculo*). Sea  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y defina la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dx \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Entonces  $F$  es Lipschitz sobre  $[a, b]$ . Más aún, si  $f$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F$  es diferenciable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Demostración.* Para demostrar que  $F$  es Lipschitz, observemos que si  $f = 0$  sobre  $[a, b]$ , entonces también  $F = 0$  sobre  $[a, b]$  y finaliza la prueba. Si éste no es el caso, sea

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Observe que  $M > 0$ . Sean  $x_1, x_2 \in [a, b]$  elegidos arbitrariamente. Entonces,

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f dt - \int_a^{x_2} f dt \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f dt \right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f| dt \leq M|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $F$  es Lipschitz. En particular,  $F$  es continua sobre  $[a, b]$ .

Para demostrar la segunda parte, suponga que  $f$  es continua en  $x_0 \in (a, b)$ . Por definición,

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Supongamos primeramente que  $h > 0$ . Entonces

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f dt.$$

Definamos

$$m_h = \inf\{f(x) : x \in [x_0, x_0 + h]\} \quad \text{y} \quad M_h = \sup\{f(x) : x \in [x_0, x_0 + h]\}.$$

Utilizando el hecho de que si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y se cumple que

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

En particular, si  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a),$$

del cual se sigue que

$$m_h h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f dt \leq M_h h$$

y, por lo tanto,

$$m_h \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq M_h.$$

Es fácil ver que las desigualdades anteriores también se cumplen si  $h < 0$ . Puesto que  $f$  es continua en  $x_0$ , resulta que

$$\lim_{h \rightarrow 0} m_h = f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} M_h,$$

lo cual demuestra que

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \quad \blacksquare$$

## 2.4 Integrales de Darboux

En ocasiones, resulta más práctico considerar las así llamadas *sumas de Darboux* para evaluar si una función es o no Riemann integrable. Tales sumas no requieren el uso de etiquetas. Consideremos una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Si  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  son los intervalos asociados a  $\mathcal{P}$ , definimos los números

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y} \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Darboux, en lugar de evaluar a  $f$  en un conjunto de etiquetas y luego multiplicarlo por  $(x_i - x_{i-1})$ , multiplica directamente  $M_i$ , así como  $m_i$ , por  $(x_i - x_{i-1})$  para obtener una “suma superior” y una “suma inferior” similar a las sumas de Riemann. A medida que se refine la partición  $\mathcal{P}$ , se obtiene una familia de sumas superiores que decrecen y una familia de sumas inferiores que crecen. Si tales familias se “encuentran” en el límite, entonces se dice que  $f$  es integrable en el sentido de Darboux.

### Construcción de la integral de Darboux

**Definición 2.5** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Las sumas inferior y superior de Darboux de  $f$  asociadas a una partición  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  son definidas, respectivamente, por los números

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

donde  $m_i$  y  $M_i$  son constantes. Teniendo que  $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a$  para cualquier partición  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$ , resulta que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función

acotada tal que  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$m(b-a) \leq L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a).$$

Denotaremos por  $\mathbb{P}[a, b]$  al conjunto de todas las particiones de  $[a, b]$ . Si  $\mathcal{P}$  y  $\Omega$  son dos particiones de  $[a, b]$ , diremos que  $\Omega$  es más fina que  $\mathcal{P}$  si  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ . Observemos que  $\Omega$  es más fina que  $\mathcal{P}$  implica que cada uno de los subintervalos asociados a  $\mathcal{P}$  es, o uno de los intervalos asociados de  $\Omega$ , o una unión finita de ellos.

**Lema 2.3** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sean  $\mathcal{P}, \Omega \in \mathbb{P}[a, b]$ . Si  $\Omega$  es más fina que  $\mathcal{P}$ , entonces

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \Omega) \quad \text{y} \quad U(f, \mathcal{P}) \geq U(f, \Omega).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  y que  $\Omega$  contiene, sólo un punto más que  $\mathcal{P}$ , esto es,  $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x^*, x_i, \dots, x_n\}$ . Observemos que

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, x^*] \cup [x^*, x_i]$$

y los intervalos restantes asociados de  $\mathcal{P}$  y  $\Omega$  coinciden. Tomemos

$$M'_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x^*]\} \quad \text{y} \quad M''_i = \sup\{f(x) : x \in [x^*, x_i]\}.$$

Entonces

$$M'_i \leq M_i \quad \text{y} \quad M''_i \leq M_i$$

y puesto que  $x_i - x_{i-1} = (x_i - x^*) + (x^* - x_{i-1})$ , se obtiene que

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^*) + M_i(x^* - x_{i-1}) \geq M'_i(x_i - x^*) + M''_i(x^* - x_{i-1}).$$

Por esto,

$$U(f, \mathcal{P}) - U(f, \Omega) = M_i(x_i - x_{i-1}) - (M'_i(x_i - x^*) + M''_i(x^* - x_{i-1})) \geq 0.$$

Supongamos ahora que  $\Omega$  contiene  $k$  puntos más que  $\mathcal{P}$ . Entonces existe un conjunto finito de particiones  $\Omega_1, \dots, \Omega_{k-1}$  de  $[a, b]$  tal que

$$\mathcal{P} \subseteq \Omega_1 \subseteq \dots \subseteq \Omega_{k-1} \subseteq \Omega,$$

donde cada partición se obtiene de la anterior añadiéndole exactamente un punto. Entonces

$$U(f, \mathcal{P}) \geq U(f, \Omega_1) \geq \cdots \geq U(f, \Omega_{k-1}) \geq U(f, \Omega).$$

El caso  $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \Omega)$  se prueba de modo enteramente similar. ■

**Corolario 2.4** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces se cumple que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \Omega),$$

para cualesquiera  $\mathcal{P}, \Omega \in \mathbb{P}[a, b]$ .

*Demostración.* Hagamos  $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \Omega$  y observemos que como  $\mathcal{R}$  es más fina que  $\mathcal{P}$  y  $\Omega$ , el Lema 2.3 nos dice que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{R}) \leq U(f, \mathcal{R}) \leq U(f, \Omega).$$

Esto termina la prueba. ■

Consideremos ahora los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{A} = \{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}[a, b]\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{U(f, \Omega) : \Omega \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Puesto que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son conjuntos acotados, se sigue que

$$a \leq b \text{ para todo } a \in \mathcal{A} \text{ y todo } b \in \mathcal{B},$$

y, por lo tanto, se concluye que

$$\sup \{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}[a, b]\} \leq \inf \{U(f, \Omega) : \Omega \in \mathbb{P}[a, b]\}. \quad (2.6)$$

**Definición 2.6** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. La integral superior e integral inferior de Darboux se definen, respectivamente, como los números

$$\overline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx = \sup \{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}[a, b]\},$$

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx = \inf \{U(f, \Omega) : \Omega \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Se sigue de (2.6) que

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx.$$

**Definición 2.7** Una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *Darboux integrable* sobre  $[a, b]$  si

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx = \overline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx.$$

Si éste es el caso, entonces la *integral de Darboux* de  $f$  sobre  $[a, b]$  se define como ese valor común al que denotaremos por

$$\mathcal{D} \int_a^b f(x) dx.$$

Esta definición de integral fue establecida por **Gaston Darboux** en 1875. Dicha integral es equivalente a la *integral de Riemann*. El símbolo  $\mathcal{D}([a, b])$ , lo usaremos para denotar el conjunto de funciones en  $\mathcal{B}_\infty([a, b])$  que son Darboux integrables sobre  $[a, b]$ .

**Ejemplo 2.5** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función constante, digamos  $f(x) = k$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $f \in \mathcal{D}([a, b])$  y

$$\mathcal{D} \int_a^b f(x) dx = k(b - a).$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  cualquier partición de  $[a, b]$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  se cumple que

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i = k.$$

Luego,

$$L(f, \mathcal{P}) = U(f, \mathcal{P}) = k(b - a),$$

de donde se sigue que

$$\mathcal{D} \int_a^b f(x) dx = k(b - a). \quad \square$$

Es importante destacar que no cualquier función acotada es Darboux integrable. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.6** La función de Dirichlet  $\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada pero no es Darboux integrable.

*Demostración.* Si  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  en cualquier partición de  $[0, 1]$ , entonces

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0, \quad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1,$$

y así,

$$L(f, \mathcal{P}) = 0 \quad \text{y} \quad U(f, \mathcal{P}) = 1.$$

Por esto,

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{D}} \int_a^b f(x) dx = 1,$$

de donde se concluye que  $f \in \mathcal{B}_{\infty}([a, b]) \setminus \mathcal{D}([a, b])$ .

□

**Definición 2.8** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada, entonces la *oscilación* de  $f$  sobre cualquier conjunto  $F \subseteq [a, b]$  se define como

$$\text{osc}(f, F) = \sup_{x \in F} f(x) - \inf_{x \in F} f(x).$$

**Ejemplo 2.7** En particular, si  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  y si  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  son los intervalos asociados a  $\mathcal{P}$ , entonces

$$\text{osc}(f, I_i) = M_i - m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{osc}(f, I_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

□

El siguiente criterio de integrabilidad se debe a Riemann y vincula la noción de integral con continuidad. Constituye una forma simple de caracterizar a las funciones acotadas que son Darboux integrables.

**Teorema 2.5** (*Riemann–Darboux integrabilidad*) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Las siguientes son equivalentes:

1.  $f \in \mathcal{D}([a, b])$ .
2. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existen particiones  $\mathcal{P}, \Omega$  de  $[a, b]$  tal que  $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \Omega) < \varepsilon$ .
3. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  tal que  $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ .
4. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una partición  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \text{osc}(f, I_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

*Demostración.* Las implicaciones (1) $\Leftrightarrow$ (2) se siguen del Teorema 4.35. Sea  $\varepsilon > 0$  y suponga que (2) se cumple. Definamos  $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \Omega$ . Entonces por el Lema 2.3, se tiene que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{R}) \leq U(f, \mathcal{R}) \leq U(f, \Omega),$$

y, por consiguiente,  $U(f, \mathcal{R}) - L(f, \mathcal{R}) < \varepsilon$ . Esto prueba (3). Claramente (3) implica (2). Finalmente (3) $\Leftrightarrow$ (4) se sigue de (2.7). ■

### Equivalencia de las Integrales de Riemann y Darboux

El siguiente resultado establece que la integral de Darboux y la integral de Riemann son equivalentes.

**Teorema 2.6** (*Igualdad Riemann–Darboux*). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Las siguientes son equivalentes:

- (1)  $f \in \mathcal{D}([a, b])$ .
- (2)  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

En este caso,

$$\mathcal{R} \int_a^b f dx = \mathcal{D} \int_a^b f dx.$$

*Demostración.* Suponga que  $f \in \mathcal{D}([a, b])$  y sea  $A = \mathcal{D} \int_a^b f dx$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe, gracias al Teorema 2.5, una partición  $\mathcal{P}_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que

$$U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Definamos  $\delta = \|\mathcal{P}_\varepsilon\|$  y sea  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  cualquier partición más fina que  $\mathcal{P}_\varepsilon$ . Resulta que  $\|\mathcal{P}\| \leq \delta$  y si  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  es un conjunto arbitrario de etiquetas de  $\mathcal{P}$ , tendremos que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq U(f, \mathcal{P})$$

y, por supuesto, también se cumple

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{D} \int_a^b f dx \leq U(f, \mathcal{P}).$$

De estas dos desigualdades se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \mathcal{D} \int_a^b f dx \right| &\leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \\ &< U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $f$  es Riemann integrable y así, por la unicidad de la integral de Riemann,

$$\mathcal{R} \int_a^b f dx = \mathcal{D} \int_a^b f dx.$$

Para demostrar la otra implicación, supongamos que (2) se cumple y sea  $\varepsilon > 0$ . Fijemos una partición  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  con  $\|\mathcal{P}\| \leq \delta$  tal que la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1}) - \mathcal{R} \int_a^b f dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.8)$$

es válida para cualquier conjunto arbitrario de etiquetas  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  de  $\mathcal{P}$ . Como  $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ , tenemos que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , existe, por las propiedades del ínfimo, un  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$f(t_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Por esto, para el conjunto de etiquetas  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) &< \sum_{i=1}^n \left( m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1}) \right) \\ &= L(f, \mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

y así, usando (2.8), vemos que

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx \geq L(f, \mathcal{P}) > \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} > \mathcal{R} \int_a^b f dx - \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario, concluimos que

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx \geq \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

De modo similar, pero ahora trabajando con  $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ , se prueba que

$$\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx \leq \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

Finalmente, sabiendo que  $\underline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx \leq \overline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx$ , tenemos que

$$\mathcal{R} \int_a^b f dx \leq \underline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx \leq \overline{\mathcal{D}} \int_a^b f dx \leq \mathcal{R} \int_a^b f dx,$$

y finaliza la prueba. ■

Del resultado anterior que sigue que los conjuntos  $\mathcal{D}([a, b])$  y  $\mathcal{R}([a, b])$  coinciden y, además, se cumple que

$$\mathcal{R} \int_a^b f dx = \mathcal{D} \int_a^b f dx$$

para cualquier  $f \in \mathcal{R}([a, b]) = \mathcal{D}([a, b])$ .

## 2.5 Aplicaciones: Integrales con Parámetros

**Proposición 2.7** *Sea la integral*

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

es igual a  $\frac{\pi}{2}$ . Entonces la función representada en la forma integral y que depende de un parámetro  $a$

$$f(a) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ax)}{x} dx$$

es igual a

$$\frac{\pi}{2} \text{sgn}(a),$$

donde  $\text{sgn}(a) = 1$  si  $a > 0$ ,  $\text{sgn}(a) = -1$  si  $a < 0$  y  $\text{sgn}(a) = 0$  si  $a = 0$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Consideramos dos casos para el parámetro  $a$ :

1. Si  $a > 0$  y  $x = ay$ , entonces obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ay)}{ay} a dy = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ay)}{y} dy,$$

de ahí que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ay)}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

2. Sean  $b = -a$  y  $x = by$ , entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(by)}{by} b dy = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(by)}{y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(-ay)}{y} dy = - \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ay)}{y} dy. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ay)}{y} dy = -\frac{\pi}{2},$$

de las afirmaciones 1 y 2, podemos concluir que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(a). \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.8** Sea

$$g(a) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2(ax)}{x^2} dx$$

una función representada en la forma integral y que depende de un parámetro arbitrario  $a$ . Entonces  $g(a) = \frac{\pi|a|}{2}$ .

