



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Sucesiones espectrales y homología persistente

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Pedro Fernández Calles

Director de tesis: Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa

Hermosillo, Sonora, México, 2 de julio del 2018

SINODALES

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

Dr. Martín Eduardo Frías Armenta
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

Dedicatoria

A mi familia, quienes siempre me han apoyado.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa, quien me ha ayudado en varios aspectos desde el primer curso que me impartió, pues me enseñó a ser una persona más disciplinada y responsable y me motivó a estudiar los temas relacionados con este trabajo, los cuales profundizamos con otros cursos. Su paciencia, apoyo y sabios consejos, me ayudaron a comprender esta teoría y me motivó a buscar aprender más al respecto en un futuro posgrado.

Agradezco a mis sinodales, Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro, M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá y Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, por el apoyo que me han dado en la revisión de este trabajo, motivarme a conocer más acerca del área, y sus sabios consejos para mi carrera profesional.

También a mis profesores, quienes me han aconsejado y motivado a seguirme superando, en especial al Dr. Genaro Hernández Mada y a mi tutor Dr. Pedro Flores Pérez.

No tengo palabras para expresar lo agradecido que estoy con mi familia, sin quienes no hubiera podido lograr muchas de mis metas, y ésta es una de ellas, siempre están ahí cuando los necesito, gracias por todo su apoyo, comprensión y cariño.

A quienes también debo mencionar es a mis amigos de la licenciatura, con quienes he aprendido mucho, pasé buenos momentos, he hicieron de esta mi licenciatura una gran experiencia. En especial a Alejandro por ser un buen amigo, creer en mí y apoyarme siempre a seguir avanzando, a Katya por su confianza y por enseñarme a siempre seguirlo intentando, a Paola por tanta motivación y amistad, y a Dulce por su confianza y apoyo. También a Jesús y Santiago por su apoyo.

Por último quiero agradecer a mis amigos fuera de la licenciatura, quienes están ahí aunque no podamos vernos siempre, pero con su apoyo hacen que todo valga la pena. En especial a Carlos, por ser de esas amistades que perduran a través de los años.

Contenido

Introducción	1
1. Homología persistente	3
1.1. Complejos simpliciales	4
1.2. Teoría de homología	5
1.2.1. Grupos de homología simplicial	5
1.2.2. Complejos de cadenas y sucesiones exactas	9
1.3. Grupos de homología persistente	11
1.3.1. Filtraciones	11
1.3.2. Nacimiento y muerte de clases	12
1.3.3. Teorema fundamental de la homología persistente	18
2. Sucesiones espectrales y parejas exactas	25
2.1. Sucesiones espectrales	26
2.1.1. Definiciones y propiedades	26
2.1.2. Módulos filtrados diferenciales	35
2.1.3. Teorema de convergencia	40
2.2. Parejas exactas	46
2.2.1. Pareja exacta y la pareja derivada	46
2.2.2. Sucesión espectral asociada a una pareja exacta	53
2.2.3. Equivalencia entre los dos acercamientos	68
3. Sucesión espectral y homología persistente de complejos simpliciales	71
3.1. La sucesión espectral y homología persistente de una filtración	72
3.1.1. Homología persistente	72
3.1.2. Sucesión espectral asociada a una pareja exacta	73
3.2. Conexión entre la sucesión espectral y la homología persistente	78
3.2.1. Relación entre las parejas $C^{(r)}(\mathcal{F})$ y los grupos $H_n^{p,q}(\mathcal{F})$	78
3.2.2. Relación entre $\dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F})$	83
Bibliografía	89

Introducción

En esta tesis estudiaremos la relación entre dos objetos algebraicos asociados a una filtración de un espacio topológico, la sucesión espectral introducida por Leray en la década de 1940 y la homología persistente que es un objeto inventado más recientemente y muy utilizado en el último par de décadas, que tiene muchas aplicaciones en el análisis topológico de datos (ATD). Estudiaremos la existencia de una sucesión exacta larga que relaciona los grupos de la sucesión espectral con los grupos de la homología persistente vía sus dimensiones como espacios vectoriales sobre un campo. Una herramienta principal para estudiar la relación de ambos objetos será la noción de parejas exactas, introducidas por Massey en 1952.

En el primer capítulo estudiaremos algunos conceptos de topología algebraica. Como espacios topológicos nos enfocaremos principalmente en estructuras simpliciales sobre las cuales estudiaremos los grupos de homología, que consiste en asociar una estructura algebraica a los espacios topológicos, con el objetivo de encontrar invariantes algebraicos que clasifican los espacios, lo cual es útil para estudiar propiedades geométricas como sus componentes conexas, agujeros y la forma de los espacios. Utilizaremos herramientas del álgebra homológica, que serán necesarias durante el desarrollo del texto. En la segunda parte del capítulo estudiaremos la homología persistente. Dado un espacio topológico X , una filtración finita \mathcal{F} de X , es una sucesión de subespacios: $\emptyset = X_{-1} = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_N = X_{N+1} = \cdots = X$. Una técnica clásica utilizada en topología algebraica para el estudio de invariantes de un espacio X es considerar una filtración \mathcal{F} donde la sucesión de espacios en la filtración captura progresivamente más y más información acerca de la topología del espacio, y a cada subespacio le podemos asociar un objeto algebraico como los grupos de homología, obteniendo así una sucesión de grupos de homología que es el objeto de estudio de la homología persistente, que como su nombre sugiere, estudia la persistencia de invariantes algebraicos a lo largo de la filtración, lo cual es una herramienta poderosa y muy utilizada en ATD. También definiremos

los números de Betti persistentes y las dimensiones generacionales, que relacionaremos en el capítulo final con otra estructura algebraica que mencionaremos a continuación.

Posteriormente, en el segundo capítulo, estudiaremos cómo asociar otro tipo de estructuras algebraicas a una sucesión de espacios topológicos dada por una filtración \mathcal{F} de un espacio X , que nos ayuda a aproximar o determinar en el mejor de los casos los invariantes algebraicos asociados al espacio topológico, como los grupos de homología o cohomología. Este tipo de sucesiones son las sucesiones espectrales, que intuitivamente son una generalización con más estructura de la noción de sucesiones exactas, para lo cual es necesario estudiar módulos diferenciales graduados y posteriormente la noción de pareja exacta que será de gran utilidad para relacionar la sucesión espectral con los grupos de homología persistente.

Finalmente, en el tercer y último capítulo estudiaremos cómo a una filtración \mathcal{F} de un espacio topológico X podemos asociar estos dos objetos algebraicos tratados en los capítulos previos, y vía la utilización de parejas exactas podemos determinar la relación que existe entre los grupos de la sucesión espectral y los grupos de homología persistente, expresando las dimensiones de unos como espacios vectoriales con coeficientes en un campo, en términos de los otros y viceversa.

Capítulo 1

Homología persistente

En este capítulo comenzaremos estudiando algunos conceptos de topología algebraica. Estudiaremos espacios topológicos con estructuras simpliciales, lo cual puede tratarse en abstracto con la definición del complejo simplicial abstracto, a partir de los cuales definiremos y estudiaremos los grupos de homología simplicial. Esto consiste en asociar una estructura algebraica a los espacios topológicos, con el objetivo de encontrar invariantes algebraicos que clasifican los espacios, lo cual es útil para estudiar propiedades geométricas como sus componentes conexas, agujeros, y la forma de los espacios. Esta asociación induce homomorfismos en homología, y sucesiones exactas que serán de utilidad, junto con otras herramientas del álgebra homológica que pueden consultarse en [1], con lo cual podemos desarrollar posteriormente la teoría de homología persistente.

En la segunda parte del capítulo estudiaremos la homología persistente, que como mencionábamos, es una técnica muy utilizada en topología algebraica para el estudio de invariantes de un espacio X , a partir de considerar una filtración \mathcal{F} donde la sucesión de espacios en la filtración captura progresivamente más información acerca de la topología del espacio, y a cada subespacio le podemos asociar un objeto algebraico como los grupos de homología, obteniendo así una sucesión de grupos de homología que es el objeto de estudio de la homología persistente, que como su nombre sugiere, estudia la persistencia de invariantes algebraicos a lo largo de la filtración, lo cual es una herramienta útil en ATD. También definiremos los números de Betti persistentes y las dimensiones generacionales, cuya definición surge de manera natural al estudiar el nacimiento y muerte de ciertas clases de homología que estudiaremos, y demostraremos un teorema importante que relaciona estos dos conceptos, conocido como el teorema fundamental de la homología persistente.

Las siguientes secciones y una teoría más desarrollada acerca del tema pueden consultarse en [1], [2] y [3].

1.1. Complejos simpliciales

Un complejo simplicial es un tipo particular de espacio topológico construido mediante el pegado de puntos, segmentos de línea, triángulos, tetraedros y demás análogos de dimensiones superiores. Desarrollaremos esta noción en abstracto. Comenzaremos definiendo conceptos básicos de estructuras simpliciales y veremos algunos ejemplos para tener una clara noción de los espacios sobre los que estaremos trabajando durante el desarrollo de este capítulo.

Definición 1.1. *Sea A un conjunto y $\Delta \subseteq 2^A$, donde 2^A denota el conjunto potencia de A , tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$ entonces $\tau \in \Delta$. Llamamos a Δ una **estructura simplicial** y al par (A, Δ) un **complejo simplicial abstracto**. Se dice que (A, Δ) es un complejo simplicial abstracto finito si A es un conjunto finito.*

En el contexto de este trabajo usaremos la abreviación *complejo*, cuando nos refiramos a esta definición de complejo simplicial abstracto.

Definición 1.2. *Al elemento $v \in A$ tal que $\{v\} \in \Delta$, se le llama **vértice** de Δ . Denotamos al conjunto de todos los vértices de Δ por $V(\Delta)$.*

Definición 1.3. *Cuando Δ consiste en todos los subconjuntos de un conjunto A , se dice que es un **simplejo**, y se denota por Δ^A . Los elementos de un complejo (A, Δ) son un simplejo.*

En ocasiones se usa indistintamente el término simplejo, tanto para la cara $\sigma \in \Delta$, como para todos sus subconjuntos de acuerdo a la definición anterior, ya que ésta cara determina el simplejo generado por sus subconjuntos.

A continuación definiremos qué es la *dimensión* de un complejo, cuya noción surge de la representación geométrica de un complejo como subconjunto de algún \mathbb{R}^n , para algún n natural, lo cual puede consultarse en el primer capítulo de [2], sobre el estudio de *complejos simpliciales geométricos*, los cuales no utilizaremos.

Definición 1.4. *Un simplejo (una cara) $\sigma \in \Delta$ tiene **dimensión** $\dim(\sigma) := \#(\sigma) - 1$ y, se dice que es un **d-simplejo** si es de dimensión d . Para un complejo (A, Δ) , su dimensión será la máxima dimensión de sus simplejos.*

Definición 1.5. Los conjuntos $\delta \in \Delta$ son llamados **caras** de Δ . Si σ y τ son un d -simplejo y un $(d + 1)$ -simplejo respectivamente tal que $\sigma \subset \tau$, se dice que σ es una **subcara** de τ , y decimos también que τ es una **supercara** de σ .

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, notemos que $\Delta = 2^A = \Delta^A$. Este complejo simplicial tiene 8 simplejos, y como la máxima dimensión de sus simplejos es la dimensión de $\sigma = \{1, 2, 3\} \in \Delta$, con $\dim(\sigma) = 2$, entonces es un complejo simplicial de dimensión 2.

Es común escribir la estructura simplicial de un complejo de forma resumida, escribiendo solo los simplejos maximales, es decir, aquellos simplejos que no tienen supercaras, como el siguiente ejemplo.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la estructura simplicial

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{4, 5\}\} \\ &\equiv \langle \{1, 2\}, \{4, 5\} \rangle, \end{aligned}$$

de esta manera, mediante los 1-simplejos maximales $\{1, 2\}$ y $\{4, 5\}$, Δ queda escrita de forma resumida.

1.2. Teoría de homología

1.2.1. Grupos de homología simplicial

Para definir la homología simplicial debemos iniciar definiendo lo que es un complejo de cadenas, pero antes de poder dar dicha definición desarrollaremos otros conceptos clave a continuación.

Definición 1.6. Sea Δ un complejo simplicial abstracto. Para cada $n \geq 0$ definimos el conjunto $S_n(\Delta)$ de las **n -caras** de Δ como

$$S_n(\Delta) := \{\sigma \in \Delta \mid \dim(\sigma) = n\}.$$

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $\Delta = \Delta^A$, entonces

$$S_0(\Delta) = \{\sigma \in \Delta \mid \dim(\sigma) = 0\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},$$

$$S_1(\Delta) = \{\sigma \in \Delta \mid \dim(\sigma) = 1\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

$$S_2(\Delta) = \{\sigma \in \Delta \mid \dim(\sigma) = 2\} = \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Definición 1.7. Sea (A, Δ) un complejo simplicial abstracto. Para cada $n \geq 0$ definimos el conjunto $C_n(\Delta)$ de las ***n*-cadenas** como el conjunto potencia de $S_n(\Delta)$:

$$C_n(\Delta) := 2^{S_n(\Delta)}.$$

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $\Delta = \Delta^A$, entonces

$$C_0(\Delta) = 2^{S_0(\Delta)} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\},$$

$$C_1(\Delta) = 2^{S_1(\Delta)} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}\},$$

$$C_2(\Delta) = 2^{S_2(\Delta)} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\}.$$

Observación 1.2.1. Notemos que el conjunto $C_n(\Delta)$ es un grupo abeliano con la operación *unión excluyente*, también conocida como *diferencia simétrica*. Dicha operación es $\oplus : C_n(\Delta) \times C_n(\Delta) \rightarrow C_n(\Delta)$, definida por

$$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \oplus \tau = (\sigma \setminus \tau) \cup (\tau \setminus \sigma).$$

Sean $\sigma, \tau \in C_n(\Delta)$ de la siguiente forma: $\sigma = \{\{1\}, \{2\}\}$ y $\tau = \{\{1\}, \{3\}\}$, entonces

$$\sigma \oplus \tau = \{\{1\}, \{2\}\} \oplus \{\{1\}, \{3\}\} = \{\{2\}, \{3\}\}.$$

Las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento inverso de la diferencia simétrica son fáciles de deducir. Es claro entonces que el elemento neutro sería $e = \{\emptyset\}$, mientras que para un elemento $\sigma \in C_n(\Delta)$ su inverso sería el mismo, por lo tanto, efectivamente el conjunto $C_n(\Delta)$ es un grupo abeliano. A continuación definiremos una función importante para el desarrollo posterior de la teoría.

Definición 1.8. Sea (A, Δ) un complejo simplicial abstracto. Definimos el **operador frontera** $\tilde{\partial}_n : S_n(\Delta) \rightarrow C_{n-1}(\Delta)$ como

$$\{v_0, \dots, v_n\} \mapsto \bigcup_{i=0}^n \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\},$$

donde \hat{v}_i significa omitir el vértice v_i , y $\{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\} \in \Delta$. Esta definición se puede extender a todos los subconjuntos de $S_n(\Delta)$, llamado también operador frontera $\partial_n : C_n(\Delta) \rightarrow C_{n-1}(\Delta)$, de la forma

$$\sigma \mapsto \bigoplus_{\tau \in \sigma} \tilde{\partial}_n(\tau).$$

Ejemplo 1.2.2. Sea $(A = \{1, 2, 3\}, \Delta)$ un complejo y $\tau \in S_2(\Delta)$ la cara de dimensión $n = 2$, $\tau = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\tilde{\partial}_2(\tau) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Ahora consideremos $\sigma \in C_2(\Delta)$, el 2-simplejo $\sigma = \langle \{1, 2, 3\} \rangle = \Delta^A$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_2(\sigma) &= \bigoplus_{\tau \in \sigma} \tilde{\partial}_2(\tau) \quad \text{como en la Definición 1.8} \\ &= \tilde{\partial}_2(\{1, 2, 3\}) \oplus \tilde{\partial}_2(\{1, 2\}) \oplus \tilde{\partial}_2(\{1, 3\}) \oplus \tilde{\partial}_2(\{2, 3\}) \oplus \tilde{\partial}_2(\{1\}) \oplus \tilde{\partial}_2(\{2\}) \\ &\quad \oplus \tilde{\partial}_2(\{3\}) \oplus \tilde{\partial}_2(\{\emptyset\}) \\ &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \oplus \{\{1\}, \{2\}\} \oplus \{\{1\}, \{3\}\} \oplus \{\{2\}, \{3\}\} \oplus \{\emptyset\} \oplus \{\emptyset\} \\ &\quad \oplus \{\emptyset\} \oplus \{\emptyset\} \\ &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \oplus \{\{1\}, \{2\}\} \oplus \{\{1\}, \{2\}\} \\ &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \oplus \{\emptyset\} \\ &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, notamos que ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\partial_{2-1} \circ \partial_2)(\sigma) &= \partial_1(\partial_2(\sigma)) \\ &= \partial_1(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}) \\ &= \tilde{\partial}_1(\{1, 2\}) \oplus \tilde{\partial}_1(\{1, 3\}) \oplus \tilde{\partial}_1(\{2, 3\}) \\ &= \{\{1\}, \{2\}\} \oplus \{\{1\}, \{3\}\} \oplus \{\{2\}, \{3\}\} \\ &= \{\{1\}, \{2\}\} \oplus \{\{1\}, \{2\}\} \\ &= \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Lo ocurrido en el anterior Ejemplo 1.2.2 no es ninguna casualidad, la composición consecutiva de dos operadores frontera como acabamos de ejemplificar, manda todo conjunto del grupo $C_n(\Delta)$ al conjunto vacío $\{\emptyset\}$, que es la identidad del grupo $C_n(\Delta)$ tal

como mencionábamos en la Observación 1.2.1. Se puede apreciar que el operador frontera es un homomorfismo de grupos abelianos a partir de lo desarrollado anteriormente, con este operador definiremos la *homología simplicial*, pero para ello dotaremos de más estructura a los grupos de n -cadenas. Primeramente, enunciamos el siguiente Lema.

Lema 1.9. *Sea (A, Δ) un complejo simplicial abstracto y ∂_n el operador frontera como en la Definición 1.8. Entonces, para cada $n \geq 0$ tenemos*

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0.$$

Demostración. Para cualquier σ en $C_n(\Delta)$, los simplejos obtenidos en la composición $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma))$ se obtienen al tomar alguna cara de σ y posteriormente quitar 2 vértices, lo cual se puede hacer de dos formas distintas dependiendo del orden en que se vayan quitando ambos vértices. Al final, siguiendo la idea del Ejemplo 1.2.2, la diferencia simétrica total hace que se cancelen por pares iguales cada una de las caras resultantes, ya que, como mencionábamos en la Observación 1.2.1, cada conjunto es su propio inverso en el grupo $C_n(\Delta)$. Por lo tanto el resultado final es el elemento identidad de $C_n(\Delta)$, es decir, el conjunto formado por el vacío: $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = \{\emptyset\}$. En conclusión, la composición anterior es el homomorfismo cero de grupos abelianos: $\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0$. \square

Como $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, entonces $\text{Im} \partial_n \subseteq \text{Ker} \partial_{n-1}$ y es fácil ver que es un subgrupo, el cual es abeliano y por lo tanto un subgrupo normal en $\text{Ker} \partial_{n-1}$. Dicho esto, tiene sentido considerar el cociente $\text{Ker}(\partial_{n-1})/\text{Im}(\partial_n)$ como un grupo abeliano, que es la idea que seguiremos para definir los *grupos de homología*. Sin embargo, antes vamos a dotar de más estructura a los grupos de n -cadenas $C_n(\Delta)$.

Consideremos ahora lo siguiente, sabemos que los conjuntos $C_n(\Delta)$ son grupos abelianos, y por nociones básicas del álgebra abstracta es fácil ver que si consideramos ese grupo con coeficientes en un campo \mathbb{K} , entonces obtenemos un espacio vectorial. Para nuestros propósitos vamos a considerar coeficientes en el campo $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A partir de estas consideraciones, podemos ampliar la definición del operador frontera que presentamos anteriormente para el espacio vectorial $C_n(\Delta)$, el cual en este caso sería una transformación lineal. Bajo estas consideraciones es claro que $\text{Ker}(\partial_{n-1})$ y $\text{Im}(\partial_n)$ son subespacios vectoriales de $C_n(\Delta)$ con $\text{Im}(\partial_n) \leq \text{Ker}(\partial_{n-1})$.

Definición 1.10. *Para cada $n \geq 0$ definimos el n -ésimo **grupo de homología simplicial**, con coeficientes en \mathbb{Z}_2 como*

$$H_n(\Delta, \mathbb{Z}_2) = \text{Ker}(\partial_{n-1})/\text{Im}(\partial_n).$$

1.2.2. Complejos de cadenas y sucesiones exactas

Un concepto muy importante que utilizaremos es el de *complejo de cadenas*, que es un concepto clave para entender la homología. Solo presentaremos definiciones y resultados útiles que pueden consultarse en [1], aunque para construcciones más geométricas también puede consultarse [4].

Definición 1.11. *En álgebra abstracta, un **complejo de cadenas** $A_* = \{A_i, \delta_i\}$ es una colección de estructuras algebraicas A_i (que bien pueden ser grupos abelianos, anillos, módulos o espacios vectoriales) y morfismos δ_i tal que la siguiente sucesión:*

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

satisface que $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$.

El hecho de que la composición $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ implica que $\text{Im}(\delta_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(\delta_n)$, lo que nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.12. *A las estructuras cociente*

$$H_n(A_*) = \frac{\text{Ker}(\delta_n)}{\text{Im}(\delta_{n+1})},$$

se les llama **grupo de homología** de módulo o dimensión n del complejo de cadenas A_* .

Definición 1.13. *Una sucesión como en la Definición 1.11:*

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

se dice que es **exacta** cuando $\text{Im}(\delta_{n+1}) = \text{Ker}(\delta_n)$, para cada n .

Definición 1.14. *Si tenemos una sucesión exacta de la forma:*

$$0 \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \longrightarrow 0,$$

se dice que es una **sucesión exacta corta**.

Enunciaremos un teorema importante que utilizaremos más adelante, la demostración puede consultarse en [1], Capítulo 1.

Teorema 1.15. Sean A_* , B_* y C_* complejos de cadenas, y supongamos que la siguiente es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\phi} B_* \xrightarrow{\phi'} C_* \longrightarrow 0,$$

donde ϕ y ϕ' son morfismos entre complejos de cadenas. Entonces, existe un homomorfismo $k_n : H_n(C_*) \longrightarrow H_{n-1}(A_*)$ para cada n , tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{\phi_*} H_n(B_*) \xrightarrow{\phi'_*} H_n(C_*) \xrightarrow{k_n} \\ \xrightarrow{k_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{\phi_*} H_{n-1}(B_*) \xrightarrow{\phi'_*} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{k_{n-1}} \dots, \end{aligned}$$

el homomorfismo k_n es llamado **homomorfismo de conexión**.

Veamos el siguiente lema que utilizaremos más adelante.

Lema 1.16. Dada una sucesión exacta corta:

$$V_2 \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} V_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} V_{-2},$$

donde cada V_i es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita. Entonces:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_0) = (\dim_{\mathbb{K}}(V_1) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_2))) + (\dim_{\mathbb{K}}(V_{-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}((f_{-1}))).$$

Demostración. El lema se sigue de la siguiente sucesión de igualdades dadas por álgebra lineal básica y la exactitud de la sucesión:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(V_0) &= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f_0)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_0)) \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_1)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f_{-1})) \\ &= (\dim_{\mathbb{K}}(V_1) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f_1))) + (\dim_{\mathbb{K}}(V_{-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}((f_{-1}))) \\ &= (\dim_{\mathbb{K}}(V_1) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_2))) + (\dim_{\mathbb{K}}(V_{-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}((f_{-1}))). \end{aligned}$$

□

Definición 1.18. Sean X un espacio topológico y \mathcal{F} una filtración. Denotamos por $i_n^{s,t}$ al homomorfismo $i_{s,t}^* : H_n(X_s) \longrightarrow H_n(X_t)$, y así, definimos el (s, t) -ésimo **grupo de homología persistente** como

$$\begin{aligned} H_n^{s,t}(\mathcal{F}) &:= \text{Im}(i_n^{s,t} : H_n(X_s) \longrightarrow H_n(X_t)) \\ &= \text{Im}(i_{s,t}^* : H_n(X_s) \longrightarrow H_n(X_t)). \end{aligned}$$

Definición 1.19. Definimos los **números de Betti persistentes** para $s \leq t$ como $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) := \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t}(\mathcal{F}))$.

Notemos que:

$$H_n^{s,t}(\mathcal{F}) \subseteq H_n(X_t) = H_n^{t,t}(\mathcal{F}), \quad (1.3)$$

es decir, los números de Betti persistentes coinciden con los números de Betti usuales cuando $s = t$.

1.3.2. Nacimiento y muerte de clases

Definición 1.20. Sean X un espacio topológico y \mathcal{F} una filtración como en la Definición 1.17. Decimos que una clase $\alpha \in H_n(X_s)$ **nace** en el tiempo s si $\alpha \notin H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})$, s se llama el **tiempo de nacimiento** de α . Análogamente, decimos que una clase $\alpha \in H_n(X_s)$ que nace en tiempo s , **muere** en el tiempo entrando a $t + 1$ si $i_n^{s,t}(\alpha) \notin H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})$ y $i_n^{s,t+1}(\alpha) \in H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})$.

Observación 1.3.1. Otra forma de describir el nacimiento y muerte de clases es mediante el siguiente desarrollo, que puede consultarse en [5]. Primero notemos que la Definición 1.20 es equivalente a lo siguiente. Podemos decir que un elemento $\alpha \in H_n(X_s)$ nace en el tiempo s si la clase $\bar{\alpha}$ es distinta de cero en el espacio vectorial cociente $H_n(X_s)/H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})$. También, decimos que una clase $\alpha \in H_n(X_s)$ que nace en tiempo s , muere en el tiempo entrando a $t + 1$ si la clase $\bar{\alpha}$ no es cero en el espacio vectorial cociente $H_n(X_t)/H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})$ pero si lo es en $H_n(X_{t+1})/H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})$.

