"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Operadores de Multiplicación entre Espacios de Variación Acotada Generalizada

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Ximena Guadalupe Nevárez Rodríguez

Directora de Tesis: Dra. Martha Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Octubre de 2020

SINODALES

Dra. Martha Guzmán Partida

Dr. Fernando Luque Vásquez

Dr. J. Adolfo Minjárez Sosa

Dra. Ma. Teresa Robles Alcaraz

A mis padres y a mi hermana.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mis padres, Marina y Rodolfo, por siempre estar para mí incondicionalmente en toda dificultad que se presenta en el camino. A mi hermana, Paloma, por ser mi mejor amiga y alegrar mis días con su sentido del humor. A mis abuelos: José, Carmelita, Raúl y a la memoria de mi abuela María Teresa, por siempre estar al pendiente de mí. En especial, a mi abuelo José, por interesarse en mis conocimientos y admirar mis exámenes y apuntes, lo cual me llenaba de satisfacción. A Germán, por ser mi mejor amigo y mi motor, por apoyarme en cada paso de este camino.

A todos los profesores del Departamento de Matemáticas por formarme en esta hermosa ciencia. Especialmente, agradezco a los profesores Marco Antonio Valencia, Eduardo Tellechea, Adolfo Minjárez, Martha Guzmán, Carlos Robles y Fernando Luque, quienes me motivaron constantemente y siempre estuvieron disponibles para aconsejarme y ayudarme en todo. Un agradecimiento especial a los profesores Adolfo Minjárez y Eduardo Tellechea, ya que fué gracias a ellos que me decidí a estudiar la licenciatura en matemáticas, lo cuál ha sido uno de los regalos más grandes que me ha dado la vida.

A mi directora de tesis, Martha Guzmán, por guiarme en la elaboración de este trabajo, por creer en mí siempre y motivarme a cumplir todas mis metas, por todos los excelentes cursos que me impartió y por ser un modelo a seguir para mí en todos los aspectos. De igual manera, agradezco a mis sinodales: Fernando Luque, Adolfo Minjárez y María Teresa Robles, por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo en medio de una contingencia.

A todos mis compañeros de generación. En especial a María Fernanda, Martha Inés e Itzia. Gracias por todas esas horas de estudio, risas, frustración y terapia, sin ustedes nada hubiera sido posible, todo valió la pena.

Por último, agradezco a Dios porque sin darme cuenta y sin que yo lo planeara me guió hacia el estudio de las matemáticas y me enamoré de ellas.

Índice

Introducción

El espacio de funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ es de gran importancia en matemáticas y se ha generalizado en diferentes direcciones a partir de su definición clásica dada en 1881 por Camille Jordan [9, 10]. Tanto este espacio como sus generalizaciones surgieron en la búsqueda de condiciones suficientes para la convergencia de la serie de Fourier de una función, con el fin de extender el criterio obtenido por Johan Peter Gustave Lejeune Dirichlet en 1829, que asegura la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función monótona a trozos.

Una generalización del concepto de variación acotada clásica es el de p-variación de Wiener acotada, introducido por Norbert Wiener en 1924 [17]. Más tarde, este concepto fue generalizado por Laurence C. Young en 1937. Otra noción de p-variación acotada que generaliza a la variación acotada clásica es la p-variación de Riesz acotada introducida por Frigyes Riesz en 1910 [14, 15], la cual a su vez fue generalizada en 1953 por Yurij T. Medvedev.

El objetivo principal de esta tesis es obtener una caracterización para los operadores de multiplicación actuando entre espacios de variación acotada clásica y generalizada, específicamente el espacio de variación de Wiener acotada. Con el afán de conocer lo mejor posible a los espacios de variación acotada para poder adentrarnos en el estudio de operadores definidos entre ellos, dedicamos gran parte de la tesis al estudio de propiedades importantes del espacio de variación acotada clásica, $BV[a, b]$ y un par de generalizaciones importantes de éste que nos serán de utilidad.

Dedicamos el primer capítulo al estudio del espacio de variación acotada clásica. Presentamos algunas de sus propiedades más importantes y probamos que es posible convertirlo en un espacio de Banach con la definición de una norma adecuada. Obtenemos una caracterización a partir de funciones monótonas para las funciones en este espacio, lo cual no resulta extraño al tomar en consideración el propósito con el que fue definida originalmente la variación acotada. Obtenemos adicionalemente, un resultado de compacidad para funciones en $BV[a,b]$, conocido como el Principio de Selección de Helly. Finalmente, estudiamos las relaciones que guarda este espacio con otros espacios de funciones interesantes en análisis, como lo son el espacio de funciones absolutamente continuas en un intervalo y el espacio de funciones Lipschitz continuas en un intervalo.

En el segundo capítulo, estudiamos dos generalizaciones del espacio de variación acotada clásica: el espacio de variación de Wiener acotada, $WBV_p[a,b]$ y el espacio de variación de Riesz acotada, $RBV_p[a,b]$. Mostramos que en cada uno de estos espacios es posible generalizar algunas propiedades y resultados agradables del espacio $BV[a,b]$.

En el caso del estudio del espacio $WBV_p[a,b]$, presentamos algunos resultados de funciones convexas con la finalidad de obtener una relación de contención entre espacios $WBV_p[a,b]$ y $WBV_q[a,b]$ para $1 \leq p \leq q < \infty$. Proporcionamos adicionalmente una familia muy particular de funciones que nos permite mostrar una contención propia entre ellos.

Por otro lado, en el estudio del espacio $RBV_p[a,b]$, presentamos un resultado muy interesante, conocido como Lema de Riesz, el cual caracteriza por completo y de una manera conveniente a las funciones en este espacio. De manera análoga a lo llevado a cabo en el espacio $WBV_p[a,b]$, establecemos una relación de contención entre espacios $RBV_p[a,b]$ y $RBV_q[a,b]$ para $1 \leq p \leq q < \infty$.

Dedicamos el tercer capítulo a la obtención de un resultado de representación para los elementos en subespacios de $BV[a,b]$ y $RBV_p[a,b]$ como elementos de espacios duales. Para ello, construimos isomorfismos isométricos por medio de integrales de Riemann-Stieltjes.

Finalmente, dedicamos el cuarto capítulo al estudio de operadores de multiplicación en los espacios de variación acotada que estudiamos a fondo en los capítulos previos. Obtenemos un resultado de caracterización para operadores de multiplicación actuando en el espacio $BV[a,b]$, así como también para el caso particular de los operadores de multiplicación inferiormente acotados actuando en este espacio. Adicionalmente, caracterizamos a los operadores de multiplicación entre espacios de variación de Wiener acotada $WBV_p[a,b]$ y $WBV_q[a,b]$ para $1 \leq p \leq q < \infty$. Todo esto haciendo uso de los resultados obtenidos a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

Espacio de Variación Acotada Clásica

El estudio de las funciones de variación acotada comienza en 1881 cuando Camille Jordan [9, 10] buscaba una condición suficiente para que una función f tuviera una serie de Fourier que convergiera a f. En su búsqueda, C. Jordan obtuvo un resultado conocido como Teorema de Dirichlet-Jordan que muestra la convergencia de la serie de Fourier de una función f de variación acotada.

A partir de entonces, las funciones de variación acotada han sido de gran importancia para el estudio en áreas como el análisis real, análisis funcional, teoría de la medida, análisis de Fourier, por mencionar algunas. En este primer capítulo, llevaremos a cabo un análisis detallado del espacio de funciones de variación acotada clásica $BV[a, b]$. Presentaremos algunas propiedades básicas de este espacio y estudiaremos la descomposición de Jordan para funciones en $BV[a, b]$, así como también, el principio de selección de Helly para sucesiones acotadas de funciones en $BV[a, b]$. En la última sección, consideraremos las relaciónes que guarda $BV[a, b]$ con otros espacios de interés, como lo son el espacio de funciones absolutamente continuas y Lipschitz continuas. Los resultados presentados en este capítulo fueron tomados de [2], [5] y [12].

1.1. Funciones de Variación Acotada Clásica

Iniciaremos con la definición y algunas propiedades importantes del espacio de funciones de variación acotada clásica.

A lo largo de esta tesis, denotaremos como $\mathscr{P}[a,b]$ a la familia de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, es decir todos los conjuntos finitos $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$, con $m \in \mathbb{N}$ y $a = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = b$.

Definición 1.1.1. Dada una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$ y una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, el número real no negativo

$$Var(f, P; [a,b]) := \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|. \tag{1.1.1}$$

se llama *variación* de f en $[a,b]$ con respecto a P.
El número, posiblemente infinito

$$Var(f; [a,b]) := \sup\{Var(f, P; [a,b]) \mid P \in \mathscr{P}[a,b]\}. \tag{1.1.2}$$

donde tomamos el supremo sobre todas las posibles particiones del intervalo $[a,b]$, se llama *variación total* de f en $[a,b]$.

Si $Var(f; [a,b]) < \infty$, decimos que f es una *función de variación acotada* en $[a,b]$. Denotamos al conjunto de funciones de variación acotada en $[a,b]$ como $BV[a,b]$.

Proposición 1.1.1. *La variación y la variación total de una función en un intervalo poseen las siguientes propiedades:*

(a) La variación total es subaditiva con respecto a funciones, esto es,

$$Var(f+g;[a,b]) \leq Var(f;[a,b]) + Var(g;[a,b]). \tag{1.1.3}$$

para $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(b) La variación total es homogénea respecto a funciones, es decir, para $\mu \in \mathbb{R}$

$$Var(\mu f;[a,b]) = |\mu| Var(f;[a,b]). \tag{1.1.4}$$

(c) Para toda $x, y \in [a,b]$ *con* $x < y$

$$|f(x) - f(y)| \leq Var(f;[x,y]). \tag{1.1.5}$$

(d) Cada función $f \in BV[a,b]$ *es acotada y se cumple*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq |f(a)| + Var(f;[a,b]). \tag{1.1.6}$$

(e) Toda función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pertenece a* $BV[a,b]$ *y tiene variación total*

$$Var(f;[a,b]) = |f(a) - f(b)|. \tag{1.1.7}$$

(f) La variación es monótona respecto a particiones, es decir, para $P, Q \in \mathscr{P}[a,b]$ *y* $P \subseteq Q$

$$Var(f,P;[a,b]) \leq Var(f,Q:[a,b]). \tag{1.1.8}$$

(g) La variación total es aditiva respecto a intervalos, es decir, para $a < c < b$

$$Var(f;[a,b]) = Var(f;[a,c]) + Var(f;[c,b]). \tag{1.1.9}$$

Demostración. (a) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, y cualquier partición $P = \{t_o, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} Var(f+g,P;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |(f+g)(t_j) - (f+g)(t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})| \\ &= Var(f,P;[a,b]) + Var(g,P;[a,b]) \\ &\leq Var(f;[a,b]) + Var(g;[a,b]). \end{aligned}$$

De aquí que para toda $P \in \mathscr{P}[a,b]$

$$Var(f+g,P;[a,b]) \leq Var(f;[a,b]) + Var(g;[a,b]).$$

Lo cual implica

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).$$

(b) Sea $\mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} Var(\mu f,P;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |(\mu f)(t_j) - (\mu f)(t_{j-1})| \\ &= |\mu| \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &= |\mu| Var(f,P;[a,b]) \\ &\leq |\mu| Var(f;[a,b]). \end{aligned}$$

De aquí que para toda $P \in \mathscr{P}[a,b]$

$$Var(\mu f,P;[a,b]) \leq |\mu| Var(f;[a,b]).$$

Por lo tanto

$$Var(\mu f;[a,b]) \leq |\mu| Var(f;[a,b]). \tag{1.1.10}$$

Por otro lado, tenemos de igual manera que para toda $P \in \mathscr{P}[a,b]$:

$$|\mu| Var(f,P;[a,b]) = Var(\mu f,P;[a,b]) \leq Var(\mu f;[a,b]).$$

Por lo tanto

$$|\mu| Var(f;[a,b]) \leq Var(\mu f;[a,b]). \tag{1.1.11}$$

De (1.1.10) y (1.1.11) obtenemos el resultado deseado.