*Demostración.* Utilizando la ecuación (2.2) (que se mencionó anteriormente), obtenemos que

$$\begin{aligned} g'(a) &= \int_0^\infty \frac{\partial G(a, x)}{\partial a} dx = \int_0^\infty \frac{\partial \frac{\text{sen}^2(ax)}{x^2}}{\partial a} dx = \int_0^\infty \frac{2x^3 \text{sen}(ax) \cos(ax)}{x^4} \\ &= \int_0^\infty \frac{2 \text{sen}(ax) \cos(ax)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(2ax)}{x} dx. \end{aligned}$$

Entonces,

$$g'(a) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(2ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(a).$$

Luego, integramos la expresión anterior con respecto al parámetro  $a$ . Consideramos dos casos.

1. Si  $a > 0$ , entonces tenemos

$$\int_0^a g'(a) da = \int_0^a \frac{\pi}{2} da \Rightarrow g(a) = \frac{\pi}{2} a.$$

2. Si  $b = -a$  (donde  $a > 0$ ), entonces obtenemos

$$\int_0^b g'(b) db = \int_0^b -\frac{\pi}{2} db = -\frac{\pi}{2} b \Rightarrow g(-a) = \frac{\pi}{2} a.$$

De las afirmaciones 1 y 2, se concluye que

$$g(a) = \frac{\pi}{2} |a|. \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.9** *Sea*

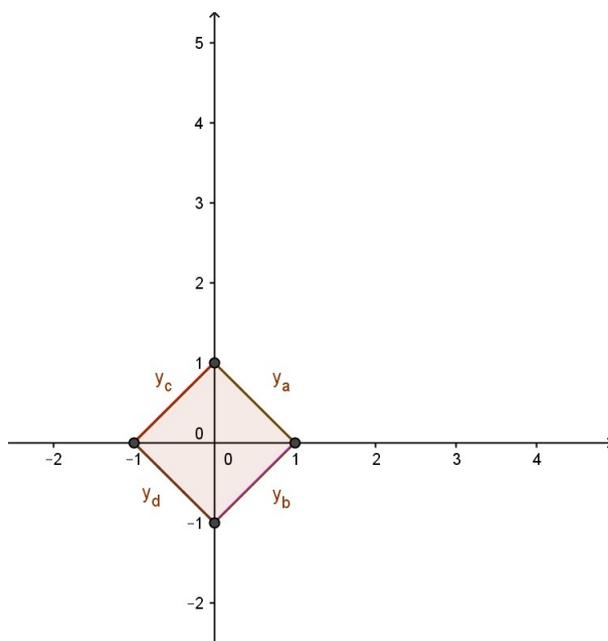
$$\int_0^\infty e^{-ax} \text{sen } x = \frac{1}{1+a^2}, \quad a > 0.$$

*Entonces la función representada en la forma integral y que depende de un parámetro  $a$  es*

$$f(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan(a).$$

*Demostración.* *Sea*

$$\begin{aligned} f'(a) &= \int_0^\infty \frac{\partial \frac{e^{-ax} \text{sen } x}{x}}{\partial a} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x e^{-ax}(0) + (\text{sen } x)(-x e^{-ax}) - (e^{-ax} \text{sen } x)(0)}{x^2} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{-x^2 (\text{sen } x)(e^{-ax})}{x^2} dx = - \int_0^\infty e^{-ax} \text{sen } x dx = - \frac{1}{1+a^2}. \end{aligned}$$

Figura 2.1: Representación gráfica de región  $R$ 

Integrando  $f'(a)$ , obtenemos

$$0 - f(a) = \int_a^{\infty} f'(a) = - \int_a^{\infty} \frac{1}{1+a^2} = - \arctan(a) \Big|_a^{\infty}.$$

Evaluando la función en el intervalo  $[a, \infty)$ , se tiene que

$$-f(a) = - \arctan(z)_{z \rightarrow \infty} - (- \arctan(a)) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(a).$$

Finalmente, tenemos

$$f(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a). \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 2.8 (Integración de Riemann)

Consideremos la colección de todos los puntos  $(x, y)$  que, juntos, son los puntos en la región  $R$  del plano  $x, y$  donde  $|x| + |y| < 1$ , con  $-1 < x < 1$ . Para encontrar el área de  $R$ , resolvemos la desigualdad mencionada para  $y$ ,

$$|y| < 1 - |x|.$$

Una versión resumida de la doble desigualdad:

$$-(1 - |x|) = y_2 < y < 1 - |x| = y_1.$$

Ahora, consideremos los casos cuando  $x > 0$  y  $x < 0$ .

*Caso 1:* Si  $x > 0$  entonces  $|x| = x$  y debido a la doble desigualdad, obtenemos

$$-(1-x) = y_2 < y < 1-x = y_1,$$

así el área de la porción de  $R$  cuando  $x > 0$  es

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y_1 - y_2) dx &= \int_0^1 \{(1-x) + (1-x)\} dx = \int_0^1 (2-2x) dx \\ &= (2x - x^2) \Big|_0^1 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

*Caso 2:* Si  $x < 0$  entonces  $|x| = -x$  y debido a la doble desigualdad, obtenemos

$$-(1+x) = y_2 < y < 1+x = y_1,$$

y el área de la porción de  $R$  definida cuando  $x < 0$  es

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (y_1 - y_2) dx &= \int_{-1}^0 \{(1+x) + (1+x)\} dx = \int_{-1}^0 (2+2x) dx \\ &= (2x + x^2) \Big|_{-1}^0 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Entonces, el área de  $R$  es 2.

Nótese que hicimos todo el cálculo sin ninguna preocupación por la forma de  $R$ . Veamos como luce la región  $R$ . Para  $x > 0$  tenemos

$$|y| < 1 - |x|,$$

donde uno de los bordes de  $R$  es

$$y_a(x) = 1 - x, \quad x > 0,$$

y otro de los bordes es

$$y_b(x) = -(1-x) = -1+x, \quad x > 0.$$

Para  $x < 0$  tenemos

$$|x| + |y| < 1,$$

como  $|x| = -x$  para  $x < 0$ ,

$$|y| < 1 + x.$$

Por lo tanto, un tercer borde de  $R$  es

$$y_c(x) = 1 + x, \quad x < 0,$$

y un cuarto borde para  $R$  es

$$y_d(x) = -(1 + x) = -1 - x, \quad x < 0.$$

Figura 2.1 muestra estos cuatro bordes trazados, y vemos que  $R$  es un cuadrado con centro en el origen rotado a 45, con una longitud lateral de  $\sqrt{2}$ . Es decir, tiene un área de 2, tal como se calculó con la integral de Riemann.  $\square$



# Capítulo 3

## Integración Analítica Aproximada

*Ah, if we could only do the integral! But we can't*

— A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*

Hay varias razones para llevar a cabo la integración aproximada. La principal puede ser la imposibilidad de realizar la integración de forma analítica exacta. Es decir, integrales que requerirían de un gran conocimiento y manejo de matemática avanzada pueden ser resueltas de una manera más sencilla mediante métodos aproximados. Incluso existen funciones integrables pero cuya primitiva no puede ser calculada, siendo la integración aproximada de vital importancia. El error de la aproximación, que depende del método que se utilice y de qué tan fino sea, puede llegar a ser tan pequeño que es posible obtener un resultado muy cercano a la solución analítica exacta. En este capítulo nos enfocaremos en buscar ciertos métodos de aproximación analítica para evaluación de integrales.

### 3.1 Integración por Partes

Existen varios métodos de búsqueda de aproximación analítica para integrales: ninguno de ellos funciona para todas las integrales y existen muchas integrales para las que ningún método funciona. Los métodos conocidos se pueden aplicar para ciertas clases de integrales, por lo que para una integral dada la tarea es determinar cual método de aproximación es apropiado o, en su defecto, transformar la integral de manera que algún método estándar sea aplicable. Esto es en gran

medida una cuestión de experiencia o práctica (con prueba y error) debido a que hay pocas reglas generales.

Uno de los enfoques más importantes de evaluación de integrales es la aplicación del método de integración por partes, que se basa en dividir el integrando en el producto de dos funciones,  $f(x)$  y  $g(x)$ , y usando la relación

$$\int f(x)g(x) dx = g(x) \left[ \int f(x) dx \right] - \int \frac{dg}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] dx. \quad (3.1)$$

Al repetir esta operación  $N$  veces obtenemos una relación más general.

**Teorema 3.1** *Sea  $g(x)$  una función integrable y diferenciable  $N$  veces. Entonces la siguiente fórmula de integración  $N$  veces por partes es válida:*

$$I_N = \int f(x)g(x) dx = \sum_{r=0}^{N-1} (-1)^r f^{(-r-1)}(x)g^{(r)}(x) + (-1)^N \int f^{(-N)}(x)g^{(N)}(x) dx, \quad (3.2)$$

donde  $g^{(k)}$  es la  $k$ -ésima derivada de  $g$  si  $k \geq 1$  y la  $k$ -ésima integral si  $k \leq -1$ , y  $g^{(0)} = g$ .

*Demostración.* Demostramos la fórmula (3.2) por inducción matemática. Si hacemos la primera integración por partes, obtenemos

$$I_1 = g(x)f^{-1}(x) - \int g^{(1)}(x)f^{-1}(x) dx. \quad (3.3)$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (3.2) si  $N = 1$ .

Si integramos el resultado anterior  $N$  veces, obtenemos

$$I_N = \sum_{r=0}^{N-1} (-1)^r f^{(-r-1)}(x)g^{(r)}(x) + (-1)^N f^{(-N-1)}(x)g^{(N)}(x) - (-1)^N \int f^{(-N-1)}(x)g^{(N+1)}(x) dx, \quad (3.4)$$

y simplificando, tenemos

$$I_{N+1} = \sum_{r=0}^{(N+1)-1} (-1)^r f^{(-r-1)}(x)g^{(r)}(x) + (-1)^{(N+1)} \int f^{-(N+1)}(x)g^{(N+1)}(x) dx. \quad (3.5)$$

Si fórmula (3.4) es válida para  $N$ , entonces (3.5) es válida para  $N + 1$ . Puesto que fórmula (3.3) es válida para  $N = 1$ , entonces (3.4) es válida para toda  $N$ . ■

Consideramos algunas aplicaciones del método de integración por partes.

1. *Casos simples.* En los casos más simples la integral del lado derecho de la ecuación (3.2) puede ser evaluada directamente para alguna  $N$ , usualmente cuando  $g(x)$  es un polinomio. Por ejemplo, si  $g(x) = x^2$  y  $f(x) = \cos(ax)$ , entonces  $g^{(2)}(x) = 2$  y obtenemos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(ax) dx &= g f^{(-1)} - g^{(1)} f^{(-2)} + g^{(2)} \int f^{(-2)}(x) dx \\ &= \frac{x^2}{a} \operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2} \cos(ax) - \frac{2}{a^3} \operatorname{sen}(ax). \end{aligned}$$

2. *Relaciones de recurrencia.* Otra aplicación simple se da cuando la integral en el lado derecho de la ecuación (3.2) es proporcional a la integral original del lado izquierdo de la ecuación, para algún valor de  $N$ , así podemos obtener una expresión exacta para la integral. Comúnmente este tipo de integrales se componen de funciones trigonométricas y/o exponenciales.

## 3.2 Aproximación Analítica de Integrales del tipo Laplace

### *Integrales del tipo Laplace*

Recordemos que integrales de la siguiente forma

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt,$$

son conocidas como integrales de Laplace, así pues, las integrales con la forma

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-axt} h(b, c; t) dt, \quad (3.6)$$

son conocidas como *integrales del tipo Laplace* que contienen parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Estas integrales se producen como soluciones de alguna ecuación diferencial lineal, usualmente en problemas de valor inicial. La variable  $x$  puede ser compleja, pero normalmente se restringe a la región  $\Re(x) \geq \lambda \geq 0$ . Si  $h(b, c; t)$  es integrable sobre algún intervalo  $(0, T)$  y  $h(b, c; t) = O(e^{\lambda t})$  para alguna constante  $\lambda$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces la integral es absolutamente convergente y representa una función

$x$	$F_n$	$F_a$	$F_n - F_a$
3	2.819682217e-01	4.174346994e-02	2.402247518e-01
8	1.171439112e-01	1.171090654e-01	3.484580000e-05
13	7.392412628e-02	7.392374605e-02	3.802300000e-07
18	5.399077649e-02	5.399075912e-02	1.737000000e-08
23	4.252081754e-02	4.252081588e-02	1.660000000e-09
28	3.506900157e-02	3.506900133e-02	2.400000000e-10
33	2.983896936e-02	2.983896931e-02	5.000000000e-11
38	2.596614257e-02	2.596614256e-02	1.000000000e-11
43	2.298297281e-02	2.298297281e-02	0.000000000e+00

Tabla 3.1: Comparación de la aproximación analítica de (3.9),  $F_a$ , con la aproximación numérica,  $F_n$  y su error correspondiente,  $F_n - F_a$ .

analítica de  $x$  en el semiplano  $\Re(x) \geq \lambda$ . A no ser que se indique lo contrario supondremos que  $x$  es real.

Si la integral existe y  $h(b, c; t)$  es  $N$  veces continuamente diferenciable en una vecindad del origen, aplicando la ecuación (3.2) del método de integración por partes, podemos obtener la siguiente expresión analítica aproximada:

$$F_{\text{ap}}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{h^{(k)}(b, c; 0)}{(ax)^{k+1}} + \frac{(-1)^{N+1}}{(ax)^{N+1}} \int_0^{\infty} e^{-axt} h^{(N+1)}(b, c; t) dt \quad (3.7)$$

de la integral del tipo Laplace  $F(x)$ . Siempre que todas las derivadas  $h^{(k)}(b, c; 0)$  existan, podemos sustituir en los límites de la integración y obtener la siguiente expansión asintótica de  $F_a(x)$ :

$$F_a(x) = \int_0^{\infty} e^{-axt} h(b, c; t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(b, c; 0)}{(ax)^{k+1}} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Consideremos la integral del tipo Laplace con parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-axt}}{\sqrt{1+bt+ct^2}} dt. \quad (3.9)$$

Si seguimos el enfoque de integración por partes con  $f(t)$  y  $g(t)$ , donde  $f(t) = e^{-axt}$  y  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+bt+ct^2}}$ , y sustituimos en los límites de la integración, obte-

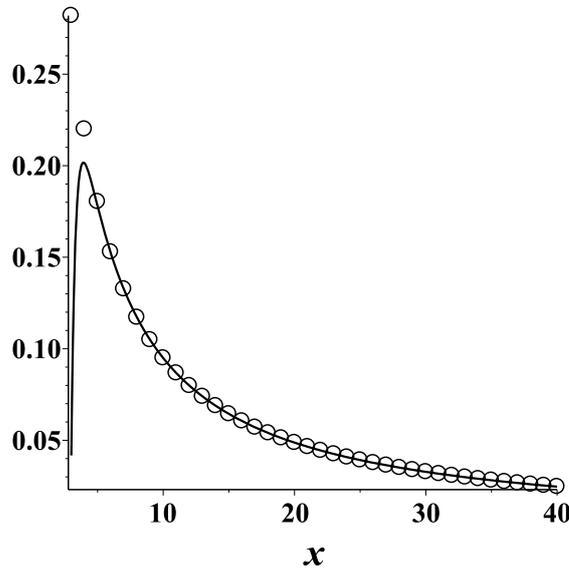


Figura 3.1: Resultados analíticos aproximados y numéricos,  $F_a$  y  $F_n$  ( $a=b=c=1$ )

nemos el siguiente resultado analítico aproximado:

$$\begin{aligned}
 F_a(x) = & \frac{1}{ax} - \frac{1}{2} \frac{b}{(ax)^2} + \frac{1}{4} \frac{(3b^2 - 4c)}{(ax)^3} - \frac{3}{8} \frac{b(5b^2 - 12c)}{(ax)^4} \\
 & + \frac{3}{16} \frac{35b^4 - 120b^2c + 48c^2}{(ax)^5} - \frac{15}{32} \frac{b(63b^4 - 280b^2c + 240c^2)}{(ax)^6} \\
 & + \frac{45}{64} \frac{231b^6 - 1260b^4c + 1680b^2c^2 - 320c^3}{(ax)^7} \\
 & - \frac{315}{128} \frac{b(429b^6 - 2772b^4c + 5040b^2c^2 - 2240c^3)}{(ax)^8} \\
 & + \frac{315}{256} \frac{6435b^8 - 48048b^6c + 110880b^4c^2 - 80640b^2c^3 + 8960c^4}{(ax)^9}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora comparamos resultados analíticos aproximados,  $F_a$ , con resultados numéricos correspondientes,  $F_n$ , para algunos valores de  $x$ ,  $a$ ,  $b$  y  $c$  ( $x = 3, 8, \dots, 43$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ) y presentamos los resultados en la Tabla 3.1.