Ahora consideremos que el homomorfismo

$$\overline{i_n^{s,t}} : \frac{H_n(X_s)}{H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})},$$

está bien definido. En efecto, por funtorialidad tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 i_n^{s,t}(H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})) &= i_n^{s,t}(i_n^{s-1,s}(H_n(X_{s-1}))) \\
 &= (i_n^{s,t} \circ i_n^{s-1,s})(H_n(X_{s-1})) \\
 &= i_n^{s-1,t}(H_n(X_{s-1})) \\
 &= H_n^{s-1,t}(\mathcal{F}).
 \end{aligned}$$

También, el homomorfismo

$$\pi : \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-2,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})},$$

está bien definido. En efecto, por funtorialidad tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 H_n^{s-2,t}(\mathcal{F}) &= i_n^{s-2,t}(H_n(X_{s-2})) \\
 &= (i_n^{s-1,t} \circ i_n^{s-2,s-1})(H_n(X_{s-2})) \\
 &= i_n^{s-1,t}(i_n^{s-2,s-1}(H_n(X_{s-2}))) \\
 &\subseteq i_n^{s-1,t}(H_n^{s-2,s-1}(\mathcal{F})).
 \end{aligned}$$

A partir de estas observaciones, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{H_n(X_s)}{H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{i_n^{s,t}} & \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{i_n^{t,t+1}} & \frac{H_n(X_{t+1})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \\
 \uparrow \pi & & \uparrow \pi & & \\
 \frac{H_n(X_{s-1})}{H_n^{s-2,s-1}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{i_n^{s-1,s}} & \frac{H_n(X_s)}{H_n^{s-2,s}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{i_n^{s,t}} & \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-2,t}(\mathcal{F})}
 \end{array} \tag{1.4}$$

Definición 1.21. Consideremos un elemento α que nace en tiempo s y muere entrando en tiempo $t + 1$. Por la Observación 1.3.1 sabemos que la clase $\beta = \bar{\alpha}$ no es cero en el espacio vectorial cociente $H_n(X_t)/H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})$ pero si lo es en $H_n(X_{t+1})/H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})$, llamamos a β el **último descendiente** de α . Además, α es llamado el **primer ancestro** de β , lo cual comprobaremos a continuación.

Verifiquemos que efectivamente, α debe ser el primer ancestro de β , es decir, no existe α' que nazca en tiempo $s - 1$ tal que $i_n^{s-1,t}(\alpha') = \beta$. Supongamos que existe dicho α' que nace en tiempo $t - 1$ y es ancestro de β , entonces llegamos a la siguiente contradicción. Por la Observación 1.3.1, suponer esto es equivalente a que existe $\alpha' \in H_n(X_{s-1})$ tal que $0 \neq \bar{\alpha'} \in H_n(X_{s-1})/H_n^{s-2,s-1}(\mathcal{F})$ y tal que $i_n^{s,t} \left(i_n^{s-1,s}(\bar{\alpha'}) \right) = \bar{\beta} \in H_n(X_t)/H_n^{s-2,t}(\mathcal{F})$.

Entonces, como el Diagrama (1.4) conmuta y se cumple que $\pi \left(\overline{i_n^{s-1,s}}(\overline{\alpha'}) \right) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \overline{i_n^{s,t}} \left(\pi \left(\overline{i_n^{s-1,s}}(\overline{\alpha'}) \right) \right) \\
 &= \pi \left(\overline{i_n^{s,t}} \left(\overline{i_n^{s-1,s}}(\overline{\alpha'}) \right) \right) \\
 &= \pi(\overline{\beta}) \\
 &= \overline{\beta} \\
 &\in \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})},
 \end{aligned}$$

pero esto contradice la Observación 1.3.1, ya que $0 \neq \overline{\beta} \in H_n(X_t)/H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})$.

En resumen, tenemos hasta ahora que un elemento $\alpha \in H_n(X_s)$ nace en tiempo s y muere entrando al tiempo $t+1$ si, y sólo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 &\alpha \in H_n(X_s) \text{ nace en tiempo } s \text{ y muere entrando al tiempo } t+1 \\
 \iff &\alpha \in H_n(X_s) - H_n^{s-1,s}(\mathcal{F}) \text{ tal que } i_n^{s,t}(\alpha) \in H_n(X_t) - H_n^{s-1,t}(\mathcal{F}) \\
 &\text{pero } i_n^{s,t+1}(\alpha) \in H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F}) \tag{1.5} \\
 \iff &0 \neq \overline{\alpha} \in H_n(X_s)/H_n^{s-1,s}(\mathcal{F}) \text{ tal que } 0 \neq \overline{i_n^{s,t}}(\overline{\alpha}) \in H_n(X_t)/H_n^{s-1,t}(\mathcal{F}) \\
 &\text{pero } 0 = \overline{i_n^{s,t+1}}(\overline{\alpha}) \in H_n(X_{t+1})/H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F}).
 \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es demostrar que las clases de homología de dimensión n , que nacen en tiempo s y mueren entrando al tiempo $t+1$ forman un espacio vectorial cuya dimensión se mantiene a lo largo de la filtración para todo tiempo k tal que $s \leq k \leq t$. En adelante consideraremos el siguiente diagrama conmutativo, donde las flechas verticales ι denotan inclusiones, lo que es claro por la Ecuación (1.3), y las flechas horizontales son claramente homomorfismos sobreyectivos pues se restringen a su imagen:

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{H_n(X_k)}{H_n^{s-1,k}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{\overline{i_n^{k,t}}} & \frac{H_n(X_t)}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{\overline{i_n^{t,t+1}}} & \frac{H_n(X_{t+1})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \\
 \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\
 \frac{H_n(X_s)}{H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{\overline{i_n^{s,k}}} & \frac{H_n^{s,k}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,k}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{\overline{i_n^{k,t}}} & \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{\overline{i_n^{t,t+1}}} & \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \\
 & & & \searrow \overline{i_n^{k,t+1}} & & &
 \end{array} \tag{1.6}$$

Primero consideremos el caso $k = t$. Apoyándonos del Diagrama (1.6), observemos que la Condición (1.5) se satisface para $0 \neq \alpha \in H_n(X_s)$ si, y sólo si, se satisface la

siguiente condición, donde $\alpha_t := i_n^{s,t}(\alpha)$

Se satisface la Condición (1.5)

$$\begin{aligned} \iff \bar{\alpha}_t = \overline{i_n^{s,t}(\alpha)} &\in \left(\text{Ker} \left(\left(\overline{i_n^{t,t+1}} \mid \right) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) - \{0\} \right) \\ \iff \bar{0} \neq \bar{\alpha}_t &\in \text{Ker} \left(\left(\overline{i_n^{t,t+1}} \mid \right) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Calculemos entonces la dimensión de $\text{Ker} \left(\overline{i_n^{t,t+1}} \mid \right)$ que nos quedó en la Condición (1.7). Notemos que por álgebra lineal esto es igual a la dimensión del espacio vectorial de salida, menos la dimensión de su imagen que es también un espacio vectorial, además la dimensión de un cociente de espacios vectoriales es la diferencia de sus dimensiones, y por último utilizaremos también la Definición 1.19 de números de Betti persistentes:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} \left(\text{Ker} \left(\overline{i_n^{t,t+1}} \mid \right) \right) &= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \\ &= (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t}(\mathcal{F})) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s-1,t}(\mathcal{F}))) \\ &\quad - (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F}))) \\ &= (\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{s-1,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})). \end{aligned} \quad (1.8)$$

El otro caso extremo es cuando $k = s$. Primero recordemos una propiedad de teoría de conjuntos: si tenemos dos conjuntos X y Y , con $A, B \subseteq Y$ subconjuntos de Y , y una función $f : X \rightarrow Y$, entonces $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$. Apoyándonos del Diagrama (1.6), observemos que la Condición (1.5) se satisface para $0 \neq \alpha \in H_n(X_s)$ si, y sólo si, se satisface la siguiente condición, donde $\alpha_s := \alpha$ y $\bar{\alpha}_s = \bar{\alpha}$.

Se satisface la Condición (1.5)

$$\begin{aligned}
 &\iff \overline{i_n^{s,t}}(\overline{\alpha_s}) \in \left(\text{Ker} \left(\overline{(i_n^{t,t+1})} \mid) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) - \{\overline{0}\} \right) \\
 &\iff \overline{\alpha_s} \in (\overline{i_n^{s,t}})^{-1} \left(\text{Ker} \left(\overline{(i_n^{t,t+1})} \mid) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) - \{\overline{0}\} \right) \\
 &= (\overline{i_n^{s,t}})^{-1} \left(\text{Ker} \left(\overline{(i_n^{t,t+1})} \mid) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \right) - (\overline{i_n^{s,t}})^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= (\overline{i_n^{s,t}})^{-1} \left(\overline{(i_n^{t,t+1})}^{-1}(\{\overline{0}\}) \right) - (\overline{i_n^{s,t}})^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= (\overline{i_n^{t,t+1}} \circ \overline{i_n^{s,t}})^{-1}(\{\overline{0}\}) - (\overline{i_n^{s,t}})^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= (\overline{i_n^{s,t+1}})^{-1}(\{\overline{0}\}) - (\overline{i_n^{s,t}})^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= \text{Ker}(\overline{i_n^{s,t+1}}) - \text{Ker}(\overline{i_n^{s,t}}) \\
 &\iff 0 \neq \overline{\alpha_s} \in \frac{\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t+1}})}{\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t}})} \\
 &\leq \frac{\text{Ker}(i_n^{s,t+1})}{\frac{H_n^{s-1,s}}{\text{Ker}(i_n^{s,t})}} \cong \frac{\text{Ker}(i_n^{s,t+1})}{\text{Ker}(i_n^{s,t})}, \quad \text{por el tercer teorema de isomorfismo.}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

El tercer teorema de isomorfismo puede consultarse en [1]. Con esto obtuvimos que el hecho de que la Condición (1.5) se satisfaga para $0 \neq \alpha \in H_n(X_s)$, es equivalentemente a la condición de que $0 \neq \overline{\alpha_s} \in \text{Ker}(\overline{i_n^{s,t+1}})/\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t}})$. Calcularemos a continuación la dimensión de ese espacio vectorial.

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t+1}})}{\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t}})} \right) &= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t+1}})) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(\overline{i_n^{s,t}})) \\
 &= \left(\dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n(X_s)}{H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \right) \\
 &\quad - \left(\dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n(X_s)}{H_n^{s-1,s}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \right) \right) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \\
 &= (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t}(\mathcal{F})) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s-1,t}(\mathcal{F}))) \\
 &\quad - (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F}))) \\
 &= (\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{s-1,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por último, veamos que en todos los casos intermedios, es decir, para cualquier tiempo k tal que $s+1 \leq k \leq t-1$, ocurre lo mismo. Apoyándonos del Diagrama (1.6),

observemos que la Condición (1.5) se satisface para $0 \neq \alpha \in H_n(X_s)$ si, y sólo si, se satisface la siguiente condición, donde $\alpha_k := i_n^{s,k}(\alpha)$ y $\overline{\alpha}_k = \overline{i_n^{s,k}(\alpha)}$.

Se satisface la Condición (1.5)

$$\begin{aligned}
 &\iff 0 \neq (\overline{i_n^{k,t}} |)(\overline{\alpha}_k) \in \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})}, \text{ pero } \overline{0} = (\overline{i_n^{k,t+1}} |)(\overline{\alpha}_k) \in \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \\
 &\iff (\overline{i_n^{k,t}} |)(\overline{\alpha}_k) \in \left(\text{Ker} \left((\overline{i_n^{t,t+1}} |) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) - \{\overline{0}\} \right) \\
 &\iff \overline{\alpha}_k \in (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1} \left(\text{Ker} \left((\overline{i_n^{t,t+1}} |) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) - \{\overline{0}\} \right) \\
 &= (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1} \left(\text{Ker} \left((\overline{i_n^{t,t+1}} |) : \frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \longrightarrow \frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \right) - (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1}((\overline{i_n^{t,t+1}} |)^{-1}(\{\overline{0}\})) - (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= ((\overline{i_n^{t,t+1}} |) \circ (\overline{i_n^{k,t}} |))^{-1}(\{\overline{0}\}) - (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= (\overline{i_n^{k,t+1}} |)^{-1}(\{\overline{0}\}) - (\overline{i_n^{k,t}} |)^{-1}(\{\overline{0}\}) \\
 &= \text{Ker}(\overline{i_n^{k,t+1}} |) - \text{Ker}(\overline{i_n^{k,t}} |) \\
 &\iff 0 \neq \overline{\alpha}_k \in \frac{\text{Ker}(\overline{i_n^{k,t+1}} |)}{\text{Ker}(\overline{i_n^{k,t}} |)} \cong \frac{\text{Ker}(i_n^{k,t+1})}{\text{Ker}(i_n^{k,t})}, \text{ por el tercer teorema de isomorfismo.}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Con esto obtuvimos que el hecho de que la Condición (1.5) se satisfaga para $0 \neq \alpha \in H_n(X_s)$, es equivalentemente a la condición de que $0 \neq \overline{\alpha}_k \in \text{Ker}(\overline{i_n^{k,t+1}} |) / \text{Ker}(\overline{i_n^{k,t}} |)$. Calcularemos a continuación la dimensión de ese espacio vectorial.

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\text{Ker}(\overline{i_n^{k,t+1}} |)}{\text{Ker}(\overline{i_n^{k,t}} |)} \right) &= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(\overline{i_n^{k,t+1}} |)) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(\overline{i_n^{k,t}} |)) \\
 &= \left(\dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,k}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,k}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \right) \\
 &\quad - \left(\dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,k}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,k}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \right) \right) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t}(\mathcal{F})} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})}{H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})} \right) \\
 &= (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t}(\mathcal{F})) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s-1,t}(\mathcal{F}))) \\
 &\quad - (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F}))) \\
 &= (\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{s-1,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})).
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

En conclusión, de las Ecuaciones (1.8), (1.10) y (1.12), podemos afirmar que la

dimensión de las clases de homología de dimensión n , que nacen en tiempo s y mueren entrando al tiempo $t + 1$ forman un espacio vectorial cuya dimensión se mantiene a lo largo de la filtración para todo tiempo k tal que $s \leq k \leq t$, es decir, no depende del parámetro k . Esto nos permite dar la siguiente definición, que es una manera de calcular estas dimensiones a partir de los números de Betti persistentes, y es importante pues la utilizaremos más adelante para demostrar los teoremas principales del último capítulo.

Definición 1.22. *A los números $\mu_n^{s,t}(\mathcal{F})$ se les llama **dimensiones generacionales**. Se interpretan como la dimensión del espacio vectorial sobre K generado por los ciclos de homología de dimensión n , que nacen en tiempo s y mueren en tiempo $t + 1$. Se definen para $s \leq t$ de la siguiente manera:*

$$\mu_n^{s,t}(\mathcal{F}) := (\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s,t+1}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{s-1,t}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,t+1}(\mathcal{F})).$$

1.3.3. Teorema fundamental de la homología persistente

Otro resultado muy importante que probaremos en esta sección es el siguiente. Como acabamos de ver, podemos calcular las dimensiones generacionales $\mu_n^{s,t}(\mathcal{F})$ a partir de los números de Betti persistentes $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F})$, presentaremos un teorema el cual nos asegura que también podemos calcular los números de Betti persistentes a partir de las dimensiones generacionales. Esto es muy útil para realizar cálculos de homologías. En esta sección estableceremos la convención de que los grupos de homología son cero cuando $j + 1 > N$ o cuando $i - 1 < 0$. Para ilustrar lo que pretendemos probar veamos el siguiente ejemplo, el cual fue tomado de [3], de donde también basaremos el desarrollo de esta sección.

Ejemplo 1.3.2. Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} la filtración finita

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X_N = X.$$

Entonces tenemos para cada n los siguientes números de Betti persistentes en orden lexicográfico: $\beta_n^{0,0}(\mathcal{F})$, $\beta_n^{0,1}(\mathcal{F})$, $\beta_n^{0,2}(\mathcal{F})$, $\beta_n^{1,1}(\mathcal{F})$, $\beta_n^{1,2}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{2,2}(\mathcal{F})$. También las siguientes

dimensiones generacionales, utilizando la fórmula de la Definición 1.22.

$$\begin{aligned}
 \mu_n^{0,0}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{0,0}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,1}(\mathcal{F}), \\
 \mu_n^{0,1}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{0,1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,2}(\mathcal{F}), \\
 \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{0,2}(\mathcal{F}), \\
 \mu_n^{1,1}(\mathcal{F}) &= (\beta_n^{1,1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{1,2}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{0,1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,2}(\mathcal{F})), \\
 \mu_n^{1,2}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{1,2}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,2}(\mathcal{F}), \\
 \mu_n^{2,2}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{2,2}(\mathcal{F}) - \beta_n^{1,2}(\mathcal{F}).
 \end{aligned}$$

Podemos acomodar esta información de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mu_n^{0,0}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{0,1}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{1,1}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{1,2}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{2,2}(\mathcal{F}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_n^{0,0}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{0,1}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{0,2}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{1,1}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{1,2}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{2,2}(\mathcal{F}) \end{pmatrix}.$$

Procediendo por eliminación gaussiana: sumamos el renglón 2 al 4, el renglón 3 al 5, y posteriormente el renglón 5 al 6. Esto nos lleva a que la matriz de 6×6 mostrada es similar a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde podemos observar que el determinante de la matriz es 1, lo que implica que es invertible. La matriz inversa está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, podemos recuperar los números de Betti persistentes a partir de las dimensiones generacionales de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_n^{0,0}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{0,1}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{1,1}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{1,2}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{2,2}(\mathcal{F}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_n^{0,0}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{0,1}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{0,2}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{1,1}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{1,2}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{2,2}(\mathcal{F}) \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar término a término que los números de Betti persistentes son de la forma:

$$\begin{aligned} \beta_n^{0,0}(\mathcal{F}) &= \mu_n^{0,0}(\mathcal{F}) + \mu_n^{0,1}(\mathcal{F}) + \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}), \\ \beta_n^{0,1}(\mathcal{F}) &= \mu_n^{0,1}(\mathcal{F}) + \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}), \\ \beta_n^{0,2}(\mathcal{F}) &= \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}), \\ \beta_n^{1,1}(\mathcal{F}) &= \mu_n^{0,1}(\mathcal{F}) + \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}) + (\mu_n^{1,1}(\mathcal{F}) + \mu_n^{1,2}(\mathcal{F})), \\ \beta_n^{1,2}(\mathcal{F}) &= \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}) + \mu_n^{1,2}(\mathcal{F}), \\ \beta_n^{2,2}(\mathcal{F}) &= \mu_n^{0,2}(\mathcal{F}) + \mu_n^{1,2}(\mathcal{F}) + \mu_n^{2,2}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

El objetivo de esta sección es mostrar que esto siempre es posible. Describiremos el proceso que realizamos en el Ejemplo 1.3.2 para el caso general. Primero establezcamos la siguiente notación. Representaremos a los números de Betti persistentes y a las dimensiones generacionales mediante los siguientes vectores en orden lexicográfico, es decir, el supraíndice (i, j) se encuentra antes del (r, s) si $i < r$ o si $i = r$ y $j < s$, obtenemos entonces lo siguiente considerando una filtración finita como en la Filtración (1.2):

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_n^{0,0}(\mathcal{F}) \\ \vdots \\ \beta_n^{0,N}(\mathcal{F}) \\ \beta_n^{1,1}(\mathcal{F}) \\ \vdots \\ \beta_n^{1,N}(\mathcal{F}) \\ \vdots \\ \beta_n^{N,N}(\mathcal{F}) \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_n^{0,0}(\mathcal{F}) \\ \vdots \\ \mu_n^{0,N}(\mathcal{F}) \\ \mu_n^{1,1}(\mathcal{F}) \\ \vdots \\ \mu_n^{1,N}(\mathcal{F}) \\ \vdots \\ \mu_n^{N,N}(\mathcal{F}) \end{pmatrix}.$$

Como sabemos, por las observaciones de la sección anterior y la Definición 1.22, podemos expresar al vector μ linealmente en términos del vector β , mediante una matriz a la que

llamaremos R , es decir, $\mu = R\beta$. Denotaremos por $R_{i,j}$ al renglón de R que corresponde a la entrada (i, j) de μ , es decir, cuando aparece el término $\mu_n^{i,j}(\mathcal{F})$. A partir de estas definiciones podemos hacer las siguientes observaciones.

Observación 1.3.3. La matriz R tendrá siempre un 1 en toda su diagonal, ya que, la expresión de $\mu_n^{i,j}(\mathcal{F})$ siempre tiene un término $\beta_n^{i,j}(\mathcal{F})$ como puede apreciarse en la Definición 1.22. Siguiendo con esta idea, la matriz R puede tener a lo más un -1 a la derecha de su diagonal correspondiente al término $\beta_n^{i,j+1}(\mathcal{F})$. Recordemos la convención que hicimos al inicio de esta sección, de que los grupos de homología son cero cuando $j + 1 > N$ o cuando $i - 1 < 0$, con esto podemos notar también que a la izquierda de la diagonal de R sólo aparecerán ceros si $i = 0$, aparecerá un -1 si $i > 0$ y $j = N$, y aparecerá un -1 y un 1 si $i > 0$ y $j < N$. Lo anterior corresponde a los términos $\beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{i-1,j+1}(\mathcal{F})$.

Con esta estructura procederemos a eliminar los elementos que se encuentran bajo la diagonal mediante eliminación gaussiana, obtendremos así una matriz triangular superior con unos en la diagonal, por lo tanto invertible, lo que asegura que podemos calcular β a partir de μ . Primero demostraremos el siguiente teorema, para después encontrar una expresión exacta con la cual calcular los términos del vector β .

Teorema 1.23. *Sea R la matriz que relaciona a β con μ mediante la ecuación: $\mu = R\beta$. Entonces el algoritmo:*

* Para cada $i = 1, \dots, N$, hacer:

* Para cada $j = i, i + 1, \dots, N$: sumar el renglón $R_{i-1,j}$ al renglón $R_{i,j}$,

transforma la matriz R a una matriz triangular superior \bar{R} con únicamente unos en la diagonal.

Demostración. Seguiremos este proceso ordenadamente observando que para cada renglón $R_{i,j}$ con $i > 0$ siempre existirá un renglón anterior con ceros antes de la diagonal y tal que al sumárselo al renglón $R_{i,j}$ elimina los elementos antes de la diagonal. Para $i = 0$ no necesitamos hacer nada pues como vimos en la Observación 1.3.3, esos renglones solo tienen ceros antes de la diagonal. Para $i = 1$ calculamos las dimensiones generacionales utilizando la Definición 1.22 como

$$\begin{aligned}\mu_n^{1,j}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{1,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{1,j+1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,j}(\mathcal{F}) + \beta_n^{0,j+1}(\mathcal{F}), \quad (1 \leq j < N) \\ \mu_n^{1,N}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{1,N}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,N}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$

Pero los renglones que corresponden a $i = 0$ son

$$\begin{aligned}\mu_n^{0,j}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{0,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{0,j+1}(\mathcal{F}), \quad (1 \leq j < N) \\ \mu_n^{0,N}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{0,N}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$

Es claro entonces que al sumar el renglón $R_{0,j}$ al renglón $R_{1,j}$ cancela unicamente lo que está antes de la diagonal, lo demás lo deja intacto. Para $i = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}\mu_n^{2,j}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{2,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{2,j+1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{1,j}(\mathcal{F}) + \beta_n^{1,j+1}(\mathcal{F}), \quad (2 \leq j < N) \\ \mu_n^{2,N}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{2,N}(\mathcal{F}) - \beta_n^{1,N}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$

Notemos que lo que está antes de la diagonal en los renglones $R_{2,j}$ se cancela precisamente con lo que está después o en la diagonal en los renglones $R_{1,j}$ respectivamente, pero esa parte de los renglones $R_{1,j}$ no se modificó durante el paso anterior, por lo tanto sumarle estos renglones a los renglones $R_{2,j}$ elimina lo que se encuentra antes de su diagonal y lo demás lo deja intacto. Este proceso puede llevarse a cabo de manera inductiva donde los renglones $R_{i,j}$ están dados para $i > 1$ de la forma

$$\begin{aligned}\mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{i,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,j+1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i-1,j+1}(\mathcal{F}), \quad (2 \leq j < N) \\ \mu_n^{i,N}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{i,N}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,N}(\mathcal{F}),\end{aligned}$$

a los cuales podemos cancelarles lo que se encuentra antes de la diagonal al sumarles los renglones $R_{i-1,j}$, los cuales ya no tienen nada antes de la diagonal por hipótesis de inducción, y el resto se ha mantenido intacto, es decir, para este paso del algoritmo ya habremos eliminado lo correspondiente a los términos $\beta_n^{i-2,j}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{i-2,j+1}(\mathcal{F})$ de la ecuación

$$\begin{aligned}\mu_n^{i-1,j}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j+1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-2,j}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i-2,j+1}(\mathcal{F}), \quad (2 \leq j < N) \\ \mu_n^{i-1,N}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{i-1,N}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-2,N}(\mathcal{F}),\end{aligned}$$

cancelando así lo que se encuentra antes de la diagonal para los renglones $R_{i,j}$ y dejando lo demás intacto. Iterando este proceso para $i = 1, \dots, N$ terminamos. \square

Con este algoritmo obtenemos inmediatamente el siguiente:

Corolario 1.24. *La matriz R es invertible.*

Demostración. La demostración es inmediata por el algoritmo realizado en la demostración del Teorema 1.23. Nos quedó una matriz triangular superior con unos en la diagonal,

por lo que su determinante es 1, y por un resultado estándar del álgebra lineal esto implica que la matriz R es invertible. \square

Con esto podemos asegurar que siempre podemos invertir la matriz R y así despejar el vector β , mediante la ecuación $R^{-1}\mu = \beta$. En otras palabras, podemos calcular las dimensiones generacionales a partir de los números de Betti persistentes, y viceversa. Por el Teorema 1.23 conocemos los pasos para transformar la matriz R en una matriz similar \bar{R} tal que \bar{R} es una matriz triangular superior, si ahora realizamos operaciones elementales a la matriz \bar{R} para obtener una matriz similar que resulte ser la identidad I , entonces, por álgebra lineal, sabemos que estas mismas operaciones con las que empezamos a transformar la matriz R aplicadas a la matriz identidad I , nos daría como resultado la matriz inversa R^{-1} , con la cual podríamos calcular de manera explícita el vector β . Veamos a continuación este procedimiento con el siguiente teorema.

Teorema 1.25. *Sea \bar{R} la matriz triangular superior que se obtiene mediante operaciones elementales realizadas a la matriz R en el algoritmo del Teorema 1.23. Si a la matriz \bar{R} se le aplican las siguientes operaciones elementales:*

* Para cada $i = 0, \dots, N$, hacer:

* Para cada $j = N - 1, \dots, 0$: sumar el renglón $R_{i,j+1}$ al renglón $R_{i,j}$,

entonces obtenemos la matriz identidad I .