(c) Consideremos la partición $P = \{x,y\} \in \mathscr{P}[x,y]$, tenemos entonces

$$|f(x) - f(y)| = Var(f,P;[a,b]) \leq Var(f;[a,b]).$$

(d) Sea $x \in [a,b]$ fija, consideremos la partición $P_x = \{a, x, b\} \in \mathscr{P}[x,y]$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(a)| &\leq |f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \\ &= Var(f, P_x; [a,b]). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que para toda $x \in [a,b]$

$$|f(x)| \leq |f(a)| + Var(f; [a,b]).$$

Por lo tanto

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + Var(f; [a,b]).$$

(e) Sea $P = \{t_0, t_1 ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente, entonces

$$\begin{aligned} Var(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{m} [f(t_j) - f(t_{j-1})] \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Como P es arbitraria y $f(b) - f(a)$ no depende de P, entonces

$$Var(f; [a,b]) = f(b) - f(a).$$

Si f es decreciente, utilizando el mismo argumento obtenemos

$$Var(f; [a,b]) = |f(b) - f(a)|.$$

(f) Sean $P, Q \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que Q posee un punto más que P, digamos,

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \qquad Q = \{t_0, t_1, ..., t_{j-1}, l, t_j, ..., t_m\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Var(f,Q) &= \sum_{k=1}^{j-1}|f(t_k)-f(t_{k-1})| + |f(t_j)-f(l)| \\
&+ |f(l)-f(t_{j-1})| + \sum_{k=j+1}^{m}|f(t_k)-f(t_{k-1})| \\
&\geq \sum_{k=1}^{j-1}|f(t_k)-f(t_{k-1})| + |f(t_j)-f(t_{j-1})| \\
&+ \sum_{k=j+1}^{m}|f(t_k)-f(t_{k-1})| \\
&= Var(f,P).
\end{aligned}$$

Por tanto, si Q posee un punto más que P

$$Var(f,P;[a,b]) \leq Var(f,Q;[a,b]).$$

Llevando a cabo un proceso inductivo, se sigue que si $P \subseteq Q$, entonces

$$Var(f,P;[a,b]) \leq Var(f,Q;[a,b]).$$

(g) Sea $P_1 \in \mathscr{P}[a,c]$ y $P_2 \in \mathscr{P}[c,b]$, digamos,

$$P_1 = \{t_0,t_1,...,t_m\} \quad P_2 = \{r_0,r_1,...,r_l\}.$$

Notemos que $P := P_1 \cup P_2 \in \mathscr{P}[a,b]$ y así

$$\begin{aligned}
Var(f,P_1;[a,c]) + Var(f,P_2;[c,b]) &= \sum_{k=1}^{m}|f(t_k)-f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{l}|f(r_k)-f(r_{k-1})| \\
&= Var(f,P;[a,b]) \\
&\leq Var(f;[a,b]).
\end{aligned}$$

Como P_1 y P_2 son particiones arbitrarias de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente, tomando supremo sobre las particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$, obtenemos

$$Var(f;[a,c]) + Var(f;[c,b]) \leq Var(f;[a,b]). \tag{1.1.12}$$

Ahora, sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, existe $k \in \{1, ..., m\}$ tal que $t_{k-1} \leq c \leq t_k$. Definimos la nueva partición $\widetilde{P} = \{t_0, t_1, ..., t_{k-1}, c, t_k, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$. Notemos que $\widetilde{P} = P_1 \cup P_2$, donde $P_1 = \{t_0, t_1, ..., t_{k-1}, c\} \in \mathscr{P}[a,c]$ y $P_1 = \{c, t_k, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[c,b]$. Como $P \subseteq \widetilde{P}$, por (1.1.8)

$$\begin{aligned} Var(f, P; [a,b]) &\leq Var(f, \widetilde{P}; [a,b]) \\ &= Var(f, P_1; [a,c]) + Var(f, P_2; [c,b]) \\ &\leq Var(f; [a,c]) + Var(f; [c,b]). \end{aligned}$$

Tomando supremos sobre todas las particiones del intervalo $[a,b]$, obtenemos

$$Var(f; [a,b]) \leq Var(f; [a,c]) + Var(f; [c,b]). \tag{1.1.13}$$

De (1.1.12) y (1.1.13) se sigue

$$Var(f; [a,b]) = Var(f; [a,c]) + Var(f; [c,b]).$$

□

Observación 1.1.1. *No toda función de variación acotada es monótona. De hecho, existe una función de variación acotada que no es monótona en ningún intervalo.*

Ejemplo 1.1.1. *Ordenamos los números racionales en el intervalo $[0,1]$ en una sucesión, es decir $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...\}$ y definimos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por*

$$f(t) := \begin{cases} 2^{-k} & t = r_k, \\ 0 & o.c. \end{cases} \tag{1.1.14}$$

Claramente, f no es monótona en ningún intervalo, por la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ en $\mathbb{R}$. Afirmamos que $Var(f; [0,1]) = 2$ y así $f \in BV[0,1]$.

Demostración. Introducimos la siguiente notación que nos será útil en esta prueba. Para una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y cualquier subconjunto $A \subseteq [a, b]$, definimos la *oscilación* de f en A como

$$Osc(f; A) := \sup_{t \in A} f(t) - \inf_{t \in A} f(t).$$

Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0, 1]$ y $j \in \{1, 2, ..., m\}$ fijo, definimos

$$k_j := \min\{i \mid r_i \in [t_{j-1}, t_j].\}$$

Observemos que cada número en la sucesión finita $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$ puede aparecer a lo más dos veces, esto ocurre cuando es el extremo derecho de un intervalo y el extremo izquierdo de su intervalo adyacente. De esto se sigue que

$$\begin{aligned} Var(f, P; [0, 1]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} Osc(f, [t_{j-1}, t_j]) \\ &= \sum_{j=1}^{m} 2^{-k_j} \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la desigualdad

$$Var(f; [0, 1]) \leq 2. \tag{1.1.15}$$

y así $f \in BV[0, 1]$.

Para probar la igualdad, construiremos una partición especial. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, reordenamos los primeros n racionales $r_1, r_2, ..., r_n$ en orden creciente, es decir, $r_1 < r_2 < ... < r_n$. Luego, hacemos:

$$s_0 := 0 \quad , \quad s_1 := r_1 \quad , \quad s_3 := r_2 \quad , \quad s_5 := r_3 \quad , \quad ... \quad , \quad s_{2n-1} := r_n \quad , \quad s_{2n} := 1.$$

y escogemos irracionales de la siguiente manera:

$$s_2 \in (s_1, s_3) \quad , \quad s_4 \in (s_3, s_5) \quad , \quad s_6 \in (s_5, s_7) \quad , \quad ... \quad , \quad s_{2n-2} \in (s_{2n-3} \quad , \quad s_{2n-1}).$$

Ahora, consideremos la partición $P_n = \{s_0, s_1, ..., s_{2n}\} \in \mathscr{P}[0,1]$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} Var(f, P_n; [0,1]) &= \sum_{j=1}^{2n} |f(s_j) - f(s_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{2n} 2^{1-j} = 2\sum_{j=1}^{2n} 2^{-j} \\ &= 2(1 - 2^{-2n}). \end{aligned}$$

Notemos que esto implica

$$\sup\{Var(f, P_n; [0,1]) \mid n \in \mathbb{N}\} = 2.$$

Y así

$$Var(f; [0,1]) \geq 2. \tag{1.1.16}$$

De (1.1.15) y (1.1.16), concluimos

$$Var(f; [0,1]) = 2.$$

$\square$

En el ejemplo previo pudimos notar que las funciones de variación acotada no poseen un comportamiento de monotonía, sin embargo hay una relación especial entre las funciones de variación acotada y las funciones monótonas. Esta relación fué presentada por C. Jordan y se conoce como descomposición de Jordan. A continuación proporcionamos una prueba para este resultado.

Teorema 1.1.2. *(Descomposición de Jordan) Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y solamente si se puede representar en la forma*

$$f = p_f - n_f,$$

donde p_f y n_f son funciones monótonas crecientes.

Demostración. El resultado de que la suma o diferencia de dos funciones monótonas tiene variación acotada se sigue de inmediato de (1.1.3) y (1.1.7).

Para la otra implicación, dada $f \in BV[a,b]$, consideremos la función $V_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$V_f(x) := Var(f;[a,x]). \tag{1.1.17}$$

Esta función se llama *función de variación* de f.

Tomamos $p_f := V_f$. Claramente p_f es creciente, ya que si $a \leq x < y \leq b$

$$V_f(y) = Var(f,[a,y]) = Var(f,[a,x]) + Var(f,[x,y]).$$

Entonces

$$V_f(x) = Var(f,[a,x]) \leq V_f(y),$$

y además tenemos que

$$V_f(a) = 0 \quad , \quad V_f(b) = Var(f,[a,b]).$$

Basta probar que $n_f := V_f - f$ es una función creciente.

Sea $a \leq x < y \leq b$, entonces

$$f(y) - f(x) \leq Var(f,[x,y]) = V_f(y) - V_f(x),$$

por (1.1.5) y (1.1.9). Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} n_f(y) - n_f(x) &= V_f(y) - f(y) - V_f(x) + f(x) \\ &= (V_f(y) - V_f(x)) - (f(y) - f(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f = p_f - n_f,$$

donde, p_f y n_f definidas anteriormente son monótonas crecientes. $\square$

El siguiente resultado es una leve modificación del teorema previo.

Teorema 1.1.3. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y solamente si se puede representar en la forma*

$$f = p_f - n_f + f(a),$$

donde p_f y n_f son monótonas crecientes, no negativas.