La visualización de los resultados obtenidos (presentados en la Figura 3.1) nos indica que para  $x > 6$  el error de aproximación es casi cero y los resultados coinciden.

### 3.3 Aproximación Analítica de Integrales de Fourier

**Definición 3.1** Integrales de la forma

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt} f(t) dt \quad (3.11)$$

son llamadas *integrales de Fourier*.

Integrales de Fourier se producen en muchos casos, a menudo con el movimiento ondulatorio o problemas de contorno. En la práctica  $|\alpha|$  y  $\beta$  pueden ser infinitas, pero en esta sección supondremos que son finitas. Una aplicación importante, es la representación de funciones periódicas en términos de series de Fourier; además, los coeficientes de Fourier son dados por las integrales de esta forma, pero  $x$  toma valores discretos.

**Ejemplo 3.1** La función de Bessel de orden entero ordinario,  $J_n(x)$ , se define por la integral:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nt - x \operatorname{sen} t)} dt. \quad \square$$

**Ejemplo 3.2** Funciones especiales reales como la *función de Anger*  $J_\nu(x)$  y la *función de Weber*  $E_\nu(x)$ , se definen por integrales similares:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu t - x \operatorname{sen} t) dt, \quad E_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(\nu t - x \operatorname{sen} t) dt.$$

Podemos mostrar que

$$J_\nu(x) + iE_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i(\nu t - x \operatorname{sen} t)} dt.$$

También es válido

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\nu t - x \operatorname{sen} t) dt = (1 + \cos(2\pi\nu))J_\nu(x) + \operatorname{sen}(2\pi\nu)E_\nu(x).$$

Por lo tanto, la función de Anger–Weber  $A_\nu(x)$  se define por la integral:

$$A_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu t - x \operatorname{sen} ht} dt. \quad \square$$

La existencia de la integral de Fourier (3.11) para todos los reales  $x$  está garantizada por *Lema de Riemann–Lebesgue* (véase, por ejemplo, [13], página 172 o [1], página 381):

**Lema 3.2** (*Lema de Riemann–Lebesgue*) Si la integral  $\int_a^b f(t) dt$  existe (si esta integral es una integral impropia) y si esta integral converge absolutamente, entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t) dt = 0.$$

Un resultado más general establece:

**Teorema 3.3** Si  $f(t)$  es integrable en el rango de  $(a, b)$ , si  $x$  es una variable real y si  $a \leq a' < b' \leq b$ , entonces

$$\int_{a'}^{b'} e^{ixt} f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty,$$

y la convergencia es uniforme en  $a'$  y  $b'$ .

Para más detalles, ver [14], página 46.

Notemos que la integral impropia  $\int_a^\infty e^{ixt} f(t) dt$  es un caso especial de la integral  $\int_a^\infty \phi(t) f(t) dt$ .

Puede demostrarse que la integral  $\int_a^\infty \phi(t) f(t) dt$  existe (ver [13], página 72), si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- (1) La función  $f(t)$  puede ser acotada por una función monótona decreciente que converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (2) La integral  $\left| \int_a^w \phi(t) dt \right|$  es acotada cuando  $w \rightarrow \infty$ .

Para *Integrales de Fourier* (donde  $\phi(t) = e^{ixt}$ ),  $\int_a^w e^{ixt} dt$  es acotada si  $f(t)$  satisface la condición (1), la integral de Fourier (3.11) existe con  $\beta = \infty$ .

**Ejemplo 3.3** Por ejemplo, si  $a > 0$ , la integral  $\int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$  existe, pero  $\lim_{w \rightarrow \infty} \int_a^w \frac{1}{t} dt$  no existe. □

Si la función  $f(t)$  y sus primeras  $N$  derivadas están definidas, entonces la ecuación (3.2) del método de integración por partes se puede aplicar para integrales de Fourier y obtenemos:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt} f(t) dt = - \left( e^{ixt} \sum_{r=0}^N \left( \frac{i}{x} \right)^{r+1} f^{(r)}(t) \right)_{t=\alpha}^{\beta} + \left( \frac{i}{x} \right)^{N+1} \int_{\alpha}^{\beta} f^{(N+1)}(t) e^{ixt} dt. \quad (3.12)$$

### 3.4 Lema de Watson

La aplicación de integración por partes a integrales de Laplace a menudo produce una expansión asintótica y puede disfrazar el comportamiento esencial del integrando que conduce a la expansión asintótica (3.7). Por otra parte, la aplicación directa de este método no funciona en muchos casos importantes (la ecuación (3.16) mostrada más adelante es uno de esos casos).

Considere la siguiente integral del tipo Laplace

$$F(x) = \int_0^A e^{-xt} f(t) dt, \quad x > 0. \quad (3.13)$$

Si la función  $f(t)$  no crece demasiado rápido y si  $A$  y  $x$  son suficientemente grandes, ya que  $e^{-xt}$  decrece rápidamente cuando  $t$  aumenta, es claro que la contribución dominante proviene de la región alrededor de  $t = 0$ .

**Lema 3.4** (Lema de Watson)

*Si  $f(t)$  tiene la expansión asintótica*

$$f(t) \sim t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\beta}, \quad \beta > 0, \quad \alpha > -1, \quad (3.14)$$

*válida cuando  $t \rightarrow 0$ , entonces la integral de Laplace (3.13) tiene la expansión asintótica*

$$F(x) = \int_0^A e^{-xt} f(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(\alpha + k\beta + 1)}{x^{\alpha + k\beta + 1}}, \quad (3.15)$$

*válida cuando  $x \rightarrow \infty$ .*

La prueba de este resultado se puede encontrar en [4], Capítulo 6.

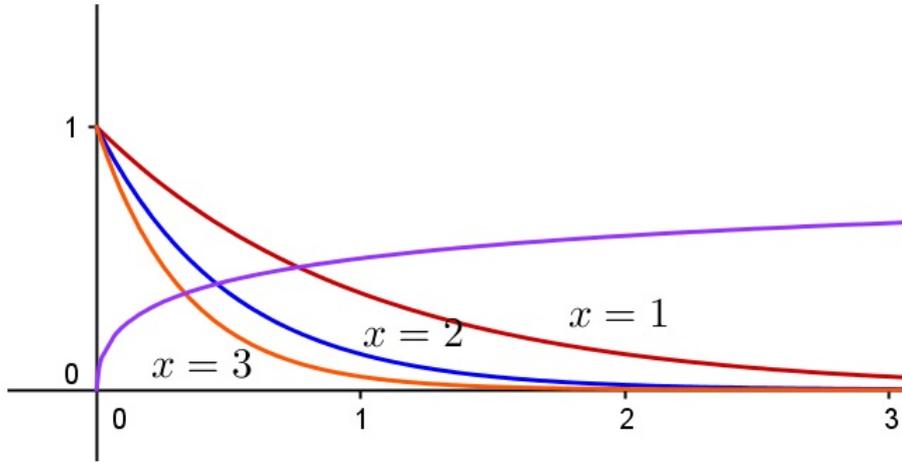


Figura 3.2: Gráficas de  $y = e^{-xt}$  para  $x = 1, 2, 3$  y  $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

**Definición 3.2** La función gamma  $\Gamma$  se define por la integral

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt, \quad \Re(z) > -1.$$

En esta integral  $t^z$  es definida como  $t^z = e^{(z \ln t)}$  para  $t > 0$  en los reales.

**Ejemplo 3.4** Veamos el siguiente caso particular

$$F(x) = \int_0^3 \frac{\sqrt{t} e^{-xt}}{1+\sqrt{t}} dt, \quad (3.16)$$

para la cual la aplicación directa de la ecuación (3.7) falla, porque ninguna de las derivadas de  $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$  existe en el origen. Las gráficas de  $f(t)$  y  $e^{-xt}$ , para varios valores de  $x$ , se muestran en la Figura 3.2.

Sustituimos  $f(t)$  por su desarrollo en serie sobre el origen,  $t^{\frac{1}{2}} - t + t^{\frac{3}{2}} + \dots$ , y luego reemplazamos el límite superior de la integral por infinito (con el fin de que las integrales posteriores puedan ser evaluadas) para obtener

$$F(x) \sim \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-xt} dt - \int_0^{\infty} t e^{-xt} dt + \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-xt} dt + \dots$$

Utilizando la función Gamma, esto se convierte en

$$F(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4x^{\frac{5}{2}}} + \dots \quad (3.17)$$

x	5	10	15	20	25
$F(x)$ (exacta)	0.05372	0.02090	0.01192	0.00797	0.00582
$F(x)$ (ecuación (3.17))	0.06305	0.02223	0.01234	0.00815	0.00592

Tabla 3.2: Comparación de la aproximación de (3.17) con la integral exacta.

Podemos encontrar más términos de esta serie: la siguiente tabla muestra una comparación numérica entre algunos valores exactos de  $F(x)$  que se obtiene por integración numérica y las dadas por la serie anterior.  $\square$

**Ejemplo 3.5** Para un ejemplo de la aplicación del *Lema de Watson* consideraremos la representación integral de la función de Bessel modificada  $K_0(x)$ ,

$$K_0(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} dt. \quad (3.18)$$

Es posible trazar la gráfica de esta función utilizando su representación en Maple [11]:  $BesselK(n, x)$  (con  $n$  convergente a cero). El *Lema de Watson* no se puede aplicar directamente a esta integral debido a los límites; pero con un cambio simple de variable, digamos  $s = t + 1$ , se puede expresar en la forma de la ecuación (3.13),

$$K_0(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{s}{2})^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Usando el *Teorema del binomio* para expandir el denominador en potencias de  $s$ , obtenemos

$$s^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{s}{2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} s^{k - (\frac{1}{2})} \frac{(-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{2^k k!}, \quad |s| < 2.$$

Aunque esta expansión es válida sólo para  $|s| < 2$ , podemos utilizarla ya que  $s \rightarrow 0$ ; en comparación con la serie (3.14) observamos que  $\alpha = -\frac{1}{2}$  y  $\beta = 1$ , por lo tanto la expansión asintótica es

$$K_0(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})^2}{k! (2x)^k}, \quad x \rightarrow \infty. \quad \square$$

En este ejemplo la similitud entre la integral original y la forma básica, definida en la ecuación (3.13), resulta bastante obvia. En el siguiente ejemplo, el complemento de la función de error, la relación no es tan evidente.

**Ejemplo 3.6** La representación integral de esta función es

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (3.19)$$

Transformamos esta ecuación a la forma canónica para definir una nueva variable de integración  $t = x + w$  que transforma la integral en

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2xw} e^{-w^2} dw.$$

La expansión de Taylor de  $e^{-w^2}$  es

$$e^{-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^{2n},$$

y mediante la comparación con la ecuación (3.14) observamos que  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$  y en la integral, reemplazando  $x$  por  $2x$ , por el *Lema de Watson* resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)}{(2x^2)^n} \\ &= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

□

### 3.5 Aplicaciones: Integrales con Parámetros

**Proposición 3.5** Si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a > 0$ , entonces

$$\int_x^{\infty} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt = \frac{b \cos(bx) + a \operatorname{sen}(bx)}{a^2 + b^2} e^{-ax}.$$

*Demostración.*

Aplicamos el método de integración por partes. Tomemos la siguiente representación:

$$u(x) = \operatorname{sen}(bt), \quad \frac{du}{dt} = b \cos(bt), \quad v(x) = -\frac{1}{a} e^{-at}, \quad \frac{dv}{dt} = e^{-at}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt &= -\frac{1}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) - \left[ \int_x^\infty -\frac{b}{a} e^{-at} \cos(bt) dt \right] \\ &= -\frac{1}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) + \frac{b}{a} \int_x^\infty e^{-at} \cos(bt) dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para resolver la integral  $\int_x^\infty e^{-at} \cos(bt) dt$  aplicamos nuevamente integración por partes.