Demostración. El algoritmo que empleamos en el Teorema 1.23 no modifica lo que se encuentra desde la diagonal hacia la derecha en la matriz R . Notemos que para un i fijo, las ecuaciones de las que obtenemos los renglones $R_{i,j}$ están dadas por la Definición 1.22 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu_n^{i,i}(\mathcal{F}) &= -\beta_n^{i-1,i}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i-1,i+1}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i,i}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,i+1}(\mathcal{F}), \\ \mu_n^{i,i+1}(\mathcal{F}) &= -\beta_n^{i-1,i+1}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i-1,i+2}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i,i+1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,i+2}(\mathcal{F}), \\ \mu_n^{i,i+2}(\mathcal{F}) &= -\beta_n^{i-1,i+2}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i-1,i+3}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i,i+2}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,i+3}(\mathcal{F}), \\ &\vdots \\ \mu_n^{i,N-1}(\mathcal{F}) &= -\beta_n^{i-1,N-1}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i-1,N}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i,N-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,N}(\mathcal{F}), \\ \mu_n^{i,N}(\mathcal{F}) &= -\beta_n^{i-1,N}(\mathcal{F}) + \beta_n^{i,N}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Observemos que si sumamos el renglón $R_{i,N}$ al renglón $R_{i,N-1}$ se cancela un término, dejando únicamente un 1 en la diagonal en el renglón $R_{i,N-1}$. Luego, sumamos el renglón

$R_{i,N-1}$ al renglón $R_{i,N-2}$ y el término de la diagonal del renglón $R_{i,N-1}$ cancela lo que queda a la derecha de la diagonal en el renglón $R_{i,N-2}$, dejando de nuevo únicamente un 1 en la diagonal en el renglón $R_{i,N-2}$. Iterando este proceso de sumar desde abajo hacia arriba los renglones $R_{i,i}, \dots, R_{i,N}$ nos deja como resultado la matriz identidad, ya que nunca afectamos la diagonal o la parte izquierda de la diagonal en dicho proceso. \square

Teorema 1.26. *La matriz R^{-1} que se obtiene a partir de operaciones elementales dadas por los Teoremas 1.23 y 1.25, tiene unos en las posiciones:*

$$\begin{array}{ccc} (0, j), (1, j), & \cdots, & (i, j) \\ (0, j + 1), (1, j + 1), & \cdots, & (i, j + 1) \\ & \vdots & \\ (0, N), (1, N), & \cdots, & (i, N) \end{array}$$

y cero en todas las demás posiciones.

Demostración. La prueba se sigue de aplicar los algoritmos de los Teoremas 1.23 y 1.25 a la matriz identidad I . Al aplicar la primera parte a la matriz I , es decir el algoritmo del Teorema 1.23, obtenemos unos en las siguientes posiciones de la matriz identidad: $(0, j), (1, j), \dots, (i, j)$. Después cuando aplicamos la segunda parte a la matriz similar que hemos obtenido la cual podemos denotar como \bar{I} , es decir al aplicar el algoritmo del Teorema 1.25 a la matriz \bar{I} , seguimos sumando unos en posiciones que nunca coinciden conforme j varía en $i, i + 1, \dots, N$. Por lo tanto la suma produce unos en las posiciones que indica el teorema. \square

Teorema 1.27. *(Teorema fundamental de la homología persistente). Los números de Betti pueden obtenerse a partir de las dimensiones generacionales linealmente mediante la suma*

$$\beta_n^{i,j}(\mathcal{F}) = \sum_{k \leq i} \sum_{l \geq j} \mu_n^{k,l}(\mathcal{F}).$$

Demostración. El Teorema 1.27 es un corolario del Teorema 1.26. \square

Capítulo 2

Sucesiones espectrales y parejas exactas

En este capítulo estudiaremos a detalle el álgebra de las sucesiones espectrales y las parejas exactas. Las sucesiones espectrales pueden aplicarse a problemas algebraicos y topológicos, pues nos ayudan a aproximar o determinar los objetos sobre los cuales estamos trabajando como grupos abelianos, espacios vectoriales, o módulos. El manejo formal de las sucesiones espectrales se relaciona con el álgebra homológica, como las sucesiones exactas y teoría de homología. Primero estudiaremos algunas definiciones y propiedades básicas de las sucesiones espectrales, así como técnicas para construirlas, por ejemplo, a partir de la noción de un módulo diferencial graduado filtrado, y técnicas para identificar el límite de una sucesión espectral. En relación a lo anterior, enunciaremos un teorema importante sobre la convergencia de una sucesión espectral, dicha teoría se puede consultar en [6]. Nuestro objeto de estudio puede no provenir de un objeto diferencial filtrado, para lo cual en la segunda parte del capítulo desarrollaremos otros tipos de estructuras algebraicas, que son las parejas exactas, las cuales utilizaremos para el manejo de las sucesiones espectrales ya que tienen muchas aplicaciones y pueden hacer más económicos los cálculos que se presenten, como en el caso del siguiente capítulo en donde será una herramienta muy útil. Las parejas exactas son útiles para determinar las relaciones entre grupos de homología o cohomología de un espacio topológico, así como otro tipo de invariantes. Esta teoría fue introducida por Massey en 1952, lo cual puede consultarse en [4]. Finalmente estudiaremos la equivalencia entre ambos acercamientos que se dieron para definir una sucesión espectral a partir de una filtración, o bien, a partir de la noción de parejas exactas. También presentaremos algunos ejemplos los cuales, junto a lo anterior mencionado, pueden consultarse en [6].

2.1. Sucesiones espectrales

2.1.1. Definiciones y propiedades

Comenzaremos con algunas definiciones, para identificar los principales componentes y propiedades de una sucesión espectral.

Definición 2.1. Un **módulo diferencial bigraduado** sobre un anillo R , es una colección de R -módulos de la forma $E^{*,*} = \{E^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ o $E^{*,*} = \bigoplus_{p,q} E^{p,q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, junto con un R -homomorfismo $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, llamado el diferencial de bigrado $(r, 1 - r)$ ó $(-r, r - 1)$, para algún entero r tal que $d \circ d = 0$, es decir

$$d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r, q+(1-r)}, \quad \text{ó} \quad d : E^{p,q} \rightarrow E^{p-r, q+(r-1)}.$$

Un módulo diferencial bigraduado se puede representar en el plano cartesiano, donde cada punto (p, q) representa un R -módulo $E^{p,q}$ de la colección $E^{*,*}$. Por ejemplo, si el diferencial tiene bigrado $(3, -2)$, el diagrama sería el siguiente:

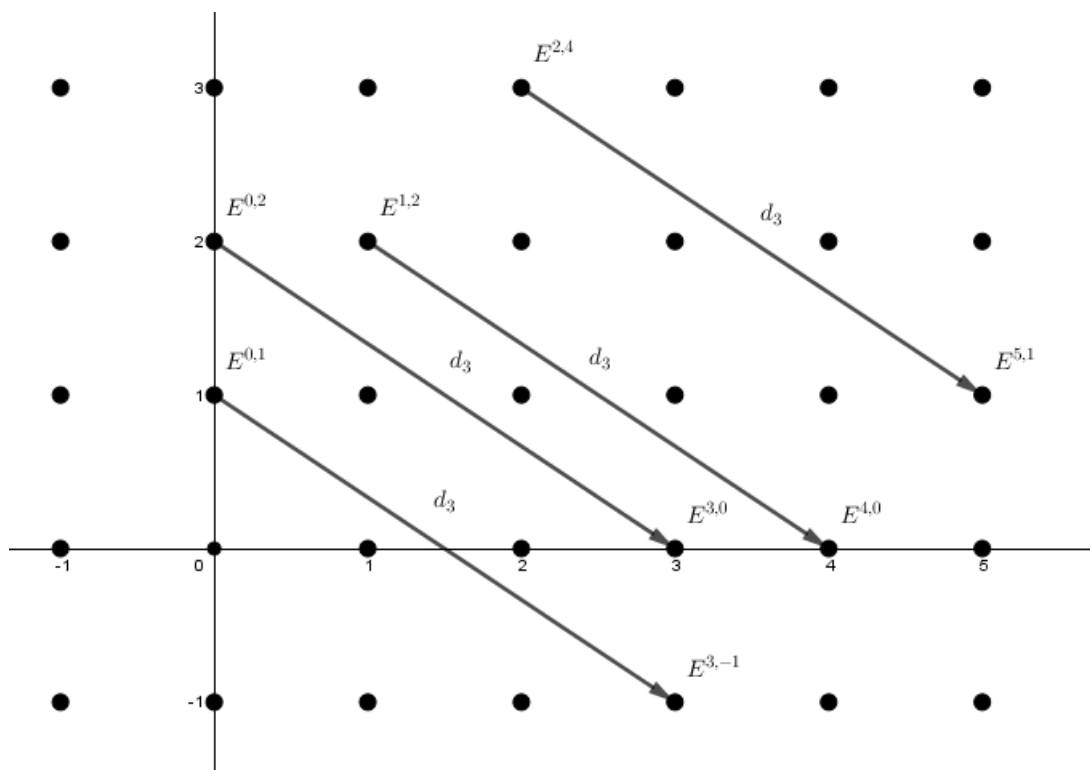


FIGURA 2.1: Representación en el plano de un módulo bigraduado.

Con el diferencial, podemos definir la homología del módulo diferencial bigraduado de la siguiente manera.

Definición 2.2. La **homología** de un R -módulo diferencial bigraduado, con bigrado $(r, 1 - r)$ se puede tomar como

$$H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r) := \frac{\text{Ker}(d_r : E^{p,q} \longrightarrow E^{p+r,q+(1-r)})}{\text{Im}(d_r : E^{p-r,q-(1-r)} \longrightarrow E^{p,q})}.$$

Con estas dos nociones podemos dar la definición de sucesión espectral.

Definición 2.3. Una **sucesión espectral** es una colección de R -módulos diferenciales bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r \in \mathbb{N}}$, donde las diferenciales d_r son todas de bigrado $(-r, r - 1)$ (para el caso de una sucesión espectral del tipo homológico), o todas de bigrado $(r, 1 - r)$ (para una sucesión espectral de tipo cohomológico), a cada R -módulo $E_r^{*,*}$ se le suele llamar una r -página de la sucesión espectral. Y para cada p, q, r , $E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

Para identificar el límite de una sucesión espectral, presentaremos dicha sucesión espectral como una torre de submódulos de un módulo dado. Será claro a partir de la torre, a donde la información está convergiendo. En adelante trabajaremos con sucesiones espectrales de tipo cohomológico, ya que es la manera más usual de trabajar con sucesiones espectrales, en el caso de una sucesión espectral de tipo homológico los cálculos son análogos, ya que podemos pensar en ese caso que los diferenciales d_r tienen bigrado $(-r, r - 1)$ y no $(r, 1 - r)$ como en el caso cohomológico, lo que se interpreta como invertir las flechas en la Figura 2.1.

Dada una sucesión espectral (cohomológica) de módulos $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^\infty$, empezaremos con el R -módulo bigraduado $E_2^{*,*}$. Así, el bigrado de d_r es $(r, 1 - r)$. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ fijos. Para $r = 2$ el bigrado de d_2 es $(2, 1 - 2)$. Consideremos entonces los siguientes dominios y codominios del diferencial d_2 :

$$E_2^{p-2,q-(1-2)} \xrightarrow{d_2^{p-2,q+1}} E_2^{p,q} \xrightarrow{d_2^{p,q}} E_2^{p+2,q+(1-2)}.$$

En este contexto, definimos el conjunto de *ciclos* y *fronteras* del R -módulo bigraduado $E_2^{*,*}$ en la sucesión espectral de la siguiente manera.

Definición 2.4. Definimos el conjunto de **ciclos** como el kernel de d_2 :

$$Z_2^{p,q} := \text{Ker}(d_2 : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q+(1-2)}),$$

y el conjunto de **fronteras** como la imagen de d_2 :

$$B_2^{p,q} := \text{Im}(d_2 : E_2^{p-2,q-(1-2)} \longrightarrow E_2^{p,q}).$$

Dado que el kernel y la imagen son también submódulos, y se cumple que $d \circ d = 0$, entonces obtenemos las siguientes contenciones de submódulos:

$$B_2^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q} \subseteq E_2^{p,q}. \quad (2.1)$$

Y por la Definición 2.3 de sucesión espectral y la Definición 2.2 de la homología de un R -módulo diferencial bigraduado, podemos notar que

$$E_3^{p,q} \cong Z_2^{p,q} / B_2^{p,q}. \quad (2.2)$$

Para $r = 3$ el bigrado de d_3 es $(3, 1 - 3)$. Siguiendo la idea del desarrollo anterior y considerando el Isomorfismo (2.2), obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} E_3^{p-3,q-(1-3)} & \xrightarrow{d_3^{p-3,q+2}} & E_3^{p,q} & \xrightarrow{d_3^{p,q}} & E_3^{p+3,q+(1-3)} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ Z_2^{p-3,q-(1-3)} & \xrightarrow{d_3^{p-3,q+2}} & Z_2^{p,q} & \xrightarrow{d_3^{p,q}} & Z_2^{p+3,q+(1-3)} \\ \frac{Z_2^{p-3,q-(1-3)}}{B_2^{p-3,q-(1-3)}} & \xrightarrow{d_3^{p-3,q+2}} & \frac{Z_2^{p,q}}{B_2^{p,q}} & \xrightarrow{d_3^{p,q}} & \frac{Z_2^{p+3,q+(1-3)}}{B_2^{p+3,q+(1-3)}} \end{array}$$

Definiremos $\overline{Z_3^{p,q}}$ de manera análoga a la Definición 2.4.

$$\overline{Z_3^{p,q}} := \text{Ker}(d_3 : E_3^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,q+(1-3)}),$$

ahora, por el Isomorfismo (2.2), podemos notar que $\overline{Z_3^{p,q}} \leq E_3^{p,q} \cong Z_2^{p,q} / B_2^{p,q}$. Por lo tanto $\overline{Z_3^{p,q}}$ es de la forma

$$\overline{Z_3^{p,q}} = Z_3^{p,q} / B_2^{p,q},$$

donde $Z_3^{p,q}$ es tal que

$$B_2^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q}. \quad (2.3)$$

Similarmente, sea

$$\overline{B_3^{p,q}} := \text{Im}(d_3 : E_3^{p-3,q-(1-3)} \longrightarrow E_3^{p,q}),$$

entonces por el Isomorfismo (2.2) podemos notar de manera análoga que $\overline{B_3^{p,q}} \leq E_3^{p,q} \cong Z_2^{p,q}/B_2^{p,q}$, obteniendo también que $\overline{B_3^{p,q}}$ es de la forma

$$\overline{B_3^{p,q}} = B_3^{p,q}/B_2^{p,q},$$

donde $B_3^{p,q}$ es tal que

$$B_2^{p,q} \subseteq B_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q}. \quad (2.4)$$

Además, dado que $\overline{B_3^{p,q}} = \text{Im}(d_3) \subseteq \text{Ker}(d_3) = \overline{Z_3^{p,q}}$, entonces podemos observar que

$$B_3^{p,q}/B_2^{p,q} \leq Z_3^{p,q}/B_2^{p,q},$$

obteniendo otra contención similar a las anteriores:

$$B_3^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q}. \quad (2.5)$$

Nos podemos dar cuenta a partir de las contenciones obtenidas en cada una de las Contenciones (2.1), (2.3), (2.4) y (2.5), que estamos construyendo la siguiente filtración para el R -módulo bigraduado $E_2^{*,*}$:

$$B_2^{p,q} \subseteq B_3^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q} \subseteq E_2^{p,q}.$$

A continuación repetiremos el procedimiento anterior una vez más para observar algunas propiedades. Primero calculemos $E_4^{p,q}$, que como sabemos es la homología del anterior $E_3^{p,q}$, siguiendo la Definición 2.2 y el desarrollo previo es claro que éste es de la forma $E_4^{p,q} \cong \overline{Z_3^{p,q}}/\overline{B_3^{p,q}}$, pero ya hemos calculado $\overline{Z_3^{p,q}}$ y $\overline{B_3^{p,q}}$ en términos de $Z_3^{p,q}$, $B_3^{p,q}$ y $B_2^{p,q}$, entonces, por el tercer teorema de isomorfismo para módulos (puede consultarse en [1]) es evidente que

$$E_4^{p,q} \cong \overline{Z_3^{p,q}}/\overline{B_3^{p,q}} \cong \frac{Z_3^{p,q}/B_2^{p,q}}{B_3^{p,q}/B_2^{p,q}} \cong Z_3^{p,q}/B_3^{p,q}. \quad (2.6)$$

Ahora podemos dar este sencillo diagrama para calcular $\overline{Z_4^{p,q}}$ y $\overline{B_4^{p,q}}$:

$$\begin{array}{ccccc} E_4^{p-4,q-(1-4)} & \xrightarrow{d_4^{p-4,q+3}} & E_4^{p,q} & \xrightarrow{d_4^{p,q}} & E_4^{p+4,q+(1-4)} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \frac{Z_3^{p-4,q-(1-4)}}{B_3^{p-4,q-(1-4)}} & \xrightarrow{d_4^{p-4,q+3}} & \frac{Z_3^{p,q}}{B_3^{p,q}} & \xrightarrow{d_4^{p,q}} & \frac{Z_3^{p+4,q+(1-4)}}{B_3^{p+4,q+(1-4)}} \end{array}$$

Definiremos $\overline{Z_4^{p,q}}$ de manera análoga a la Definición 2.4.

$$\overline{Z}_4^{p,q} := \text{Ker}(d_4 : E_4^{p,q} \longrightarrow E_4^{p+4,q+(1-4)}),$$

y observamos por el Isomorfismo (2.6) (análogamente a cuando usábamos el Isomorfismo (2.2)), que $\overline{Z}_4^{p,q} \leq E_4^{p,q} \cong Z_3^{p,q}/B_3^{p,q}$, obteniendo también que $\overline{Z}_4^{p,q}$ es de la forma

$$\overline{Z}_4^{p,q} = Z_4^{p,q}/B_3^{p,q},$$

donde $Z_4^{p,q}$ es tal que

$$B_3^{p,q} \subseteq Z_4^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q}. \quad (2.7)$$

Similarmente, sea

$$\overline{B}_4^{p,q} := \text{Im}(d_4 : E_4^{p-4,q-(1-4)} \longrightarrow E_4^{p,q}),$$

podemos notar de manera análoga por el Isomorfismo (2.6) que $\overline{B}_4^{p,q} \leq E_4^{p,q} \cong Z_3^{p,q}/B_3^{p,q}$, obteniendo también que $\overline{B}_4^{p,q}$ es de la forma

$$\overline{B}_4^{p,q} = B_4^{p,q}/B_3^{p,q},$$

donde $B_4^{p,q}$ es tal que

$$B_3^{p,q} \subseteq B_4^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q}. \quad (2.8)$$

Además, dado que $\overline{B}_4^{p,q} = \text{Im}(d_4) \subseteq \text{Ker}(d_4) = \overline{Z}_4^{p,q}$, entonces podemos observar que

$$B_4^{p,q}/B_3^{p,q} \leq Z_4^{p,q}/B_3^{p,q},$$

obteniendo otra contención similar a las anteriores:

$$B_4^{p,q} \subseteq Z_4^{p,q}. \quad (2.9)$$

Nos podemos dar cuenta a partir de las Contenciones (2.7), (2.8) y (2.9) del procedimiento anterior, que seguimos construyendo la siguiente filtración para el R -módulo bigraduado $E_2^{*,*}$:

$$B_2^{p,q} \subseteq B_3^{p,q} \subseteq B_4^{p,q} \subseteq Z_4^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q} \subseteq E_2^{p,q}.$$

En resumen, si continuamos con este procedimiento hasta cierto n , obtenemos la siguiente filtración para cada $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$B_2^{p,q} \subseteq B_3^{p,q} \subseteq B_4^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_n^{p,q} \subseteq B_{n+1}^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_{n+1}^{p,q} \subseteq Z_n^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_4^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q} \subseteq E_2^{p,q}.$$

Con la propiedad de que

$$\begin{aligned} E_{n+1}^{p,q} &\cong Z_n^{p,q}/B_n^{p,q}, \\ d_{n+1} : E_{n+1}^{p,q} &\longrightarrow E_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}, \\ \text{Ker}(d_{n+1}) &= Z_{n+1}^{p,q}/B_n^{p,q}, \\ \text{Im}(d_{n+1}) &= B_{n+1}^{p,q}/B_n^{p,q}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Resulta evidente que la siguiente es una sucesión exacta corta, la cual es inducida por d_{n+1} , considerando la Propiedad (2.10) y lo anteriormente desarrollado:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n+1}) & \xrightarrow{i} & E_{n+1}^{p,q} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \text{Im}(d_{n+1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \frac{Z_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}} & \xrightarrow{i} & \frac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \frac{B_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Para lo siguiente vamos a considerar el primer y tercer teorema de isomorfismo de módulos, los cuales se pueden consultar en [1]. Por el primer teorema de isomorfismo y a partir del renglón inferior obtenemos

$$\frac{Z_n^{p,q}/B_n^{p,q}}{\text{Ker}(d_{n+1})} \xrightarrow[\cong]{\overline{d_{n+1}}} \text{Im}(d_{n+1}),$$

pero por la Propiedad (2.10) sabemos cómo son $\text{Ker}(d_{n+1}) = Z_{n+1}^{p,q}/B_n^{p,q}$, al igual que $\text{Im}(d_{n+1}) = B_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}/B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}$, lo cual implica lo siguiente utilizando el tercer teorema de isomorfismo:

$$\frac{\frac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}}}{\frac{Z_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}}} \xrightarrow{\cong} \frac{Z_n^{p,q}}{Z_{n+1}^{p,q}} \xrightarrow[\cong]{\overline{d_{n+1}}} \frac{B_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}.$$

Con lo anterior podemos darnos una idea de hacia donde está convergiendo la información de la sucesión espectral. A continuación, recíprocamente, veremos qué información nos puede proporcionar una torre de submódulos dada para un R -módulo bigraduado $E_2^{*,*}$ junto con un conjunto de isomorfismos.

Observación 2.1.1. Dado un R -módulo diferencial bigraduado $\{E^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ y una filtración para cada $p, q \in \mathbb{Z}$ de la forma

$$B_2^{p,q} \subseteq B_3^{p,q} \subseteq B_4^{p,q} \subseteq \cdots \subseteq B_n^{p,q} \subseteq B_{n+1}^{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z_{n+1}^{p,q} \subseteq Z_n^{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z_4^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q} \subseteq E_2^{p,q},$$

y dados los isomorfismos

$$\frac{Z_n^{p,q}}{Z_{n+1}^{p,q}} \xrightarrow[\cong]{\phi} \frac{B_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}},$$

obtenemos una sucesión espectral construida como sigue. Definimos el siguiente $E_{n+1}^{p,q}$ como el cociente de módulos

$$E_{n+1}^{p,q} := Z_n^{p,q} / B_n^{p,q},$$

y definimos el diferencial d_{n+1} como la composición

$$d_{n+1} : \frac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}} \xrightarrow{\pi} \frac{Z_n^{p,q}}{Z_{n+1}^{p,q}} \xrightarrow[\cong]{\phi} \frac{B_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}} \xrightarrow{i} \frac{Z_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}},$$

donde π es la proyección canónica e i es la inclusión. Notemos que, en efecto, la colección $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^{\infty}$ definida previamente es una sucesión espectral. Basta probar, siguiendo la Definición 2.3, que $E_{n+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_n^{*,*}, d_n)$ y que $d_{n+1} \circ d_{n+1} = 0$. Para demostrar que $d_{n+1} \circ d_{n+1} = 0$ debemos fijarnos en su definición en la Observación 2.1.1, a partir de la cual obtenemos la siguiente composición:

$$d_{n+1} \circ d_{n+1} : \frac{Z_n^{p-(n+1),q-(1-(n+1))}}{B_n^{p-(n+1),q-(1-(n+1))}} \xrightarrow{\pi'} \frac{Z_n^{p-(n+1),q-(1-(n+1))}}{Z_{n+1}^{p-(n+1),q-(1-(n+1))}} \xrightarrow[\cong]{\phi'} \frac{B_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}} \xrightarrow{i'} \frac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}}$$

$$\xrightarrow{\pi} \frac{Z_n^{p,q}}{Z_{n+1}^{p,q}} \xrightarrow[\cong]{\phi} \frac{B_{n+1}^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}} \xrightarrow{i} \frac{Z_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}}{B_n^{p+(n+1),q+(1-(n+1))}},$$

pero la composición anterior de i con π es cero, ya que $B_{n+1}^{p,q} \subseteq Z_{n+1}^{p,1}$, es decir:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \frac{B_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}} & \xrightarrow{i} & \frac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}} & \xrightarrow{\pi} & \frac{Z_n^{p,q}}{Z_{n+1}^{p,q}} \end{array}$$

Por lo tanto, $d_{n+1} \circ d_{n+1} = 0$.

Para probar que $E_{n+2}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_{n+1}^{*,*}, d_{n+1})$ primero consideremos la Definición 2.2:

$$H^{p,q}(E_{n+1}^{*,*}, d_{n+1}) = \frac{\text{Ker}(d_{n+1})}{\text{Im}(d_{n+1})},$$

ahora veamos cómo son $\text{Ker}(d_{n+1})$ y $\text{Im}(d_{n+1})$, como $Z_{n+1}^{p,q} \subseteq Z_n^{p,q}$, y tomando en cuenta la composición $d_{n+1} \circ d_{n+1}$ que acabamos de ver, entonces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d_{n+1}) &= (i\phi\pi)^{-1}(0) \\ &= \pi^{-1}\phi^{-1}i^{-1}(0) \\ &= \pi^{-1}\phi^{-1}(0) \\ &= \pi^{-1}(0) \quad \text{por ser } \phi \text{ un isomorfismo} \\ &= \frac{Z_{n+1}^{p,q} \cap Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}} \\ &= \frac{Z_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}}, \\ \text{Im}(d_{n+1}) &= (i'\phi'\pi')\left(\frac{Z_n^{p-(n+1),q-(1-(n+1))}}{B_n^{p-(n+1),q-(1-(n+1))}}\right) \\ &= i'\left(\frac{B_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}}\right) \quad \text{pues } \phi' \text{ y } \pi' \text{ son sobreyectivas} \\ &= \frac{B_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el tercer teorema de isomorfismo, $H^{p,q}(E_{n+1}^{*,*}, d_{n+1})$ resulta ser:

$$\begin{aligned} H^{p,q}(E_{n+1}^{*,*}, d_{n+1}) &= \frac{Z_{n+1}^{p,q}/B_n^{p,q}}{B_{n+1}^{p,q}/B_n^{p,q}} \\ &\cong \frac{Z_{n+1}^{p,q}}{B_{n+1}^{p,q}} \\ &= E_{n+2}^{p,q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H^{p,q}(E_{n+1}^{*,*}, d_{n+1}) = E_{n+2}^{p,q}$.

Definición 2.5. A partir de estas observaciones podemos dar las siguientes definiciones para algunos términos.