Demostración. Definimos $p_f, n_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$p_f(x) := \frac{1}{2}\left(V_f(x) + f(x) - f(a)\right) \quad , \quad n_f(x) := \frac{1}{2}\left(V_f(x) - f(x) + f(a)\right),$$

donde V_f es la función definida en (1.1.17).

Por construcción

$$f(x) = p_f(x) - n_f(x) + f(a) \quad , \quad V_f(x) = p_f(x) + n_f(x).$$

Para $a \leq x < y \leq b$, tenemos por (1.1.15)

$$\begin{aligned} p_f(y) - p_f(x) &= \frac{1}{2}[V_f(y) - V_f(x) + f(y) - f(x)] \\ &= \frac{1}{2}[(V_f(y) - V_f(x)) - (f(x) - f(y))] \geq 0. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} n_f(y) - n_f(x) &= \frac{1}{2}[V_f(y) - V_f(x) - f(y) + f(x)] \\ &= \frac{1}{2}[(V_f(y) - V_f(x)) - (f(y) - f(x))] \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto p_f y n_f son funciones crecientes, y como $p_f(a) = 0$ y $n_f(a) = 0$, concluimos que p_f y n_f son no negativas.

□

La función de variación, definida en (1.1.17), posee varias propiedades interesantes, e incluso, veremos más adelante que algunas propiedades de $f \in BV[a,b]$ se "reflejan" en V_f y viceversa. También podemos utilizar la función de variación para probar la siguiente proposición.

Proposición 1.1.4. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a $BV[a,b]$, si y solo si existe una función creciente $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq g(y) - g(x)$ para cualquier intervalo $[x,y] \subseteq [a,b]$.*

Demostración. Supongamos que $f \in BV[a,b]$. Sea $g := V_f$, la función variación (1.1.17).
Tenemos entonces por (1.1.5)

$$|f(x) - f(y)| \leq Var(f; [x,y]) = g(y) - g(x).$$

Recíprocamente, si existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente tal que $|f(x)-f(y)| \leq g(y)-g(x)$ para cualquier intervalo $[x,y] \subseteq [a,b]$. Entonces, dada una partición arbitraria $P = \{t_0, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, tenemos

$$\begin{aligned} Var(f,P;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{m} g(t_j) - g(t_{j-1}) \\ &= Var(g,P;[a,b]) \leq Var(g;[a,b]) \\ &= g(b) - g(a), \end{aligned}$$

por ser g monótona creciente.
Como esto se cumple para toda $P \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$Var(f;[a,b]) \leq g(b) - g(a).$$

Por tanto $f \in BV[a,b]$.

□

El siguiente resultado muestra como la continuidad de una función $f \in BV[a,b]$ se refleja en la función variación V_f y viceversa.

Teorema 1.1.5. *Si $f \in BV[a,b]$ es continua en algún punto $x_0 \in [a,b]$, entonces la función V_f es también continua en x_0. El recíproco es también cierto.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y f una función continua en $x_0 \in [a,b]$. Sea $x_0 < x < b$, consideremos la diferencia $V_f(x) - V_f(x_0)$.

Para esto tomemos $P = \{t_0, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[x_0, b]$ tal que

$$Var(f, [x_0, b]) < Var(f, P; [x_0, b]) + \epsilon.$$

Siempre podemos encontrar tal $P \in \mathscr{P}[a,b]$ por la definición de la variación total.

Ahora, por la continuidad de f en x_0, escogemos $\delta \in (0, t_1 - x_0)$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ para } 0 < x - x_0 < \delta.$$

Entonces para $x \in [a,b]$ tal que $0 < x - x_0 < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned}
V_f(x) - V_f(x_0) &= Var(f; [x_0, b]) - Var(f; [x, b]) \\
&< Var(f, P; [x_0, b]) + \epsilon - Var(f; [x, b]) \\
&\leq \sum_{j=2}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |f(x) - f(t_1)| + |f(x) - f(x_0)| - Var(f; [x, b]) + \epsilon \\
&\leq Var(f; [t_1, b]) - Var(f; [x, b]) + |f(x) - f(t_1)| + |f(x) - f(x_0)| + \epsilon \\
&= -Var(f; [x, t_1]) + |f(x) - f(t_1)| + |f(x) - f(x_0)| + \epsilon \\
&\leq |f(x) - f(x_0)| + \epsilon \leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que V_f es continua por la derecha. La continuidad de V_f por la izquierda es análoga.

Recíprocamente, supongamos que V_f es continua en un punto $x_0 \in [a,b]$.

Si $x > x_0$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq Var(f; [x_0, x]) = V_f(x) - V_f(x_0) \to 0 \text{ si } x \to x_0^+.$$

Si $x < x_0$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq Var(f; [x, x_0]) = V_f(x_0) - V_f(x) \to 0 \text{ si } x \to x_0^-.$$

Por lo tanto f es también continua en x_0.

□

A partir de los Teoremas 1.1.3 y 1.1.5 podemos observar que algunas propiedades agradables de las funciones monótonas, como lo son la Riemann integrabilidad y la diferenciabilidad, se presentan también en las funciones de variación acotada.

En particular, una función $f \in BV[a,b]$, al ser la diferencia de dos funciones monótonas, tiene a lo sumo una cantidad numerable de puntos de discontinuidad en $[a,b]$, siendo todos puntos de discontinuidad de salto o removible.

Por otro lado, el ejemplo que se presenta a continuación muestra que existen funciones continuas en un intervalo que no son de variación acotada ahí.

Ejemplo 1.1.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida como*

$$f(x) := \begin{cases} x sen\left(\frac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{1.1.18}$$

Claramente f es continua en $[0,1]$, sin embargo $f \notin BV[a,b]$.

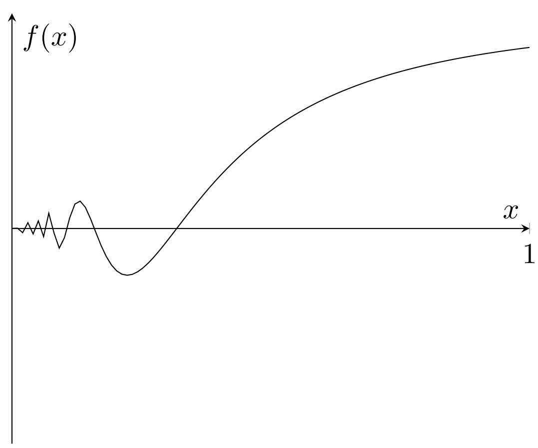

Figura 1.1: Gráfica de la función f.

Demostración. Para $m \in \mathbb{N}$, hacemos $P_m = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0,1]$ tal que t_{j-1} y t_j sean el máximo y el mínimo de f de manera alternante, esto es,

$$t_0 := 0, \quad t_1 := \frac{2}{(2m-1)\pi}, \quad t_2 := \frac{2}{(2m-3)\pi}, \quad ... \quad ,$$

$$... \quad , \quad t_{m-2} := \frac{2}{5\pi}, \quad t_{m-1} := \frac{2}{3\pi}, \quad t_m := 1.$$

De este modo para cualquier $j \in \{2, ..., m-1\}$ con $m \in \mathbb{N}$

$$|f(t_j) - f(t_{j-1})| = \frac{2}{(2(m-j)+1)\pi} + \frac{2}{(2(m-j)+3)\pi} \geq 2t_{j-1}.$$

Entonces, tenemos que

$$Var(f, P_m, [0,1]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \geq \sum_{j=1}^{m} 2t_{j-1}.$$

A partir de la divergencia de la serie armónica, concluimos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} 2t_{j-1}$ diverge. Esto implica que

$$\sup\{Var(f, P_m; [0,1]) \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$Var(f; [0,1]) = \infty,$$

de lo cual concluimos que f no es de variación acotada en $[0,1]$.

□

A continuación presentamos un resultado que nos permite afirmar, bajo ciertas condiciones, que el límite puntual de una sucesión de funciones en $BV[a,b]$ pertenece a $BV[a,b]$.

Proposición 1.1.6. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset BV[a,b]$, tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[a,b]$ a una función f. Entonces*

$$Var(f; [a,b]) \leq \liminf_{n\to\infty} Var(f_n; [a,b]). \tag{1.1.19}$$

Por consecuencia, el límite puntual de una sucesión de funciones con variaciones totales acotadas uniformemente en $[a,b]$ es una función de variación acotada en $[a,b]$.

Demostración. Si el lado derecho de (1.1.19) es infinito, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\liminf_{n\to\infty} Var(f_n;[a,b])$ es finito.

Sea $P=\{t_0,t_1,...,t_m\}\in\mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} Var(f,P;[a,b]) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}|f_n(t_j)-f_n(t_{j-1})| \\ &= \lim_{n\to\infty} Var(f_n,P;[a,b]). \end{aligned}$$

Ahora, notemos que para toda $n\in\mathbb{N}$

$$Var(f_n,P;[a,b])\leq Var(f_n;[a,b]).$$

Entonces:

$$\liminf_{n\to\infty} Var(f_n,P;[a,b])\leq \liminf_{n\to\infty} Var(f_n;[a,b]),$$

y como

$$\liminf_{n\to\infty} Var(f_n,P;[a,b]) = \lim_{n\to\infty} Var(f_n,P;[a,b]) = Var(f,P;[a,b]),$$

entonces para $P\in\mathscr{P}[a,b]$

$$Var(f,P;[a,b])\leq \liminf_{n\to\infty} Var(f_n;[a,b]).$$

Por lo tanto

$$Var(f;[a,b])\leq \liminf_{n\to\infty} Var(f_n;[a,b]).$$

$\square$

Nos interesa ahora describir la estructura del conjunto $BV[a,b]$. Para esto, notemos que como consecuencia de (1.1.3) y (1.1.4), $BV[a,b]$ es un espacio vectorial real con respecto a las operaciones usuales de funciones. Para una función $f\in BV[a,b]$, definimos

$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + Var(f;[a,b]). \tag{1.1.20}$$

Es sencillo ver que (1.1.20) define una norma en el espacio $BV[a,b]$, por lo tanto tenemos que

$(BV[a,b], \|.\|_{BV})$ es un espacio normado. La siguiente propiedad importante que nos interesa para conocer la estructura de este espacio es la completez. En la siguiente proposición abordamos este punto.