Tomemos la siguiente representación:

$$w(x) = \cos(bt), \quad \frac{dw}{dt} = -b \operatorname{sen}(bt), \quad z(x) = -\frac{1}{a} e^{-at}, \quad \frac{dz}{dt} = e^{-at} dt.$$

De aquí que,

$$\int_x^\infty e^{-at} \cos(bt) dt = -\frac{1}{a} e^{-at} \cos(bt) - \int_x^\infty \frac{b}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt.$$

Sustituyendo este resultado en (3.21), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt &= -\frac{1}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) \\ &+ \left[ \frac{b}{a} \left( -\frac{1}{a} e^{-at} \cos(bt) - \frac{b}{a} \int_x^\infty e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt \right) \right] \\ &= -\frac{1}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) - \frac{b}{a^2} e^{-at} \cos(bt) \\ &- \left( \frac{b}{a} \right)^2 \int_x^\infty e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \left( 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \int_x^\infty e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt &= -\frac{1}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) - \frac{b}{a^2} e^{-at} \cos(bt) \\ \int_x^\infty e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt &= \frac{-\frac{1}{a} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) - \frac{b}{a^2} e^{-at} \cos(bt)}{1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2} \Bigg|_x^\infty. \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$  están acotados, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty e^{-at} \text{sen}(bt) dt &= - \left[ \frac{-\frac{1}{a} e^{-ax} \text{sen}(bx) - \frac{b}{a^2} e^{-ax} \text{cos}(bx)}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right] \\
 &= - \left[ \frac{-\frac{1}{a} (e^{-ax} \text{sen}(bx) + \frac{b}{a} e^{-ax} \text{cos}(bx))}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right] \\
 &= - \left[ \frac{-\frac{1}{a} (e^{-ax} \text{sen}(bx) + \frac{b}{a} e^{-ax} \text{cos}(bx))}{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \right] \\
 &= - \left[ \frac{-a (e^{-ax} \text{sen}(bx) + \frac{b}{a} e^{-ax} \text{cos}(bx))}{a^2 + b^2} \right] \\
 &= \frac{e^{-ax} (a \text{sen}(bx) + b \text{cos}(bx))}{a^2 + b^2}, \quad a > 0.
 \end{aligned}$$

**Proposición 3.6** Sea  $F(x)$  la función definida por la siguiente integral con parámetro  $a$ :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\text{sen}(xt)}{t^a} dt, \quad 0 < a < 1.$$

Entonces la expansión asintótica de  $F(x)$ , válida para  $x \rightarrow \infty$ , es

$$F_a(x) \sim \frac{I_1}{x^{1-a}} - \left( \frac{1}{x} - \frac{a(a+1)}{x^3} \right) \text{cos}(x) - \frac{a}{x^2} \left( 1 - \frac{(a+1)(a+2)}{x^2} \right) \text{sen}(x) + O(x^{-5}),$$

donde  $I_1 = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(y)}{y^a} dy$ .

*Demostración.* Seguimos el enfoque de integración por partes con  $f(t)$  y  $g(t)$ , donde  $f(t) = \text{sen}t$  y  $g(t) = t^{-a}$ . Supongamos que  $a > 0$ . Aplicamos el cambio de la variable de integración  $y = xt$ . Para encontrar una aproximación analítica de la integral  $\int_x^\infty \frac{\text{sen}(y)}{y^a} dy$  del orden apropiado, fijemos  $n = 4$ . Obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= -\text{cos}(t)t^{-a} - \frac{\text{sen}(t)t^{-a}a}{t} + \text{cos}(t) \left( \frac{t^{-a}a^2}{t^2} + \frac{t^{-a}a}{t^2} \right) \\
 &\quad - \text{sen}(t) \left( \frac{-t^{-a}a^3}{t^3} - \frac{3t^{-a}a^2}{t^3} - \frac{2t^{-a}a}{t^3} \right).
 \end{aligned}$$

Si sustituimos en los límites de la integración, obtenemos el siguiente resultado analítico aproximado:

$$F(x) = \cos(x)x^{-a} + \frac{\operatorname{sen}(x)x^{-a}a}{x} - \cos(x) \left( \frac{x^{-a}a^2}{x^2} + \frac{x^{-a}a}{x^2} \right) + \operatorname{sen}(x) \left( \frac{-x^{-a}a^3}{x^3} - \frac{3x^{-a}a^2}{x^3} - \frac{2x^{-a}a}{x^3} \right).$$

Este resultado es una aproximación de la integral  $\int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y^a} dy$ . Ahora obtenemos la expresión requerida para  $F(x)$ :  $F_a(x) = \frac{I_1 - F(x)}{x^{1-a}}$  y reducimos a la forma más apropiada:

$$\begin{aligned} F_a(x) &= I_1 x^{a-1} - \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)a}{x^2} + \frac{\cos(x)a^2}{x^3} + \frac{\cos(x)a}{x^3} + \frac{\operatorname{sen}(x)a^3}{x^4} \\ &\quad + \frac{3\operatorname{sen}(x)a^2}{x^4} + \frac{2\operatorname{sen}(x)a}{x^4} \\ &= \frac{I_1}{x^{1-a}} - \left( \frac{1}{x} - \frac{a(a+1)}{x^3} \right) \cos(x) - \frac{a}{x^2} \left( 1 - \frac{(a+1)(a+2)}{x^2} \right) \operatorname{sen}(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Integración Analítica Generalizada

La teoría formal de integración de Riemann fue desarrollada en su mayor parte en la segunda mitad del siglo XIX. Posteriormente se desarrollaron algunas generalizaciones de la integral de Riemann, tales como la integral de Riemann–Stieltjes, integral de Lebesgue e integral de Lebesgue–Stieltjes. En este capítulo, presentaremos los conceptos y evaluación de estas integrales.

### 4.1 Integrales de Riemann–Stieltjes

Después de la formulación de la integral de Riemann, se intentaron varias generalizaciones. Una de las más exitosas, fue la llamada integral de Riemann–Stieltjes, obtenida por **Thomas Stieltjes** (1856–1894). Stieltjes estaba tratando de modelar matemáticamente el problema físico de calcular los momentos para diversas distribuciones de masa en el eje  $x$ , con masas  $m_i$  a distancias  $d_i$  desde el origen. En el libro de Birkhoff ([1],1973) se dice que la distribución será perfectamente determinada si se puede calcular la masa total distribuida en cada segmento  $O_x$  (del eje  $OX$ ). Ésta, evidentemente, será una función creciente de  $x$ . En consecuencia, si  $\phi(x)$  es una función creciente definida en el intervalo  $(a, b)$ , es conveniente considerar siempre que  $\phi(b) - \phi(a)$  es la masa contenida en el intervalo  $(a, b)$ . Consideremos ahora el momento de dicha distribución de masas con respecto al origen. Hagamos  $a = x_0$ ,  $b = x_n$  y tomemos  $n - 1$  valores entre  $x_0$  y  $x_n$  de manera que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n.$$

Seguido, tomaremos  $n$  números  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  tal que  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ . El límite de la suma  $\xi_1[\phi(x_1) - \phi(x_0)] + \xi_2[\phi(x_2) - \phi(x_1)] + \dots + \xi_n[\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})]$  será el momento, por definición. De manera general, consideraremos la suma

$$f(\xi_1)[\phi(x_1) - \phi(x_0)] + f(\xi_2)[\phi(x_2) - \phi(x_1)] + \dots + f(\xi_n)[\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})],$$

cuyo límite denotaremos como  $\int_a^b f(x)d\phi(x)$ .

Así que el cálculo de los momentos de las distribuciones de masas nos ha llevado a considerar *sumas de Riemann–Stieltjes* de la forma

$$\sum_{k=0}^n f(c_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})] = \sum_P f \Delta \phi,$$

las cuales son sumas de Riemann, cuando  $\phi(x) = x$ .

A continuación daremos una definición formal de la Integral de Riemann–Stieltjes.

### Definición y propiedades

Dadas funciones  $g, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiremos la expresión  $\int_a^b g(x) dF(x)$  de tal manera que cuando consideremos el caso particular en que  $F(x) = x$  nos quede la definición clásica de integral de Riemann.

Definimos una partición del intervalo  $[a, b]$  como el conjunto finito

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\},$$

donde  $x_{i-1} < x_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Junto con la partición, elegimos para cada  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), puntos intermedios  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

**Definición 4.1** Dadas  $g, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y una partición  $P$  (con sus correspondientes puntos intermedios  $c_i$ ), definimos la suma parcial de Riemann–Stieltjes como

$$S(P, g, F) = \sum_{i=1}^n g(c_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Observemos que cuando  $F(x) = x$ , si le pedimos a  $g$  que sea Riemann integrable, dichas sumas “se acercarán” indefinidamente al valor  $\int_a^b g(x) dx$  dependiendo de que tan fina sea la partición.

**Definición 4.2** Dada la partición  $P$  en  $[a, b]$ , definimos

$$\|P\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

y le llamaremos *norma de la partición*.

**Definición 4.3** Dadas  $g, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, g, F) = I$  si y sólo si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición  $P$  de  $[a, b]$  (con sus correspondientes puntos intermedios  $c_i$ ) con  $\|P\| < \delta$ , se cumple que

$$|S(P, g, F) - I| < \varepsilon.$$

**Definición 4.4** (*Integral de Riemann–Stieltjes*) Dadas  $g, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si existe  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, g, F) = I$ , diremos que la integral de Riemann–Stieltjes de  $g$  respecto de  $F$  en el intervalo existe y vale  $I$ .

$$\text{Notación: } \mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_a^b g dF = \mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_a^b g(x) dF(x).$$

**Teorema 4.1** Dadas  $g, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe  $I$  tal que  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, g, F) = I$ .

(b) *Condición de Cauchy.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $P$  y  $Q$  son dos particiones de  $[a, b]$  tales que  $\|P\| < \delta$  y  $\|Q\| < \delta$ , se cumple que

$$|S(P, g, F) - S(Q, g, F)| < \varepsilon.$$

(c) Para toda sucesión  $\{P_n\}$  de particiones en  $[a, b]$  tales que  $\|P_n\| \rightarrow 0$  se cumple que  $\lim_n S(P_n, g, F) = I$ .

*Demostración.*

(a) $\Rightarrow$  (b) Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición  $P$  de  $[a, b]$  (con sus correspondientes puntos intermedios  $c_i$ ) tal que  $\|P\| < \delta$ , se cumple que  $|S(P, g, F) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces si tomamos dos particiones  $P$  y  $Q$  de  $[a, b]$  tales que  $\|P\| < \delta$  y  $\|Q\| < \delta$ , se cumplirá que

$$|S(P, g, F) - S(Q, g, F)| \leq |S(P, g, F) - I| + |S(Q, g, F) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Fijamos una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  en  $[a, b]$  tales que  $\|P_n\| \rightarrow 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta > 0$  con la condición de Cauchy, y por lo tanto existirá un  $n_0$  tal que  $\|P_n\| < \delta$  para todo  $n > n_0$ . Entonces si consideramos  $n, m \geq n_0$ , obtendremos que  $|S(P_n, g, F) - S(P_m, g, F)| < \varepsilon$  por lo que la sucesión  $\{S(P_n, g, F)\}$  es de Cauchy, entonces existirá  $I \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(P_n, g, F) = I$ . Observamos que el valor de  $I$  depende de la elección de la sucesión de particiones, faltaría probar que el límite es el mismo cualquiera que sea la sucesión de particiones. Consideremos entonces cualquier sucesión de particiones  $\{P'_n\}$  en  $[a, b]$  tal que  $\|P'_n\| \rightarrow 0$  y sea  $I'$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(P'_n, g, F) = I'$ . Consideremos entonces la siguiente sucesión de particiones:  $P_1, P'_1, P_2, P'_2, \dots, P_n, P'_n, \dots$ . Entonces es claro que esta nueva sucesión, llamémosle  $\{Q_n\}$ , cumple que  $\|Q_n\| \rightarrow 0$  y por lo tanto existe  $I''$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(Q_n, g, F) = I''$ . Pero  $\{S(P_n, g, F)\}$  y  $\{S(P'_n, g, F)\}$  son subsucesiones de  $\{S(Q_n, g, F)\}$  y por lo tanto  $I = I' = I''$ .

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos por contradicción que (a) no es cierto, entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe una partición  $P_\delta$ , tal que  $|S(P_\delta, g, F) - I| \geq \varepsilon$ . Tomando  $\delta = \frac{1}{n}$ , encontramos una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  tal que para todo  $n$ ,  $|S(P_n, g, F) - I| \geq \varepsilon$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(P_n, g, F) \neq I$ . ■

**Teorema 4.2** (*Propiedades*) Si  $g, h, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son tales que existen las integrales  $\int_a^b g dF$  y  $\int_a^b h dF$ , entonces también existe  $\int_a^b (\alpha g + \beta h) dF$  cualesquiera sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y además

$$\int_a^b (\alpha g + \beta h) dF = \alpha \int_a^b g dF + \beta \int_a^b h dF.$$

*Demostración.* Para cualquier partición  $P$  de  $[a, b]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} S(P, \alpha g + \beta h, F) &= \sum_{i=1}^n (\alpha g(c_i) + \beta h(c_i))(F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n g(c_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \beta \sum_{i=1}^n h(c_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \alpha S(P, g, F) + \beta S(P, h, F). \end{aligned}$$

por lo que tomando límite cuando  $\|P\| \rightarrow 0$  se obtiene el resultado. ■

**Ejemplo 4.1** Sea  $g(x) = x$ ,  $F(x) = x + [x]$ . Encontramos la integral de Riemann–Stieltjes

$$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_0^{10} g(x) dF(x).$$

Consideramos la partición  $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{10n}{n}\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} S(P, g, dF) &= \sum_{i=1}^{10n} g(t_i) \left( F\left(\frac{i}{n}\right) - F\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{10n} t_i \left( \left( \frac{i}{n} + \left[ \frac{i}{n} \right] \right) - \left( \frac{i-1}{n} + \left[ \frac{i-1}{n} \right] \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{10n} t_i \left( \frac{1}{n} + \left( \left[ \frac{i}{n} \right] - \left[ \frac{i-1}{n} \right] \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{10n} \frac{t_i}{n} + \sum_{i=1}^{10n} t_i \left( \left[ \frac{i}{n} \right] - \left[ \frac{i-1}{n} \right] \right). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^{10n} \frac{t_i}{n} \rightarrow \int_0^{10} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{10} = 50 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

y

$$\sum_{i=1}^{10n} t_i \left( \left[ \frac{i}{n} \right] - \left[ \frac{i-1}{n} \right] \right) = \sum_{k=0}^9 t_{(k+1)n} ((k+1) - k) \rightarrow 55 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

finalmente obtenemos

$$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_0^{10} g(x) dF(x) = 105. \quad \square$$

**Ejemplo 4.2** Sea  $g(x) = x$ ,  $F(x) = x^2$ . Encontramos la integral de Riemann–Stieltjes

$$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_0^1 g(x) dF(x).$$

Notemos que el integrando  $g(x) = x$  es acotado en  $[0, 1]$ , la derivada de  $F(x) = x^2$  existe ( $F'(x) = 2x$ ) y continua en  $[0, 1]$ , por lo tanto podemos reducir la integral de Riemann–Stieltjes a la siguiente expresión:

$$\mathcal{R}\text{-}\mathcal{S} \int_0^1 x dx^2 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \quad \square$$

## 4.2 Integral de Lebesgue

La longitud  $l(I)$  de un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  se define habitualmente como la distancia entre los extremos del intervalo. La longitud es un ejemplo de función de conjunto, es decir, una función que asocia un número real a cada elemento de una familia de conjuntos. El objetivo es extender la noción de longitud a conjuntos más complicados que los intervalos. Se puede definir, por ejemplo, la longitud de un conjunto abierto como la suma de las longitudes de los intervalos abiertos que lo componen, pero la clase de los conjuntos abiertos es aún demasiado restringida. Se trata entonces de construir una función de conjunto  $\mu$  que asigne a cada conjunto  $E$  en alguna familia  $\mathcal{X}$  de conjuntos de números reales, un número real no negativo  $\mu(E)$  llamado *medida de  $E$* , de modo que se cumplan las siguientes propiedades:

1. Si  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ ,

$$\mu(I) = l(I).$$

2. Si  $(E_n)$  es una sucesión de conjuntos disjuntos en  $\mathcal{X}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

3. Si  $\mu$  es invariante bajo traslaciones, es decir, si  $y \in \mathbb{R}$  y  $E \in \mathcal{X}$ , entonces

$$\mu(E + y) = \mu(E), \text{ donde } E + y = \{x + y : x \in E\}.$$

Tomaremos los conjuntos  $E_n$  de un conjunto muy particular.