- Si $x \in Z_r^{p,q}$ es distinto de cero, se dice que x **sobrevive** al **r -ésimo nivel**,
- El conjunto $B_r^{p,q} \subseteq E_2^{p,q}$ se llama el conjunto de **fronteras** en el **nivel r -ésimo**,

- El módulo bigraduado $E_r^{*,*} = \{E_r^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ se llama ***r*-término** de la sucesión espectral, o la ***r*-ésima página**,
- Sea $Z_\infty^{p,q} := \bigcap_n Z_n^{p,q}$,
- Sea $B_\infty^{p,q} := \bigcup_n B_n^{p,q}$,
- Definimos $E_\infty^{p,q} := Z_\infty^{p,q} / B_\infty^{p,q}$.

El conjunto $Z_\infty^{p,q}$ se conoce como el submódulo de $E_2^{p,q}$ formado por los elementos que sobreviven siempre, i.e, el conjunto de los elementos que son ciclos en todos los niveles. El conjunto $B_\infty^{p,q}$ es el conjunto de los elementos que eventualmente se vuelven fronteras. Nuestra meta es calcular $E_\infty^{p,q}$, que es el módulo que se obtiene después del cálculo infinito de las homologías sucesivas.

Definición 2.6. Una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^\infty$ se **colapsa** en el N -ésimo término si $d_r \equiv 0$ para cada $r \geq N$.

Dada una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^\infty$, vimos que esto implica que tenemos una colección de sucesiones exactas cortas como la siguiente, para cada $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \frac{Z_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q}} \xrightarrow{i} \frac{Z_{r-1}^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q}} \xrightarrow{d_r} \frac{B_r^{p+r,q+1-r}}{B_{r-1}^{p+r,q+1-r}} \longrightarrow 0,$$

de la cual es evidente que si $d_r \equiv 0$ para cada $r \geq N$, entonces la función i en la sucesión anterior, es sobreyectiva. En este caso, podemos afirmar entonces que $Z_r^{p,q} = Z_{r-1}^{p,q}$, en efecto, sabemos que siempre $Z_r^{p,q} \subseteq Z_{r-1}^{p,q}$, para probar la otra contención tomemos un elemento $y \in Z_{r-1}^{p,q}$, entonces, si consideramos su clase en el módulo cociente $\bar{y} \in Z_{r-1}^{p,q} / B_{r-1}^{p,q}$ y la sobreyectividad de i , sabemos que debe existir un elemento $\bar{x} \in Z_r^{p,q} / B_{r-1}^{p,q}$ tal que $\bar{y} = \bar{x}$, y esto significa que $x - y \in B_{r-1}^{p,q}$, así que existe un $b \in B_{r-1}^{p,q}$ tal que $x - y = b$ y por lo tanto $y = x - b$, dando como resultado que $y \in Z_r^{p,q}$. En conclusión $Z_{r-1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$ y así $Z_{r-1}^{p,q} = Z_r^{p,q}$ para cada $r \geq N$, entonces la torre de submódulos queda:

$$\begin{aligned} B_2^{p,q} \subseteq B_3^{p,q} \subseteq B_4^{p,q} \subseteq \cdots \subseteq B_{N-1}^{p,q} = B_N^{p,q} = \cdots = B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} = \cdots = Z_N^{p,q} = Z_{N-1}^{p,q} \subseteq \\ \cdots \subseteq Z_4^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q} \subseteq Z_2^{p,q} \subseteq E_2^{p,q}, \end{aligned}$$

y concluimos que $E_\infty^{p,q} = E_N^{p,q} = E_r^{p,q}$ para cada $r \geq N$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

2.1.2. Módulos filtrados diferenciales

Ahora que podemos definir una sucesión espectral, estudiaremos cómo podemos construir una, a partir de un módulo diferencial graduado, tal como aparece en [6].

Definición 2.7. Una **filtración** (A, F^*) en un R -módulo A es una familia de submódulos $\{F^p A\}_{p \in \mathbb{Z}}$ de la forma:

$$\begin{aligned} & \dots \subseteq F^{p+1} A \subseteq F^p A \subseteq F^{p-1} A \subseteq \dots \subseteq A, & \text{cuando es filtración decreciente,} \\ \text{o} & \dots \subseteq F^{p-1} A \subseteq F^p A \subseteq F^{p+1} A \subseteq \dots \subseteq A, & \text{cuando es filtración creciente.} \end{aligned}$$

Tomemos $A = \mathbb{Z}$ y la siguiente filtración:

$$F^p \mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}; & p \leq 0, \\ 2^p \mathbb{Z}; & p > 0. \end{cases}$$

Entonces obtenemos la filtración:

$$\dots \subseteq 8\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z},$$

la cual se puede representar como la siguiente filtración decreciente F^* :

$$\dots \subseteq F^3 A \subseteq F^2 A \subseteq F^1 A \subseteq F^0 A = A.$$

A partir de una filtración como en la Definición 2.7, se puede asociar un módulo graduado al R -módulo A de la siguiente manera.

Definición 2.8. El **módulo graduado asociado** $a(A, F^*)$ es

$$E_0^p(A) := \begin{cases} F^p A / F^{p+1} A; & F^* \text{ decreciente,} \\ F^p A / F^{p-1} A; & F^* \text{ creciente.} \end{cases}$$

Notemos que si tenemos (A, F^*) un R -módulo filtrado, con F^* acotado por arriba y por abajo, es decir, $F^k A = \{0\}$ si $k > n$ y $F^k A = A$ si $k < 0$, entonces la filtración F^* queda de la forma

$$F^* : F^{n+1} = \{0\} \subseteq F^n A \subseteq F^{n-1} A \subseteq \dots \subseteq F^1 A \subseteq F^0 A \subseteq F^{-1} A = A,$$

por lo tanto, su módulo graduado asociado $E_0^*(A)$ es posiblemente no trivial en los grados k tal que $-1 \leq k \leq n$, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 E_0^{-2}(A) &= F^{-2}A/F^{-1}A \\
 &= A/A \\
 &= \{0\}, \\
 E_0^{-1}(A) &= F^{-1}A/F^0A \\
 &= A/F^0A, \\
 &\vdots \\
 E_0^n(A) &= F^nA/F^{n+1}A \\
 &= F^nA/\{0\}, \\
 E_0^{n+1}(A) &= F^{n+1}A/F^{n+2}A \\
 &= \{0\}/\{0\} \\
 &= \{0\}.
 \end{aligned}$$

Observación 2.1.2. Sea (A, F^*) un R -módulo filtrado con F^* acotado por arriba y por abajo tal como acabamos de mencionar. Entonces obtenemos la siguiente serie de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow \{0\} \xrightarrow{i} F^nA \xrightarrow{=} F^nA/\{0\} = E_0^n(A) \longrightarrow 0, \\
 0 &\longrightarrow F^nA \xrightarrow{i} F^{n-1}A \xrightarrow{\pi} F^{n-1}A/F^nA = E_0^{n-1}(A) \longrightarrow 0, \\
 0 &\longrightarrow F^{n-1}A \xrightarrow{i} F^{n-2}A \xrightarrow{\pi} F^{n-2}A/F^{n-1}A = E_0^{n-2}(A) \longrightarrow 0, \\
 &\vdots \\
 0 &\longrightarrow F^1A \xrightarrow{i} F^0A \xrightarrow{\pi} F^0A/F^1A = E_0^0(A) \longrightarrow 0, \\
 0 &\longrightarrow F^0A \xrightarrow{i} F^{-1}A \xrightarrow{\pi} F^{-1}A/F^0A = E_0^{-1}(A) \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

En el mejor de los casos, cuando A es un espacio vectorial, esto nos permite recuperar la información de todo nuestro espacio, ya que cada una de estas sucesiones exactas cortas se escinde y entonces podemos calcular A como la siguiente suma directa mediante un

proceso iterativo de cancelación con cada término de la filtración:

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_0^p \cong \bigoplus_{p=-1}^n \frac{F^p A}{F^{p+1} A} \cong A.$$

Definición 2.9. Consideremos ahora H^* , un R -módulo graduado que está filtrado por F^* , es decir, H^* es de la forma: $H^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n$ y existe una filtración de la forma:

$$\begin{aligned} & \dots \subseteq F^{p+1} H^* \subseteq F^p H^* \subseteq F^{p-1} H^* \subseteq \dots \subseteq H^*, \quad \text{una filtración decreciente,} \\ \text{o} \quad & \dots \subseteq F^{p-1} H^* \subseteq F^p H^* \subseteq F^{p+1} H^* \subseteq \dots \subseteq H^*, \quad \text{una filtración creciente.} \end{aligned}$$

Entonces definimos para cada grado n una nueva filtración de la siguiente forma:

$$F^p H^n := F^p H^* \cap H^n.$$

En esta definición, obtenemos una filtración para cada n del R -módulo H^n , como la siguiente:

$$\begin{aligned} & \dots \subseteq F^{p+1} H^n \subseteq F^p H^n \subseteq F^{p-1} H^n \subseteq \dots \subseteq H^n, \quad \text{una filtración decreciente,} \\ \text{o} \quad & \dots \subseteq F^{p-1} H^n \subseteq F^p H^n \subseteq F^{p+1} H^n \subseteq \dots \subseteq H^n, \quad \text{una filtración creciente.} \end{aligned}$$

A partir de estas consideraciones podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 2.10. Definimos el **módulo bigraduado asociado** a (H^*, F^*) por

$$E_0^{p,q}(H^*, F^*) := \begin{cases} F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}; & F^* \text{ decreciente,} \\ F^p H^{p+q} / F^{p-1} H^{p+q}; & F^* \text{ creciente.} \end{cases}$$

A continuación daremos una definición acerca de la convergencia de una sucesión espectral, para la cual debemos recordar la Definición 2.5 del término $E_\infty^{p,q}$ y la Definición 2.10 de módulo bigraduado asociado.

Definición 2.11. Una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^\infty$ **converge** a H^* , un R -módulo graduado, si existe una filtración F^* para H^* tal que $E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F^*)$.

En el mejor de los casos, cuando trabajamos sobre espacios vectoriales, esto nos permite recuperar la información de todo nuestro espacio. Siguiendo la Observación 2.1.2 obtenemos

$$\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,q} \cong \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_0^{p,q} \cong H^*.$$

La siguiente definición y las observaciones que haremos posteriormente serán de utilidad para los propósitos del próximo capítulo, y con ello podremos enunciar un teorema acerca de la convergencia de sucesiones espectrales.

Definición 2.12. *Un R -módulo A es un **módulo diferencial graduado filtrado** si cumple las siguientes propiedades:*

1. A es suma directa de submódulos, es decir, $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n$,
2. Existe un R -homomorfismo $d : A \rightarrow A$ de grado 1 ($d : A^n \rightarrow A^{n+1}$) ó de grado -1 ($d : A^n \rightarrow A^{n-1}$) tal que $d \circ d = 0$,
3. A tiene una filtración F y la diferencial d respeta la filtración, es decir, $d : F^p A \rightarrow F^p A$.

Se sigue de la Definición 2.12 de módulo diferencial graduado filtrado, que tenemos el siguiente diagrama, donde $F^p A^n = F^p A \cap A^n$, para el caso de una filtración F decreciente en A :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 \dots & \xrightarrow{i} & F^{p+1}A^n & \xrightarrow{i} & F^pA^n & \xrightarrow{i} & F^{p-1}A^n & \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} & A \cap A^n = A^n \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 \dots & \xrightarrow{i} & F^{p+1}A^{n+1} & \xrightarrow{i} & F^pA^{n+1} & \xrightarrow{i} & F^{p-1}A^{n+1} & \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} & A^{n+1} \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 \dots & \xrightarrow{i} & F^{p+1}A^{n+2} & \xrightarrow{i} & F^pA^{n+2} & \xrightarrow{i} & F^{p-1}A^{n+2} & \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} & A^{n+2} \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Observación 2.1.3. Si $(A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n, d, F)$ es un R -módulo diferencial graduado filtrado, entonces el R -módulo definido como $H(A, d) := \text{Ker}(d : A \rightarrow A) / \text{Im}(d : A \rightarrow A)$, hereda una filtración definida por

$$F^p H(A, d) := \text{Im}(H(F^p A, d) \xrightarrow{i^*} H(A, d)) .$$

Para verificar esta observación, consideremos una filtración (decreciente) para A :

$$\dots \subseteq F^{p+1}A \subseteq F^pA \subseteq F^{p-1}A \subseteq \dots \subseteq A,$$

entonces, por la Definición 2.12 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & F^{p+1}A & \xrightarrow{i_{p+1,p}} & F^pA & \xrightarrow{i_{p,p-1}} & F^{p-1}A & \xrightarrow{i_{p-1,p-2}} & \dots & \xrightarrow{i} & A \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & & & \downarrow d \\
 \dots & \longrightarrow & F^{p+1}A & \xrightarrow{i_{p+1,p}} & F^pA & \xrightarrow{i_{p,p-1}} & F^{p-1}A & \xrightarrow{i_{p-1,p-2}} & \dots & \xrightarrow{i} & A \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & & & \downarrow d \\
 \dots & \longrightarrow & F^{p+1}A & \xrightarrow{i_{p+1,p}} & F^pA & \xrightarrow{i_{p,p-1}} & F^{p-1}A & \xrightarrow{i_{p-1,p-2}} & \dots & \xrightarrow{i} & A \\
 & & & & & & & & & & \downarrow d \\
 & & & & & & & & & & i_{p+1}
 \end{array}$$

Al calcular la homología en un renglón obtenemos la siguiente sucesión, donde las inclusiones del diagrama anterior sabemos que inducen homomorfismos en homología:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H(F^{p+1}A, d) & \xrightarrow{i_{p+1,p}^*} & H(F^pA, d) & \xrightarrow{i_{p,p-1}^*} & H(F^{p-1}A, d) & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{i^*} & H(A, d) \\
 & & & & & & & & & & \downarrow d \\
 & & & & & & & & & & i_{p+1}^*
 \end{array}$$

Así, considerando la contención $i_{p+1,p}^*(H(F^{p+1}A, d)) \subseteq H(F^pA, d)$ y la filtración definida en la Observación 2.1.3, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 F^{p+1}H(A, d) &= i_{p+1}^*(H(F^{p+1}A, d)) \\
 &= i_p^*(i_{p+1,p}^*(H(F^{p+1}A, d))) \quad \text{por funtorialidad} \\
 &\subseteq i_p^*(H(F^pA, d)) \\
 &= F^pH(A, d).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el R -módulo $H(A, d)$ hereda una nueva filtración de la siguiente manera:

$$\dots \subseteq F^{p+1}H(A, d) \subseteq F^pH(A, d) \subseteq F^{p-1}H(A, d) \subseteq \dots \subseteq H(A, d).$$

Siguiendo con esta idea, haremos otra observación a continuación con la que concluiremos que la homología del R -módulo A , es también un R -módulo diferencial graduado filtrado, con lo cual concluiremos esta sección para en la siguiente enunciar un teorema importante de convergencia y desarrollar los detalles de la prueba.

Observación 2.1.4. Si $(A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n, d, F)$ es un R -módulo diferencial graduado filtrado, entonces el R -módulo definido como $H(A, d) := \text{Ker}(d : A \rightarrow A) / \text{Im}(d : A \rightarrow A)$, es también graduado.

Consideraremos al diferencial d de grado 1, es decir, $d : A^n \rightarrow A^{n+1}$ por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H(A, d) &= \frac{\text{Ker}(d : \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n \rightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{n+1})}{\text{Im}(d : \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{n-1} \rightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n)} \\ &= \frac{\bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Ker}(d_n)}{\bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Im}(d_{n-1})} \\ &\cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Ker}(d_n)}{\text{Im}(d_{n-1})}, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H(A, d) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(A, d)$. Tras estas dos Observaciones 2.1.3 y 2.1.4 podemos concluir que $H(A, d)$ es un R -módulo graduado filtrado. Además, por la definición de $E_0^{p,q}$, entonces $H(A, d)$ tiene módulo bigrado asociado dado por

$$E_0^{p,q}(H(A, d), F) = \frac{F^p(H^{p+q}(A, d))}{F^{p+1}(H^{p+q}(A, d))}.$$

Ahora estamos listos para enunciar el teorema principal.

2.1.3. Teorema de convergencia

Por convención, supongamos que A es un módulo diferencial graduado filtrado con diferencial d de grado 1 y que tiene una filtración decreciente asociada.

Teorema 2.13. Dado un módulo diferencial graduado filtrado $(A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n, d, F)$, determina una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^{\infty}$ con d_r de bigrado $(r, 1-r)$ y con

$$E_1^{p,q} \cong H^{p+q}(F^p A / F^{p+1} A).$$

Además, si la filtración F es acotada, es decir, para cada n existen valores $s = s(n)$ y $t = t(n)$ con $s \geq t$ tal que

$$\{0\} \subseteq F^s A^n \subseteq F^{s-1} A^n \subseteq \dots \subseteq F^{t+1} A^n \subseteq F^t A^n = A^n,$$

entonces la sucesión espectral converge a $H(A, d)$, es decir,

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{F^p(H^{p+q}(A, d))}{F^{p+1}(H^{p+q}(A, d))} = E_0^{p,q}(H(A, d)).$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [6], Capítulo 2. No desarrollaremos los detalles de toda la prueba, sin embargo, demostraremos algunas cosas importantes y haremos bservaciones que serán de utilidad para poder aplicar el teorema. Consideremos la filtración decreciente

$$\dots \subseteq F^p A^{p+q} \subseteq F^{p-1} A^{p+q} \subseteq F^{p-2} A^{p+q} \subseteq \dots \subseteq A.$$

Como d respeta la filtración por la Definición 2.12, y es de grado $+1$, tenemos que $d(F^p A^{p+q}) \subseteq F^p A^{p+q+1}$, por lo que es de la forma $d : F^p A \cap A^{p+q} \longrightarrow F^p A \cap A^{p+q+1}$, por como se define la filtración. Definiremos los siguientes términos:

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &:= F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}), \\ B_r^{p,q} &:= F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}), \\ Z_\infty^{p,q} &:= F^p A^{p+q} \cap \text{Ker}(d : A \longrightarrow A), \\ B_\infty^{p,q} &:= F^p A^{p+q} \cap \text{Im}(d : A \longrightarrow A), \end{aligned}$$

los cuales determinan una torre de submódulos como veremos a continuación. Primero notemos que $F^{p-r} A^{p+q-1} \subseteq F^{p-(r+1)} A^{p+q-1}$, implica $d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \subseteq d(F^{p-(r+1)} A^{p+q-1})$ y por lo tanto $F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \subseteq F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-(r+1)} A^{p+q-1})$, pero esto es por definición

$$B_r^{p,q} \subseteq B_{r+1}^{p,q}.$$

Análogamente, como $F^{p-r} A^{p+q-1} \subseteq A$, entonces $d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \subseteq d(A)$ y por lo tanto $F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \subseteq F^p A^{p+q} \cap d(A)$, pero esto es por definición

$$B_r^{p,q} \subseteq B_\infty^{p,q}.$$

Ahora para los términos $Z_r^{p,q}$ hacemos algo similar. Como $F^{p+r+1} A^{p+q+1} \subseteq F^{p+r} A^{p+q+1}$, entonces $d^{-1}(F^{p+r+1} A^{p+q+1}) \subseteq d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$, por lo tanto

$F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1} A^{p+q+1}) \subseteq F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$, pero esto es por definición

$$Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}.$$

Análogamente, notamos que $0 \in F^{p+r} A^{p+q+1}$, entonces $d^{-1}(0) \subseteq d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$ y por lo tanto $F^p A^{p+q} \cap \text{Ker}(d : A \rightarrow A) \subseteq F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$, pero esto es por definición

$$Z_\infty^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}.$$

Por último, como d es un operador diferencial, ocurre que $d \circ d = 0$, lo que implica que $\text{Im}(d : A \rightarrow A) \subseteq \text{Ker}(d : A \rightarrow A)$, por lo tanto: $F^p A^{p+q} \cap \text{Im}(d : A \rightarrow A) \subseteq F^p A^{p+q} \cap \text{Ker}(d : A \rightarrow A)$, pero esto es por definición

$$B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q}.$$

Por lo tanto, obtenemos para cada $p, q \in \mathbb{Z}$ fijos, la siguiente torre de submódulos:

$$\dots \subseteq B_{-1}^{p,q} \subseteq B_0^{p,q} \subseteq B_1^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_1^{p,q} \subseteq Z_0^{p,q} \subseteq Z_{-1}^{p,q} \subseteq \dots. \quad (2.11)$$

Continuando con las observaciones, notemos que $d(Z_r^{p-r, q+r-1}) = B_r^{p,q}$. Para verificar esto consideremos un resultado conocido de teoría de conjuntos, el cual dice que si tenemos dos conjuntos X y Y cualesquiera, con $S \subseteq X$ un subconjunto de X y $T \subseteq Y$ un subconjunto de Y , entonces la función $F : X \rightarrow Y$ satisface que: $F(S) \cap T = F(S \cap f^{-1}(T))$. Por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned} d(Z_r^{p-r, q+r-1}) &= d(F^{p-r} A^{(p-r)+(q+r-1)} \cap d^{-1}(F^{(p-r)+r} A^{(p-r)+(q+r-1)+1})) \\ &= d(F^{p-r} A^{p+q-1} \cap d^{-1}(F^p A^{p+q})) \\ &= d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \cap (F^p A^{p+q}) \\ &= B_r^{p,q}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

por lo que d tiene el bigrado correcto respecto a la filtración construida.

Supongamos ahora que la filtración es acotada, entonces, para $n = p+q+1$ tenemos lo siguiente con $s(n) \geq t(n)$:

$$\{0\} \subseteq F^{s(n)} A^{p+q+1} \subseteq F^{s(n)-1} A^{p+q+1} \subseteq \dots \subseteq F^{t(n)+1} A^{p+q+1} \subseteq F^{t(n)} A^{p+q+1} = A^{p+q+1},$$

y para $m = p + q - 1$ tenemos:

$$\{0\} \subseteq F^{s(m)} A^{p+q-1} \subseteq F^{s(m)-1} A^{p+q-1} \subseteq \dots \subseteq F^{t(m)+1} A^{p+q-1} \subseteq F^{t(m)} A^{p+q-1} = A^{p+q-1}.$$

Si r es tal que $r + p > s(p + q + 1) = s(n)$, entonces $F^{p+r} A^{p+q+1} = \{0\}$ y obtenemos lo siguiente para cada $r > s(p + q + 1) - p$:

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) \\ &= F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(0) \\ &= F^p A^{p+q} \cap \text{Ker}(d : A \longrightarrow A) \\ &= Z_\infty^{p,q}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por otra parte, si r es tal que $t(m) = t(p + q - 1) \geq p - r$ entonces

$$\begin{aligned} B_r^{p,q} &= F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \\ &= F^p A^{p+q} \cap d(A^{p+q-1}). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Además, de la definición de $B_\infty^{p,q}$ y como $A = \bigoplus_{m=0}^{\infty} A^m$ tenemos que

$$\begin{aligned} B_\infty^{p,q} &= F^p A^{p+q} \cap d(A) \\ &= F^p A^{p+q} \cap \left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} d(A^m) \right), \end{aligned}$$

pero, $d(A^m) \cap F^p A^{p+q} = d(A^m) \cap F^p A \cap A^{p+q} = (d(A^m) \cap A^{p+q}) \cap F^p A$, donde

$$d(A^m) \cap A^{p+q} := \begin{cases} d(A^{p+q-1}) \cap A^{p+q}; & \text{si } m = p + q - 1, \\ 0; & \text{si } m \neq p + q - 1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 B_\infty^{p,q} &= F^p A^{p+q} \cap \left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} d(A^m) \right) \\
 &= \bigoplus_{m=0}^{\infty} (F^p A^{p+q} \cap d(A^m)) \\
 &= \bigoplus_{m=0}^{\infty} (d(A^m) \cap A^{p+q}) \cap F^p A \\
 &= d(A^{p+q-1}) \cap A^{p+q} \cap F^p A \\
 &= d(A^{p+q-1}) \cap F^p A^{p+q}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Por último, de las Ecuaciones (2.14) y (2.15) obtenemos que para cada $r \geq p - t(p+q-1)$,

$$\begin{aligned}
 B_r^{p,q} &= F^p A^{p+q} \cap d(A^{p+q-1}) \\
 &= B_\infty^{p,q}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

En conclusión, juntando las Ecuaciones (2.13) y (2.16) encontramos que para todo r tal que $r \geq s(p+q+1) - p$ y $r \geq p - t(p+q-1)$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Z_r^{p,q} &= Z_\infty^{p,q}, \\
 B_r^{p,q} &= B_\infty^{p,q},
 \end{aligned}$$

lo cual garantiza la convergencia.

Ahora queremos definir los términos $E_r^{p,q}$. Considerando la Torre de Submódulos en la (2.11) es claro que $B_{r-1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$. Notemos también que $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subseteq Z_r^{p,q}$, para verificar esto recordemos la definición de los términos $Z_r^{p,q}$ y que la filtración es decreciente por lo que $F^{p+1} A^{p+q} \subseteq F^p A^{p+q}$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
 Z_{r-1}^{p+1,q-1} &= F^{p+1} A^{(p+1)+(q-1)} \cap d^{-1}(F^{(p+1)+(r-1)} A^{(p+1)+(q-1)+1}) \\
 &= F^{p+1} A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) \\
 &\subseteq F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) \\
 &= Z_r^{p,q}.
 \end{aligned}$$

Por estas afirmaciones tenemos que $Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$, entonces podemos definir $E_r^{p,q}$ como el cociente

$$E_r^{p,q} := \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}.$$

A continuación, para definir el operador d_r , consideremos la proyección canónica:

$$\eta_r^{p,q} : Z_r^{p,q} \longrightarrow \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}} = E_r^{p,q}.$$

Así, $\text{Ker}(\eta_r^{p,q}) = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}$ y notemos que habíamos probado en la Ecuación (2.12) que $d(Z_r^{p,q}) = B_r^{p+r,q-r+1}$. Además, por la Torre de Submódulos (2.11) se cumple que $B_r^{p+r,q-r+1} \subseteq Z_r^{p+r,q-r+1}$, por lo que $d(Z_r^{p,q}) \subseteq Z_r^{p+r,q-r+1}$, así que podemos decir que d es de la forma

$$d : Z_r^{p,q} \longrightarrow Z_r^{p+r,q-r+1}.$$

Similarmente, por la definición de los términos $B_r^{p,q}$ tenemos que $d(B_{r-1}^{p,q}) = \{0\}$, de modo que

$$\begin{aligned} d(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) &= d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) + d(B_{r-1}^{p,q}) \\ &= d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\ &= B_{r-1}^{(p+1)+(r-1),(q-1)-(r-1)+1} \quad \text{por Ecuación (2.12)} \\ &= B_{r-1}^{p+r,q-r+1} \\ &\subseteq B_{r-1}^{p+r,q-r+1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}, \end{aligned}$$

concluyendo que $d(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) \subseteq Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}$. En conclusión, $d_r := \bar{d}$ está bien definido por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & B_r^{p+r,q-r+1} \subseteq Z_r^{p+r,q-r+1} \\ \downarrow \eta_r^{p,q} & & \downarrow \eta_r^{p+r,q-r+1} \\ E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}} & \xrightarrow{\bar{d}=d_r} & \frac{Z_r^{p+r,q-r+1}}{Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}} = E_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

y dado que $d \circ d = 0$, también ocurre que $d_r \circ d_r = 0$, además, d_r tiene bigrado $(r, 1 - r)$.