Proposición 1.1.7. *El espacio $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$

$$\|f_n - f_m\|_{BV} = |(f_n - f_m)(a)| + Var(f_n - f_m; [a,b]) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Notemos que por (1.1.6) esto implica que si $n, m \geq N_1$

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como el espacio $(B[a,b], \|.\|_{\infty})$ de las funciones acotadas con la norma del supremo es un espacio de Banach, y toda función de variación acotada en un intervalo es acotada, entonces existe una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$ a f.
Probemos que $f_n \xrightarrow{BV} f$, es decir que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f en la norma (1.1.20).
Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_r\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces tenemos que para $m, n \geq N_1$

$$\|f_n - f_m\|_{BV} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por definición de la norma (1.1.20), esto implica que para $m, n \geq N_1$

$$Var(f_n - f_m, P; [a,b]) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces por ser f el límite uniforme de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, tenemos que para $n \geq N_1$

$$Var(f_n - f, P; [a,b]) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{r} |(f_n - f_m)(t_k) - (f_n - f_m)(t_{k-1})| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Esto implica entonces que para $n \geq N_1$

$$Var(f_n - f; [a,b]) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, por ser f el límite uniforme y consecuentemente puntual de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$

$$|f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces para $n \geq N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$

$$\|f_n - f\|_{BV} = |(f_n - f)(a)| + Var(f_n - f; [a, b]) \leq \epsilon.$$

Por lo tanto $f_n \xrightarrow{BV} f$.

Resta probar que $f \in BV[a, b]$. Para esto, notemos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $(BV[a, b], \|.\|_{BV})$, ya que para $m, n \geq N$

$$\|f_n\|_{BV} \leq \epsilon + \|f_m\|_{BV}.$$

Al tomar $M = \text{máx}\{\epsilon + \|f_N\|_{BV}, \|f_1\|_{BV}, ..., \|f_{N-1}\|_{BV}\}$, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_{BV} \leq M,$$

de aquí que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$Var(f_n; [a, b]) \leq M.$$

Así $(f_n)_{n=1}^{\infty}$es una sucesión de funciones con variaciones acotadas uniformemente en $[a, b]$ y por la Proposición 1.1.6 su límite puntual f es tal que $f \in BV[a, b]$. Por tanto $(BV[a, b], \|.\|_{BV})$ es un espacio de Banach.

□

Otra propiedad importante del espacio $BV[a, b]$ es que el producto de dos funciones en $BV[a, b]$ es también una función en $BV[a, b]$. Aún más, el espacio $BV[a, b]$ con norma (1.1.20) es un álgebra de Banach. Presentamos una prueba de esto en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.8. *$BV[a, b]$ es un álgebra que satisface*

$$Var(fg; [a, b]) \leq \|f\|_{\infty} Var(g; [a, b]) + \|g\|_{\infty} Var(f; [a, b]), \tag{1.1.21}$$

para toda $f, g \in BV[a, b]$.

Además, tenemos la desigualdad

$$\|fg\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}\|g\|_{BV}, \tag{1.1.22}$$

para $f, g \in BV[a, b]$, *por lo cual* $BV[a, b]$ *es un álgebra normalizada.*

Demostración. Sean $f, g \in BV[a, b]$ y $P \in \mathscr{P}[a, b]$. Por (1.1.6), f y g son acotadas y tenemos

$$\begin{aligned}
Var(fg, P; [a, b]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j)g(t_j) - f(t_{j-1})g(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{m} |[f(t_j) - f(t_{j-1})]g(t_j) + [g(t_j) - g(t_{j-1})]f(t_{j-1})| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})||g(t_j)| + \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})||f(t_{j-1})| \\
&\leq Var(f; [a, b])\|g\|_\infty + Var(g; [a, b])\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para $P \in \mathscr{P}[a, b]$ arbitraria, entonces

$$Var(fg; [a, b]) \leq Var(f; [a, b])\|g\|_\infty + Var(g; [a, b])\|f\|_\infty.$$

Probemos ahora (1.1.22). Escribimos a f y g en sus respectivas descomposiciones definidas en el Teorema 1.1.3,

$$f = p_f - n_f + f(a) \quad , \quad g = p_g - n_g + g(a).$$

Notemos que por el Teorema 1.1.3 tenemos que

$$\|f\|_{BV} = Var(f; [a, b]) + |f(a)| = p_f + n_f + |f(a)|,$$

$$\|g\|_{BV} = Var(g; [a, b]) + |g(a)| = p_g + n_g + |g(a)|.$$

Ahora usando las descomposiciones de f y g, obtenemos su producto

$$\begin{aligned}
fg = &\; p_f p_g + n_f n_g + f(a)p_g \\
&+ g(a)p_f - n_f p_g - n_g p_f \\
&- f(a)n_g - g(a)n_f + f(a)g(a).
\end{aligned}$$

Notemos que cada término, a excepción del último que es constante, es una función monótona, y es igual a cero cuando se evalúa en a.
Utilizando la observación previa y aplicando la desigualdad del triángulo para la norma en $BV[a,b]$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{BV} &\leq \|p_f p_g\|_{BV} + \|n_f n_g\|_{BV} + \|f(a)p_g\|_{BV} + \|g(a)p_f\|_{BV} + \|n_f p_g\|_{BV} \\
&+ \|n_g p_f\|_{BV} + \|f(a)n_g\|_{BV} + \|g(a)n_f\|_{BV} + |f(a)||g(a)| \\
&= p_f(b)p_g(b) + n_f(b)n_g(b) + |f(a)|p_g(b) + |g(a)|p_f(b) + n_f(b)p_g(b) \\
&+ n_g(b)p_f(b) + |f(a)|n_g(b) + |g(a)|n_f(b) + |f(a)||g(a)| \\
&= [p_f(b) + n_f(b) + |f(a)|][p_g(b) + n_g(b) + |g(a)|] \\
&= \|f\|_{BV}\|g\|_{BV}.
\end{aligned}$$

□

A partir de la proposición previa concluimos que el espacio $BV[a,b]$ con la norma que hemos venido utilizando, está incluido continuamente en el espacio $B[a,b]$ con la norma del supremo. La importancia de este resultado radica en el hecho de que la convergencia en un espacio implica la convergencia en el otro, lo cual resulta muy útil en el análisis.

Proposición 1.1.9. $(BV[a,b], \| \|_{BV})$ *está incluido continuamente en* $(B[a,b], \| \|_{\infty})$.

Demostración. Se sigue de (1.1.6)

□

1.1.1. Principio de Selección de Helly

La Proposición 1.1.6 muestra que la variación finita se transmite de una sucesión de funciones con variaciones totales acotadas uniformemente a su límite puntual, en caso de que este límite exista.

En 1912, E. Helly [8] utilizó la descomposición dada por Jordan para obtener un resultado de compacidad para funciones de variación acotada. Este resultado se conoce como principio de selección de Helly y nos permite asegurar la existencia de los límites puntuales en la Proposición 1.1.6. En esta sección nos dedicamos a dar una prueba del principio de selección de Helly, para ello, presentamos algunos resultados auxiliares.

Lema 1.1.10. *Sea $\mathscr{H} = (f_i)_{i\in I}$ una familia de funciones definidas en $[a,b]$ con valores reales. Supongamos que existe $K > 0$ tal que*

$$|f_i(x)| \leq K \quad \forall i \in I, \forall x \in [a,b]. \tag{1.1.23}$$

Entonces para cualquier subconjunto numerable $E \subset [a,b]$, es posible encontrar una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de la familia $\mathscr{H}$ que converja en cada punto de E.

Demostración. Sea $E = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, consideremos el conjunto

$$(f_i(x_1))_{i\in I},$$

de valores reales que toman las funciones de $\mathscr{H}$ en el punto x_1. Por (1.1.23), este conjunto está acotado, y por el Teorema de Bolzano Weierstrass, existe una subsucesión convergente, digamos,

$$f_1^{(1)}(x_1), \quad f_2^{(1)}(x_1), \quad \ldots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1. \tag{1.1.24}$$

Ahora consideremos la sucesión

$$f_1^{(1)}(x_2), \quad f_2^{(1)}(x_2), \quad \ldots$$

de valores reales que toman las funciones en $(f_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$ en el punto x_2. Esta sucesión es acotada también, aplicamos Bolzano Weierstrass y obtenemos una subsucesión convergente

$$f_1^{(2)}(x_2), \quad f_2^{(2)}(x_2), \quad \ldots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2. \tag{1.1.25}$$

Es importante notar que el orden de dos funciones $f_n^{(2)}$ y $f_m^{(2)}$ en (1.1.25) es el mismo que en (1.1.24).

Continuando este proceso indefinidamente, construimos un conjunto numerable de sucesiones convergentes:

$$\begin{array}{l}
f_1^{(1)}(x_1), \quad f_2^{(1)}(x_1), \quad \dots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1, \\
f_1^{(2)}(x_2), \quad f_2^{(2)}(x_2), \quad \dots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2, \\
\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
f_1^{(k)}(x_k), \quad f_2^{(k)}(x_k), \quad \dots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k) = A_k, \\
\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

donde cada sucesión de números es subsucesión de la anterior. Ahora formamos la sucesión de las funciones en la diagonal,

$$(f_n^{(n)})_{n=1}^{\infty}.$$

Esta sucesión de funciones converge en cada punto de E. De hecho, para cada k fijo, la sucesión

$$(f_n^{(n)}(x_k))_{n\geq k},$$

es subsucesión de

$$(f_n^{(k)}(x_k))_{n=1}^{\infty},$$

y converge por tanto a A_k. □

Lema 1.1.11. *Sea $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ una familia infinita de funciones crecientes, definidas en $[a, b]$. Si existe $K > 0$ tal que*

$$|f_i(x)| \leq K \qquad \forall i \in I, \forall x \in [a, b], \tag{1.1.26}$$

entonces existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en la familia $\mathscr{F}$ que converge a una función creciente $\varphi(x)$ en todo punto de $[a, b]$.

Demostración. Aplicamos el Lema 1.1.10 a la familia $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$, tomando como conjunto numerable $E = \mathbb{Q} \cap [a, b] \cup \{a\}$.

Encontramos entonces una sucesión de funciones de la familia $\mathscr{F}$:

$$F_0 = (f^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}.$$

tal que $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)$ existe y es finito en cada $x_k \in E$.

Ahora, definimos una función $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que,

$$\psi(x_k) := \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k) \qquad \forall x_k \in E.$$

Notemos que ψ es una función creciente en E, por ser límite puntual de funciones crecientes en E.

Ahora, para $x \in [a,b] \setminus E$, definimos

$$\psi(x) := \sup_{x_k < x} \{\psi(x_k)\} \qquad x_k \in E.$$

Claramente ψ es una función monótona creciente en $[a,b]$ y por lo tanto el conjunto de puntos Q donde ψ es discontinua es a lo sumo numerable.

Mostraremos a continuación que

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \psi(x_0),$$

en cada $x_0 \in [a,b]$ donde la función ψ es continua.

Sea $\epsilon > 0$, por continuidad de ψ en x_0, existen $x_k, x_l \in E$ tales que $x_k < x_0 < x_l$ y

$$\psi(x_l) - \psi(x_k) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.1.27}$$

Como $\psi(x_l) := \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_l)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$

$$|f^{(n)}(x_l) - \psi(x_l)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.1.28}$$

Utilizando (1.1.27), (1.1.28) y la monotonía de $f^{(n)}$ y de ψ obtenemos que para $n \geq N$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0) \leq f^{(n)}(x_l) &\leq \psi(x_l) + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \psi(x_l) - \psi(x_k) + \psi(x_k) + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \psi(x_k) \\ &\leq \psi(x_0) + \epsilon. \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

Análogamente, obtenemos que para $n \geq N$

$$f^{(n)}(x_0) \geq \psi(x_0) - \epsilon. \tag{1.1.30}$$

De las desigualdades (1.2.7) y (1.1.30) tenemos para $n \geq N$

$$|f^{(n)}(x_0) - \psi(x_0)| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \psi(x),$$

excepto quizá en un conjunto a lo sumo numerable Q donde ψ es discontinua.