**Definición 4.5** Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto arbitrario no vacío. Una colección  $\sigma$  de conjuntos de  $\mathcal{X}$  es llamada un *álgebra* si satisface las siguientes condiciones:

- (1) Si  $A$  y  $B \in \sigma$ , entonces  $A \cup B \in \sigma$ .
- (2) Si  $A \in \sigma$ , entonces  $A^c \in \sigma$ .
- (3) Si  $A$  y  $B \in \sigma$ , entonces  $A \cap B \in \sigma$ .

Diremos que  $\sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra, si se satisface la condición (1) para uniones numerables de conjuntos.

### 4.2.1 Medida Exterior de Lebesgue

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto de números reales, sea  $(I_n)$  una sucesión infinita de intervalos abiertos tales que  $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  y consideremos la suma infinita de las longitudes de estos intervalos. Como las longitudes son positivas, la suma infinita está bien definida, independientemente del orden de los intervalos.

**Definición 4.6** Definimos la *medida exterior*  $\mu^*(A)$  como el ínfimo de las sumas  $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ , es decir,

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}. \quad (4.1)$$

Se sigue inmediatamente de la definición que  $\mu^*(\emptyset) = 0$  y que si  $A \subseteq B$  entonces  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ . También resulta evidente que la medida exterior de un conjunto que consta sólo de un punto es cero. A continuación se establecen dos proposiciones acerca de la medida exterior.

**Proposición 4.3** *La medida exterior de un intervalo es igual a su longitud.*

*Demostración.* Consideremos primeramente un intervalo cerrado y acotado, digamos  $I = [a, b]$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y observemos que  $I \subseteq (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , de modo que  $\mu^*(I) \leq l(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = l(I) + 2\varepsilon$  y por lo tanto  $\mu^*(I) \leq l(I)$ . Ahora debemos probar que  $\mu^*(I) \geq l(I)$ , o de forma equivalente, que para cualquier sucesión  $(I_n)$  de intervalos abiertos que recubre al intervalo  $I$  se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq b - a.$$

Aplicando el teorema de Heine–Borel se obtiene un conjunto finito  $F \subset \mathbb{N}$  tal que  $I \subset \bigcup_{n \in F} I_n$ . Como  $a \in \bigcup_{n \in F} I_n$ , existe  $n_1 \in F$  tal que  $a \in I_{n_1} = (a_1, b_1)$ , de modo que  $a_1 < a < b_1$ .

Si  $b_1 \leq b$ , entonces  $b_1 \in I$ , y como  $b_1 \notin I_{n_1}$ , existe  $n_2 \in F$  tal que  $b_1 \in I_{n_2} = (a_2, b_2)$ , es decir,  $a_2 < b_1 < b_2$ . Continuando este proceso, se obtiene una sucesión de intervalos  $I_{n_j} = (a_j, b_j)$  tal que  $a_j < b_{j-1} < b_j$ . Como  $F$  es finito, el proceso

debe terminar en cierto intervalo  $I_{n_k} = (a_k, b_k)$ , y el proceso solamente se detiene si  $b < b_k$ . Tenemos por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &\geq \sum_{j=1}^k l(I_{n_j}) = (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a_1) \\ &= b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2}) - \cdots - (a_2 - b_1) - a_1 > b_k - a_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

puesto que  $a_j < b_{j-1}$ . Ahora bien,  $b_k > b$  y  $a_1 < a$ , luego  $b_k - a_1 > b - a$ , y de ahí obtenemos el resultado.

Si  $I$  es un intervalo acotado cualquiera entonces para cada  $\varepsilon > 0$  existe un intervalo cerrado  $J \subset I$  tal que  $l(J) > l(I) - \varepsilon$ , luego  $l(I) - \varepsilon < l(J) = m^*(J) \leq m^*(I) \leq m^*(\bar{I}) = l(\bar{I}) = l(I)$ . Así,  $l(J) - \varepsilon < m^*(I) \leq l(I)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , y por lo tanto  $\mu^*(I) = l(I)$ .

Si  $I$  es un intervalo no acotado entonces para cada  $M > 0$  existe un intervalo cerrado  $J \subseteq I$  tal que  $l(J) = M$ , luego  $\mu^*(I) \geq \mu^*(J) = l(J) = M$ . Así  $\mu^*(I) \geq M$  para todo  $M > 0$ , de donde se deduce que  $\mu^*(I) = \infty = l(I)$ . ■

**Proposición 4.4** Si  $(A_n)$  es una familia numerable de conjuntos de números reales, entonces

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

*Demostración.* Si alguno de los conjuntos  $A_n$  tiene medida exterior infinita, entonces se cumple la desigualdad trivialmente. Si  $A_n$  tiene medida exterior finita, entonces para cada  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión de intervalos abiertos  $(I_{n,j})_{j=1}^{\infty}$  tal que

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} l(I_{n,j}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Ahora la familia  $(I_{n,j})_{n,j=1}^{\infty}$  es numerable y recubre al conjunto  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , luego

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} l(I_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$

de donde se sigue el resultado. ■

**Corolario 4.5** Si  $A \subseteq \mathbb{R}$  es numerable entonces  $\mu^*(A) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$

Debido a que la medida exterior siempre es positiva y utilizando la Proposición (4.4) se tiene que,

$$0 \leq \mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(a_i) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\mu^*(A) = 0. \quad \blacksquare$$

## 4.2.2 Conjuntos Medibles y Medida de Lebesgue

La medida exterior tiene la ventaja de estar definida para cualquier conjunto de números reales, pero no es numerablemente aditiva. Sin embargo, se hace numerablemente aditiva si se restringe adecuadamente la familia de conjuntos donde está definida. Veamos la siguiente definición de Carathéodory.

**Definición 4.7** Se dice que un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}$  es *medible* si para todo  $A \subseteq \mathbb{R}$  se tiene

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

donde  $E^c$  denota el complemento de  $E$ .

Como siempre se tiene  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ , resulta que  $E$  es medible si y sólo si  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ . Como la definición de conjunto medible es simétrica respecto a  $E$  y  $E^c$ , resulta que  $E$  es medible si y sólo si  $E^c$  es medible. Está claro que  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}$  son medibles.

**Lema 4.6** Si  $\mu^*(E) = 0$  entonces  $E$  es medible.

*Demostración.* Si  $A \subseteq \mathbb{R}$  entonces  $A \cap E \subseteq E$ , luego  $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ . Además  $A \supseteq A \cap E^c$ , de donde  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ , y por tanto  $E$  es medible.  $\blacksquare$

**Lema 4.7** Si  $E, F \subseteq \mathbb{R}$  son medibles, entonces  $E \cup F$  es medible.

*Demostración.* Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cualquiera. Como  $F$  es medible, tenemos que

$$\mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c),$$

y como  $A \cap (E \cap F) = [A \cap E] \cup [A \cap F \cap E^c]$ , tenemos

$$\mu^*(A \cap [E \cup F]) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F \cap E^c).$$

Así,

$$\begin{aligned} & \mu^*(A \cap [E \cup F]) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) \\ & \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F \cap E^c) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) \\ & = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A), \end{aligned}$$

y como  $(E \cap F)^c = E^c \cap F^c$ , se sigue que  $E \cup F$  es medible. ■

**Lema 4.8** Sea  $A$  cualquier conjunto y  $E_1, E_2, \dots, E_n$  una colección de conjuntos medibles disjuntos, entonces:

$$\mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

*Demostración.* (Por inducción matemática) Para  $n = 1$  el resultado se sigue directamente. Supongamos que el resultado se satisface para los primeros  $n - 1$  conjuntos. Observemos que,

$$A \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n E_i \right] \cap E_n = A \cap E_n, \quad (4.3)$$

pues los conjuntos  $E_n$  son disjuntos y

$$A \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n E_i \right] \cap E_n^c = A \cap \left[ \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right] \cap E_n^c, \quad (4.4)$$

Puesto que cada  $E_i$  es medible,

$$\mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \cap E_n \right) + \mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \cap E_n^c \right).$$

Por (4.3) y (4.4),

$$\mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^* \left( A \cap \left[ \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right] \right).$$

Y por la hipótesis de inducción, concluimos que:

$$\mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i). \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.9** *La colección  $\mathcal{M}$  de conjuntos medibles es una sigma álgebra, es decir, la unión e intersección de una colección numerable de conjuntos medibles es medible y el complemento de conjuntos medibles es medible.*

*Demostración.* Ya sabemos que  $\mathcal{M}$  es un álgebra, sólo falta ver que si  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una colección de conjuntos medibles, entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ es medible.}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los conjuntos  $E_n$  son disjuntos a pares. Sea  $A$  cualquier conjunto en  $\mathbb{R}$  y definamos:

$$F_n = \bigcup_{k=1}^n E_k \quad \text{y} \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

entonces,  $E^c \subset F_n^c$ . Además,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c)$$

pues cada  $F_n$  es medible. Por lo que,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \mu^* \left( A \cap \left[ \bigcup_{k=1}^n E_k \right] \right) + \mu^*(A \cap E^c), \end{aligned} \tag{4.5}$$

por el lema anterior,

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Tomando límite cuando  $n$  tiende a infinito tenemos:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned} \tag{4.6}$$

■

### 4.2.3 Funciones Simples

La *función característica*  $\chi_A$  de un conjunto cualquiera de números reales  $A \subseteq \mathbb{R}$  se define como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

**Definición 4.8** Una *función simple* es cualquier función de variable real de la forma  $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x)$ , donde  $a_j \in \mathbb{R}$  y cada  $E_j \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto medible.

Observemos que esta representación para  $f$  no es única.

Una función es simple si y sólo si toma una cantidad finita de valores. Si  $f$  es una función simple y  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es el conjunto de valores no nulos de  $f$  entonces se tiene una representación

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}(x),$$

donde  $A_j = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = a_j\}$ . Esta representación para  $f$  se llama *representación canónica* y se caracteriza porque los conjuntos  $A_j$  son disjuntos y los valores  $a_j$  son distintos.

### 4.2.4 Integral de Lebesgue para Funciones Simples

**Definición 4.9** Si  $f$  es una función simple que se anula fuera de un conjunto de medida finita, entonces se define su integral de Lebesgue como

$$\mathcal{L} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j),$$

donde  $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$  es su representación canónica.

Si  $E \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto medible cualquiera, entonces se define la integral de  $f$  extendida a  $E$  mediante la expresión

$$\int_E f = \int f \cdot \chi_E.$$

A menudo resulta conveniente trabajar con representaciones que no son canónicas y el siguiente lema tiene mucha utilidad.

**Lema 4.10** Sea  $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ , con  $E_j \cap E_k = \emptyset$  cuando  $j \neq k$ . Supongamos que cada conjunto  $E_j$  es medible y tiene medida finita, entonces

$$\int f = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

*Demostración.* Sea  $A_a = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\}$ . Observemos que  $A_a = \bigcup_{a_j=a} E_j$ , y por

aditividad se sigue que  $a \cdot m(A_a) = \sum_{a_j=a} a_j \cdot m(E_j)$ , luego  $\int f = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot m(A_a) =$

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot m(E_j). \quad \blacksquare$$

**Proposición 4.11** Si  $f, g$  son dos funciones simples que se anulan fuera de un conjunto medible de medida finita, entonces

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

Si además  $f \geq g$ , entonces

$$\int f \geq \int g.$$

*Demostración.* Consideremos las representaciones canónicas  $f = \sum_j a_j \chi_{A_j}$ ,  $g = \sum_k b_k \chi_{B_k}$ , y sea  $E_{jk} = A_j \cap B_k$ , de modo que los conjuntos  $E_{jk}$  son medibles y disjuntos. Además se tiene

$$f = \sum_{j,k} a_j \chi_{E_{jk}}, \quad g = \sum_{j,k} b_k \chi_{E_{jk}},$$

y por lo tanto,

$$af + bg = \sum_{j,k} (aa_j + bb_k) \chi_{E_{jk}}.$$

Ahora se sigue del Lema (4.10) que

$$\begin{aligned} \int (af + bg) &= \sum_{j,k} (aa_j + bb_k) \mu(E_{jk}) \\ &= a \sum_{j,k} a_j \mu(E_{jk}) + b \sum_{j,k} b_k \mu(E_{jk}) = a \int f + b \int g. \end{aligned}$$

Además, si  $f \geq g$ , entonces  $f - g \geq 0$ , luego  $\int f - \int g = \int (f - g) \geq 0$ , porque una consecuencia inmediata de la definición es que la integral de una función simple no negativa es no negativa. ■

Supongamos que  $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ . Se sigue de la Proposición (4.11) que  $\int f = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$ , y por lo tanto, la restricción de que los conjuntos  $E_j$  sean disjuntos en el Lema (4.10) no es necesaria.

## 4.2.5 Funciones Medibles

**Definición 4.10** Se dice que una función real de variable real  $f$  es *medible* si  $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$  es medible para cada conjunto de Borel  $B \subseteq \mathbb{R}$ .

El siguiente resultado proporciona algunas condiciones sencillas para comprobar en la práctica si una función dada es medible.

**Proposición 4.12** Sea  $f$  una función real de variable real. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $f$  es una función medible,  
 (b)  $\forall \alpha > 0$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$  es medible,  
 (c)  $\forall \alpha > 0$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$  es medible,  
 (d)  $\forall \alpha > 0$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$  es medible,  
 (e)  $\forall \alpha > 0$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$  es medible.

*Demostración.* Tenemos (a)  $\Rightarrow$  (b) porque  $(-\infty, \alpha) \in \mathcal{B}$  y  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha])$ . A continuación (b)  $\Rightarrow$  (c) porque  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$  y el complemento de un conjunto medible es un conjunto medible. Análogamente, (d)  $\Rightarrow$  (e). Ahora (c)  $\Rightarrow$  (d) porque  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$  y la intersección de una sucesión de conjuntos medibles es un conjunto medible.