Para completar la prueba es necesario demostrar lo siguiente:

1. $H^*(E_r^{*,*}, d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}$,
2. $E_1^{p,q} \cong H^{p+q}\left(\frac{F^p A}{F^{p+1} A}\right)$,
3. $E_\infty^{p,q} \cong \frac{F^p H^{p+q}(A, d)}{F^{p+1} H^{p+q}(A, d)}$.

Que se puede consultar en [6], Capítulo 2, como habíamos mencionado. □

2.2. Parejas exactas

2.2.1. Pareja exacta y la pareja derivada

Definición 2.14. Sean D y E R -módulos (los cuales son bigraduados en casos relevantes) y sean $i : D \rightarrow D$, $j : D \rightarrow E$ y $k : E \rightarrow D$ homomorfismos de R -módulos. Presentamos dichos datos en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

llamaremos a $C = \{D, E, i, j, k\}$ una **pareja exacta** si es exacta en cada término, es decir, si $\text{Im}(i) = \text{Ker}(j)$, $\text{Im}(j) = \text{Ker}(k)$ y $\text{Im}(k) = \text{Ker}(i)$.

Un ejemplo importante de pareja exacta surge de la sucesión exacta larga en homología asociada a una sucesión exacta corta de complejos de cadena, tal como vimos en el capítulo anterior. Los datos se presentan de la siguiente manera.

Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$ un subespacio de X . A partir de lo desarrollado en el Capítulo 2, sabemos que esto define los grupos de n -cadenas tanto para X como para Y , $C_n(X)$ y $C_n(Y)$ respectivamente. Consideremos los espacios vectoriales

$$C_*(X) = \bigoplus_n C_n(X),$$

$$C_*(Y) = \bigoplus_n C_n(Y),$$

entonces tenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejos de cadena, asociados al par (X, Y) :

$$0 \longrightarrow C_*(Y) \xrightarrow{i} C_*(X) \xrightarrow{j} C_*(X)/C_*(Y) \longrightarrow 0.$$

Sabemos por álgebra homológica, lo cual se puede verificar en [1], que lo anterior induce una sucesión exacta larga en homología:

$$\cdots \longrightarrow H_n(Y) \xrightarrow{i_n^*} H_n(X) \xrightarrow{j_n^*} H_n(X, Y) \xrightarrow{k_n^*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots, \quad (2.17)$$

donde $H_n(X, Y)$ denota el n -ésimo grupo de homología del espacio vectorial definido por el cociente $C_*(X, Y) = C_*(X)/C_*(Y)$, y el homomorfismo k_n^* es el homomorfismo de

conexión que aparece en la construcción de la sucesión exacta larga anterior. A partir de la existencia de la sucesión exacta en homología, construiremos a continuación una pareja exacta.

Consideremos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(Y) & \xrightarrow{i_n^*} & H_n(X) \\
 & & \searrow j_n^* \\
 H_{n-1}(Y) & \xleftarrow{k_n^*} & H_n(X, Y)
 \end{array}$$

Y al juntar toda la información obtenemos:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_n H_n(Y) & \xrightarrow{\bigoplus_n i_n^*} & \bigoplus_n H_n(X) \\
 & \swarrow \bigoplus_n k_n^* & \searrow \bigoplus_n j_n^* \\
 & \bigoplus_n H_n(X, Y) &
 \end{array}$$

es decir, tenemos la siguiente pareja exacta:

$$\begin{array}{ccc}
 H(Y) & \xrightarrow{i^*} & H(X) \\
 & \swarrow k^* & \searrow j^* \\
 & H(X, Y) &
 \end{array}$$

A continuación definiremos la pareja derivada, a partir de la cual posteriormente hablaremos de la sucesión espectral asociada a una pareja exacta.

Definición 2.15. Sea $C = \{D, E, i, j, k\}$ la pareja exacta

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{i} & D \\
 & \swarrow k & \searrow j \\
 & E &
 \end{array}$$

definimos el **operador diferencial** $d : E \rightarrow E$ por $d := j \circ k$. También definimos los términos E' y D' de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 E' &= H(E, d) = \text{Ker}(d)/\text{Im}(d), \\
 D' &= i(D) = \text{Ker}(j),
 \end{aligned}$$

y los siguientes homomorfismos $i' : D' \rightarrow D'$, $j' : D' \rightarrow E'$ y $k' : E' \rightarrow D'$ como:

$$\begin{aligned} i' &:= i|_{i(D)}, \\ j'(i(x)) &:= j(x) + d(E), \quad x \in D, \\ k'(e + dE) &:= k(e), \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos la pareja $C' = \{D', E', i', j', k'\}$ la cual es llamada la **pareja derivada** de C , y se representa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{i'} & D' \\ & \swarrow k' & \searrow j' \\ & E' & \end{array}$$

Observación 2.2.1. Podemos observar fácilmente que d es en efecto un operador diferencial, es decir, $d \circ d = 0$.

Para verificar esta observación consideremos la exactitud en E de la pareja exacta C , entonces tenemos que $k \circ j = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} d \circ d &= (j \circ k) \circ (j \circ k) \\ &= j \circ (k \circ j) \circ k \\ &= j \circ (0) \circ k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador d es un operador diferencial.

Observación 2.2.2. Los homomorfismos i' , j' y k' están bien definidos.

Probaremos cada uno de los casos. Primero, para comprobar que i' está bien definida, consideremos lo siguiente: $i'(D') = i|_{i(D)}(i(D)) = i^2(D) = i(i(D)) \subseteq i(D) = D'$.

Por lo tanto, $i'(D') \subseteq D'$ y entonces i' está bien definida.

Ahora, para probar que j' está bien definida, consideremos un $z \in D' = i(D)$, entonces z debe ser de la forma $z = i(x)$ para algún $x \in D$. Supongamos que $i(x) = i(x')$ para algún $x' \in D$, entonces obtenemos que $i(x - x') = i(x) - i(x') = 0$, lo cual implica que $x - x' \in \text{Ker}(i)$, pero $\text{Ker}(i) = \text{Im}(k)$ por exactitud en D (izquierdo), y de esta forma llegamos a que debe existir un $y \in E$ tal que $k(y) = x - x'$. Así, $d(y) = (j \circ k)(y) =$

$j(k(y)) = j(x - x') = j(x) - j(x')$, pero esto implica que $j(x) = j(x') + d(y)$, y con esto notamos que al sumar las clases $d(E)$ en ambos lados obtenemos que $j(x) + d(E) = j(x') + d(E)$, con lo cual concluimos por la Definición 2.15 que $j'(i(x)) = j'(i(x'))$. Además, si $x \in D$, entonces $j(x) \in \text{Ker}(d)$, pues $d(j(x)) = (j \circ k)(j(x)) = j((k \circ j)(x)) = 0$, por exactitud de la pareja C en E .

Por lo tanto, $d(j(x)) = 0$ y así $[j(x)] \in H(E, d) = E'$. Por lo que j' está bien definida.

Por último, para probar que k' está bien definida consideremos el elemento $e + d(E) \in \text{Ker}(d)/\text{Im}(d) = E'$. Así, $e \in \text{Ker}(d) \subseteq E$, ahora notemos que $\text{Im}(k') \subseteq D' = i(D)$, pues $k'(e + d(E)) = k(e)$ por la Definición 2.15, pero $d(e) = 0$ lo cual implica que $(j \circ k)(e) = j(k(e)) = 0$, entonces $k(e) \in \text{Ker}(j) = \text{Im}(i) = i(D) = D'$, con lo que concluimos que $\text{Im}(k') \subseteq D'$. Supongamos ahora que $e + d(E) = e' + d(E)$, entonces tendríamos que $e - e' \in d(E)$ lo cual implicaría que $e - e' = d(x)$ para algún $x \in E$ y así $e = e' + d(E)$ con lo cual obtendríamos que $k(e) = k(e' + d(x)) = k(e') + k((j \circ k)(x)) = k(e') + k(0) = k(e')$.

Por lo tanto, $k'(e + d(E)) = k'(e' + d(E))$. Por lo que k' está bien definida.

A continuación probaremos una proposición que asegura la exactitud de la pareja derivada, con lo cual podremos hablar posteriormente acerca de la conexión de las parejas exactas con las sucesiones espectrales.

Proposición 2.16. Sea $C = \{D, E, i, j, k\}$ la pareja exacta

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{i} & D \\
 & \swarrow k & \searrow j \\
 & & E
 \end{array}$$

entonces la pareja derivada $C' = \{D', E', i', j', k'\}$:

$$\begin{array}{ccc}
 D' & \xrightarrow{i'} & D' \\
 & \swarrow k' & \searrow j' \\
 & & E'
 \end{array}$$

es también exacta.

Demostración. Para demostrar la proposición debemos probar la exactitud de la pareja derivada C' en cada uno de sus términos, es decir, probar la exactitud en el D' izquierdo,

en el D' derecho y en E' . Para probar la exactitud en cada término como acabamos de mencionar y en dicho orden, es necesario probar lo siguiente:

1. $\text{Ker}(i') = \text{Im}(k')$,
2. $\text{Ker}(j') = \text{Im}(i')$,
3. $\text{Ker}(k') = \text{Im}(j')$.

Comencemos probando 1. Para ello desarrollaremos la siguiente serie de igualdades, donde lo más importante a considerar es que en general si tenemos una función $f : X \rightarrow Y$ y un subconjunto $B \subseteq Y$, por herramientas de álgebra básica debemos recordar que $f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f)$. Entonces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(i') &= (i')^{-1}(0) \\
 &= (i|_{i(D)})^{-1}(0) \\
 &= i^{-1}(0) \cap i(D) \\
 &= \text{Ker}(i) \cap \text{Im}(i) \\
 &= \text{Im}(k) \cap \text{Ker}(j) \quad \text{por exactitud} \\
 &= k(k^{-1}(j^{-1}(0))) \\
 &= k((j \circ k)^{-1}(0)) \\
 &= k(\text{Ker}(d)) \quad \text{pues } d = j \circ k \\
 &= k'(\text{Ker}(d)/\text{Im}(d)) \quad \text{por definición de } k' \\
 &= k'(E') \\
 &= \text{Im}(k').
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Ker}(i') = \text{Im}(k')$.

Ahora, para probar el punto 2, primero hagamos algunas observaciones. Notemos que i es sobreyectiva en su imagen, es decir, $i : D \rightarrow i(D)$ es sobreyectiva, y así, por el primer teorema de isomorfismo para módulos (puede consultarse en [1]) tenemos el isomorfismo $\bar{i} : D/\text{Ker}(i) \rightarrow i(D)$ donde $\bar{i}(\bar{x}) := i(x)$. En consecuencia, $D/\text{Ker}(i) \supseteq (\text{Ker}(i) + \text{Ker}(j))/\text{Ker}(i) \cong i(\text{Ker}(i) + \text{Ker}(j))$. Además tenemos que $\text{Ker}(i) \subseteq j^{-1}(d(E))$, pues $d(E) = (j \circ k)(E) = j(\text{Im}(k)) = j(\text{Ker}(i))$, lo que implica que $\text{Ker}(i) \subseteq j^{-1}(d(E))$,

pues $j^{-1}(d(E)) = j^{-1}(j(\text{Ker}(i))) \supseteq \text{Ker}(i)$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(j') &= (j')^{-1}(0) \\
 &= \{z \in i(D) \mid j'(z) = \bar{0}\} \\
 &= \{i(x) \in i(D) \mid j(x) \in d(E)\} \quad \text{por definición de } j' \\
 &= \{i(x) \in i(D) \mid x \in j^{-1}(d(E))\} \\
 &\cong \{\bar{x} \in D/\text{Ker}(i) \mid x \in j^{-1}(d(E))\} \quad \text{pues } \bar{i}^{-1} \text{ es isomorfismo} \\
 &= \{\bar{x} \in \frac{j^{-1}(d(E))}{\text{Ker}(i)}\} \quad \text{pues } \text{Ker}(i) \subseteq j^{-1}(d(E)) \\
 &= \frac{j^{-1}(d(E))}{\text{Ker}(i)} \\
 &= \frac{j^{-1}((j \circ k)(E))}{\text{Ker}(i)} \\
 &= \frac{j^{-1}(j(\text{Im}(k)))}{\text{Ker}(i)} \\
 &= \frac{\text{Im}(k) + \text{Ker}(j)}{\text{Ker}(i)} \quad \text{pues } j^{-1}(j(\text{Im}(k))) = \text{Im}(k) + \text{Ker}(j) \\
 &= \frac{\text{Ker}(i) + \text{Ker}(j)}{\text{Ker}(i)} \quad \text{por exactitud} \\
 &\cong i(\text{Ker}(i) + \text{Ker}(j)) \quad \text{pues } \bar{i} \text{ es isomorfismo} \\
 &= i(\text{Ker}(j)) \\
 &= i(\text{Im}(i)) \quad \text{por exactitud} \\
 &= i(i(D)) \\
 &= \text{Im}(i'), \quad \text{por definición de } i'.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Ker}(j') = \text{Im}(i')$.

Finalmente probaremos el punto 3. Para ello notemos primero que $\text{Im}(d) \subseteq \text{Ker}(k) = \text{Im}(j)$ pues $k \circ d = k(j \circ k) = (k \circ j)(k) = 0$. Además usaremos el hecho de que $\text{Im}(j') = j(D)/\text{Im}(d)$ debido a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Im}(j') &= \{j'(z) \in E' \mid z \in i(D)\} \\
&= \{j'(i(x)) \in E' \mid i(x) \in i(D)\} \\
&= \{j'(i(x)) \in E' \mid x \in D\} \\
&= \{j(x) + d(E) \in E' \mid x \in D\} \\
&= \{j(x) + d(E) \in \frac{\text{Ker}(d)}{\text{Im}(d)} \mid x \in D\} \\
&= \frac{j(D) + \text{Im}(d)}{\text{Im}(d)} \\
&= \frac{j(D)}{\text{Im}(d)},
\end{aligned}$$

y de esa manera obtenemos lo que queríamos:

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(k') &= \{e + d(E) \in E' \mid k'(e + d(E)) = 0\} \\
&= \{e + d(E) \in \frac{\text{Ker}(d)}{\text{Im}(d)} \mid k(e) = 0\} \\
&= \{e + d(E) \in \frac{\text{Ker}(d)}{\text{Im}(d)} \mid e \in \text{Ker}(k)\} \\
&= \{e + d(E) \in \frac{\text{Ker}(k) + \text{Im}(d)}{\text{Im}(d)}\} \\
&= \frac{\text{Ker}(k) + \text{Im}(d)}{\text{Im}(d)} \\
&= \frac{\text{Ker}(k)}{\text{Im}(d)} \\
&= \frac{\text{Im}(j)}{\text{Im}(d)} \\
&= \frac{j(D)}{\text{Im}(d)} \\
&= \text{Im}(j').
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Ker}(k') = \text{Im}(j')$.

Habiendo probado 1, 2 y 3, podemos concluir que la pareja derivada C' es también una pareja exacta. \square

2.2.2. Sucesión espectral asociada a una pareja exacta

La conexión con sucesiones espectrales la desarrollaremos a continuación. Para ello consideraremos la siguiente notación. Dada una pareja exacta $C = \{D, E, i, j, k\}$:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

entonces definimos $d^{(r)}$ y $E^{(r)}$ de la siguiente manera. $E_1 := E = E^{(0)}$, de modo que el operador diferencial $d : E \rightarrow E$ es el mismo que $d_1 : E_1 \rightarrow E_1$ y también es la 0-ésima derivada $d^{(0)} : E^{(0)} \rightarrow E^{(0)}$. Podemos repetir este procedimiento y derivar la pareja derivada C' en otra pareja C'' , de esta manera definimos $E_2 := E' = E^1$ y el operador diferencial $d' : E' \rightarrow E'$ se define como $d' = j' \circ k'$, el cual es el mismo que $d_2 : E_2 \rightarrow E_2$ y también es la primera derivada $d^{(1)} : E^{(1)} \rightarrow E^{(1)}$. De esta misma manera obtendríamos un $E_3 := E'' = E^{(2)}$ y un operador $d_3 := d'' = d^{(2)}$. En general, análogamente a la Definición 2.15, definimos $E^{(r)}$, $D^{(r)}$ y los homomorfismos $i^{(r)} : D^{(r)} \rightarrow D^{(r)}$, $j^{(r)} : D^{(r)} \rightarrow E^{(r)}$, $k^{(r)} : E^{(r)} \rightarrow D^{(r)}$ y $d^{(r)} : E^{(r)} \rightarrow E^{(r)}$ para cada $r \geq 1$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E^{(r)} &:= (E^{(r-1)})' = H(E^{(r-1)}, d^{(r-1)}) = \frac{\text{Ker}(d^{(r-1)})}{\text{Im}(d^{(r-1)})}, \\ D^{(r)} &:= (D^{(r-1)})' = i^{(r-1)}(D^{(r-1)}), \\ i^{(r)} &:= (i^{(r-1)})' = i^{(r-1)}|_{i^{(r-1)}(D^{(r-1)})}, \\ j^{(r)}(i^{(r-1)}(x)) &:= (j^{(r-1)})'(i^{(r-1)}(x)) = j^{(r-1)}(x) + d^{(r-1)}(E^{(r-1)}), \\ k^{(r)}(e + d^{(r-1)}(E^{(r-1)})) &:= (k^{(r-1)})'(e + d^{(r-1)}(E^{(r-1)})) = k^{(r-1)}(e), \\ d^{(r)} &:= (d^{(r-1)})' = (j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)})' = j^{(r)} \circ k^{(r)}. \end{aligned}$$

Como estamos simplemente derivando una pareja exacta tras otra, estos homomorfismos están bien definidos, tal como vimos en la Observación 2.2.2, de este modo definimos para cada $r \geq 1$ la **r-ésima pareja derivada** $C^{(r)} = \{D^{(r)}, E^{(r)}, i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)}\}$ que se obtiene al derivar C , r veces:

$$\begin{array}{ccc} D^{(r)} & \xrightarrow{i^{(r)}} & D^{(r)} \\ & \swarrow k^{(r)} & \searrow j^{(r)} \\ & E^{(r)} & \end{array}$$

A continuación, consideraremos el caso en el que C se conforma de R -módulos bigraduados, es decir, es de la forma $C = \{D^{*,*}, E^{*,*}, i, j, k\}$:

$$\begin{array}{ccc} D^{*,*} & \xrightarrow{i} & D^{*,*} \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E^{*,*} & \end{array}$$

la cual es llamada **pareja exacta bigraduada**, donde $D^{*,*} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D^{p,q}$ y $E^{*,*} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E^{p,q}$ son R -módulos bigraduados y donde i es un homomorfismo de bigrado $(-1, 1)$, j es un homomorfismo de bigrado $(0, 0)$ y k es un homomorfismo de bigrado $(1, 0)$. Entonces, operan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} D^{p,q} & \xrightarrow{i_{p,q}} & D^{p-1,q+1} \\ & & \searrow j_{p-1,q+1} \\ D^{p,q+1} & & E^{p-1,q+1} \\ & \swarrow k_{p-1,q+1} & \end{array}$$

y se puede ver a los homomorfismos de la pareja exacta C como:

$$\begin{aligned} i &:= \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} i^{p,q}, \\ j &:= \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} j^{p,q}, \\ k &:= \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} k^{p,q}, \\ d &:= \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} d^{p,q}, \end{aligned}$$

donde cada homomorfismo $i^{p,q}$, $j^{p,q}$, $k^{p,q}$ y $d^{p,q}$ son simplemente las restricciones:

$$\begin{aligned} i^{p,q} &:= i \big|_{D^{p,q}}, \\ j^{p,q} &:= j \big|_{D^{p,q}}, \\ k^{p,q} &:= k \big|_{E^{p,q}}, \\ d^{p,q} &:= d \big|_{E^{p,q}}. \end{aligned}$$

Para el caso de la pareja derivada $C^{(r)}$ hacemos de forma análoga a esto las siguientes definiciones, lo cual puede consultarse en [6] para un mayor análisis y justificación.

Definimos

$$\begin{aligned} (E^{(1)})^{p,q} &:= \frac{\text{Ker}(d_{(1)} : E^{p,q} \longrightarrow E^{p+1,q})}{\text{Im}(d_{(1)} : E^{p-1,q} \longrightarrow E^{p,q})}, \\ (E^{(r)})^{p,q} &:= H((E^{(r-1)})^{p,q}, d^{(r-1)}), \end{aligned} \tag{2.18}$$

de donde deducimos que $(E^{*,*})^{(r)} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} (E^{(r)})^{p,q}$. También definimos lo siguiente. Primero notemos que $(D^{(1)})^{p,q} = (i^{(0)}(D^{(0)}))^{p,q} = (D^{(0)})^{p,q} \cap i^{(0)}(D^{(0)})$, por lo tanto, para el caso r tenemos algo similar:

$$(D^{(r)})^{p,q} = (i^{(r-1)}(D^{(r-1)}))^{p,q} = (D^{(r-1)})^{p,q} \cap i^{(r-1)}(D^{(r-1)}). \tag{2.19}$$

Por último, los homomorfismos $(i^{(r)})^{p,q}$, $(j^{(r)})^{p,q}$, $(k^{(r)})^{p,q}$ y $(d^{(r)})^{p,q}$ son simplemente restricciones a la suma directa tal como lo hicimos anteriormente para el caso $r = 0$.

En el siguiente teorema analizaremos los bigrados de los homomorfismos $i^{(r)}$, $j^{(r)}$, $k^{(r)}$ y $d^{(r)}$. En este teorema se establece la conexión entre las parejas exactas y las sucesiones espectrales, lo cual resulta evidente tras el desarrollo previo de esta sección.

Teorema 2.17. *Supongamos que $C = \{D^{*,*}, E^{*,*}, i, j, k\}$ es una pareja exacta bigraduada:*

$$\begin{array}{ccc} D^{*,*} & \xrightarrow{i} & D^{*,*} \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E^{*,*} & \end{array}$$

donde $D^{*,*} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D^{p,q}$ y $E^{*,*} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E^{p,q}$ son R -módulos bigraduados y donde i es un homomorfismo de bigrado $(-1, 1)$, j es un homomorfismo de bigrado $(0, 0)$ y k es un homomorfismo de bigrado $(1, 0)$. Entonces, estos datos determinan una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^{\infty}$ de tipo cohomológico, con $E_r^{*,*} := (E^{*,*})^{(r-1)}$ el $(r-1)$ -ésimo módulo derivado de $E^{*,*}$ y $d_r = j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)}$.

Demostración. Siguiendo la Definición 2.3 de sucesión espectral, notamos que basta probar que los diferenciales $d_r : E_r^{*,*} \longrightarrow E_r^{*,*}$ tienen el bigrado correcto de $(r, 1-r)$ al ser de tipo cohomológico. Veamos primero el caso $r = 1$. Sea $E_1 := E^{*,*}$, es decir, $E_1^{p,q} = E^{p,q}$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}$. Dado que $d_1 = j \circ k$, entonces su bigrado es la suma de los bigrados de j y k , que siguiendo el diagrama anterior en el enunciado del teorema, podemos notar que es: $\text{bigrado}(d_1) = \text{bigrado}(j) + \text{bigrado}(k) = (1, 0) + (0, 0) = (1, 0)$ lo cual es igual a $(r, 1-r)$ con $r = 1$, por lo tanto d_1 tiene el bigrado correcto. Consideremos ahora

$C^{(r)} = \{D^{(r)}, E^{(r)}, i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)}\}$ la pareja exacta al derivar C , r veces:

$$\begin{array}{ccc} D^{(r)} & \xrightarrow{i^{(r)}} & D^{(r)} \\ & \swarrow k^{(r)} & \searrow j^{(r)} \\ & E^{(r)} & \end{array}$$

La idea de la demostración es probar primero el bigrado de cada homomorfismo: $i^{(r)}$, $j^{(r)}$ y $k^{(r)}$, y entonces calcular el bigrado de $d^{(r)}$ simplemente sumando los bigrados de $j^{(r)}$ y de $k^{(r)}$ ya que $d^{(r)} = j^{(r)} \circ k^{(r)}$.

Primero notemos que el bigrado de $k^{(r)}$ es de $(1, 0)$ para cada $r \geq 1$. Para ello procederemos por inducción. Sabemos que: $\text{bigrado}(k^{(0)}) = \text{bigrado}(k) = (1, 0)$. Ahora supongamos que el bigrado de $k^{(r-1)}$ es $(1, 0)$, demostraremos que el bigrado de $k^{(r)}$ es también $(1, 0)$. Primero notemos que, para el caso r tenemos $(D^{(r)})^{p,q} = (i^{(r-1)}(D^{(r-1)}))^{p,q} = (D^{(r-1)})^{p,q} \cap i^{(r-1)}(D^{(r-1)})$, por la Ecuación (2.19). Ahora, por definición de $k^{(r)} : E^{(r)} \rightarrow D^{(r)}$ y la Ecuación (2.18), tenemos lo siguiente considerando los bigrados en $E^{(r)}$ y $D^{(r)}$. Sea

$$e + \text{Ker}((d^{(r-1)})^{p,q}) \in (E^{(r)})^{p,q} = \frac{\text{Ker}(d^{(r-1)}) \cap (E^{(r-1)})^{p,q}}{\text{Im}(d^{(r-1)}) \cap (E^{(r-1)})^{p,q}},$$

entonces

$$k^{(r)}(e + \text{Ker}((d^{(r-1)})^{p,q})) \in D^{(r)} = i^{(r-1)}(D^{(r-1)}).$$

Por otra parte, de la definición de $k^{(r)}$ y la hipótesis de inducción obtenemos:

$$k^{(r)}(e + \text{Ker}((d^{(r-1)})^{p,q})) = k^{(r-1)}(e) \in (D^{(r-1)})^{p+1,q}.$$

Así, de estas dos observaciones encontramos que la imagen de $k^{(r)}$ cae en $(D^{(r)})^{p+1,q}$:

$$\begin{aligned} k^{(r)}(e + \text{Ker}((d^{(r-1)})^{p,q})) &\in i^{(r-1)}(D^{(r-1)}) \cap (D^{(r-1)})^{p+1,q} \\ &= (D^{(r)})^{p+1,q}, \quad \text{por Ecuación (2.19)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $k^{(r)}$ tiene bigrado $(1, 0)$.