Ahora, aplicamos el Lema 1.1.10 a la sucesión F_0, tomando como conjunto numerable a Q.

Esto nos resulta en una subsucesión

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset F_0,$$

la cual converge en todo punto $x \in [a, b]$.

Para finalizar, definimos para $x \in [a, b]$

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

y obtenemos una función creciente.

□

Finalmente, contamos con las herramientas necesarias para probar el principio de selección de Helly, el cual presentamos a continuación.

Teorema 1.1.12. *(Principio de selección de Helly) Sea $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ una familia de funciones definidas en $[a, b]$. Si todas las funciones de la familia y su variaciones totales están acotadas por alguna $K > 0$, es decir,*

$$|f_i(x)| \leq K, \quad Var(f_i; [a, b]) \leq K \qquad \forall i \in I, \qquad \forall x \in [a, b], \tag{1.1.31}$$

entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ que converge en cada punto de $[a, b]$ a una función ψ de variación acotada en $[a, b]$.

Demostración. Para cada f_i con $i \in I$, definimos

$$V_{f_i}(x) := Var(f_i;[a,x]), \quad \varphi_i(x) := V_{f_i}(x) - f_i(x) \quad \forall i \in I.$$

Por el Teorema 1.1.2, tanto V_{f_i} como $\varphi_i(x)$ son crecientes para toda $i \in I$ y tenemos que

$$|V_{f_i}(x)| \leq K, \quad |\varphi_i(x)| \leq 2K \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall i \in I.$$

Aplicamos entonces el Lema 1.1.11 a la familia $(V_{f_i})_{i\in I}$ y encontramos una sucesión $(V_{f_k})_{k=1}^{\infty}$en la familia que converge puntualmente a una función creciente α.

A cada función V_{f_k} le corresponde una función φ_k, entonces aplicando el Lema 1.1.11 a la sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$, encontramos una subsucesión $(\varphi_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a una función creciente β.

Por tanto, la sucesión de funciones

$$(f_{k_l})_{l=1}^{\infty} = (V_{f_{k_l}} - \varphi_{k_l})_{l=1}^{\infty} \subset \mathscr{F},$$

converge puntualmente a la función

$$\psi = \alpha - \beta,$$

donde ψ es una función de variación acotada en $[a,b]$, por ser la diferencia de dos funciones crecientes en $[a,b]$.

$\square$

Notemos que las funciones monótonas en un intervalo fijo $[a,b]$ no poseen la estructura de un espacio vectorial. (Considerar por ejemplo, $f(t) = t^2$ y $g(t) = 1 - t$ en el intervalo $[0,1]$). Sin embargo, el Teorema 1.1.2 y las relaciones, (1.1.3), (1.1.4) y (1.1.7) muestran que $BV[a,b]$ es el espacio vectorial generado por las funciones monótonas en $[a,b]$, es decir el espacio vectorial mas pequeño que contiene a todas las funciones monótonas en $[a,b]$, siendo ésta otra forma de introducir a las funciones de variación acotada.

Para cerrar esta sección, presentamos un resultado de gran utilidad que muestra que si una función no es de variación acotada en un intervalo dado, entonces localmente tampoco lo es.

Proposición 1.1.13. *(Principio de localización) Supongamos que $f \notin BV[a,b]$. Entonces existe un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que para cada intervalo $[c,d] \subseteq [a,b]$ con $c < x_0 < d$, $f \notin BV[c,d]$.*

Demostración. Supongamos que la proposición es falsa, es decir, para cada $x \in [a,b]$ existe un intervalo abierto I_x tal que $x \in I_x$ y $f \in BV(\overline{I_x})$.

Como tenemos que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{a \le x \le b} I_x$$

y $[a,b]$ es compacto, podemos encontrar puntos $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [a,b]$ tales que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_{x_k}.$$

Entonces por (1.1.9)

$$Var(f;[a,b]) \le \sum_{k=1}^{n} Var(f;\overline{I_{x_k}}) < \infty,$$

lo cual es una contradicción a la hipótesis $f \notin BV[a,b]$. Por lo tanto la proposición es verdadera.

□

1.2. Variación Acotada y Continuidad

Hemos visto anteriormente que no existe una relación de contención entre los espacios $BV[a,b]$ y $C[a,b]$. Sin embargo, es de nuestro interés en esta sección, estudiar las propiedades de continuidad de las funciones de variación acotada. Para ello, consideramos una clase importante de funciones definidas en un intervalo $[a,b]$ que está contenida en el espacio $BV[a,b] \cap C[a,b]$.

Definición 1.2.1. (a) Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *absolutamente continua* si tiene la propiedad de que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada colección $\{[a_1,b_1], ..., [a_n,b_n]\} \in \sum([a,b])$, la condición:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \le \delta \tag{1.2.1}$$

implica

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \epsilon, \tag{1.2.2}$$

donde $\sum([a,b])$ denota la familia de todas las colecciones finitas de subintervalos de $[a,b]$ que no se traslapan; es decir subintervalos mutuamente ajenos o que poseen a lo más un punto frontera en común.

(b) Equivalentemente, podemos requerir que para todo $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que para cada colección $\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\} \in \sum_{\infty}([a,b])$, la condición:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \delta \tag{1.2.3}$$

implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \epsilon, \tag{1.2.4}$$

donde $\sum_{\infty}([a,b])$ denota la familia de todas las colecciones infinitas numerables de subintervalos de $[a,b]$ que no se traslapan; es decir subintervalos mutuamente ajenos o que poseen a lo más un punto frontera en común.

Probemos que los incisos (a) y (b) en la Definición 1.2.1 son realmente equivalentes. En efecto, claramente la continuidad absoluta según el inciso (b) implica la continuidad absoluta según el inciso (a).

Recíprocamente, supongamos continuidad absoluta de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ según el inciso (a) y que $\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\} \in \sum_{\infty}([a,b])$ satisface:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \delta.$$

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq \delta.$$

Como f es absolutamente continua según (a), entonces esto implica que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \epsilon.$$

Se sigue entonces que
$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|\leq\epsilon.$$
Por lo tanto f es absolutamente continua según el inciso (b).

Denotamos al conjunto de funciones absolutamente continuas en un intervalo $[a,b]$ como $AC[a,b]$.

Es sencillo ver que continuidad absoluta implica continuidad uniforme en un intervalo $[a,b]$. Además, mostramos a continuación que toda función absolutamente continua en $[a,b]$ es de variación acotada en $[a,b]$.

Proposición 1.2.1. *Toda función $f\in AC[a,b]$ es tal que $f\in BV[a,b]$.*

Demostración. Para $\epsilon=1$, elegimos $\delta>0$ tal que para cada colección $\{[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]\}\in\sum([a,b])$ que verifique
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\delta,$$
se cumple
$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\leq 1.$$
Elegimos una partición equidistante $P_n=\{t_0,t_1,...,t_n\}\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $n>\frac{b-a}{\delta}$.
Notemos que para cualquier intervalo $[t_{j-1},t_j]$ de la partición P_n, tenemos que
$$Var(f;[t_{j-1},t_j])\leq 1,$$
ya que $|t_{j-1}-t_j|=\frac{b-a}{n}<\delta$.
Tenemos entonces por la observación anterior y (1.1.9)
$$Var(f;[a,b])=\sum_{j=1}^{n}Var(f;[t_{j-1},t_j])\leq n.$$
Por lo tanto $f\in BV[a,b]$.

□

Otra clase importante de funciones continuas relacionadas con el espacio $BV[a,b]$ es el espacio de funciones Lipschitz continuas, el cuál presentamos a continuación.

Definición 1.2.2. Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se llama *Lipschitz continua* si existe $L>0$ tal que

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y| \qquad (a\leq x,y\leq b).$$

Denotamos al conjunto de todas las funciones Lipschitz continuas en $[a,b]$ como $Lip[a,b]$.

El conjunto $Lip[a,b]$ es un espacio de Banach con la norma definida para $f\in Lip[a,b]$ como

$$\|f\|_{Lip}:=|f(a)|+lip(f), \tag{1.2.5}$$

donde

$$lip(f):=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \tag{1.2.6}$$

En la proposición siguiente establecemos una relación entre el espacio de funciones Lipschitz continuas y absolutamente continuas en un intervalo $[a,b]$.

Proposición 1.2.2. *Toda función $f\in Lip[a,b]$ es tal que $f\in AC[a,b]$.*

Demostración. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz continua y $\epsilon>0$. Elegimos $\delta=\frac{\epsilon}{lip(f)}$. Supongamos que $\{[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]\}\in\sum([a,b])$ satisface:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\frac{\epsilon}{lip(f)}.$$

Entonces como $f\in Lip[a,b]$, tenemos que $|f(x)-f(y)|\leq lip(f)|x-y|$ para $a\leq x$ y $y\leq b$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| &\leq lip(f)\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\\ &\leq lip(f)\frac{\epsilon}{lip(f)}=\epsilon.\end{aligned}$$

Concluimos que $f \in AC[a,b]$.

□

A partir de los resultados obtenidos anteriormente, tenemos la siguiente cadena de inclusiones:

$$Lip[a,b] \subseteq AC[a,b] \subseteq C[a,b] \cap BV[a,b] \subseteq BV[a,b] \tag{1.2.7}$$

Aún mas, podemos probar la inclusión continua del espacio $Lip[a,b]$ con la norma definida en (1.2.5) en el espacio $BV[a,b]$ con la norma usual.

Proposición 1.2.3. *El espacio* $(Lip[a,b], \|.\|_{Lip})$ *está incluido continuamente en el espacio* $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$.

Demostración. Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface la condición de Lipschitz:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad (a \leq x, y \leq b)$$

para alguna $L > 0$, y sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$.

$$\begin{aligned} Var(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &\leq L \sum_{j=1}^{m} |t_j - t_{j-1}| \\ &= L(b-a) \end{aligned}$$

y entonces

$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + Var(f; [a,b]) \leq |f(a)| + L(b-a).$$

Así

$$\|f\|_{BV} \leq \text{máx}\{1, b-a\} \|f\|_{Lip},$$

pues L puede ser tomada arbitrariamente cercana a $lip(f)$.