Finalmente, sea  $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ . Estamos suponiendo que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple  $(-\infty, \alpha) \in \mathcal{A}$ . Además, si  $(A_n)$  es una sucesión de conjuntos en  $\mathcal{A}$ , entonces  $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$ , luego  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ . Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces se tiene  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A)$ , luego  $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$ . Así  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A}$  contiene todos los conjuntos de la forma  $(-\infty, \alpha)$ . Se deduce entonces que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  y por lo tanto  $f$  es medible. Esto prueba que (e)  $\Rightarrow$  (a). ■

Los siguientes resultados muestran cómo ciertas operaciones con funciones medibles conducen a nuevas funciones medibles.

**Proposición 4.13** Si  $f, g$  son dos funciones medibles y  $c$  es una constante entonces las funciones  $f + c$ ,  $cf$ ,  $f + g$  y  $fg$  también son funciones medibles.

*Demostración.* Tenemos  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) + c < \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha - c\}$  luego  $f + c$  es medible. Un argumento similar sirve para  $cf$ . Supongamos ahora que  $f(x) + g(x) < \alpha$ , de modo que  $f(x) < g(x) - \alpha$ . La densidad de los números racionales implica que existe algún  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $f(x) < r < g(x) - \alpha$ . Esto prueba que

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} : f(x) < r\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) < \alpha - r\},$$

y como la unión de una familia numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible, se deduce que  $f + g$  es medible.

La función  $f^2$  es medible porque

$$\{x \in \mathbb{R} : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

si  $\alpha \geq 0$  y  $\{x \in \mathbb{R} : f^2(x) > \alpha\} = \mathbb{R}$  si  $\alpha < 0$ . Finalmente,  $fg$  también es una función medible porque se tiene la identidad  $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ . ■

**Teorema 4.14** Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones medibles, entonces las funciones  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\}$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\}$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  y  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  también son medibles.

*Demostración.* Sea  $f = \sup\{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $g = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} &= \bigcup_{j=1}^n \{x \in \mathbb{R} : f_j(x) > \alpha\}, \\ \{x \in \mathbb{R} : g(x) > \alpha\} &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_j(x) > \alpha\}, \end{aligned}$$

luego  $f, g$  son medibles. Un razonamiento similar sirve para el ínfimo. A continuación observamos que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} f_j$ , luego  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  es medible. Análogamente,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  es medible. ■

**Definición 4.11** Se dice que dos funciones  $f, g$  son iguales en casi todo punto y se simboliza como  $f = g$  c.t.p. si el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$  tiene medida nula.

**Proposición 4.15** Si  $f$  es una función medible y  $f = g$  c.t.p., entonces  $g$  es medible.

*Demostración.* Sea  $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ , de modo que  $m(E) = 0$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y observemos que el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > \alpha\} = \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus E : f(x) > \alpha\}$  es medible por ser la unión de dos conjuntos medibles. ■

**Definición 4.12** Se dice que una sucesión de funciones  $(f_n)$  converge hacia una función  $f$  en casi todo punto si existe un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $m(E) = 0$  y  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus E$ .

**Proposición 4.16** Si una sucesión de funciones medibles  $(f_n)$  converge en casi todo punto hacia una función  $f$ , entonces  $f$  es medible.

*Demostración.* Sea  $E \in \mathbb{R}$  tal que  $m(E) = 0$  y  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus E$ . Sea  $g_n = f_n \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus E} + f \cdot \chi_E$ . Entonces  $g_n$  es medible por ser  $g_n = f_n$  c.t.p. Además,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y por lo tanto  $f$  es medible. ■

### 4.2.6 Integración de Funciones No-negativas

Si  $f$  es una función medible no-negativa, entonces se define su integral de Lebesgue mediante

$$\int f = \sup_{0 \leq s \leq f} \left\{ \int s : s \text{ es una función simple} \right\}.$$

El siguiente resultado proporciona un tratamiento útil de la integral de una función medible no-negativa como el límite de una sucesión de integrales de funciones simples.

**Teorema 4.17** Si  $f$  es una función medible no-negativa, entonces existe una sucesión  $(s_n)$  de funciones simples no-negativas tal que

- $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $s_n(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Si  $(s_n)$  es una sucesión de funciones simples con estas propiedades, entonces se tiene

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n.$$

*Demostración.* Sea  $D_n = \left\{ \frac{m}{2^n} : 0 \leq m \leq n2^n \right\}$  una partición en el rango de  $f(x)$ . De aquí tenemos que  $D_n \subset D_{n+1}$ , esto es, para cualquier  $x$ ,  $\{p \in D_n : p \leq f(x)\} \subset \{p \in D_{n+1} : p \leq f(x)\}$ . Definimos ahora una sucesión  $s_n(x) = \max_{p \in D_n} \{p \leq f(x)\}$  y en consecuencia  $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ . Ésto es válido para toda  $x$ , se cumple entonces que  $s_n \leq s_{n+1}$ . Consideremos primeramente aquellas  $x$  para los cuales  $f(x)$  es finito. Para toda  $n$  con  $n \geq f(x)$  tenemos que  $s_n(x) = \frac{m}{2^n}$  para  $m$  tal que  $0 \leq m \leq n2^n$ , satisface que

$$\frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n}, \quad \text{es decir} \quad s_n(x) \leq f(x) < s_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

De lo anterior se concluye que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ . Veamos ahora aquellas  $x$  para las cuales  $f(x) = +\infty$ ,  $s_n(x) = n$  para toda  $n$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) = +\infty,$$

de donde concluimos que para todo  $x$  se cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ . ■

**Proposición 4.18** *Si  $f$  es una función medible no negativa y  $c$  es una constante no negativa, entonces se tiene  $\int cf = c \int f$ .*

*Demostración.* Observemos que, según la Proposición (4.13), la función  $cf$  es medible. Aplicando el Teorema (4.17), existe una sucesión  $(s_n)$  de funciones simples no negativas tal que

- $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $s_n(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Ahora resulta que  $c \cdot s_n$  es una sucesión de funciones simples no negativas tal que

- $c \cdot s_n(x) \leq c \cdot s_{n+1}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $c \cdot s_n(x) \leq c \cdot f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot s_n(x) = c \cdot f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Aplicando de nuevo el Teorema (4.17) y la Proposición (4.11) resulta que

$$\begin{aligned} \int c \cdot f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int c \cdot s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c \int s_n \\ &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \\ &= c \int f, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

**Proposición 4.19** Si  $f, g$  son funciones medibles no negativas, entonces

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

*Demostración.* Por la Proposición (4.13), la función  $f + g$  es medible. Aplicando el Teorema (4.17), existen sucesiones de funciones simples no negativas  $(r_n), (s_n)$  tales que

- $r_n(x) \leq r_{n+1}(x), s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $r_n(x) \leq f(x), s_n(x) \leq g(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int r_n, \int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n$ .

Ahora resulta que  $(r_n + s_n)$  es una sucesión de funciones simples no negativas con la propiedad de que  $r_n + s_n \leq r_{n+1} + s_{n+1} \leq f + g$  y además  $f(x) + g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) + s_n(x)$ . Aplicando de nuevo el Teorema (4.17) y la Proposición (4.11) resulta que

$$\begin{aligned} \int (f + g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (r_n + s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int r_n + \int s_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int r_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n = \int f + \int g, \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar. ■

### 4.2.7 Integración de Funciones Medibles

Si  $f$  es una función medible, entonces  $f$  se descompone como  $f = f^+ - f^-$ , donde las funciones  $f^+ = \max\{f, 0\}$  y  $f^- = -\min\{f, 0\}$  son medibles y no negativas.

**Definición 4.13** Se dice que  $f$  es *integrable* si  $\int f^+ < \infty$  y  $\int f^- < \infty$ , y en tal caso se define la integral de  $f$  mediante  $\int f = \int f^+ - \int f^-$ .

Observemos que una función medible  $f$  es integrable si y sólo si  $\int |f| < \infty$ .

**Teorema 4.20** El conjunto  $\mathcal{L}^1$  de todas las funciones Lebesgue integrables es un espacio vectorial y la aplicación  $f \rightarrow \int f$  es una forma lineal sobre  $\mathcal{L}^1$ , es decir, si  $f, g \in \mathcal{L}^1$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $f + g \in \mathcal{L}^1$ ,  $cf \in \mathcal{L}^1$ , y además  $\int (f + g) = \int f + \int g$ ,  $\int cf = c \int f$ .

*Demostración.* Según la Proposición (4.13), las funciones  $f + g$  y  $cf$  son medibles. La igualdad  $\int cf = c \int f$  cuando  $c = -1$  se sigue inmediatamente de la definición, y cuando  $c \geq 0$  se sigue de la Proposición (4.18).

Sea  $h = f + g$ , tenemos

$$f^- + g^- + h^+ = f^+ + g^+ + h^-,$$

luego

$$h^+ \leq f^+ + g^+,$$

pues  $h^- = 0$  cuando  $h \geq 0$ . Entonces

$$\int h^+ \leq \int f^+ + \int g^+ < \infty.$$

Análogamente,  $\int h^- < \infty$ . Esto prueba que  $h$  es integrable. Aplicando la Proposición (4.19) resulta

$$\int f^- + \int g^- + \int h^+ = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-,$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}
 \int (f + g) &= \int h \\
 &= \int h^+ - \int h^- \\
 &= \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \\
 &= \int f + \int g,
 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

### 4.2.8 Teoremas de Convergencia

Esta sección comprende tres teoremas que se encuentran entre los más importantes del Análisis. Estos teoremas no se cumplen para la integral de Riemann porque, en general, el límite puntual de una sucesión de funciones que son Riemann integrables no tiene por qué ser también Riemann integrable. La potencia y la utilidad de estos teoremas constituyen la principal ventaja teórica de la integral de Lebesgue sobre la integral de Riemann.

**Teorema 4.21** (*Teorema de convergencia monótona*) Sea  $(f_n)$  una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas y sea  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Entonces se tiene

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

*Demostración.* La función  $f$  es medible gracias al Teorema (4.14). Además, debido al Teorema (4.17), para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una sucesión no decreciente  $(s_{nk})$  de funciones simples no negativas tal que

$$r_{nk} \leq f_n, \quad f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{nk}(x) \quad \text{y} \quad \int f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int s_{nk}.$$

Sea ahora  $r_n = \max\{s_{1n}, \dots, s_{nn}\}$ , de modo que  $(r_n)$  es una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas con  $0 \leq r_n \leq f$  y tal que  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ . Aplicando otra vez el Teorema (4.17) resulta que

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int r_n.$$

Ahora bien,  $r_n \leq f_n \leq f$ , luego

$$\int r_n \leq \int f_n \leq \int f$$

y de aquí se deduce que

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

■

**Corolario 4.22** (Teorema de Beppo–Levi) Supongamos que  $(f_n)$  es una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces se tiene

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

*Demostración.* Este Corolario se obtiene directamente al aplicar el Teorema de Convergencia Monótona a la sucesión de las sumas parciales. ■

**Teorema 4.23** (Lema de Fatou) Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones medibles y no negativas, entonces se tiene

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

*Demostración.* Sea  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ , y sea  $g_n = \inf_{k \geq n} \{f_k\}$ , de modo que  $(g_n)$  es una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas tal que  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ .

Aplicando el Teorema de Convergencia Monótona resulta que  $\int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n$ . Ahora bien,  $g_n \leq f_k$  para cada  $k \geq n$ , luego

$$\int g_n \leq \inf_{k \geq n} \left\{ \int f_k \right\},$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

■

**Teorema 4.24** (*Teorema de Convergencia Dominada*) Sea  $g$  una función Lebesgue integrable y sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones medibles tal que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  y  $|f_n(x)| \leq g(x)$ . Entonces

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

*Demostración.* Observemos en primer lugar que cada función  $g - f_n$  es medible y no negativa.

Usando el Lema de Fatou resulta

$$\int (g - f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g - f_n).$$

Ahora bien,  $|f| \leq g$ , luego  $|f|$  es integrable y por lo tanto

$$\int g - \int f \leq g - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Esto prueba que,

$$\int f \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

A continuación observamos que cada función  $g + f_n$  es medible y no negativa, aplicando de nuevo el Lema de Fatou resulta que

$$\int (g + f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n),$$

luego

$$\int (g + f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n)$$

y por lo tanto

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

■

Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente hacia una función  $f$ , entonces el Lema de Fatou, el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Convergencia Dominada establecen que bajo ciertas hipótesis, se puede asegurar algo acerca de la integral  $\int f$  en términos de las integrales  $\int f_n$ . El Lema de Fatou tiene la hipótesis más débil, pues solamente se

necesita que  $f_n$  sea no negativa. La conclusión del Lema de Fatou también es más débil, pues sólo se obtiene una desigualdad. El teorema de la convergencia dominada tiene una hipótesis más restrictiva que  $|f_n|$  esté acotada superiormente por una función integrable. La conclusión del Teorema de Convergencia Dominada también es más fuerte, porque se obtiene una igualdad. El Teorema de Convergencia Monótona es una especie de híbrido: requiere que  $f_n$  sea no negativa y esté acotada superiormente por la función  $f$ . Está claro que si  $f$  es integrable, esto es un caso especial del Teorema de Convergencia Dominada, pero la ventaja del Lema de Fatou y el Teorema de Convergencia Monótona es que son aplicables aún cuando  $f$  no es integrable, y a menudo son una buena forma de probar que  $f$  es integrable. El Lema de Fatou y el Teorema de Convergencia Monótona son equivalentes en el sentido de que uno se puede deducir del otro usando nada más que la linealidad y la positividad de la integral.

**Ejemplo 4.3** Consideremos la función  $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Evaluamos la integral  $\int_0^1 f(x) dx$ .

1.  $f(x)$  no es *Cauchy integrable*:  $f(x)$  es discontinua en  $x = \frac{1}{2}$ .
2.  $f(x)$  es *Riemann integrable*: podemos cubrir el punto  $\frac{1}{2}$  por intervalos arbitrariamente pequeños, y  $\mathcal{R} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ .
3.  $f(x)$  no es *Newton–Leibniz integrable*: no podemos encontrar una antiderivada  $F(x)$  tal que  $F'(x) = f(x)$  en  $[0, 1]$ .
4.  $f(x)$  es *Lebesgue integrable*:  $\mathcal{L} \int_0^1 f(x) dx = 0 \cdot m([0, \frac{1}{2})) + 1 \cdot m([\frac{1}{2}, 1]) = \frac{1}{2}$ .

□

**Ejemplo 4.4** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Evaluamos la integral  $\int_0^1 f(x) dx$ .

1.  $f(x)$  no es *Cauchy integrable*:  $f(x)$  es discontinua en  $x = 0$ .