Para demostrar que el bigrado de $i^{(r)}$ es $(-1, 1)$ también haremos inducción. Primero veamos el bigrado de i' . Sea $x \in D'$, entonces $x \in (D')^{p,q} \subseteq D^{p,q}$, y por la definición de i' tenemos que $i'(x) = i(x) \in D^{p-1,q+1}$, pero además sabemos que la imagen de i' debe caer

en D' , es decir, $i'(x) \in D' = i(D)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} i'(x) &\in i(D) \cap D^{p-1, q+1} \\ &= i^{(0)}(D^{(0)}) \cap (D^{(0)})^{p-1, q+1} \\ &= (D')^{p-1, q+1}, \quad \text{por Ecuación (2.19)}. \end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea, si suponemos que el bigrado de $i^{(r-1)}$ es $(-1, 1)$ tendríamos lo siguiente. Sea $x \in D^{(r)}$, entonces $x \in (D^{(r)})^{p, q} \subseteq (D^{(r-1)})^{p, q}$, y por la definición de $i^{(r)}$ tenemos que $i^{(r)}(x) = i^{(r-1)}(x) \in (D^{(r-1)})^{p-1, q+1}$, pero además sabemos que la imagen de $i^{(r)}$ debe caer en $D^{(r)}$, es decir, $i^{(r)}(x) \in D^{(r)} = i^{(r-1)}(D^{(r-1)})$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} i^{(r)}(x) &\in i^{(r-1)}(D^{(r-1)}) \cap (D^{(r-1)})^{p-1, q+1} \\ &= (D^{(r)})^{p-1, q+1}, \quad \text{por Ecuación (2.19)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $i^{(r)}$ tiene bigrado $(-1, 1)$.

Por último, probaremos por inducción que el bigrado de $j^{(r-1)}$ es $(r-1, 1-r)$. El caso $r=1$ lo tenemos ya que $\text{bigrado}(j^{(0)}) = \text{bigrado}(j) = (0, 0)$. Supongamos que para el caso $r-2$, $\text{bigrado}(j^{(r-2)}) = (r-2, 2-r)$. Probaremos que el bigrado de $j^{(r-1)} : D^{(r-1)} \rightarrow E^{(r-1)}$ es $(r-1, 1-r)$, donde, por definición $j^{(r-1)}(i^{(r-2)}(x)) = j^{(r-2)}(x) + d^{(r-2)}(E^{(r-2)})$. Sea $z \in (D^{(r-1)})^{p, q}$, por la Ecuación (2.19) $(D^{(r-1)})^{p, q} = (D^{(r-2)})^{p, q} \cap i^{(r-2)}(D^{(r-2)})$, entonces z es de la forma $z = i^{(r-2)}(x)$ con $i^{(r-2)}(x) \in (D^{(r-2)})^{p, q}$. Dado que el bigrado de $i^{(r-2)}$ es $(-1, 1)$, entonces $x \in (D^{(r-2)})^{p+1, q-1}$, por lo tanto $j^{(r-1)}(z) = j^{(r-1)}(i^{(r-2)}(x)) = j^{(r-2)}(x) + d^{(r-2)}(E^{(r-2)})$ y por hipótesis de inducción el bigrado de $j^{(r-2)}$ es $(r-2, 2-r)$, así que $j^{(r-2)}(x) + d^{(r-2)}(E^{(r-2)}) \in (E^{(r-2)})^{p+1+(r-2), q-1+(2-r)} = (E^{(r-2)})^{p+r-1, q+1-r}$.

Por lo tanto, $j^{(r-1)}$ tiene bigrado $(r-1, 1-r)$.

De esta manera podemos concluir que el bigrado de $d^{(r)}$ es:

$$\begin{aligned} \text{bigrado}(d_r) &= \text{bigrado}(j^{(r-1)}) + \text{bigrado}(k^{(r-1)}) \\ &= (r-1, 1-r) + (1, 0) \\ &= (r, 1-r). \end{aligned}$$

□

En la siguiente proposición analizaremos de forma más detallada la sucesión espectral que determina la pareja exacta bigraduada C del anterior Teorema 2.17. Daremos

Proposición 2.19. *Supongamos que $C = \{D^{*,*}, E^{*,*}, i, j, k\}$ es una pareja exacta bigradaada tal como en el Teorema 2.17:*

$$\begin{array}{ccc} D^{*,*} & \xrightarrow{i} & D^{*,*} \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E^{*,*} & \end{array}$$

Definimos los términos

$$\begin{aligned} Z_r^{p,*} &:= k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*})), \\ B_r^{p,*} &:= j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*})). \end{aligned}$$

Así, $Z_r^{p,*}$ y $B_r^{p,*}$ son R -submódulos de $E^{p,*}$. Entonces, estos submódulos determinan la sucesión espectral asociada a la pareja exacta:

$$E_r^{p,*} := (E^{p,*})^{(r-1)} \cong Z_r^{p,*} / B_r^{p,*}.$$

Además,

$$E_\infty^{p,*} \cong \frac{\bigcap_r Z_r^{p,*}}{\bigcup_r B_r^{p,*}} = \frac{\bigcap_r k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{\bigcup_r j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*}))}.$$

Demostración. Probaremos por inducción que $E_r^{p,*} \cong Z_r^{p,*} / B_r^{p,*}$. Para $r = 2$, sabemos por definición que,

$$\begin{aligned} E_2 &= E^{(1)} \\ &= \frac{\text{Ker}(d^{(0)} : E^{(0)} \longrightarrow E^{(0)})}{\text{Im}(d^{(0)} : E^{(0)} \longrightarrow E^{(0)})} \\ &= \frac{\text{Ker}(d : E \longrightarrow E)}{\text{Im}(d : E \longrightarrow E)} \\ &= \frac{\text{Ker}((j \circ k) : E \longrightarrow E)}{\text{Im}((j \circ k) : E \longrightarrow E)} \\ &= \frac{(j \circ k)^{-1}(0)}{(j \circ k)(E)} \\ &= \frac{k^{-1}(j^{-1}(0))}{j(k(E))} \\ &= \frac{k^{-1}(\text{Ker}(j))}{j(\text{Im}(k))}, \end{aligned}$$

pero por exactitud esto es: $j(\text{Im}(k)) = j(\text{Ker}(i))$ y $k^{-1}(\text{Ker}(j)) = k^{-1}(\text{Im}(i))$. Sustituyendo esto en la expresión que tenemos para E_2 obtenemos: $E_2 = k^{-1}(\text{Im}(i))/j(\text{Ker}(i))$, más precisamente:

$$E_2^{p,*} = \frac{k^{-1}(\text{Im}(i : D^{p+2,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{j(\text{Ker}(i : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-1,*}))} = \frac{Z_2^{p,*}}{B_2^{p,*}}.$$

Por lo tanto, se cumple la fórmula para $r = 2$.

Para $r = 3$, por definición sabemos que,

$$\begin{aligned}
 E_3 &= E^{(2)} \\
 &= \frac{\text{Ker}(d^{(1)} : E^{(1)} \longrightarrow E^{(1)})}{\text{Im}(d^{(1)} : E^{(1)} \longrightarrow E^{(1)})} \\
 &= \frac{\text{Ker}(d' : E' \longrightarrow E')}{\text{Im}(d' : E' \longrightarrow E')} \\
 &= \frac{\text{Ker}((j' \circ k') : E' \longrightarrow E')}{\text{Im}((j' \circ k') : E' \longrightarrow E')} \\
 &= \frac{(j' \circ k')^{-1}(0)}{(j' \circ k')(E')} \\
 &= \frac{(k')^{-1}((j')^{-1}(0))}{j'(k'(E'))} \\
 &= \frac{(k')^{-1}(\text{Ker}(j'))}{j'(\text{Im}(k'))},
 \end{aligned}$$

pero, por exactitud tenemos que $j'(\text{Im}(k')) = j'(\text{Ker}(i'))$ y también que $(k')^{-1}(\text{Ker}(j')) = (k')^{-1}(\text{Im}(i'))$. Además, $\text{Im}(i') = i'(D') = i|_{i(D)}(i(D)) = i^2(D)$ y $\text{Ker}(i') = (i')^{-1}(0) = (i|_{i(D)})^{-1}(0) = \text{Ker}(i) \cap i(D)$, entonces:

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{(k')^{-1}(\text{Im}(i'))}{j'(\text{Ker}(i'))} \\
 &= \frac{(k')^{-1}(i^2(D))}{j'(\text{Ker}(i) \cap i(D))}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Encontraremos una expresión para $(k')^{-1}(i^2(D))$ y $j'(\text{Ker}(i) \cap i(D))$. Primero notemos que si $i(x) = 0$ entonces $i^2(x) = 0$, por lo que $\text{Ker}(i) \subseteq \text{Ker}(i^2)$. Por lo anterior y la exactitud en D tenemos que $\text{Im}(d) = d(E) = (j \circ k)(E) = j(\text{Im}(k)) = j(\text{Ker}(i)) \subseteq j(\text{Ker}(i^2))$. Lo que nos servirá para simplificar un cociente en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 j'(\text{Ker}(i) \cap i(D)) &= \{j'(y) \mid y \in \text{Ker}(i) \cap i(D)\} \\
 &= \{j'(i(x)) \mid i(x) \in \text{Ker}(i), x \in D\} \\
 &= \{j(x) + d(E) \in E^{(1)} \mid i^2(x) = 0, x \in D\} \\
 &= \{j(x) + d(E) \in E^{(1)} \mid x \in \text{Ker}(i^2)\} \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^2)) + d(E)}{d(E)} \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^2))}{d(E)}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por otra parte, $k(d(E)) = (k \circ j)(k(E)) = \{0\} \subseteq i^2(D)$, entonces $d(E) \subseteq k^{-1}(k(d(E))) \subseteq k^{-1}(i^2(D))$, lo que nos servirá para simplificar un cociente en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 (k')^{-1}(i^2(D)) &= \{\bar{x} \in E' \mid k'(\bar{x}) \in i^2(D)\} \\
 &= \{\bar{x} \in E' \mid k(x) \in i^2(D)\} \\
 &= \{\bar{x} \in E' \mid x \in k^{-1}(i^2(D))\} \\
 &= \{x + d(E) \mid x \in k^{-1}(i^2(D))\} \\
 &= \frac{k^{-1}(i^2(D)) + d(E)}{d(E)} \\
 &= \frac{k^{-1}(i^2(D))}{d(E)}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por último, de las Ecuaciones (2.20), (2.21) y (2.22) se sigue lo siguiente, utilizando también el tercer teorema de isomorfismo:

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{(k')^{-1}(i^2(D))}{j'(\text{Ker}(i) \cap i(D))} \\
 &= \frac{k^{-1}(i^2(D))}{d(E)} \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^2))}{d(E)} \\
 &\cong \frac{k^{-1}(i^2(D))}{j(\text{Ker}(i^2))},
 \end{aligned}$$

tomando en cuenta que el bigrado de i^2 es $2(-1, 1) = (-2, 2)$, obtenemos de manera más explícita la fórmula para E_3 :

$$E_3^{p,*} = \frac{k^{-1}(\text{Im}(i^2 : D^{p+3,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{j(\text{Ker}(i^2 : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-2,*}))} = \frac{Z_3^{p,*}}{B_3^{p,*}}.$$

Por lo tanto, se cumple la fórmula para $r = 3$.

Haremos un caso más para que se aprecie bien el paso inductivo de la demostración. De manera análoga a los dos casos anteriores, por exactitud tenemos que $j^{(2)}(\text{Im}(k^{(2)})) = j^{(2)}(\text{Ker}(i^{(2)}))$ y también tenemos que $(k^{(2)})^{-1}(\text{Ker}(j^{(2)})) = (k^{(2)})^{-1}(\text{Im}(i^{(2)}))$. Entonces,

por lo anterior y por definición obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 E_4 &= E^{(3)} \\
 &= \frac{\text{Ker}(d^{(2)} : E^{(2)} \longrightarrow E^{(2)})}{\text{Im}(d^{(2)} : E^{(2)} \longrightarrow E^{(2)})} \\
 &= \frac{\text{Ker}((j^{(2)} \circ k^{(2)}) : E^{(2)} \longrightarrow E^{(2)})}{\text{Im}((j^{(2)} \circ k^{(2)}) : E^{(2)} \longrightarrow E^{(2)})} \\
 &= \frac{(j^{(2)} \circ k^{(2)})^{-1}(0)}{(j^{(2)} \circ k^{(2)})(E^{(2)})} \\
 &= \frac{(k^{(2)})^{-1}((j^{(2)})^{-1}(0))}{j^{(2)}(k^{(2)}(E^{(2)}))} \\
 &= \frac{(k^{(2)})^{-1}(\text{Ker}(j^{(2)}))}{j^{(2)}(\text{Im}(k^{(2)}))} \\
 &= \frac{(k^{(2)})^{-1}(\text{Im}(i^{(2)}))}{j^{(2)}(\text{Ker}(i^{(2)}))}.
 \end{aligned}$$

Además, notemos que como $i(D) \subseteq D$, entonces $i^2(D) \subseteq i(D)$, por lo que una restricción sobre $i^2(D)$ es más fuerte que una restricción sobre $i(D)$ y de este modo es claro que:

$$\begin{aligned}
 i^{(2)} &= i' \mid_{i'(D')} \\
 &= (i \mid_{i(D)}) \mid_{i \mid_{i(D)}(i(D))} \\
 &= (i \mid_{i(D)}) \mid_{i^2(D)} \\
 &= i \mid_{i^2(D)},
 \end{aligned}$$

con lo cual podemos calcular lo siguiente: $\text{Im}(i^{(2)}) = i^{(2)}(D^{(2)}) = i \mid_{i^2(D)} (D^{(2)}) = i \mid_{i^2(D)} (i^2(D)) = i^3(D)$ y también $\text{Ker}(i^{(2)}) = (i^{(2)})^{-1}(0) = (i \mid_{i^2(D)})^{-1}(0) = \text{Ker}(i) \cap i^2(D)$, entonces:

$$E_4 = \frac{(k^{(2)})^{-1}(i^3(D))}{j^{(2)}(\text{Ker}(i) \cap i^2(D))}. \quad (2.23)$$

Esta expresión en la Ecuación (2.23) es parecida a la que obtuvimos en la Ecuación (2.20) para el caso $r = 3$ y, siguiendo el procedimiento que hicimos en ese caso, ahora encontraremos una igualdad para $(k^{(2)})^{-1}(i^3(D))$ y para $j^{(2)}(\text{Ker}(i) \cap i^2(D))$, en donde observaremos que se tiene un proceso iterativo para llegar al resultado que queremos, en términos de los homomorfismos k^{-1} , j e i^{r-1} , de acuerdo a la fórmula que enuncia el teorema. Primero calcularemos $(k^{(2)})^{-1}(i^3(D))$, para ello debemos considerar que $k^{(1)}(d^{(1)}(E^{(1)})) = (k' \circ j')(k'(E')) = \{0\} \subseteq i^3(D)$, lo que implica que $d^{(1)}(E^{(1)}) \subseteq (k')^{-1}(k'(d^{(1)}(E^{(1)}))) \subseteq (k')^{-1}(i^3(D))$, lo que nos servirá para simplificar un cociente en

el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 (k^{(2)})^{-1}(i^3(D)) &= \{\bar{e} \in E^{(2)} \mid k^{(2)}(\bar{e}) \in i^3(D)\} \\
 &= \{\bar{e} \in E^{(2)} \mid k'(e) \in i^3(D)\} \\
 &= \{e + d^{(1)}(E^{(1)}) \in E^{(2)} \mid e \in (k')^{-1}(i^3(D))\} \\
 &= \frac{(k')^{-1}(i^3(D)) + d^{(1)}(E^{(1)})}{d^{(1)}(E^{(1)})} \\
 &= \frac{(k')^{-1}(i^3(D))}{d^{(1)}(E^{(1)})}.
 \end{aligned}$$

Ahora calcularemos $(k')^{-1}(i^3(D))$. Para ello notemos que $k(d^{(0)}(E^{(0)})) = (k \circ j)(k(E)) = \{0\} \subseteq i^3(D)$, lo que implica que $d^{(0)}(E^{(0)}) \subseteq k^{-1}(k(d^{(0)}(E^{(0)}))) \subseteq k^{-1}(i^3(D))$, lo que nos servirá para simplificar un cociente en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 (k')^{-1}(i^3(D)) &= \{\bar{e} \in E^{(1)} \mid k'(\bar{e}) \in i^3(D)\} \\
 &= \{\bar{e} \in E^{(1)} \mid k(e) \in i^3(D)\} \\
 &= \{e + d^{(0)}(E^{(0)}) \in E^{(1)} \mid e \in k^{-1}(i^3(D))\} \\
 &= \frac{k^{-1}(i^3(D)) + d^{(0)}(E^{(0)})}{d^{(0)}(E^{(0)})} \\
 &= \frac{k^{-1}(i^3(D))}{d^{(0)}(E^{(0)})}.
 \end{aligned}$$

De este modo llegamos a que:

$$(k^{(2)})^{-1}(i^3(D)) = \frac{k^{-1}(i^3(D))}{d^{(1)}(E^{(1)})}. \quad (2.24)$$

Ahora calcularemos la segunda parte que es $j^{(2)}(\text{Ker}(i) \cap i^2(D))$. Primero notemos que si $i(x) = 0$ entonces $i^2(x) = 0$, por lo que $\text{Ker}(i) \subseteq \text{Ker}(i^2)$. Por lo anterior y la exactitud en D' tenemos que $d^{(1)}(E^{(1)}) = (j^{(1)} \circ k^{(1)})(E^{(1)}) = j'(\text{Im}(k')) = j'(\text{Ker}(i'))$, pero $\text{Ker}(i') = \text{Ker}(i \mid_{i(D)}) = \text{Ker}(i) \cap i(D)$, entonces $j'(\text{Ker}(i')) = j'(\text{Ker}(i) \cap i(D)) \subseteq$

$j(\text{Ker}(i^2) \cap i(D))$. Lo que nos servirá para simplificar un cociente en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 j^{(2)}(\text{Ker}(i) \cap i^2(D)) &= \{j^{(2)}(y) \mid y \in \text{Ker}(i) \cap i^2(D)\} \\
 &= \{j^{(2)}(i^2(x)) \mid i^2(x) \in \text{Ker}(i), x \in D\} \\
 &= \{j'(i(x)) + d^{(1)}(E^{(1)}) \in E^{(2)} \mid i^3(x) = 0, x \in D\} \\
 &= \{j'(i(x)) + d^{(1)}(E^{(1)}) \in E^{(2)} \mid i(x) \in \text{Ker}(i^2), x \in D\} \\
 &= \{j'(y) + d^{(1)}(E^{(1)}) \in E^{(2)} \mid y \in \text{Ker}(i^2) \cap i(D)\} \\
 &= \frac{j'(\text{Ker}(i^2) \cap i(D)) + d^{(1)}(E^{(1)})}{d^{(1)}(E^{(1)})} \\
 &= \frac{j'(\text{Ker}(i^2) \cap i(D))}{d^{(1)}(E^{(1)})}.
 \end{aligned}$$

Ahora calcularemos $j'(\text{Ker}(i^2) \cap i(D))$. Para ello notemos que si $i(x) = 0$ entonces $i^3(x) = 0$, por lo que $\text{Ker}(i) \subseteq \text{Ker}(i^3)$. Por lo anterior y la exactitud en D tenemos que $d^{(0)}(E^{(0)}) = (j \circ k)(E) = j(\text{Im}(k)) = j(\text{Ker}(i)) = \subseteq j(\text{Ker}(i^3))$. Lo que nos servirá para simplificar un cociente en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 j'(\text{Ker}(i^2) \cap i(D)) &= \{j'(y) \mid y \in \text{Ker}(i^2) \cap i(D)\} \\
 &= \{j'(i(x)) \mid i(x) \in \text{Ker}(i^2)\} \\
 &= \{j(x) + d^{(0)}(E^{(0)}) \mid i^3(x) = 0, x \in D\} \\
 &= \{j(x) + d^{(0)}(E^{(0)}) \mid x \in \text{Ker}(i^3)\} \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^3)) + d^{(0)}(E^{(0)})}{d^{(0)}(E^{(0)})} \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^3))}{d^{(0)}(E^{(0)})}.
 \end{aligned}$$

De este modo llegamos a que:

$$j^{(2)}(\text{Ker}(i) \cap i^2(D)) = \frac{j(\text{Ker}(i^3))}{d^{(1)}(E^{(1)})}. \quad (2.25)$$

En conclusión, utilizamos el tercer teorema de isomorfismo 2 veces para calcular E_4 a partir de las Ecuaciones (2.23), (2.24) y (2.25):

$$\begin{aligned}
 E_4 &= \frac{(k^{(2)})^{-1}(i^3(D))}{j^{(2)}(\text{Ker}(i) \cap i^2(D))} \\
 &= \frac{k^{-1}(i^3(D))}{\frac{d^{(0)}(E^{(0)})}{d^{(1)}(E^{(1)})}} \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^3))}{\frac{d^{(0)}(E^{(0)})}{d^{(1)}(E^{(1)})}} \\
 &\cong \frac{k^{-1}(i^3(D))}{\frac{d^{(0)}(E^{(0)})}{j(\text{Ker}(i^3))}} \\
 &\cong \frac{k^{-1}(i^3(D))}{j(\text{Ker}(i^3))},
 \end{aligned}$$

tomando en cuenta que el bigrado de i^3 es $3(-1, 1) = (-3, 3)$, obtenemos de manera más explícita la fórmula para E_4 :

$$E_4^{p,*} = \frac{k^{-1}(\text{Im}(i^3 : D^{p+4,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{j(\text{Ker}(i^3 : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-3,*}))} = \frac{Z_4^{p,*}}{B_4^{p,*}}.$$

Por lo tanto, se cumple la fórmula para $r = 4$.

Continuando este procedimiento de manera iterativa, y dado que el bigrado de i^r es de $r(-1, 1) = (-r, r)$, entonces para E_r tendríamos que:

$$\text{Ker}(d^{(r-2)}) = \frac{\frac{\frac{k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{d^{(0)}(E^{(0)})}}{d^{(1)}(E^{(1)})}}{\vdots}{d^{(r-3)}(E^{(r-3)})},$$

también que:

$$\text{Im}(d^{(r-2)}) = \frac{\frac{\frac{j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-1),*}))}{d^{(0)}(E^{(0)})}}{d^{(1)}(E^{(1)})}}{\vdots}{d^{(r-3)}(E^{(r-3)})},$$

y de este modo, por el tercer teorema de isomorfismo concluimos que:

$$\begin{aligned}
 E_r &= E^{(r-1)} \\
 &= \frac{\text{Ker}(d^{(r-2)})}{\text{Im}(d^{(r-2)})} \\
 &\cong \frac{k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-1),*}))} \\
 &= \frac{Z_r^{p,*}}{B_r^{p,*}}.
 \end{aligned}$$

Además, obtenemos una torre de submódulos de la siguiente manera. Para cada r utilizamos el operador diferencial $d^{(r-2)} : E^{(r-2)} \longrightarrow E^{(r-2)}$, al calcular $E_r = E^{(r-1)}$, como podemos apreciar en la ecuación anterior. Pero, $E^{(r-2)} = E_{r-1} = Z_{r-1}/B_{r-1}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 d^{(r-2)} &= d_{r-1} : E_{r-1} \longrightarrow E_{r-1} \\
 &= d_{r-1} : \frac{Z_{r-1}}{B_{r-1}} \longrightarrow \frac{Z_{r-1}}{B_{r-1}}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Y así como dimos una expresión para $\text{Im}(d^{(r-2)})$ anteriormente, podemos dar una expresión para el último término que aparece en ese cociente que es: $\text{Im}(d^{(r-3)}) = d^{(r-3)}(E^{(r-3)})$, de la siguiente manera:

$$\text{Im}(d^{(r-3)}) = \frac{\frac{j(\text{Ker}(i^{r-2} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-2),*}))}{d^{(0)}(E^{(0)})}}{d^{(1)}(E^{(1)})}}{\frac{\vdots}{d^{(r-4)}(E^{(r-4)})}},$$

Con lo cual la imagen de $d^{(r-2)}$ resulta ser el cociente:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(d^{(r-2)}) &= \frac{\frac{j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-1),*}))}{d^{(0)}(E^{(0)})}}{d^{(1)}(E^{(1)})} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{\frac{j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-1),*}))}{d^{(0)}(E^{(0)})}}{d^{(r-3)}(E^{(r-3)})} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{\frac{j(\text{Ker}(i^{r-2} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-2),*}))}{d^{(0)}(E^{(0)})}}{d^{(r-4)}(E^{(r-4)})} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-1),*}))}{j(\text{Ker}(i^{r-2} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-(r-2),*}))} \\
 &= \frac{B_r}{B_{r-1}} \\
 &\subseteq \frac{Z_{r-1}}{B_{r-1}}, \quad \text{por Ecuación (2.26)}.
 \end{aligned}$$

De este modo la teoría que desarrollamos en la sección 2.1 puede aplicarse y sabemos así que el término E_∞ es de la forma

$$E_\infty^{p,*} \cong \frac{\bigcap_r Z_r^{p,*}}{\bigcup_r B_r^{p,*}} = \frac{\bigcap_r k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{\bigcup_r j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*}))}.$$

Con lo que concluimos la demostración. □

El Teorema 2.17 y la Proposición 2.19 que desarrollamos en esta sección son importantes ya que nos dan las herramientas necesarias para relacionar la teoría de parejas exactas que estudiamos en esta sección con la de sucesiones espectrales que estudiamos en la sección anterior. Existe cierta equivalencia entre estos acercamientos, lo cual será de gran utilidad para desarrollar los resultados principales del siguiente capítulo con más facilidad.