□

Capítulo 2

Espacios de Variación Acotada Generalizada

El trabajo de Jordan [9, 10] es considerado el punto de inicio del estudio de las funciones de variación acotada y desde su definición en 1881 han surgido extensiones en diferentes direcciones del espacio de variación acotada clásica. Estas extensiones han llevado a generalizaciones de resultados en el espacio clásico y en otros casos a nuevos resultados inesperados. En este capítulo, consideraremos dos extensiones importantes de este espacio.

En la primera sección, estudiaremos el espacio de funciones de p-variación acotada introducida por Norbert Wiener [17]. En 1924 N. Wiener probó que el Teorema de Dirichlet-Jordan se podía extender al espacio de funciones de variación cuadrática acotada $WBV_2[a, b]$. Fue hasta 1937 que Laurent Young mostró que el teorema podía extenderse incluso al espacio de funciones de p-variación acotada introducido por Wiener $WBV_p[a, b]$, para $p \geq 1$ [18].

En la segunda sección, consideraremos otra extensión del espacio de funciones de variación acotada, esta vez utilizando la noción de p-variación presentada por Frigyes Riesz en 1910 [14, 15]. La importancia de esta extensión es que permite obtener una caracterización elegante de las funciones absolutamente continuas cuya derivada posee ciertas propiedades, además de ser de especial importancia en el estudio de espacios duales en análisis funcional.

Discutiremos a lo largo del capítulo las relaciones que existen entre ambas extensiones y otros espacios clásicos en análisis. Ilustraremos tales relaciones por medio de inclusiones, ejemplos y contraejemplos.

Los resultados que presentamos en este capítulo han sido tomados de [2], [6] y [11].

2.1. Espacio de Variación de Wiener Acotada

N. Wiener cambió la medida de intervalos en la imagen de funciones utilizada por Jordan al considerar p-potencias. En esta sección estudiaremos el espacio de funciones de p-variación de Wiener acotada. Presentamos antes que nada su definición y algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 2.1.1. Dado un número real $p \geq 1$, una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a, b]$, y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, el número real no negativo

$$Var_p^W(f, P) = Var_p^W(f, P; [a, b]) := \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \tag{2.1.1}$$

se llama *variación de Wiener* de f en $[a, b]$ con respecto a la partición P.
El número posiblemente infinito

$$Var_p^W(f) = Var_p^W(f; [a, b]) := \sup\{Var_p^W(f, P; [a, b]) \mid P \in \mathscr{P}[a, b]\} \tag{2.1.2}$$

se llama *variación de Wiener total* de f en $[a, b]$.
Cuando $Var_p^W(f) < \infty$, decimos que f tiene variación de Wiener finita en $[a, b]$ y lo denotamos por $f \in WBV_p[a, b]$.

Al comparar la Definición 1.1.1 del espacio clásico $BV[a,b]$ con la del espacio $WBV_p[a,b]$, observamos que

$$Var_1^W(f,P;[a,b]) = Var(f,P;[a,b]), \qquad Var_1^W(f;[a,b]) = Var(f;[a,b]),$$

lo cual muestra que el espacio $WBV_1[a,b] = BV[a,b]$.

Enseguida presentamos una proposición paralela a la Proposición 1.1.1, en la cual reunimos algunas propiedades de las cantidades (2.1.1) y (2.1.2).

Proposición 2.1.1. *Las cantidades $Var_p^W(f)$ y $Var_p^W(f,P)$ poseen las siguientes propiedades:*

(a) Para $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$Var_p^W(f+g;[a,b])^{1/p} \leq Var_p^W(f;[a,b])^{1/p} + Var_p^W(g;[a,b])^{1/p}. \tag{2.1.3}$$

(b) Para $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$

$$Var_p^W(\mu f;[a,b])^{1/p} = |\mu| Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}. \tag{2.1.4}$$

(c) Para $a\leq s<t\leq b$

$$|f(s)-f(t)| \leq Var_p^W(f;[s,t])^{1/p}. \tag{2.1.5}$$

(d) Cada $f\in WBV[a,b]$ es acotada y satisface

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}. \tag{2.1.6}$$

(e) El espacio vectorial $WBV_p[a,b]$ con la norma definida para $f\in WBV_p[a,b]$ como

$$\|f\|_{WBV_p} := |f(a)| + Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}, \tag{2.1.7}$$

es un espacio de Banach.

(f) El espacio $WBV_p[a,b]$ es un álgebra que satisface

$$Var_p^W(fg;[a,b])^{1/p} \leq \|g\|_\infty Var_p^W(f;[a,b])^{1/p} + \|f\|_\infty Var_p^W(g;[a,b])^{1/p}, \tag{2.1.8}$$

para $f,g \in WBV_p[a,b]$.

Demostración. (a) Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $P=\{t_0,t_1,...,t_m\}\in\mathscr{P}[a,b]$, utilizando la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned}
Var_p^W(f+g,P)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^m |(f+g)(t_j)-(f+g)(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m |[f(t_j)-f(t_{j-1})]+[g(t_j)-g(t_{j-1})]|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^m |f(t_j)-f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |g(t_j)-g(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&= Var_p^W(f,P)^{1/p} + Var_p^W(g,P)^{1/p} \\
&\leq Var_p^W(f)^{1/p} + Var_p^W(g)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$Var_p^W(f+g)^{1/p} \leq Var_p^W(f)^{1/p} + Var_p^W(g)^{1/p}.$$

(b) Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$ y $P=\{t_0,t_1,...,t_m\}\in\mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned}
Var_p^W(\mu f,P)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^m |\mu f(t_j)-\mu f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m |\mu|^p|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&= |\mu|\left(\sum_{j=1}^m |f(t_j)-f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&= |\mu| Var_p^W(f,P)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$Var_p^W(\mu f)^{1/p} = |\mu| Var_p^W(f)^{1/p}.$$

(c) Consideremos la partición $P = \{s, t\} \in \mathscr{P}[s, t]$, en este caso tenemos que

$$Var_p^W(f, P; [s, t])^{1/p} = |f(t) - f(s)|,$$

y por definición de la variación total de Wiener, tenemos

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= Var_p^W(f, P; [s, t])^{1/p} \\ &\leq Var_p^W(f; [s, t])^{1/p}. \end{aligned}$$

(d) Para $x \in [a, b]$ fija consideremos la partición $P_x = \{a, x, b\} \in \mathscr{P}[a, b]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} Var_p^W(f; [a, b])^{1/p} + |f(a)| &\geq Var_p^W(f, P; [a, b])^{1/p} + |f(a)| \\ &= (|f(x) - f(a)|^p + |f(b) - f(x)|^p)^{1/p} + |f(a)| \\ &\geq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ &\geq |f(x)|. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todas las $x \in [a, b]$, obtenemos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq Var_p^W(f; [a, b])^{1/p} + |f(a)|.$$

(e) De (a) y (b) se sigue que $WBV_p[a, b]$ es un espacio lineal. Es sencillo ver que (2.1.7) define una norma en $WBV_p[a, b]$.

Probemos que $WBV_p[a, b]$ es un espacio de Banach con la norma (2.1.7).

Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy con respecto a la norma (2.1.7), es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$

$$\|f_n - f_m\|_{WBV_p} = |f_n(a) - f_m(a)| + Var_p^W(f_n - f_m; [a, b])^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Notemos que por el inciso (b), para $n, m \geq N_1$

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{WBV_p} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como el espacio $(B[a,b], \|.\|_\infty)$ es un espacio de Banach, entonces existe una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente en $[a,b]$ a f.

Probemos que $f_n \xrightarrow{WBV_p} f$, es decir que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge a f en la norma (2.1.7).

Por la definición de la norma (2.1.7), tenemos que para $m, n \geq N_1$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_r\} \in \mathscr{P}[a,b]$

$$Var_p^W(f_n - f_m, P; [a,b])^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces por ser f el límite uniforme de$(f_n)_{n=1}^\infty$, tenemos que para $n \geq N_1$

$$Var(f_n - f, P; [a,b])_p^W = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{r} |(f_n - f_m)(t_k) - (f_n - f_m)(t_{k-1})|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

De lo anterior se sigue que para $n \geq N_1$

$$Var(f_n - f; [a,b])_p^W \leq \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

Ahora, por ser f el límite uniforme y por tanto puntual de $(f_n)_{n=1}^\infty$, para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$

$$|f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, para $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$

$$\|f_n - f\|_{WBV_p} = |(f_n - f)(a)| + Var_p^W(f_n - f; [a,b])^{1/p} \leq \epsilon,$$

y por lo tanto $f_n \xrightarrow{WBV_p} f$.

Resta probar que $f \in WBV_p[a,b]$. Para esto, notemos que para $n \geq N$

$$\begin{aligned} \|f\|_{WBV_p} &\leq \|f_n - f\|_{WBV_p} + \|f_n\|_{WBV_p} \\ &\leq \epsilon + \|f_n\|_{WBV_p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in WBV_p[a,b]$, y así hemos probado que $WBV_p[a,b]$ es un espacio de Banach.

(f) Sean $f, g \in WBV_p[a,b]$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$
\begin{aligned}
Var_p^W(fg, P)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{m} |g(t_j)\,(f(t_j) - f(t_{j-1})) + f(t_{j-1})\,(g(t_j) - g(t_{j-1}))|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m} |g(t_j)|^p |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |f(t_{j-1})|^p |g(t_j) - g(t_{j-1})|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \|g\|_\infty Var_p^W(f;[a,b])^{1/p} + \|f\|_\infty Var_p^W(g;[a,b])^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
Var_p^W(fg;[a,b])^{1/p} \leq \|g\|_\infty Var_p^W(f;[a,b])^{1/p} + \|f\|_\infty Var_p^W(g;[a,b])^{1/p}.
$$

□

Podemos preguntarnos por qué en la proposición previa no se establecen análogos a las propiedades (1.1.8) (monotonía de la variación respecto a particiones), y (1.1.9) (aditividad de la variación respecto a intervalos) de la Proposición 1.1.1. La razón es que dichos análogos son falsos, como muestra de ello, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. *Consideremos la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, definida como*

$$
f(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x = 1, \\ 2 & 1 < x \leq 2. \end{cases} \tag{2.1.9}
$$

Consideremos las particiones $P := \{0, 2\}$ y $Q := \{0, 1, 2\}$. Tenemos que $P \subset Q$. Sin embargo

$$
Var_p^W(f, P; [0,2]) = 2^p \quad \text{y} \quad Var_p^W(f, Q; [0,2]) = 2.
$$

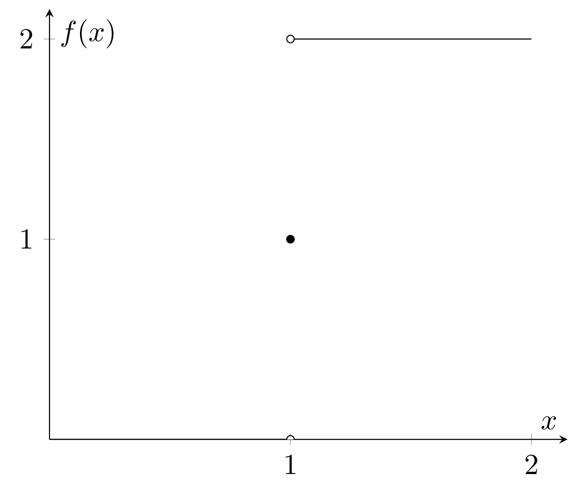

Figura 2.1: Gráfica de la función f.