2.  $f(x)$  no es *Riemann integrable*:  $f(x)$  no es acotada.
3.  $f(x)$  no es *Lebesgue integrable*:  $f(x)$  no es acotada.
4.  $f(x)$  es *Newton–Leibniz integrable*: podemos encontrar la antiderivada

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2} \right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tal que  $F'(x) = f(x)$  en  $[0, 1]$  y  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L} \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \operatorname{sen}(1)$ .

□

### 4.3 Integrales de Lebesgue–Stieltjes

La construcción de la medida de Lebesgue comienza con la asignación de una medida a un intervalo, es decir, su longitud: la medida de  $(a, b]$  es  $b - a$ . Estamos buscando diferentes ponderaciones de intervalos, tratando de encontrar medidas distintas a la medida de Lebesgue. Por supuesto, las propiedades generales de una medida, ser no negativa y aditiva numerable para sucesiones disjuntas de conjuntos medibles, deben ser retenidas.

#### Medida de Lebesgue–Stieltjes y Funciones Monótonas Crecientes

En el Capítulo 1.8 estudiamos el enfoque de Thomas Stieltjes, quien modeló distribuciones de masas con funciones monótonas crecientes continuas por la derecha. Dicho enfoque involucra la variación de  $\phi$  en un intervalo  $(a, b]$ :  $\phi(b) - \phi(a)$ .

Para la medida de Lebesgue–Stieltjes, también podemos comenzar con la variación de una función  $F$  monótona creciente continua por la derecha en un intervalo semiabierto  $(a, b]$  como  $F(b) - F(a)$ , pero ahora procederemos a desarrollar una medida.

Mientras la medida de Lebesgue mide al intervalo  $(a, b]$  como  $b - a$ , la medida de Lebesgue–Stieltjes medirá  $(a, b]$  como  $F(b) - F(a)$ . Tenemos una función de peso  $\tau$ :  $\tau((a, b]) = F(b) - F(a)$  y  $\tau(\emptyset) = 0$ . Como la familiaridad de la función de peso  $\tau$  será útil, vamos a examinar sus propiedades.

### Propiedades de la Función Peso

**Propiedad 4.1** Para  $a < c < b$ ,

$$\begin{aligned}\tau((a, b]) &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a) \\ &= \tau((c, b]) + \tau((a, c]).\end{aligned}$$

**Propiedad 4.2** Si  $(a_k, b_k], \leq k \leq n$ , son disjuntos y  $\bigcup_1^n (a_k, b_k] \subset (a, b]$ , entonces  $\sum_1^n \tau((a_k, b_k]) \leq \tau((a, b])$ , etiquetando de manera que  $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \dots a_n < b_n \leq b$ , entonces

$$\begin{aligned}\tau((a, b]) &= F(b) - F(a) \geq F(b_n) - F(a_1) \\ &\geq \sum_1^n [F(b_k) - F(a_k)] \\ &= \sum_1^n \tau((a_k, b_k]).\end{aligned}$$

**Propiedad 4.3** Si  $(a, b] \subset \bigcup_1^n (a_k, b_k]$ , entonces  $\tau((a, b]) \leq \sum_1^n \tau((a_k, b_k])$ . Asumiendo que todos los intervalos son necesarios y  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Entonces  $a_1 \leq a \leq b_1, a_n < b \leq b_n$ , con  $a_{k+1} \leq b_k < b_{k+1}$ , y

$$\begin{aligned}\tau((a, b]) &= F(b) - F(a) \\ &\leq \sum_1^{n-1} [F(a_{k+1}) - F(a_k)] + F(b_n) - F(a_n) \\ &\leq \sum_1^n \tau((a_k, b_k]).\end{aligned}$$

**Propiedad 4.4** Si  $(a_k, b_k], 1 \leq k \leq n$ , son disjuntos y  $(a, b] = \bigcup_1^n (a_k, b_k]$ , entonces

$$\tau((a, b]) = \sum_1^n \tau((a_k, b_k]).$$

**Propiedad 4.5** Si  $(a, b] \subset \bigcup_1^\infty (a_k, b_k]$ , entonces  $F(b) - F(a) \leq \sum_1^\infty \tau((a_k, b_k])$ .

$[a + \delta, b] \subset \bigcup_1^\infty (a_k, b_k] \subset \bigcup_1^\infty (a_k, b_k^*)$ , donde  $b_k < b_k^*$  y  $F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon$ .

$(a, b] = (a, a + \delta] \cup [a + \delta, b] \subset (a, a + \delta] \cup \left( \bigcup_{i=1}^N (a_{k_i}, b_{k_i}^*) \subset (a, a + \delta] \right)$

$\cup \left( \bigcup_{i=1}^N (a_{k_i}, b_{k_i}^*) \right)$ . (Heine-Borel).

Utilizando la propiedad 3,

$$\begin{aligned} \tau((a, b]) &\leq F(a + \delta) - F(a) + \sum_1^N [F(b_{k_i}^*) - F(a_{k_i})] & (4.7) \\ &< \varepsilon + \sum_1^N \left[ F(b_{k_i}) - F(a_{k_i}) + \frac{\varepsilon}{2^{k_i}} \right] \\ &\leq \sum_1^\infty \tau((a_k, b_k]) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$F(b) - F(a) - 2\varepsilon < \sum_1^\infty \tau((a_k, b_k])$ . Por el carácter arbitrario de epsilon, se sigue la conclusión.

**Propiedad 4.6** Si  $(a, b] = \bigcup_1^\infty (a_k, b_k]$ , con intervalos disjuntos, entonces

$$\tau((a, b]) = \sum_1^\infty \tau((a_k, b_k]).$$

Ya que  $(a, b] \subseteq \bigcup_1^n (a_k, b_k]$ , por la Propiedad (4.5),  $\tau((a, b]) \leq \sum_{k=1}^n \tau((a_k, b_k])$ .

En la otra dirección,  $\bigcup_1^n (a_k, b_k] \subset (a, b]$ . Por la Propiedad (4.3),

$$\sum_1^n \tau((a_k, b_k]) \leq \tau((a, b]),$$

independientemente de  $n$ . Así

$$\sum_1^\infty \tau((a_k, b_k]) \leq \tau((a, b]).$$

Por lo tanto  $\tau$  es numerable aditiva en subintervalos semi-abiertos, semi-cerrados.

### La medida exterior de Lebesgue–Stieltjes

Conociendo como funciona  $\tau$ , como el análogo de la longitud  $\mu$  en la medida de Lebesgue, definiremos la *medida exterior de Lebesgue–Stieltjes*.

**Definición 4.14** La medida exterior de Lebesgue–Stieltjes  $\mu_F^*$ , determinado por una función  $F$  monótona creciente continua por la derecha, para algún conjunto  $A$  de números reales, es definida como

$$\mu_F^*(A) = \inf \left\{ \sum_1^{\infty} \tau((a_k, b_k]) \mid A \subset \bigcup_1^{\infty} (a_k, b_k] \right\},$$

con  $\tau((a_k, b_k]) = F(b_k) - F(a_k)$  y  $\tau(\emptyset) = 0$ .

$\mu_F^*$  satisface los requisitos generales de una medida exterior:

1.  $\mu_F^*(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $A \subset B$ , entonces  $\mu_F^*(A) \leq \mu_F^*(B)$ .
3.  $\mu_F^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F^*(A_k)$

### Criterio de medibilidad de Carathéodory

Al igual que en la medida de Lebesgue, para la medida exterior de Lebesgue–Stieltjes

**Definición 4.15** Un conjunto de números reales  $E$  se dice Lebesgue–Stieltjes medible si:

$$\mu_F^*(A) = \mu_F^*(A \cap E) + \mu_F^*(A \cap E^c),$$

para cada conjunto de números reales  $A$ .

### Medidas de Lebesgue–Stieltjes, Funciones Lebesgue Integrables No negativas

Supongamos que  $f$  es una función Lebesgue integrable no negativa en los reales. Por lo tanto,  $f$  es no-negativa, Lebesgue medible y  $\int_R f d\mu < \infty$ . Ahora definimos una función  $F$  en los reales por  $F(x) = \int_{-\infty}^x f d\mu$ . La función  $F$  es no

decreciente, acotada y absolutamente continua. Como antes, podemos construir una medida de Lebesgue–Stieltjes  $\mu_f$ , y tenemos una sigma álgebra que incluye los conjuntos de Borel. Aún mejor, la sigma álgebra de conjuntos  $\mu_f$  medibles contiene los conjuntos Lebesgue medibles. Ahora veremos algunas propiedades de esta medida.

### Propiedades de $\mu_f$

Asumiendo que  $F(x) = \int_{-\infty}^x f d\mu$  y que  $f$  es no-negativa y Lebesgue integrable, podemos mostrar que los conjuntos medibles de Lebesgue son conjuntos  $\mu_f$  medibles. En efecto,  $\mu_f(E) = \mathcal{L} \int_E f d\mu$  cuando  $E$  es un subconjunto Lebesgue medible de  $\mathbb{R}$ .

**Propiedad 4.7** Si  $\mu(E) = 0$ , entonces  $E$  es  $\mu_f$  medible y  $\mu_f(E) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $F$  es absolutamente continua, tenemos  $\delta$  tal que

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \right) < \delta \text{ implica que } \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)] < \varepsilon. \quad (4.8)$$

Como  $\mu(E) = 0$ , tenemos una cubierta de  $E$  de intervalos semi-abiertos disjuntos  $(a_k, b_k]$  de modo que  $\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \right) < \delta$ . Pero entonces,  $\mu \left( \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \right) < \delta$  para toda  $n$ . Por lo tanto,

$$\mu_f \left( \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \right) = \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)] < \varepsilon, \quad (4.9)$$

independiente de  $n$ . Tenemos  $\mu_f^*(E) \leq \mu_f^* \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \right) \leq \varepsilon$ . Esto es,  $\mu_f^*(E) = 0$ . Pero los conjuntos con medida exterior de Lebesgue–Stieltjes igual a cero son Lebesgue–Stieltjes medibles:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu_f^*(A \cap E) \leq \mu_f^*(E) = 0, \text{ y} & (4.10) \\ \mu_f^*(A) &\geq \mu_f^*(A \cap E^c). \text{ (monotonicidad)} \end{aligned}$$

■

**Propiedad 4.8** Si el conjunto  $E$  es Lebesgue medible, entonces  $E$  es Lebesgue–Stieltjes medible ( $\mu_f$ ).

*Demostración.* Como cada conjunto  $E$  Lebesgue medible puede ser escrito como la unión de un conjunto de Borel ( $B$ ) y un conjunto Lebesgue medible de medida cero ( $E - B$ ). Esto es,  $E = B \cup (E - B)$ . Por la Propiedad (4.7),  $E - B$  es  $\mu_f$  medible, los conjuntos de Borel son también  $\mu_f$  medibles, por lo tanto  $E$  es  $\mu_f$  medible y

$$\mu_f(E) = \mu_f(B) + \mu_f(E - B) = \mu_f(B).$$

La sigma álgebra de conjuntos  $\mu_f$  medibles contiene a  $\mathcal{M}$ , la sigma álgebra de conjuntos Lebesgue medibles. Tenemos un espacio de medida:  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu_f)$ . ■

**Propiedad 4.9** Con  $F$  continua,

$$\begin{aligned} \mu_f((a, b]) &= \mu_f((a, b)) = \mu_f([a, b)) = \mu_f([a, b]) & (4.11) \\ &= \mathcal{L} \int_a^b f d\mu \\ &= \int_{(a, b]} f d\mu. \end{aligned}$$

Para construir la integral de Lebesgue–Stieltjes, vamos a imitar la construcción de la integral de Lebesgue (Sección 4.2). Se procede en cuatro pasos.

*Paso 1.* Una función  $g$  de valor real se dice ser  $\mu_S$  medible si  $g^{-1}((-\infty, x])$  (o equivalentemente  $g^{-1}(B)$ ,  $B$  un conjunto de Borel) pertenece a la  $\sigma$ -álgebra adecuada. De modo que, las  $\sigma$ -álgebras para  $\mu_F$ ,  $\mu_f$  o  $\mu_X$  contienen, respectivamente,  $B$ ,  $M$  o  $B$ , asumiremos que  $g^{-1}(B)$  pertenece a  $B$ ,  $M$  o  $B$ , en ese orden.

*Paso 2.* Para funciones simples no negativas  $\phi$ ,

$$\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k},$$

donde  $E = \bigcup E_k$ , con  $E_k$  mutuamente disjuntos,  $\mu_S$  conjuntos medibles y  $c_k$  números reales no negativos, definimos la integral de Lebesgue–Stieltjes de  $\phi$  por

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E \phi d\mu_S = \sum_{k=1}^n c_k \mu_S(E_k).$$

*Paso 3.* Si  $g$  es una función  $\mu_S$  medible no negativa definida en un conjunto  $\mu_S$  medible  $E$ , podemos aproximar  $g$  por una sucesión monótona creciente de funciones simples  $\{\phi_k\}$ .

Por lo tanto, la sucesión  $\left\{ \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E \phi_k d\mu_S \right\}$  es monótona creciente y tiene un límite (reales extendidos, tal vez). Definimos

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E g d\mu_S \equiv \lim \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E \phi_k d\mu_S.$$

*Paso 4.* Si  $g$  es una función  $\mu_S$  medible, entonces

$$g = \frac{|g| + g}{2} - \frac{|g| - g}{2},$$

y tenemos sucesiones monótonas crecientes de funciones simples  $\phi_k^+$  y  $\phi_k^-$  converge respectivamente a  $\frac{(|g| + g)}{2}$  y  $\frac{(|g| - g)}{2}$ . Definimos

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E g d\mu_S = \lim \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E \phi_k^+ d\mu_S - \lim \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E \phi_k^- d\mu_S,$$

siempre que ambas integrales de la derecha sean finitas.

Concluiremos éste Capítulo con el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue–Stieltjes.

**Teorema 4.25** (*Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de Lebesgue–Stieltjes*). Si  $g$  es una función Lebesgue medible en  $\mathbb{R}$ ,  $f$  es una función Lebesgue integrable no negativa en  $\mathbb{R}$ , y  $F(x) = \mathcal{L} \int_{-\infty}^x f d\mu$ , entonces:

1.  $F$  es acotada, monótona creciente, absolutamente continua y diferenciable en casi toda parte, y  $F' = f$  en casi toda parte.

2. Tenemos una medida Lebesgue–Stieltjes  $\mu_f$  de modo que, para cualquier conjunto medible de Lebesgue  $E$ ,  $\mu_f(E) = \mathcal{L} \int_E f d\mu$ , y  $\mu_f$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

$$3. \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_R g d\mu_f = \mathcal{L} \int_R g f d\mu = \mathcal{L} \int_R g F' d\mu.$$

*Demostración.* Las primeras dos conclusiones del Teorema se desprenden de las propiedades de  $\mu_f$ . En cuanto a la última implicación, la demostraremos en tres pasos.