2.2.3. Equivalencia entre los dos acercamientos

Resumamos la teoreía que hemos desarrollado hasta ahora en el siguiente contexto. A partir de un R -módulo diferencial graduado filtrado (A, d, F) , se puede construir una pareja exacta de la siguiente manera. Sea F la filtración decreciente

$$F : \dots \subseteq F^{p+1}A \subseteq F^pA \subseteq \dots \subseteq A.$$

Como hemos visto anteriormente, tenemos la siguiente sucesión exacta corta asociada a la filtración F :

$$0 \longrightarrow F^{p+1}A \xrightarrow{i} F^pA \xrightarrow{j} F^pA/F^{p+1}A \longrightarrow 0.$$

Dado que la diferencial d respeta la filtración, por la Definición 2.12 de módulo diferencial graduado filtrado, con el grado de d igual a 1, entonces tenemos una sucesión exacta corta de módulos diferenciales graduados:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\ 0 & \longrightarrow & F^{p+1}A & \xrightarrow{i} & F^pA & \xrightarrow{j} & F^pA/F^{p+1}A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\ 0 & \longrightarrow & F^{p+1}A & \xrightarrow{i} & F^pA & \xrightarrow{j} & F^pA/F^{p+1}A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \end{array}$$

Más precisamente, tenemos una sucesión exacta corta de complejos de cadena,

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\ 0 & \longrightarrow & F^{p+1}A^{p+q} & \xrightarrow{i} & F^pA^{p+q} & \xrightarrow{j} & F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\ 0 & \longrightarrow & F^{p+1}A^{p+q+1} & \xrightarrow{i} & F^pA^{p+q+1} & \xrightarrow{j} & F^pA^{p+q+1}/F^{p+1}A^{p+q+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \end{array}$$

A partir de la cual aplicamos un resultado estándar que puede consultarse en [1]

conocido como el *Lema de la Serpiente*, obteniendo así la sucesión exacta larga en homología:

$$\longrightarrow H^{p+q}(F^{p+1}A) \xrightarrow{i^*} H^{p+q}(F^pA) \xrightarrow{j^*} H^{p+q}\left(\frac{F^pA}{F^{p+1}A}\right) \xrightarrow{k^*} H^{p+q+1}(F^{p+1}A) \xrightarrow{i^*} ,$$

donde k^* es llamado el *homomorfismo de conexión*.

Definición 2.20. Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$ definimos los R -módulos bigraduados

$$E^{p,q} := H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A),$$

$$D^{p,q} := H^{p+q}(F^pA).$$

Esto nos da una pareja exacta:

$$\begin{array}{ccc} H^{p+q}(F^{p+1}A) & \xrightarrow{i^*} & H^{p+q}(F^pA) \\ & & \searrow j^* \\ H^{p+q}(F^{p+1}A) & & H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A) \\ & \swarrow k^* & \end{array}$$

Y por la Definición 2.20 lo anterior es:

$$\begin{array}{ccc} D^{p+1,q-1} & \xrightarrow{i_{p+1,q-1}^*} & D^{p,q} \\ & & \searrow j_{p,q}^* \\ D^{p+1,q} & & E^{p,q} \\ & \swarrow k_{p,q}^* & \end{array}$$

Juntando la información anterior obtenemos una pareja exacta como la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D^{p,q} & \xrightarrow{i := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} i_{p,q}^*} & \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D^{p,q} \\ & & \searrow j := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} j_{p,q}^* \\ & & \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E^{p,q} \\ & \swarrow k := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} k_{p,q}^* & \end{array}$$

Como los bigrados de i , j y k coinciden con los del Teorema 2.17, entonces esta pareja exacta tiene asociada una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^\infty$ de tipo cohomológico, con

$E_r^{*,*} := (E^{*,*})^{(r-1)}$ el $(r-1)$ -ésimo módulo derivado de $E^{*,*}$ y $d_r = j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)}$. La siguiente proposición asegura que la sucesión espectral asociada a la pareja exacta, coincide con la sucesión espectral asociada a la filtración F , dada por el Teorema 2.13.

Proposición 2.21. *Sea (A, d, F) un R -módulo diferencial graduado filtrado. Entonces, la sucesión espectral asociada a la filtración y la sucesión espectral asociada a la pareja exacta son la misma.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [6], Capítulo 2. No desarrollaremos los detalles, sin embargo, haremos algunos comentarios. En el Teorema 2.13 de convergencia, definimos los términos $Z_r^{p,q}$ y $B_r^{p,q}$ así como el diferencial d_r . La idea de la demostración para la proposición es identificar los términos E_r del teorema de convergencia, con los mismos términos E_r dados por la pareja exacta en la Proposición 2.19, es decir, se prueba que

$$\frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}} = \frac{k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}))}{j(\text{Ker}(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*}))},$$

donde,

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &:= F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}), \\ B_r^{p,q} &:= F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}). \end{aligned}$$

tal como en el Teorema 2.13. □

Capítulo 3

Sucesión espectral y homología persistente de complejos simpliciales

En los capítulos anteriores hemos estudiado objetos algebraicos importantes asociados a filtraciones de espacios topológicos, uno de ellos fue la sucesión espectral, que fue introducida por Leray en la década de 1940, y otro objeto algebraico, que fue inventado más recientemente y tiene muchas aplicaciones, conocido como los grupos de homología persistente. Aunque las sucesiones espectrales y la homología persistente se inventaron para propósitos distintos, como hemos visto en los capítulos 1 y 2, es natural preguntarse acerca de la relación exacta entre estas dos nociones, y en particular, si dado cualquier campo, las dimensiones de los espacios vectoriales en la sucesión espectral asociada a una filtración, nos proveen de más información, en comparación con las dimensiones de los espacios vectoriales de la homología persistente de la misma filtración. Uno de los resultados en el artículo [7] muestra que, de hecho, las dimensiones que aparecen en los espacios vectoriales de la sucesión espectral asociada a una filtración se pueden obtener a partir de las dimensiones de los espacios vectoriales de la homología persistente. Siguiendo lo anterior mencionado, en este capítulo estudiaremos la relación que existe entre estos dos objetos algebraicos, asociados a una filtración de complejos simpliciales. Nuestro objetivo es expresar de manera precisa dicha relación y derivar fórmulas que nos permitan expresar las dimensiones de cada espacio vectorial de la sucesión espectral asociada a una filtración, en términos de los números de Betti persistentes, y viceversa.

Mostraremos la existencia de una sucesión exacta larga de espacios vectoriales que relaciona ambos objetos mediante las dimensiones de cada espacio vectorial de un objeto en términos de las dimensiones de los espacios vectoriales del otro objeto. Una herramienta

que será de gran ayuda es la noción de parejas exactas, que hemos desarrollado en el capítulo previo, la cual nos permite calcular la relación entre los grupos de la sucesión espectral y los grupos de homología persistente, sin necesidad de complicarnos entre tantos índices y un gran número de grupos de ciclos y fronteras.

3.1. La sucesión espectral y homología persistente de una filtración

Consideremos una filtración finita \mathcal{F} de un espacio topológico X , como en la Filtración (1.2), los cuales pueden ser por ejemplo complejos simpliciales o complejos CW:

$$\emptyset = \dots = X_{-1} = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N = X_{N+1} = \dots = X.$$

Como mencionamos anteriormente, queremos encontrar la relación entre los grupos de la sucesión espectral de la filtración \mathcal{F} y los grupos de homología persistente de la misma filtración. Para ello, veamos primero la información que podemos obtener de la filtración, según el enfoque que tomemos, y cómo podemos relacionar ambos enfoques en este contexto.

3.1.1. Homología persistente

Como hemos estudiado en el Capítulo 1, la filtración \mathcal{F} define inclusiones dadas por las contenciones, los cuales a su vez inducen homomorfismos en homología, de la Definición 1.18 tenemos para $s \leq t$ que $i_n^{s,t} = i_{s,t}^* : H_n(X_s) \longrightarrow H_n(X_t)$, donde $H_n^{s,t}(\mathcal{F}) = \text{Im}(i_n^{s,t})$ son los grupos de homología persistente. Definimos también los números de Betti persistentes en la Definición 1.19, como $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}} H_n^{s,t}(\mathcal{F})$, y recordemos por la Ecuación (1.3) que, $H_n^{s,t} \subseteq H_n(X_t) = H_n^{t,t}(\mathcal{F})$. Consideremos también la Definición 1.22 de las dimensiones generacionales (con un ligero cambio de notación): $\mu_n^{s,t}(\mathcal{F}) := (\beta_n^{s,t-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s,t}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{s-1,t-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,t}(\mathcal{F}))$, que se interpretan como la dimensión del espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} , generado por los ciclos de homología de dimensión n , que nacen en tiempo s y mueren en tiempo t , con $s < t$. A continuación relacionaremos estos conceptos con la información que nos proporciona el otro enfoque, que son las sucesiones espectrales.

3.1.2. Sucesión espectral asociada a una pareja exacta

Como sabemos, puede resultar difícil el cálculo de homología (o cohomología). Para ello estudiamos las sucesiones espectrales. Sin embargo, como hemos estudiado en el Capítulo 2, la manera de trabajar con una sucesión espectral a partir de una filtración dada puede llegar a ser un poco complicada entre tantos grupos de ciclos y fronteras, por lo cual definiremos la sucesión espectral a partir de la noción de parejas exactas que estudiamos en el capítulo previo, lo cual puede ayudarnos a realizar cálculos de manera más económica y expresar la relación que buscamos de una manera más fácil.

A partir de la filtración \mathcal{F} , se hereda una filtración en homología de la siguiente manera, denotamos para $p \leq N$, $F_p H_n(X) = \text{Im}(i_n^{p,N})$, obteniendo así una filtración F_* de espacios vectoriales $H_n(X) = H_n(X, k)$ dada por:

$$0 = F_0 H_n(X) \subset \cdots \subset F_{p-1} H_n(X) \subset F_p H_n(X) \subset \cdots \subset F_N H_n(X) = H_n(X). \quad (3.1)$$

De la Filtración (3.1) definimos:

$$\begin{aligned} E_{p,q}^0(H_n(X), F_*) &= F_p H_n(X) / F_{p-1} H_n(X) \\ &= \text{Im}(i_n^{p,N}) / \text{Im}(i_n^{p-1,N}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Notemos ahora que, como estamos trabajando con una sucesión finita de espacios vectoriales de dimensión finita, la $\dim_{\mathbb{K}} H_n(X)$ es fácil de calcular, puesto que se trata de una suma telescópica. Recordemos, por álgebra lineal, que para cada p ,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^0(H_n(X), F_*) &= \dim_{\mathbb{K}}(F_p H_n(X) / F_{p-1} H_n(X)) \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(F_p H_n(X)) - \dim_{\mathbb{K}}(F_{p-1} H_n(X)). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dim_{\mathbb{K}} H_n(X) = \sum_{p \geq 0} \dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^0(H_n(X), F_*). \quad (3.3)$$

A continuación veremos cómo se adapta todo lo anterior al contexto que hemos estudiado de módulos diferenciales graduados. Notemos que los espacios vectoriales sobre los que trabajamos al definir la homología de los espacios en la filtración \mathcal{F} , son de hecho módulos de la misma manera, en particular los espacios vectoriales con los que posteriormente se define la homología de un espacio topológico, es decir, los grupos de n-cadenas

$C_n(X)$ que hemos estudiado en el Capítulo 1, serán los módulos que consideraremos para construir un módulo diferencial graduado filtrado.

Tomemos nuestra A en el punto 1 de la Definición 2.12 de módulo diferencial graduado filtrado, como la suma directa:

$$C_*(X) = \bigoplus_n C_n(X),$$

que es como sabemos un módulo, sobre el cual queremos definir una filtración y un diferencial que respete dicha filtración. De la filtración \mathcal{F} se hereda una filtración de complejos de cadena de la siguiente manera, denotamos para $p \leq N$, $F_p C_*(X) = C_*(X_p)$, obteniendo así la filtración que se sigue de manera natural dada por las siguientes inclusiones:

$$F : F_0 C_*(X) \subset F_1 C_*(X) \subset \cdots \subset F_N C_*(X).$$

En el Capítulo 1 definimos un operador diferencial $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, el cual podemos notar que es de grado -1 y por el Lema 1.9 sabemos que $\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0$, con lo cual tenemos el punto 2 de la Definición 2.12. Además, efectivamente respeta la filtración:

$$\begin{array}{ccccccc} C_n(X_s) & \xrightarrow{i_{s,s+1}} & C_n(X_{s+1}) & \xrightarrow{i_{s+1,s+2}} & \cdots & \xrightarrow{i_{t-1,t}} & C_n(X_t) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X_s) & \xrightarrow{i_{s,s+1}} & C_{n-1}(X_{s+1}) & \xrightarrow{i_{s+1,s+2}} & \cdots & \xrightarrow{i_{t-1,t}} & C_{n-1}(X_t) \end{array}$$

Obteniendo así el punto 3 de la Definición 2.12, y como resultado obtenemos un módulo diferencial graduado filtrado (C_*, ∂, F) , donde $\partial = \bigoplus_n \partial_n$. Ahora podemos construir una sucesión espectral asociada a la filtración \mathcal{F} .

Consideremos a continuación la siguiente sucesión exacta corta de complejos cadena, que ya hemos utilizado con anterioridad, asociados al par (X_p, X_{p-1}) :

$$0 \longrightarrow F_{p-1} C_*(X) \xrightarrow{i_{p-1,*}} F_p C_*(X) \xrightarrow{j_{p,*}} F_p C_*(X) / F_{p-1} C_*(X) \longrightarrow 0,$$

o bien

$$0 \longrightarrow C_*(X_{p-1}) \xrightarrow{i_{p-1,*}} C_*(X_p) \xrightarrow{j_{p,*}} C_*(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow 0,$$

donde $C_*(X_p, X_{p-1}) = F_p C_*(X) / F_{p-1} C_*(X) = C_*(X_p) / C_*(X_{p-1})$. Sabemos por el Teorema 1.15, que esta sucesión exacta corta de complejos de cadena induce una sucesión

exacta larga en homología, para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cdots \longrightarrow H_n(X_{p-1}) \xrightarrow{i_{p-1,*}^*} H_n(X_p) \xrightarrow{j_{p,*}^*} H_n(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k_{p,*}^*} H_{n-1}(X_{p-1}) \longrightarrow \cdots, \quad (3.4)$$

donde $H_n(X_p, X_{p-1})$ denota el grupo de homología del espacio cociente $C_*(X_p, X_{p-1})$, y el homomorfismo $k_{p,*}^*$ es el homomorfismo de conexión que aparece en la construcción de la sucesión exacta larga en homología, la Sucesión (3.4). A partir de la existencia de la Sucesión (3.4), construiremos a continuación una sucesión espectral asociada a la filtración \mathcal{F} , mediante la definición de una pareja exacta.

Primero definamos algunos términos con los cuales construiremos la pareja exacta. Considerando la filtración \mathcal{F} utilizada anteriormente y la Sucesión (3.4), definimos los siguientes términos donde $n = p + q$:

$$E_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) = H_n(X_p, X_{p-1}), \quad (3.5)$$

$$D_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) = H_n(X_p), \quad (3.6)$$

$$i_{p,q}^{(1)} = i_{p,n-p}^* : H_n(X_{p-1}) \longrightarrow H_n(X_p), \quad (3.7)$$

$$j_{p,q}^{(1)} = j_{p,n-p}^* : H_n(X_p) \longrightarrow H_n(X_p, X_{p-1}), \quad (3.8)$$

$$k_{p,q}^{(1)} = k_{p,n-p}^* : H_n(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X_{p-1}). \quad (3.9)$$

A partir de esto tenemos un módulo diferencial bigraduado definido por:

$$\begin{aligned} E^{(1)}(\mathcal{F}) &= \bigoplus_{p,q} E_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}), \\ D^{(1)}(\mathcal{F}) &= \bigoplus_{p,q} D_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}), \\ i &= \bigoplus_{p,q} i_{p,q}, \\ j &= \bigoplus_{p,q} j_{p,q}, \\ k &= \bigoplus_{p,q} k_{p,q}. \end{aligned}$$

La cual se puede representar mediante el siguiente diagrama, que de acuerdo a [4] es la noción de pareja exacta que hemos visto en el Capítulo 2. Denotamos dicha pareja exacta

por $C(\mathcal{F})$:

$$\begin{array}{ccc} D^{(1)}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i} & D^{(1)}(\mathcal{F}) \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E^{(1)}(\mathcal{F}) & \end{array}$$

Donde podemos observar que:

$$\begin{aligned} i_{p,q} &: D_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) \longrightarrow D_{p+1,q-1}^{(1)}(\mathcal{F}), \\ j_{p,q} &: D_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) \longrightarrow E_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}), \\ k_{p,q} &: E_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) \longrightarrow D_{p-1,q}^{(1)}(\mathcal{F}), \end{aligned}$$

de acuerdo a la definición de dichos operadores. A partir de ello es fácil desprender algunas propiedades, comenzando por el bigrado de cada operador, los cuales son:

$$\begin{aligned} \text{bigrado}(i) &= (1, -1), \\ \text{bigrado}(j) &= (0, 0), \\ \text{bigrado}(k) &= (-1, 0). \end{aligned}$$

A partir de la pareja exacta $C(\mathcal{F})$, podemos definir la pareja derivada, y la pareja derivada de ésta sucesivamente las cuales, como vimos en el Capítulo 2, sabemos que son exactas por la Proposición 2.16, con homomorfismos bien definidos, tal como vimos en la Observación 2.2.2, y definimos así para cada $r \geq 1$ la r -ésima pareja derivada $C^{(r)}(\mathcal{F}) = \{D^{(r)}(\mathcal{F}), E^{(r)}(\mathcal{F}), i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)}\}$ que se obtiene al derivar $C(\mathcal{F})$, r veces, tal como lo hicimos en la Sección 2.2.2:

$$\begin{array}{ccc} D^{(r)}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i^{(r)}} & D^{(r)}(\mathcal{F}) \\ & \swarrow k^{(r)} & \searrow j^{(r)} \\ & E^{(r)}(\mathcal{F}) & \end{array}$$

Donde cada término se define como:

$$\begin{aligned} E^{(r+1)}(\mathcal{F}) &= (E^{(r)}(\mathcal{F}))' = H(E^{(r)}(\mathcal{F}), d^{(r)}), \\ D^{(r+1)}(\mathcal{F}) &= (D^{(r)}(\mathcal{F}))' = i^{(r)}(D^{(r)}(\mathcal{F})), \end{aligned}$$

y el operador d se define como $d = j \circ k$, el cual es un operador diferencial como mostramos en el Capítulo 2, con la Observación 2.2.1.

Como los bigrados de i , j y k coinciden con los del Teorema 2.17, entonces esta pareja exacta tiene asociada una sucesión espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1}^{\infty}$ de tipo homológico,

con $E_r^{*,*} := (E^{*,*})^{(r-1)}$ el $(r-1)$ -ésimo módulo derivado de $E^{*,*}$ y $d^{(r-1)} = j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)}$. Además, la Proposición 2.21 asegura que la sucesión espectral asociada a la pareja exacta, coincide con la sucesión espectral asociada a la filtración F , dada por el Teorema 2.13 de convergencia.

Observación 3.1.1. En el Teorema 2.17 calculamos los bigrados de los homomorfismos $i^{(r)}$, $j^{(r)}$, $k^{(r)}$ y $d^{(r)}$, entonces, para el caso homológico tenemos de manera análoga lo siguiente, de acuerdo a la demostración de ese teorema. Para cada $p, q \in \mathbb{Z}$, $E_{p,q}^{(r+1)}(\mathcal{F})$ es un subespacio cociente de $E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ y, $D_{p,q}^{(r+1)}(\mathcal{F})$ es un subespacio de $D_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$. Además, los bigrados de cada homomorfismo son los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{bigrado}(i^{(r)}) &= (1, -1), \\ \text{bigrado}(j^{(r)}) &= (1 - r, r - 1), \\ \text{bigrado}(k^{(r)}) &= (-1, 0). \end{aligned}$$

Los dominios y codominios de cada homomorfismo son los siguientes:

$$\begin{aligned} i_{p,q}^{(r)} : D_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) &\longrightarrow D_{p+1,q-1}^{(r)}(\mathcal{F}), \\ j_{p,q}^{(r)} : D_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) &\longrightarrow E_{p+1-r,q+r-1}^{(r)}(\mathcal{F}), \\ k_{p,q}^{(r)} : E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) &\longrightarrow D_{p-1,q}^{(r)}(\mathcal{F}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

También, de acuerdo al Teorema 2.17, el dominio y codominio del operador diferencial d queda dado de la siguiente forma:

$$d_{p,q}^{(r)} : E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) \longrightarrow E_{p-r,q+r-1}^{(r)}(\mathcal{F}),$$

y su bigrado es $\text{bigrado}(d^{(r)}) = \text{bigrado}(j^{(r)}) + \text{bigrado}(k^{(r)}) = (-r, r - 1)$.

Para concluir esta sección enunciaremos un teorema importante.

Teorema 3.1. *La sucesión espectral definida anteriormente converge después de un número finito de términos con:*

$$E_{p,q}^{(\infty)}(\mathcal{F}) \cong E_{p,q}^0(H_n(X), F_*).$$

Demostración. Podemos observar que los grupos $E_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) = 0$, son triviales para todos los pares (p, q) a excepción de un número finito de términos, ya que la filtración \mathcal{F} es

finita. En consecuencia el operador diferencial $d_{p,q}^{(r)} \equiv 0$ para r suficientemente grande, y esto implica que la sucesión espectral $\{E^{(r)}(\mathcal{F}), d^{(r)}(\mathcal{F})\}_{r \geq 1}$ converge. Esto se sigue de un resultado estándar de convergencia, el cual desarrollamos brevemente en el Teorema 2.13. \square

Observación 3.1.2. Notemos que como en la filtración F , $X_i = \emptyset \forall i \leq 0$, tenemos entonces que $d_n, s^{(r)} \equiv 0 \forall r \geq s$. Además se sigue de la Ecuación (3.5) que $E_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F}) = 0 \forall p > N$ y en consecuencia, por definición, $E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) = 0 \forall p > N$ y $r \geq 1$. También, $d_{p,n-p}^{(r)}$ y $d_{p-r,n-p+r}^{(r)}$ son ambos 0 para $r \geq \max(p, N - p + 1)$, y esto implica que $E_{p,q}^\infty(\mathcal{F}) \cong E_{p,q}^{(\max(p, N - p + 1))}(\mathcal{F})$.

3.2. Conexión entre la sucesión espectral y la homología persistente

En esta sección desarrollaremos los resultados principales de la tesis, que fueron presentados por los autores del artículo [7]. Primero observaremos la relación crucial entre las parejas exactas $C^{(r)}(\mathcal{F})$ y los grupos de homología persistente, en el siguiente par de resultados. Posteriormente mostraremos los teoremas principales del artículo, en donde se puede observar la relación entre $\dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F})$, es decir, podemos dar una fórmula con la cual expresar las dimensiones de los grupos de la sucesión espectral, en términos de las dimensiones de los grupos de homología persistente, y viceversa.

3.2.1. Relación entre las parejas $C^{(r)}(\mathcal{F})$ y los grupos $H_n^{p,q}(\mathcal{F})$

La relación crucial entre las parejas exactas $C^{(r)}(\mathcal{F})$ y los grupos de homología persistente se sigue de los siguientes teoremas, que el lector puede encontrar en [7]. Primero, el lema que demostraremos a continuación muestra la relación entre los grupos $D_{*,*}^{(*)}(\mathcal{F})$ y los grupos de homología persistente $H_*^{(*,*)}(\mathcal{F})$.

Lema 3.2. *Para $r, p, q \in \mathbb{Z}, r \geq 1$ y con $n = p + q$, los grupos $D_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ de las parejas exactas $C^{(r)}(\mathcal{F})$ se pueden expresar como*

$$D_{p-1,q+1}^{(r)}(\mathcal{F}) = \text{Im}(i_n^{p-r,p-1} : H_n(X_{p-r}) \longrightarrow H_n(X_{p-1})) = H_n^{p-r,p-1}(\mathcal{F}), \quad (3.11)$$

y los operadores $i_{p,q}^{(r)}$ también se pueden expresar como

$$i_{p-1,q+1}^{(r)} = i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(r)}(\mathcal{F})}. \quad (3.12)$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre r para probar la Ecuación (3.12) del Lema 3.2. Notemos que para $r = 1$ y $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, el resultado se sigue de la definición de $D_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F})$ en la Ecuación (3.6), la Definición 3.7 de $i_{p-1,q+1}^{(1)}$, y de los grupos de homología persistente en la Definición 1.18.

$$\begin{aligned} i_{p-1,q+1}^{(1)} &= i_{p-1,n-p+1}^* : H_n(X_{p-1}) \longrightarrow H_n(X_p) \quad \text{por Ecuación (3.7)} \\ &= i_n^{p-1,p} \big|_{H_n(X_{p-1})} : H_n(X_{p-1}) \longrightarrow H_n(X_p) \quad \text{por Definición 1.18} \\ &= i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(1)}(\mathcal{F})} : H_n(X_{p-1}) \longrightarrow H_n(X_p), \quad \text{por Ecuación (3.6)} \end{aligned}$$

demostrando así la Ecuación (3.12) para $r = 1$.

A continuación probaremos también el caso $r = 2$ y $r = 3$, con lo cual será evidente la hipótesis de inducción que utilizaremos más adelante para probar el caso general. Primero debemos notar que $D_{p-1,q+1}^{(r)}(\mathcal{F}) = i_{p-2,q+2}^{(r-1)}(D_{p-2,q+2}^{(r-1)})$, considerando el dominio y codominio de la Función (3.10), y por la definición de $D^{(r)}(\mathcal{F})$ en la definición de la r -ésima pareja derivada. Consideremos también que $D_{p,q}^{(r+1)}(\mathcal{F})$ es un subespacio de $D_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ por la Observación 3.1.1, es decir, $D_{p-1,q+1}^{(r)}(\mathcal{F}) \subseteq D_{p-1,q+1}^{(r-1)}(\mathcal{F})$, para cada r , por lo que cualquier restricción de una función al subespacio $D_{p-1,q+1}^{(r)}(\mathcal{F})$ claramente es más fuerte que una restricción al subespacio $D_{p-1,q+1}^{(r-1)}(\mathcal{F})$, el cual es un argumento que utilizaremos a lo largo de la demostración. También consideremos que $i^{(r+1)} = i^{(r)} \big|_{\text{Im}(i^{(r)})}$, por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} i_{p-1,q+1}^{(2)} &= i_{p-1,q+1}^{(1)} \big|_{\text{Im}(i_{p-2,q+2}^{(1)})} \\ &= (i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(1)}(\mathcal{F})}) \big|_{\text{Im}(i_{p-2,q+2}^{(1)})} \quad \text{por Ecuación (3.12) con } r = 1 \\ &= (i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(1)}(\mathcal{F})}) \big|_{D_{p-1,q+1}^{(2)}(\mathcal{F})} \quad \text{por la Función (3.10)} \\ &= i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(2)}(\mathcal{F})}, \quad \text{por Observación 3.1.1} \end{aligned}$$

quedando demostrada la Ecuación (3.12) para $r = 2$.