Entonces para $p > 1$

$$Var_p^W(f, P; [0,2]) > Var_p^W(f, Q; [0,2]).$$

Hemos mostrado así que en el caso $p > 1$, $P \subset Q$ no implica $Var_p^W(f, P) \leq Var_p^W(f, Q)$.

Para mostrar que el análogo de (1.1.9) es falso, consideremos la misma función f y los intervalos $[0,2], [0,1]$ y $[1,2]$.

Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0,1]$ arbitraria, entonces

$$Var_p^W(f, P, [0,1]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p = 1^p = 1.$$

Como tenemos esta igualdad para cualquier partición $P \in \mathscr{P}[0,1]$, entonces

$$Var_p^W(f, [0,1]) = 1. \tag{2.1.10}$$

Sea $Q = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[1,2]$ arbitraria, entonces

$$Var_p^W(f, Q, [1,2]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p = 1^p = 1.$$

Como tenemos esta igualdad para cualquier partición $Q \in \mathscr{P}[1,2]$, entonces

$$Var_p^W(f, [1,2]) = 1. \tag{2.1.11}$$

Ahora, sea $P = \{0, 2\} \in \mathscr{P}[0, 2]$, tenemos que

$$Var_p^W(f, P, [0, 2]) = 2^p,$$

lo cual implica

$$Var_p^W(f; [0, 2]) \geq 2^p. \tag{2.1.12}$$

Ahora, sea $Q = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0, 2]$, notemos que por la definición de la función f,

$$Var_p^W(f, Q; [0, 2]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \leq 2^p.$$

Por lo tanto

$$Var_p^W(f; [0, 2]) \leq 2^p. \tag{2.1.13}$$

De (2.1.12) y (2.1.13) obtenemos la igualdad

$$Var_p^W(f; [0, 2]) = 2^p. \tag{2.1.14}$$

Tenemos entonces, por (2.1.10), (2.1.11) y (2.1.14) que para el caso $p > 1$

$$Var_p^W(f; [0, 2]) \neq Var_p^W(f; [0, 1]) + Var_p^W(f; [1, 2]),$$

mostrando así que la variación de Wiener no es aditiva respecto a intervalos si $p > 1$.

De hecho, para $p \in [1, \infty)$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.2. *La variación de Wiener es superaditiva con respecto a intervalos, esto es,*

$$Var_p^W(f; [a, b]) \geq Var_p^W(f; [a, c]) + Var_p^W(f; [c, b]),$$

para $a < c < b$.

Demostración. Supongamos que $Var_p^W(f;[a,c])$ y $Var_p^W(f;[c,b])$ son finitas. Dado $\epsilon > 0$, escogemos particiones $\{t_0, t_1, ..., t_k\} \in \mathscr{P}[a,c]$, $\{t_k, t_k+1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[c,b]$ tales que

$$Var_p^W(f;[a,c]) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p,$$

$$Var_p^W(f;[c,b]) - \epsilon \leq \sum_{j=k+1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p.$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} Var_p^W(f;[a,c]) + Var_p^W(f;[c,b]) - 2\epsilon &\leq \sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \\ &\leq Var_p^W(f;[a,b]). \end{aligned}$$

Como ϵ fue tomado arbitrariamente, se sigue que

$$Var_p^W(f;[a,b]) \geq Var_p^W(f;[a,c]) + Var_p^W(f;[c,b]).$$

$\square$

El resultado de inclusión $Lip[a,b] \subseteq BV[a,b]$, que mostramos anteriormente, tiene un análogo en el espacio $WBV_p[a,b]$. Para obtenerlo, introducimos un espacio que generaliza al espacio $Lip[a,b]$.

Definición 2.1.2. Decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *Hölder continua* o *α-Lipschitz continua* para $0 \leq \alpha \leq 1$ si existe $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^{\alpha} \qquad (a \leq x, y \leq b).$$

Denotamos al conjunto de todas las funciones α-Lipschitz continuas en $[a,b]$ como $Lip_{\alpha}[a,b]$.

El conjunto $Lip_{\alpha}[a,b]$ es un espacio de Banach con la norma definida para $f \in Lip_{\alpha}[a,b]$ como

$$\|f\|_{Lip_{\alpha}} := |f(a)| + lip_{\alpha}(f), \tag{2.1.15}$$

donde

$$lip_\alpha(f) := \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{2.1.16}$$

Proposición 2.1.3. *Para $1 \leq p < \infty$, se cumple la inclusión*

$$Lip_{1/p}[a,b] \subseteq WBV_p[a,b].$$

Demostración. Supongamos que $f \in Lip_{1/p}[a,b]$, esto es, existe $L > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^{1/p}$ para $a \leq x, y \leq b$. Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} Var_p^W(f,P;[a,b]) &= \sum_{j=1}^m |f(t_j)-f(t_{j-1})|^p \\ &\leq L^p \sum_{j=1}^m |t_j - t_{j-1}| \\ &= L^p(b-a). \end{aligned}$$

Como $L^p(b-a)$ no depende de la partición P, entonces tenemos que

$$Var_p^W(f;[a,b]) \leq L^p(b-a) < \infty.$$

Por lo tanto $f \in WBV_p[a,b]$.

$\square$

Una prueba análoga a la de la Proposición 1.2.3 muestra que el espacio de Banach $(Lip_{1/p}[a,b], \|.\|_{Lip_{1/p}})$ está continuamente incluido en el espacio de Banach $(WBV_p[a,b], \|.\|_{WBV_p})$, con constante de inclusión $\max\{1,(b-a)^{1/p}\}$.

De manera natural, podemos preguntarnos si para ciertos valores de p y q, el espacio $WBV_p[a,b]$ está contenido en el espacio $WBV_q[a,b]$. Nuestro siguiente resultado importante establece que si $p < q$, entonces $WBV_p[a,b] \subseteq WBV_q[a,b]$ y de hecho esta inclusión es estricta.

Para probarlo, necesitamos conocer antes una serie de resultados técnicos acerca de funciones convexas.

Lema 2.1.4. *Sea* $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *una función convexa tal que* $\phi(0) \leq 0$*, entonces la función* $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida como* $\psi(t) := \frac{\phi(t)}{t}$ *es creciente.*

Demostración. Fijemos $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ con $x_1 < x_2$. Como ϕ es convexa, entonces

$$\phi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda\phi(s) + (1-\lambda)\phi(t),$$

para $s, t \in [0, \infty)$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Elegimos $s = x_2, t = 0$ y $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$. Tomando en cuenta que $\phi(0) \leq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\phi(x_1) &\leq \lambda\phi(x_2) + (1-\lambda)\phi(0)\\ &\leq \lambda\phi(x_2)\\ &= \frac{x_1}{x_2}\phi(x_2).\end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\psi(x_1) = \frac{\phi(x_1)}{x_1} \leq \frac{\phi(x_2)}{x_2} = \psi(x_2).$$

Por lo tanto ψ es una función creciente.

□

Introducimos a continuación el concepto de función de Young que utilizaremos en el lema siguiente.

Definición 2.1.3. Decimos que una función $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una *función de Young*, si ϕ es continua, convexa, satisface $\phi(0) = 0, \phi(t) > 0$ si $t > 0$ y $\phi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Algunos ejemplos clásicos de funciones de Young son los siguientes:

- $\phi(t) = t^p$ para $1 \leq p < \infty$.
- $\phi(t) = e^t - 1$.
- $\phi(t) = (t+1)log(t+1)$.

Lema 2.1.5. *Sea $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función de Young. Entonces ϕ es creciente y superaditiva en $[0,\infty)$, esto es,*

$$\phi(\alpha) + \phi(\beta) \leq \phi(\alpha + \beta) \qquad (\alpha, \beta \geq 0). \tag{2.1.17}$$

Demostración. Supongamos que ϕ no es creciente, entonces existen $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ tal que $x_1 < x_2$ y $\phi(x_1) > \phi(x_2)$.
Si $x_1 = 0$, tenemos por definición de función de Young que $\phi(x_1) = \phi(0) = 0 < \phi(x_2)$. Entonces, tomamos $0 < x_1 < x_2$, así

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}.$$

Combinando esto, con la suposición $\phi(x_1) > \phi(x_2) > 0$, obtenemos

$$\frac{\phi(x_1)}{x_1} > \frac{\phi(x_2)}{x_1} > \frac{\phi(x_2)}{x_2}.$$

Pero esto contradice que la función ψ definida en el Lema 2.1.4 es creciente. Por lo tanto ϕ debe ser creciente.

Probemos ahora que ϕ es superaditiva en $[0,\infty)$. Fijamos $\alpha, \beta \in [0,\infty)$. Si $\alpha = 0$, entonces $\phi(\alpha) = 0$, lo cual implica que

$$\phi(\alpha) + \phi(\beta) = \phi(\alpha + \beta).$$

La igualdad se da también si $\beta = 0$. Entonces, supongamos que $\alpha > 0, \beta > 0$. Esto implica que $\alpha < \alpha + \beta$, $\beta < \alpha + \beta$.
Por el Lema 2.1.4, tenemos que

$$\frac{\phi(\alpha)}{\alpha} \leq \frac{\phi(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} \quad \text{y} \quad \frac{\phi(\beta)}{\beta} \leq \frac{\phi(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}.$$

De esto se sigue que

$$\phi(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\phi(\alpha+\beta) \quad \text{y} \quad \phi(\beta) \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta}\phi(\alpha+\beta).$$

Finalmente, obtenemos

$$\phi(\alpha)+\phi(\beta) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\phi(\alpha+\beta)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\phi(\alpha+\beta)=\phi(\alpha+\beta).$$

Por lo tanto, ϕ es superaditiva en $[0,\infty)$.

□

Ejemplo 2.1.2. *El ejemplo más simple de función de Young es $\phi(t)=t^p$ para $p \geq 1$. Entonces, esta función es superaditiva por lo ya probado, esto es,*

$$s^p+t^p \leq (s+t)^p,$$

para $s,t \geq 0$.

Ahora, estamos en condiciones para establecer una relación entre los espacios $WBV_p[a,b]$ y $WBV_q[a,b]$ para ciertos valores de p y q.