*Paso 1.* Consideremos  $g = \chi_E$ , para un conjunto medible de Lebesgue  $E$ , tenemos

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_R \chi_E d\mu_f = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_E d\mu_f = \mu_f(E) = \mathcal{L} \int_E f d\mu = \mathcal{L} \int_R \chi_E f d\mu = \mathcal{L} \int_R \chi_E F' d\mu.$$

*Paso 2.* Para una función simple  $\phi$ , con  $c_k \geq k_0$ , tenemos  $\phi = \sum_1^n c_k \chi_{E_k}$ . No hay problema; linealidad de la integral.

*Paso 3.* Para una función simple no negativa  $\phi_k$ , con  $0 \leq \phi_k \leq \phi_{k+1}$ , tenemos que  $g = \lim \phi_k$ . Aplicamos el Teorema de Convergencia Monótona. ■

*Integrales de Lebesgue–Stieltjes* se puede evaluar mediante la reducción a combinaciones de integrales que son equivalentes a las *Integrales de Riemann* o son fáciles de evaluar. Los teoremas que siguen describen las propiedades necesarias para la evaluación de integrales de Lebesgue–Stieltjes. En todos estos Teoremas se supone que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función monótona creciente.

**Teorema 4.26** *Si el intervalo  $I$  es una unión de un número finito de intervalos disjuntos por pares  $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ , entonces*

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) dF(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x) dF(x)$$

*en el sentido de que si un lado de la ecuación existe, entonces también existe el otro lado y los dos son iguales.*

**Teorema 4.27** *Sea*

$$F(x) = \sum_{j=1}^m c_j F_j(x),$$

*donde  $F_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona creciente para cada  $j = 1, 2, \dots, m$  y  $c_j$  es un número real no negativo. Si una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable sobre  $I$  con respecto a cada  $dF_1(x), dF_2(x), \dots, dF_m(x)$ , entonces es integrable sobre  $I$  con respecto a  $dF(x)$ , y*

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) dF(x) = \sum_{j=1}^m c_j \int_I f(x) dF_j(x).$$

**Teorema 4.28** (i) *Si  $F(x)$  es continua en el punto  $a$ , entonces*

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[a,b]} f(x) dF(x) = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(a,b]} f(x) dF(x), \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[a,b)} f(x) dF(x) = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(a,b)} f(x) dF(x) \quad (4.13)$$

en el sentido de que si un lado de la ecuación existe, entonces también existe el otro lado y los dos son iguales.

(ii) Si  $F(x)$  es continua en el punto  $b$ , entonces

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[a,b]} f(x) dF(x) = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(a,b]} f(x) dF(x), \quad (4.14)$$

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(a,b)} f(x) dF(x) = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[a,b)} f(x) dF(x) \quad (4.15)$$

en el sentido de que si un lado de la ecuación existe, entonces también existe el otro lado y los dos son iguales.

**Teorema 4.29** La integral de Lebesgue–Stieltjes es

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I 1 dF(x) = \mu_{F(x)}(I)$$

para cualquier intervalo  $I$ .

**Teorema 4.30** Si  $F(x)$  es una función constante en un intervalo abierto  $I$ , entonces

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) dF(x) = 0.$$

para cualquier intervalo  $I$ .

**Teorema 4.31** La integral de Lebesgue–Stieltjes es

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[a,a]} f(x) dF(x) = f(a)(F(a^+) - F(a^-))$$

para función arbitraria  $f(x)$  definida en el punto  $a$ .

**Teorema 4.32** Si la función  $F(x)$  es diferenciable en todos los puntos de un intervalo abierto  $I$ , entonces la integral de Lebesgue–Stieltjes es

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) dF(x) = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) F'(x) dx$$

en el sentido de que si un lado de la ecuación existe, entonces también existe el otro lado y los dos son iguales.

**Teorema 4.33** Sea  $I$  un intervalo abierto y sea  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona creciente en  $I$  tal que  $F(x) = G(x)$  para todos  $x \in I$ . Entonces la integral de Lebesgue–Stieltjes es

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) dF(x) = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_I f(x) dG(x).$$

**Ejemplo 4.5** Consideremos la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Evaluamos la integral  $\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[2,3]} f(x) dF$ , donde  $f(x) = x^2$ .

Aplicamos Teorema (4.26) para la discontinuidad de  $F(x)$  en el punto  $x = 2$

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[2,3]} x^2 dF = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[2,2]} x^2 dF + \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(2,3]} x^2 dF.$$

Ahora evaluamos la primera integral por Teorema (4.31)

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[2,2]} x^2 dF = 2^2(F(2^+) - F(2^-)) = 4(1 - 0) = 4$$

y la segunda integral por Teorema (4.28) y Teorema (4.30)

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(2,3]} x^2 dF = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(2,3)} x^2 dF = 0.$$

Finalmente tenemos

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[2,3]} x^2 dF = 4 + 0 = 4. \quad \square$$

**Ejemplo 4.6** Consideremos la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3 - e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Evaluamos la integral  $\int_{[0,\infty)} f(x) dF$ , donde  $f(x) = e^x$ .

Aplicamos el Teorema (4.26) para la discontinuidad de  $F(x)$  en el punto  $x = 0$

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[0,\infty)} e^x dF = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[0,0]} e^x dF + \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(0,\infty)} e^x dF.$$

Ahora evaluamos la primera integral por Teorema (4.31)

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{[0,0]} e^x dF = e^0(F(0^+) - F(0^-))$$

y la segunda integral por Teorema (4.33).

$$\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(0,\infty)} e^x dF = \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(0,\infty)} e^x d(3 - e^{-2x}).$$

Aplicando el Teorema (4.32) y el Teorema (4.28) para la segunda integral, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(0,\infty)} e^x dF &= 1(2 - 0) + \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(0,\infty)} e^x (2e^{-2x}) dx = 2 + \mathcal{L}\text{-}\mathcal{S} \int_{(0,\infty)} 2e^{-x} dx \\ &= 2 + \mathcal{R} \int_0^\infty 2e^{-x} dx = 2 + \lim_{w \rightarrow \infty} (2e^{-x}) \Big|_{x=0}^w = 2 + (0 - (-2)) = 4. \end{aligned}$$

□



# Conclusiones

Al finalizar el desarrollo de la investigación, conocimos más acerca de la evolución del Cálculo Integral, observamos distintos puntos de vista y enfoques constructivos de varios autores que estudiaron métodos de integración y las condiciones que deben cumplir las funciones, para establecer criterios de integrabilidad.

En el presente trabajo hemos considerado dos diferentes enfoques de aproximación analítica de integrales: aplicación del método de integración por partes y aplicación del Lema de Watson. La aplicación directa de métodos aproximados puede producir errores en varios casos importantes (estos enfoques son apropiados para ciertas clases de integrales).

Hemos considerado integrales que contienen parámetros arbitrarios y no pueden ser evaluadas mediante métodos exactos. Determinamos métodos más apropiados aproximados analíticos y mejores aproximaciones. Hemos mostrado coincidencia de resultados analíticos aproximados (de diferentes enfoques) y sus correspondientes valores numéricos.

Se dan ejemplos de funciones donde se comparan los distintos enfoques de integración para mostrar las condiciones que requieren las funciones para la existencia de la integral según cada criterio. Finalmente se muestran las generalizaciones de algunas integrales y se muestran aplicaciones.

## Apéndice A. Definiciones y Teoremas

**Definición 4.16** (*Funciones Absolutamente Continuas*). Una función  $f$  en  $[a, b]$  se dice ser *absolutamente continua* en  $[a, b]$  si, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar un número positivo  $\delta$  tal que para cualquier colección finita de intervalos en pares  $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , con  $\sum (b_k - a_k) < \delta$ , tenemos que  $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ .

**Teorema 4.34** (*Encaje de Cantor*) Sea  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo  $(X, d)$  tal que

$$(a) F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots, \text{ y}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0.$$

Entonces existe un único  $x_0 \in X$  tal que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ .

*Demostración.* Por cada  $n \in \mathbb{N}$ , seleccionamos un único  $x_n \in F_n$ . Afirmamos que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es de Cauchy en  $X$ . En efecto, sea  $\varepsilon > 0$  y usemos el hecho de que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$  para elegir un entero  $N > 0$  tal que  $\text{diam}(F_N) < \varepsilon$ .

Como la sucesión  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente, se sigue que si  $m, n \geq N$ , entonces  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

En efecto, como  $x_n \in F_n \subseteq F_N$  y también  $x_m \in F_m \subseteq F_N$ , resulta que  $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_N) < \varepsilon$ . Por esto  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es de Cauchy y por la completitud de  $X$  converge a un  $x_0$  en  $X$ .

Puesto que todos los términos de la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , salvo un número finito de ellos se quedan dentro de  $F_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , resulta que  $x_0 \in \bar{F}_k = F_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Por esto,  $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ .

Para demostrar la otra inclusión, observemos que como  $\bigcap_{l=1}^{\infty} F_n \supseteq F_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , entonces la existencia de algún  $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  nos indicaría que  $x_0, y \in F_m$  y, por consiguiente,  $d(x_0, y) \leq \text{diam}(F_m) \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

Esto prueba que  $y = x_0$  y esto termina la demostración. ■

**Definición 4.17** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$ . Diremos que  $A$  y  $B$  están ordenadamente separados si

$$a \leq b \text{ para todo } a \in A \text{ y todo } b \in B.$$

**Ejemplo 4.7** Si  $\alpha \leq \beta$ , entonces  $A = (-\infty, \alpha)$  y  $B = (\beta, +\infty)$  están ordenadamente separados.  $\square$

Un resultado que es fundamental, entre otras cosas, para definir la integral de Riemann por medio de las sumas de Darboux es el siguiente.

**Teorema 4.35** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos no vacíos y acotados de  $\mathbb{R}$  ordenadamente separados. Entonces

(a)  $\sup A \leq \inf B$ .

(b)  $\sup A = \inf B$  si y sólo si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existen  $a_\varepsilon \in A$  y  $b_\varepsilon \in B$  tales que  $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$ .

*Demostración.*

(a) Fijemos  $a \in A$ . Entonces, por la hipótesis,  $a \leq b$  para todo  $b \in B$  lo cual significa que  $a$  es una cota inferior para  $B$  y, así,  $a \leq \inf B$  para cualquier  $a \in A$ . Esto, por supuesto, significa que  $\inf B$  es una cota superior para  $A$  y, en consecuencia,  $\sup A \leq \inf B$ .

(b) Suponga que  $\sup A = \inf B$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < \sup A$ , se sigue de las propiedades del supremo que existe un  $a_\varepsilon \in A$  tal que  $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varepsilon \leq \sup A$ . Similarmente, de las propiedades del ínfimo, podemos elegir un  $b_\varepsilon \in B$  tal que  $\inf B \leq b_\varepsilon < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ . Finalmente, si definimos  $\delta = \inf B = \sup A$ , tendremos que

$$\delta \geq a_\varepsilon > \delta - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \delta \leq b_\varepsilon < \delta + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde se sigue que  $0 < b_\varepsilon - a_\varepsilon < (\delta + \frac{\varepsilon}{2}) - (\delta - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  y suponga que existen  $a_\varepsilon \in A$  y  $b_\varepsilon \in B$  tal que  $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$ . Puesto que  $b_\varepsilon \geq \inf B$  y  $a_\varepsilon \leq \sup A$ , resulta que

$$\inf B - \sup A \leq b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, resulta que  $\inf B \leq \sup A$  y así, gracias a la primera parte, se concluye que  $\sup A = \inf B$  y termina la prueba.  $\blacksquare$

**Definición 4.18** Definición de Poncairé de una expansión asintótica.

La serie formal

$$\sum_0^{\infty} a_n \phi_n(z),$$

no necesariamente convergente, es llamada una expansión asintótica de  $f(z)$  en el sentido de Poncairé, con respecto a la sucesión asintótica  $\{\phi_n(z)\}$  si, para cada valor de  $m$ ,

$$f(z) - \sum_0^m a_n \phi_n(z) = o(\phi_m(z)),$$

cuando  $z \rightarrow z_0$ . Ya que

$$f(z) - \sum_0^{m-1} a_n \phi_n(z) = a_m \phi_m(z) + o(\phi_m(z)),$$

la suma parcial

$$\sum_0^{m-1} a_n \phi_n(z)$$

es una aproximación a  $f(z)$  con un error  $O(\phi_m)$  cuando  $a \rightarrow z_0$ ; Si cada una de las expansiones asintóticas existen, son únicas y los coeficientes son dados sucesivamente por

$$a_m = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ f(z) - \sum_0^{m-1} a_n \phi_n(z) \right\} / \phi_m(z).$$

Si una función posee una expansión asintótica en este sentido, escribimos

$$f(z) \equiv \sum_0^{\infty} a_n \phi_n(z).$$

# Bibliografía

- [1] Apostol, T. M. *Análisis Matemático*. 2da Edición, Editorial Reverté, España, 1976.
- [2] Burk, Frank E. *A Garden of Integrals*. Dolciani Mathematical Expositions No. 31, The Mathematical Association of America, United States of America, 2007
- [3] Burk, Frank E. *Lebesgue Measure and Integration*. 1st Edition, John Wiley & Sons, United States of America, 1998
- [4] Copson, E. T. *Asymptotic Expansions*. 1st Edition, The Syndicate of the Cambridge University Press, Cambridge, 1965.
- [5] Flores Espinoza, Ruben; Valencia Arvizu, Marco Antonio; Dávila Rascón, Guillermo; García Alvarado, Martín Gildardo. *Fundamentos del Cálculo*. 1ra. Edición, Garabatos, México, 2008.
- [6] Hinch, E. J. *Perturbation Methods*. 1st Edition, The Syndicate of the Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [7] Nahin, Paul J. *Inside Interesting Integrals*. 1st Edition, Springer, New York, 2015.
- [8] Piscunov, Nicolai *Cálculo Diferencial e Integral*. 1ra. Edición, Limusa, México, 2014.
- [9] Richards, Derek. *Advanced Mathematical Methods with Maple*. 1st Edition, The Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, 2002.

- [10] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd Edition, R. R. Donnelley & Sons Company, United States of America, 1976.
- [11] Shingareva, Inna K. and Lizárraga-Celaya, Carlos. *Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics*. 2nd Edition, Springer, Wien – New York, 2009.
- [12] Tricomi, F. G. *Integral Equations*. 1st Edition, The Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, 1957.
- [13] Whittaker, E. T.; Watson, G. N. *A course of Modern Analysis*. 4th Edition, The Syndicate of the Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [14] Zygmund, A; Transue, W.; Morse, M.; Calderon, A. P.; Boghner, S. *Contributions to Fourier Analysis*. 1st Edition, Princeton University Press, Princeton, 1950.