Considerando lo anterior mencionado y dado que la Ecuación (3.12) es válida para $r = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} i_{p-1,q+1}^{(3)} &= i_{p-1,q+1}^{(2)} \big|_{\text{Im}(i_{p-2,q+2}^{(2)})} \\ &= (i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(2)}(\mathcal{F})}) \big|_{D_{p-1,q+1}^{(3)}(\mathcal{F})} \quad \text{por Ecuación (3.12) con } r = 2 \\ &= i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(3)}(\mathcal{F})}, \quad \text{por Observación 3.1.1} \end{aligned}$$

quedando demostrada la Ecuación (3.12) para $r = 3$.

A partir del desarrollo anterior, si suponemos que para el caso $r = k - 1$ y para cualquier $p, q \in \mathbb{Z}$ es válido el lema (hipótesis de inducción), se cumple lo siguiente:

$$i_{p-2,q+2}^{(k-1)} = i_n^{p-2,p-1} \big|_{\text{Im}(i_n^{p-k,p-2})}. \quad (3.13)$$

Probaremos a continuación la Ecuación (3.12) del Lema 3.2 para el caso $r = k$, consideremos lo siguiente,

$$\begin{aligned} i_{p-1,q+1}^{(k)} &= i_{p-1,q+1}^{(k-1)} \big|_{\text{Im}(i_{p-2,q+2}^{(k-1)})} \\ &= (i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(k-1)}(\mathcal{F})}) \big|_{D_{p-1,q+1}^{(k)}(\mathcal{F})} \quad \text{por hipótesis de inducción} \\ &= i_n^{p-1,p} \big|_{D_{p-1,q+1}^{(k)}(\mathcal{F})}, \quad \text{por Observación 3.1.1} \end{aligned}$$

concluyendo así la prueba de la Ecuación (3.12) para el caso general $r = k$.

Ahora probaremos por inducción sobre r la Ecuación (3.11) del Lema 3.2. Primero notamos que para $r = 1$ y $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, el resultado se sigue de la definición de $D_{p,q}^{(1)}(\mathcal{F})$ en la Ecuación (3.6), la observación en la Ecuación (1.3), y de los grupos de homología persistente en la Definición 1.18.

$$\begin{aligned} D_{p-1,q+1}^{(1)}(\mathcal{F}) &= H_n(X_{p-1}) \quad \text{por Ecuación (3.6)} \\ &= H_n^{p-1,p-1}(\mathcal{F}) \quad \text{por Ecuación (1.3)} \\ &= \text{Im}(i_n^{p-1,p-1}), \quad \text{por Definición 1.18} \end{aligned}$$

demostrando así la Ecuación (3.11) para $r = 1$.

A continuación probaremos también el caso $r = 2$ y $r = 3$, con lo cual será evidente la hipótesis de inducción que utilizaremos más adelante para probar el caso general. Primero debemos notar que $D_{p-1,q+1}^{(r)}(\mathcal{F}) = i_{p-2,q+2}^{(r-1)}(D_{p-2,q+2}^{(r-1)})$, por como se define la Función (3.10), y por la Definición de $D^{(r)}(\mathcal{F})$ en la definición de la r -ésima pareja derivada, por lo tanto,

para $r = 2$ tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 D_{p-1,q+1}^{(2)}(\mathcal{F}) &= i_{p-2,q+2}^{(1)}(D_{p-2,q+2}^{(1)}(\mathcal{F})) \\
 &= i_n^{p-2,p-1} \big|_{D_{p-2,q+2}^{(1)}(\mathcal{F})} (D_{p-2,q+2}^{(1)}(\mathcal{F})) \quad \text{por Ecuación (3.12) con } r = 1 \\
 &= \text{Im}(i_n^{p-2,p-1} : H_n(X_{p-2}) \longrightarrow H_n(X_{p-1})) \\
 &= H_n^{p-2,p-1}(\mathcal{F}), \quad \text{por Definición 1.18}
 \end{aligned}$$

quedando demostrada la Ecuación (3.11) para $r = 2$.

Para $r = 3$ tenemos lo siguiente, considerando lo mencionado anteriormente:

$$\begin{aligned}
 D_{p-1,q+1}^{(3)}(\mathcal{F}) &= i_{p-2,q+2}^{(2)}(D_{p-2,q+2}^{(2)}(\mathcal{F})) \\
 &= i_n^{p-2,p-1} \big|_{D_{p-2,q+2}^{(2)}(\mathcal{F})} (D_{p-2,q+2}^{(2)}(\mathcal{F})) \quad \text{por Ecuación (3.12) con } r = 2 \\
 &= i_n^{p-2,p-1}(\text{Im}(i_n^{p-3,p-2})) \quad \text{por Ecuación (3.11) con } r=2 \\
 &= i_n^{p-2,p-1}(i_n^{p-3,p-2}(H_n(X_{p-3}))) \\
 &= (i_n^{p-2,p-1} \circ i_n^{p-3,p-2})(H_n(X_{p-3})) \\
 &= (i_n^{p-3,p-1})(H_n(X_{p-3})) \\
 &= \text{Im}(i_n^{p-3,p-1}) \\
 &= H_n^{p-3,p-1}(\mathcal{F}), \quad \text{por Definición 1.18}
 \end{aligned}$$

demostrando así la Ecuación (3.11) para $r = 3$.

A partir del desarrollo anterior, si suponemos que para el caso $r = k - 1$ y para cualquier $p, q \in \mathbb{Z}$ es válido el lema (hipótesis de inducción), se cumple lo siguiente:

$$D_{p-2,q+2}^{(k-1)}(\mathcal{F}) = \text{Im}(i_n^{p-k,p-2}) = H_n^{p-k,p-2}(\mathcal{F}). \quad (3.14)$$

Probaremos a continuación el lema para el caso $r = k$, consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 D_{p-1,q+1}^{(k)}(\mathcal{F}) &= i_{p-2,q+2}^{(k-1)}(D_{p-2,q+2}^{(k-1)}(\mathcal{F})) \\
 &= i_n^{p-2,p-1} \big|_{\text{Im}(i_n^{p-k,p-2})} (D_{p-2,q+2}^{(k-1)}(\mathcal{F})) \quad \text{por Ecuación (3.13)} \\
 &= i_n^{p-2,p-1}(\text{Im}(i_n^{p-k,p-2})) \quad \text{por Ecuación (3.14)} \\
 &= i_n^{p-2,p-1}(i_n^{p-k,p-2}(H_n(X_{p-k}))) \\
 &= (i_n^{p-2,p-1} \circ i_n^{p-k,p-2})(H_n(X_{p-k})) \\
 &= (i_n^{p-k,p-1})(H_n(X_{p-k})) \\
 &= \text{Im}(i_n^{p-k,p-1}) \\
 &= H_n^{p-k,p-1}(\mathcal{F}), \quad \text{por Definición 1.18}
 \end{aligned}$$

por lo tanto se satisface la Ecuación (3.11) para el caso general $r = k$, y con esto concluimos la demostración del Lema 3.2. \square

En el teorema que demostraremos a continuación se muestra la relación entre los grupos $E_{*,*}^{(*)}(\mathcal{F})$ y los grupos de homología persistente $H_*^{(*,*)}(\mathcal{F})$.

Teorema 3.3. *Para $r, p, q \in \mathbb{Z}, r \geq 1$ y con $n = p + q$, los grupos $E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ de las parejas exactas $C^{(r)}(\mathcal{F})$ y los grupos de homología persistente $H_n^{p,q}(\mathcal{F})$, se relacionan mediante la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\dots \longrightarrow H_n^{p,p+r-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_{p+r-1,q-r+1}^{(r)}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{k_{p,q}^{(r)}} H_{n-1}^{p-r,p-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_{p-1,q}^{(r)}} H_{n-1}^{p-r+1,p}(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots,$$

además, se cumple que:

$$\text{Im}(i_{p+r-1,q-r+1}^{(r)}) = H_n^{p,p+r}(\mathcal{F}).$$

Demostración. La demostración se sigue desenrollando la pareja exacta $C^{(r)}(\mathcal{F})$ y utilizando el Lema 3.2. Primero notemos que al desenrollar la pareja exacta nos queda la siguiente sucesión exacta larga:

$$\dots D_{p+r-1,n-p+1-r}^{(r)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_{p+r-1,n-p-r+1}^{(r)}} E_{p,n-p}^{(r)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{k_{p,n-p}^{(r)}} D_{p-1,n-p}^{(r)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_{p-1,n-p}^{(r)}} D_{p,n-p-1}^{(r)}(\mathcal{F}) \dots,$$

en donde podemos identificar los términos $D_{*,*}^{(*)}(\mathcal{F})$ y los grupos de homología persistente $H_*^{(*,*)}(\mathcal{F})$, siguiendo las fórmulas del Lema 3.2 y que $n = p + q$, con lo cual nos queda:

$$\dots \longrightarrow H_n^{p,p+r-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_{p+r-1,q-r+1}^{(r)}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{k_{p,q}^{(r)}} H_{n-1}^{p-r,p-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_{p-1,q}^{(r)}} H_{n-1}^{p-r+1,p}(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots,$$

del mismo modo, siguiendo las Ecuaciones (3.11) y (3.12), tomando el cambio de variable $p' = p + r$ y $q' = q - r$ en el Lema 3.2 obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(i_{p+r-1, q-r+1}^{(r)}) &= \text{Im}(i_n^{p+r-1, p+r} \mid_{D_{p+r-1, q-r+1}^{(r)}}) \quad \text{por Ecuación (3.12)} \\
 &= \text{Im}(i_n^{p+r-1, p+r} \mid_{\text{Im}(i_n^{p, p+r-1})}) \quad \text{por Ecuación (3.11)} \\
 &= i_n^{p+r-1, p+r}(i_n^{p, p+r-1}(H_n(X_p))) \\
 &= (i_n^{p+r-1, p+r} \circ i_n^{p, p+r-1})(H_n(X_p)) \\
 &= i_n^{p, p+r}(H_n(X_p)) \\
 &= H_n^{p, p+r}(\mathcal{F}).
 \end{aligned}$$

□

3.2.2. Relación entre $\dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F})$

Nuestro propósito a continuación es probar los teoremas principales del artículo [7], en donde se puede observar que podemos calcular $\dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$ en términos de $\beta_n^{s,t}(\mathcal{F})$ y viceversa, el cual es uno de los objetivos de esta tesis.

Teorema 3.4. *Sean X un espacio topológico y \mathcal{F} una filtración como en la Filtración (1.2). Para $r, p, q \in \mathbb{Z}, r \geq 1, n = p + q$, se cumple que,*

$$\dim_{\mathbb{K}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) = (\beta_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{p-1, p+r-1}(\mathcal{F})) + (\beta_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}) - \beta_{n-1}^{p-r, p}(\mathcal{F})).$$

Demostración. Por el Teorema 3.3, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned}
 H_n^{p-1, p+r-2}(\mathcal{F}) &\xrightarrow{i_{p+r-2, q+2-r}^{(r)}} H_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_{p+r-1, q-r+1}^{(r)}} E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{k_{p,q}^{(r)}} H_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}) \\
 &\xrightarrow{i_{p-1, q}^{(r)}} H_{n-1}^{p-r+1, p}(\mathcal{F}),
 \end{aligned}$$

en la cual podemos identificar los términos de dicha sucesión exacta con los del Lema 1.16, mediante el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 V_2 &:= H_n^{p-1, p+r-2}(\mathcal{F}), \\
 V_1 &:= H_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}), \\
 V_0 &:= E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}), \\
 V_{-1} &:= H_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}), \\
 V_{-2} &:= H_{n-1}^{p-r+1, p}(\mathcal{F}), \\
 f_2 &:= i_{p+r-2, q+2-r}^{(r)} : H_n^{p-1, p+r-2}(\mathcal{F}) \longrightarrow H_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}), \\
 f_1 &:= j_{p+r-1, q-r+1}^{(r)} : H_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}) \longrightarrow E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}), \\
 f_0 &:= k_{p,q}^{(r)} : E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) \longrightarrow H_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}), \\
 f_{-1} &:= i_{p-1, q}^{(r)} : H_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}) \longrightarrow H_{n-1}^{p-r+1, p}(\mathcal{F}).
 \end{aligned}$$

De esta manera, aplicando el Lema 1.16 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{K}}(E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})) &= \dim_{\mathbb{K}}(V_0) \\
 &= (\dim_{\mathbb{K}}(V_1) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f_2))) + (\dim_{\mathbb{K}}(V_{-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}((f_{-1}))) \\
 &= (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{p, p+r-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(i_{p+r-2, q+2-r}^{(r)}))) \\
 &\quad + (\dim_{\mathbb{K}}(H_{n-1}^{p-r, p-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(i_{p-1, q}^{(r)}))) \quad \text{por Lema 1.16} \\
 &= (\dim_{\mathbb{K}}(H_n^{p, p+r-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{p-1, p+r-1})) \\
 &\quad + (\dim_{\mathbb{K}}(H_{n-1}^{p-r, p-1}) - \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{p-r, p})) \quad \text{por Teorema 3.3} \\
 &= (\beta_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{p-1, p+r-1}(\mathcal{F})) \\
 &\quad + (\beta_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}) - \beta_{n-1}^{p-r, p}(\mathcal{F})), \quad \text{por Definición 1.19.}
 \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.1. Notemos que para $r \geq \max(p, N - p + 1)$, donde N es como en la Filtración (1.2), se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \beta_n^{p, p+r-1}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{p, N}(\mathcal{F}), \\
 \beta_n^{p-1, p+r-1}(\mathcal{F}) &= \beta_n^{p-1, N}(\mathcal{F}), \\
 \beta_{n-1}^{p-r, p-1}(\mathcal{F}) &= 0, \\
 \beta_{n-1}^{p-r, p}(\mathcal{F}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Esto se sigue de considerar los dos casos. Consideremos el caso $r \geq \max(p, N - p + 1) = p$, entonces $p \geq N - p + 1$, por lo tanto $2p - 1 \geq N$, y en consecuencia

$p + r - 1 \geq 2p - 1 \geq N$, lo que nos da como resultado:

$$\begin{aligned}
 \beta_n^{p,p+r-1}(\mathcal{F}) &= \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{p,p+r-1}) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}(i_n^{p,p+r-1}) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}(i_n^{p,N}) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}(H_n^{p,N}) \\
 &= \beta_n^{p,N}(\mathcal{F}).
 \end{aligned}$$

Similarmente para la segunda ecuación. Para la tercera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}
 \beta_{n-1}^{p-r,p-1}(\mathcal{F}) &= \dim_{\mathbb{K}}(H_{n-1}^{p-r,p-1}) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}(i_{n-1}^{p-r,p-1}) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}(i_n^{p,N}(\emptyset)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Y similarmente para la última.

Ahora consideremos el caso $r \geq \max(p, N - p + 1) = N - p + 1$, entonces $p + r - 1 \geq p + (N - p + 1) - 1 = N$, por lo tanto se cumplen las primeras dos ecuaciones, y para las últimas dos notamos que $p - r \leq p - (N - p + 1) \leq 0$, con lo cual se verifica el resultado.

Observación 3.2.2. Continuando con las observaciones, también podemos notar lo siguiente. Si $r \geq \max(p, N - p + 1) = p + r - 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{K}}(E_{p,q}^{(\infty)}(\mathcal{F})) &= \dim_{\mathbb{K}}(E_{p,q}^{(\max(p, N-p+1))}(\mathcal{F})) \quad \text{por Observación 3.1.2} \\
 &= \beta_n^{p,N} - \beta_n^{p-1,N} \quad \text{por Teorema 3.4 y Observación 3.2.1} \\
 &= (\dim_{\mathbb{K}}\text{Im}(i_n^{p,N}) - \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}(i_n^{p-1,N})) \quad \text{por Definición 1.19} \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(i_n^{p,N})/\text{Im}(i_n^{p-1,N})) \\
 &= \dim_{\mathbb{K}}E_{p,q}^0(H_n(X), F_*), \quad \text{por Definición 3.2.}
 \end{aligned}$$

Corolario 3.5. *La siguiente relación se cumple para $r \geq 1, n \geq 0$:*

$$\sum_{p+q=n} \dim_{\mathbb{K}}E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F}) = \sum_{j-i \geq r} (\mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) + \mu_{n-1}^{i,j}(\mathcal{F})) + \beta_n(X).$$

Demostración. Primero definiremos un par de términos con los cuales expresaremos las dimensiones de los grupos de la sucesión espectral $\dim_{\mathbb{K}}E_{p,q}^{(r)}(\mathcal{F})$:

$$\gamma_n^{s,t}(\mathcal{F}) := \beta_n^{s-t,s-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-t,s}(\mathcal{F}), \tag{3.15}$$

$$\nu_n^{s,t}(\mathcal{F}) := \beta_n^{s,s+t-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,s+t-1}(\mathcal{F}). \quad (3.16)$$

Por el Teorema 3.4 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} E_{s,n-s}^{(r)}(\mathcal{F}) &= (\beta_n^{s,s+r-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,s+r-1}(\mathcal{F})) + (\beta_{n-1}^{s-r,s-1}(\mathcal{F}) - \beta_{n-1}^{s-r,s}(\mathcal{F})) \\ &= \nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) + \gamma_{n-1}^{s,r}(\mathcal{F}), \quad \text{por Definiciones 3.15 y 3.16.} \end{aligned}$$

Notemos además que si $s < 0$ entonces $\beta_n^{s,*}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(i_n^{s,*} : H_n(\emptyset) \rightarrow H_n(X_*))) = 0$, y si $s > N + 1$ entonces $\beta_n^{s,s+r-1}(\mathcal{F}) = \beta_n^{s-1,s+r-1}(\mathcal{F})$ y $\beta_{n-1}^{s-r,s-1}(\mathcal{F}) = \beta_{n-1}^{s-r,s}(\mathcal{F})$. Por lo tanto:

$$\dim_{\mathbb{K}} E_{s,n-s}^{(r)}(\mathcal{F}) = 0, \quad \forall s \text{ t.q. } s < 0 \text{ o } s > N + 1.$$

Entonces se satisface la siguiente ecuación:

$$\sum_s \dim_{\mathbb{K}} E_{s,n-s}^{(r)}(\mathcal{F}) = \sum_{0 \leq s \leq N+1} (\nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) + \gamma_{n-1}^{s,r}(\mathcal{F})). \quad (3.17)$$

Ahora veremos cómo podemos expresar los términos $\nu_n^{s,t}(\mathcal{F})$ y $\gamma_n^{s,t}(\mathcal{F})$ de la suma anterior, en términos de los $\mu_n^{s,t}(\mathcal{F})$. Por la Definición 1.22 de $\mu_n^{s,t}(\mathcal{F})$ y tomando la suma sobre los $j - i \geq r$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) &= \sum_{j-i \geq r} (\beta_n^{i,j-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,j}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{i-1,j-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F})) \\ &= \sum_{j-i \geq r} (\beta_n^{i,j-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j-1}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{i,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F})). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tomando $s = j$ y $t = j - i$, la suma en la Ecuación (3.18) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) &= \sum_{t \geq r} \sum_s (\beta_n^{i,j-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i,j}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{i-1,j-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F})) \\ &= \sum_{t \geq r} \sum_s \gamma_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \gamma_n^{s,t+1}(\mathcal{F}), \quad \text{por Definición 3.15.} \end{aligned}$$

Consideremos ahora que si $s < 0$, entonces $\gamma_n^{s,t}(\mathcal{F}) = \gamma_n^{s,t+1}(\mathcal{F}) = 0, \forall t$. Y si $s > N + 1$, entonces $\beta_n^{s-t,s-1}(\mathcal{F}) = \beta_n^{s-t,s}(\mathcal{F})$ y $\beta_n^{s-t-1,s-1}(\mathcal{F}) = \beta_n^{s-t-1,s}(\mathcal{F})$, por lo tanto tendríamos que $\gamma_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \gamma_n^{s,t+1}(\mathcal{F}) = 0, \forall t$. Por último observemos que si $t > N + 1$, entonces $\beta_n^{s-t,s-1}(\mathcal{F}) = \beta_n^{s-t,s}(\mathcal{F}) = 0$. En consecuencia la Ecuación (3.18) que desarrollábamos previamente se puede expresar en términos de los $\gamma_n^{s,t}(\mathcal{F})$:

$$\sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) = \sum_{r \leq t \leq N+1} \sum_{0 \leq s \leq N+1} \gamma_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \gamma_n^{s,t+1}(\mathcal{F}). \quad (3.19)$$

Ahora podemos notar también que si tomamos $s = i$ y $t = j - i$, entonces podemos expresar la Ecuación (3.18) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) &= \sum_{j-i \geq r} (\beta_n^{i,j-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j-1}(\mathcal{F})) - (\beta_n^{i,j}(\mathcal{F}) - \beta_n^{i-1,j}(\mathcal{F})) \\ &= \sum_{t \geq r} \sum_s \nu_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \nu_n^{s,t+1}(\mathcal{F}), \quad \text{por Definición 3.16.} \end{aligned}$$

Y considerando las observaciones previas, similarmente obtenemos la Ecuación (3.18) en términos de los $\nu_n^{s,t}(\mathcal{F})$:

$$\sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) = \sum_{r \leq t \leq N+1} \sum_{0 \leq s \leq N+1} \nu_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \nu_n^{s,t+1}(\mathcal{F}). \quad (3.20)$$

Volviendo a la Ecuación (3.19), si cambiamos el orden de las sumatorias, nos queda una suma telescópica con respecto a t , desarrollándola nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) &= \sum_{r \leq t \leq N+1} \sum_{0 \leq s \leq N+1} \gamma_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \gamma_n^{s,t+1}(\mathcal{F}) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq N+1} \gamma_n^{s,r}(\mathcal{F}) - \gamma_n^{s,N+1}(\mathcal{F}) \quad \text{cambiando orden de sumatorias} \\ &= \sum_{0 \leq s \leq N+1} \gamma_n^{s,r}(\mathcal{F}) - \sum_{0 \leq s \leq N+1} \beta_n^{s-N-1,s-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-N-1,s}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Pero $\beta_n^{s-N-1,s-1}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-N-1,s}(\mathcal{F}) = 0$, $\forall 0 \leq s \leq N+1$, con lo cual obtenemos:

$$\sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) = \sum_{0 \leq s \leq N+1} \gamma_n^{s,r}(\mathcal{F}). \quad (3.21)$$

Análogamente, para la Ecuación (3.20) obtenemos una suma telescópica con respecto a t al intercambiar las sumatorias, desarrollánla nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) &= \sum_{r \leq t \leq N+1} \sum_{0 \leq s \leq N+1} \nu_n^{s,t}(\mathcal{F}) - \nu_n^{s,t+1}(\mathcal{F}) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq N+1} \nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) - \nu_n^{s,N+1}(\mathcal{F}) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq N+1} \nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) - \sum_{0 \leq s \leq N+1} (\beta_n^{s,s+N}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,s+N}(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Pero la suma de los $\beta_n^{s,s+N}(\mathcal{F}) - \beta_n^{s-1,s+N}(\mathcal{F})$ corriendo sobre $0 \leq s \leq N+1$, resulta ser una suma telescópica con la cual obtenemos $\beta_n(X)$.

Quedádonos la siguiente expresión:

$$\sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) = \sum_{0 \leq s \leq N+1} \nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) - \beta_n(X). \quad (3.22)$$

Para concluir la demostración, solamente hace falta observar que a partir de la Ecuación (3.17), y las expresiones que acabamos de dar en las Ecuaciones (3.21) y (3.22), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_s \dim_{\mathbb{K}} E_{s,n-s}^{(r)}(\mathcal{F}) &= \sum_{0 \leq s \leq N+1} (\nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) + \gamma_{n-1}^{s,r}(\mathcal{F})) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq N+1} \nu_n^{s,r}(\mathcal{F}) + \sum_{0 \leq s \leq N+1} \gamma_{n-1}^{s,r}(\mathcal{F}) \\ &= \left(\sum_{j-i \geq r} \mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) + \beta_n(X) \right) + \sum_{j-i \geq r} \mu_{n-1}^{i,j}(\mathcal{F}) \\ &= \sum_{j-i \geq r} (\mu_n^{i,j}(\mathcal{F}) + \mu_{n-1}^{i,j}(\mathcal{F})) + \beta_n(X). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. *Para $n, s, t \geq 0$, $s \leq t$, se cumple que:*

$$\beta_n^{s,t}(\mathcal{F}) = \sum_{0 \leq i \leq s} \dim_{\mathbb{K}} E_{i,n-i}^{(\max(i,t-i+1))}(\mathcal{F}_{\leq t}).$$

Demostración. Por el Teorema 3.1, el cual nos dice de qué forma converge la sucesión espectral, también por la Definición 3.2 del grupo $E_{p,q}^0(H_n(X), F_*)$ y siguiendo la Observación 3.2.2, se tiene la siguiente suma telescópica y, los números de Betti persistentes de la filtración truncada $\mathcal{F}_{\leq t}$ coinciden con los de la filtración \mathcal{F} , donde $\mathcal{F}_{\leq t}$ es la filtración truncada

$$\emptyset = \cdots = X_{-1} = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_t = X_{t+1} = \cdots = X_N = X_{N+1} = \cdots = X,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq s} \dim_{\mathbb{K}} E_{i,n-i}^{(\max(i,t-i+1))}(\mathcal{F}_{\leq t}) &= \sum_{0 \leq i \leq s} \dim_{\mathbb{K}} E_{i,n-i}^{(\infty)}(\mathcal{F}_{\leq t}) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq s} \beta_n^{i,t}(\mathcal{F}_{\leq t}) - \beta_n^{i-1,t}(\mathcal{F}_{\leq t}) \\ &= \beta_n^{s,t}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

□

Bibliografía

- [1] Emilio Lluís Puebla. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y k -teoría algebraica clásica*, volume 5. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [2] Dmitry N. Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology*, volume 21 of *Algorithms and computation in mathematics*. Springer, 2008. ISBN 978-3-540-73051-4. doi: 10.1007/978-3-540-71962-5. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71962-5>.
- [3] Malors Emilio Espinosa Lara. *Homología persistente*. CIMAT. URL http://atd.cimat.mx/sites/ATD/files/Notas_homologia_persistente_MEEL.pdf.
- [4] W. S. Massey. Exact couples in algebraic topology (parts i and ii). *Annals of Mathematics*, 56(2):363–396, 1952. ISSN 0003486X. URL <http://www.jstor.org/stable/1969805>.
- [5] Montoya Peñuñuri, Ramos and Espinoza. A topological analysis approach for a dynamical system of particles (en proceso).
- [6] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2 edition, 2000. doi: 10.1017/CBO9780511626289.
- [7] Saugata Basu and Laxmi Parida. Spectral sequences, exact couples and persistent homology of filtrations. *Expositiones Mathematicae*, 35(1):119 – 132, 2017. ISSN 0723-0869. doi: <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2016.06.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086916300378>.