Proposición 2.1.6. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$Var_q^W(f;[a,b])^{1/q} \leq Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}. \tag{2.1.18}$$

Como consecuencia, para estos valores de p y q tenemos las siguientes inclusiones:

$$BV[a,b]=WBV_1[a,b] \subseteq WBV_p[a,b] \subseteq WBV_q[a,b] \subseteq B[a,b]. \tag{2.1.19}$$

Demostración. Fijemos una partición arbitraria $P=\{t_0,t_1,...,t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$. Consideremos la función de Young $\phi(t) := t^{q/p}$. Utilizando el Lema 2.1.5 y el Ejemplo 2.1, obtenemos

$$\begin{aligned} Var_q^W(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} (|f(t_j) - f(t_{j-1}|^p)^{q/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1}|^p \right)^{q/p} \\ &= Var_p^W(f, P; [a,b])^{q/p} \\ &\leq Var_p^W(f; [a,b])^{q/p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$Var_q^W(f; [a,b])^{1/q} \leq Var_p^W(f; [a,b])^{1/p}.$$

□

Notemos que por la proposición previa $BV[a,b] \subseteq WBV_q[a,b]$ para $q \geq 1$. De hecho, tenemos que

$$Var_q^W(f; [a,b]) \leq Var(f; [a,b])^q.$$

Entonces si $f \in BV[a,b]$, $f \in WBV_q[a,b]$ para $q \geq 1$ y

$$\|f\|_{WBV_q} := |f(a)| + Var_q^W(f; [a,b])^{1/q} \leq |f(a)| + Var(f; [a,b]) = \|f\|_{BV}.$$

Por lo tanto, el espacio de Banach $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$ está incluido continuamente en el espacio de Banach $(WBV_q[a,b], \|.\|_{WBV_q})$ para $q \geq 1$.

Probaremos a continuación que la inclusión $WBV_p[a,b] \subseteq WBV_q[a,b]$, que demostramos en la proposición previa, es estricta en el caso $p < q$. Para ello, consideramos las *funciones zig zag* que se definen enseguida.

Definición 2.1.4. Sean $C = (c_n)_{n=1}^{\infty}$ y $D = (d_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones decrecientes de números reales positivos que convergen a cero. Adicionalmente, sea $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

Construimos por medio de tales sucesiones la función $Z_{C,D} : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida como

$$Z_{C,D}(x) := \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k & \text{para } x = \sum_{k=1}^{n} c_k, \\ \text{lineal} & \text{o.c.} \end{cases} \tag{2.1.20}$$

La función definida en (2.1.20) se llama *función zig zag general* determinada por (C, D).

Un caso particular es cuando

$$c_n := \frac{1}{2^n} \quad , \quad d_n := \frac{1}{n^\theta}.$$

para algún $\theta > 0$. Esto es,

$$Z_\theta(x) := \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1 - \frac{1}{2^\theta} + \frac{1}{3^\theta} - +... + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\theta} & \text{para } x = 1 - \frac{1}{2^n}, \\ \text{lineal} & \text{o.c.} \end{cases} \tag{2.1.21}$$

En este caso, la función definida en (2.1.21) se llama *función zig zag especial.*

Se sigue de la construcción y continuidad de la función zig zag que

$$Z_{C,D}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} d_k \quad \text{y} \quad Z_\theta(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^\theta}. \tag{2.1.22}$$

Observación 2.1.1. *Se sigue de la construcción previa que la p-variación de Wiener de la función zig zag general es*

$$Var_p^W(Z_{C,D}; [0,1]) = \sum_{k=1}^{\infty} {d_k}^p \qquad (1 \leq p < \infty). \tag{2.1.23}$$

Demostración. Consideremos para $n \in \mathbb{N}$ las particiones:

$$P_n = \{0, c_1, c_1 + c_2, ..., c_1 + c_2 + ... + c_n, 1\} \in \mathscr{P}[0,1],$$

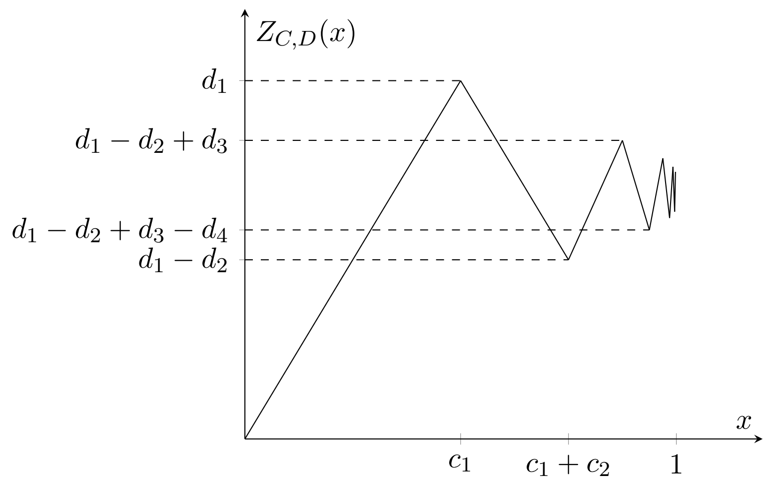

Figura 2.2: Gráfica de una función zig zag especial Z_θ con $\theta = 1$.

$$\widetilde{P_n} = \{0, c_1, c_1 + c_2, ..., c_1 + c_2 + ... + c_n\} \in \mathscr{P}[0, c_1 + c_2 + ... + c_n].$$

Notemos que por construcción de $Z_{C,D}$, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$Var_p^W(Z_{C,D}, \widetilde{P_n}; [0, c_1 + c_2 + ... + c_n]) = \sum_{k=1}^{n} {d_k}^p.$$

Por otro lado, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Var_p^W(Z_{C,D}, \widetilde{P_n}; [0, c_1 + c_2 + ... + c_n]) &\leq Var_p^W(Z_{C,D}, P_n; [0, 1]) \\ &\leq Var_p^W(Z_{C,D}; [0, 1]). \end{aligned}$$

De aquí que, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} {d_k}^p \leq Var_p^W(Z_{C,D}; [0, 1]).$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} {d_k}^p \leq Var_p^W(Z_{C,D}; [0, 1]). \tag{2.1.24}$$

Ahora, sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0, 1]$, analicemos:

$$Var_p^W(Z_{C,D}, P; [0, 1]) = \sum_{j=1}^{m} |Z_{C,D}(t_j) - Z_{C,D}(t_{j-1})|^p.$$

Dado $j \in \{1, 2, ..., m\}$ fijo, $t_{j-1} \in [c_1 + ... + c_{k-1}, c_1 + ... + c_k]$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Notemos, haciendo uso de la Figura 2.2 que como $t_j \in [c_1 + ... + c_{k-1}, 1]$ entonces

$$|Z_{C,D}(t_j) - Z_{C,D}(t_{j-1})| \leq d_k.$$

Ahora, si tenemos que para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y $s \in \{1, 2, ..., m - i\}$, $\{t_i, t_{i+1}, ..., t_{i+s}\} \in [c_1 + ... + c_k, c_1 + ... + c_{k+1}]$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=i+1}^{i+m} |Z_{C,D}(t_j) - Z_{C,D}(t_{j-1})| \leq & |Z_{C,D}(c_1 + ... + c_k) - Z_{C,D}(c_1 + ... + c_{k+1})| \\ &= d_{k+1} \leq d_k.\end{aligned}$$

Haciendo uso del Lema 2.1.5, obtenemos

$$\sum_{j=i+1}^{i+m} |Z_{C,D}(t_j) - Z_{C,D}(t_{j-1})|^p \leq \left(\sum_{j=i+1}^{i+m} |Z_{C,D}(t_j) - Z_{C,D}(t_{j-1})| \right)^p \leq {d_k}^p.$$

Por tanto, tenemos que para cualquier partición $P \in \mathscr{P}[0, 1]$

$$\begin{aligned}Var_p^W(Z_{C,D}, P; [0, 1]) &= \sum_{j=1}^{m} |Z_{C,D}(t_j) - Z_{C,D}(t_{j-1})|^p \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} {d_k}^p.\end{aligned}$$

De esto último se sigue que

$$Var_p^W(Z_{C,D}; [0, 1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} {d_k}^p. \tag{2.1.25}$$

De (2.1.24) y (2.1.25) concluimos lo deseado

$$Var_p^W(Z_{C,D}; [0, 1]) = \sum_{k=1}^{\infty} {d_k}^p.$$

□

Notemos que entonces, la variación de Jordan o de Wiener de $Z_{C,D}$ es independiente de la sucesión $C = (c_n)_{n=1}^{\infty}$.

Para la función zigzag especial,

$$Var_p^W(Z_\theta;[0,1]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p\theta}} \qquad (1 \leq p < \infty). \tag{2.1.26}$$

Haremos uso de esta observación para probar que $WBV_p[a,b] \subset WBV_q[a,b]$ para $q > p$, e incluso más que esto.

Ejemplo 2.1.3. *Para $p \geq 1$, consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) := Z_{1/p}(x)$.*

De (2.1.26), tenemos que $f \in WBV_q[0,1] \setminus WBV_p[0,1]$ para cualquier $q > p$. Esto se debe a que la p-variación de Wiener de f es igual a

$$Var_p^W(Z_{1/p};[0,1]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

y esta serie diverge, sin embargo la q-variación de Wiener de f es igual a

$$Var_p^W(Z_{1/p};[0,1]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{q/p}},$$

y esta serie converge dado que $q/p > 1$.
Podemos concluir algo incluso mejor, f satisface lo siguiente:

$$f \in \bigcap_{q>p} WBV_q[0,1] \setminus WBV_p[0,1].$$

En particular, la función zigzag especial Z_1 pertenece a $WBV_p[0,1]$ para $p > 1$ pero no pertenece a $BV[0,1]$.

2.2. Espacio de Variación de Riesz Acotada

Estudiaremos ahora otro concepto de espacio de variación acotada introducido por F. Riesz. Como mencionamos al inicio del capítulo este espacio tiene aplicaciones interesantes, las cuales abordaremos al final de esta sección y en el Capítulo 3. Para comenzar, presentamos la definición de p-variación desde la perspectiva de Riesz y algunas de sus propiedades.

Definición 2.2.1. Dado un número real $p \geq 1$, una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$ y una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, el número real no negativo

$$Var_p^R(f,P) = Var_p^R(f,P;[a,b]) := \sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p}{(tj - t_{j-1})^{p-1}}, \tag{2.2.1}$$

se llama *variación de Riesz* de f en $[a,b]$ con respecto a la partición P. Mientras que el número posiblemente infinito

$$Var_p^R(f) = Var_p^R(f;[a,b]) := \sup\left\{Var_p^R(f,P;[a,b]) \mid P \in \mathscr{P}[a,b]\right\}, \tag{2.2.2}$$

se llama *variación de Riesz total* de f en $[a,b]$.

Si tenemos que $Var_p^R(f) < \infty$, decimos que f tiene variación de Riesz acotada en $[a,b]$, lo cual escribimos como $f \in RBV_p[a,b]$.

Proposición 2.2.1. *Para $1 \leq p < \infty$ tenemos la siguiente inclusión:*

$$RBV_p[a,b] \subseteq BV[a,b].$$

Demostración. Sea $f \in RBV_p[a,b]$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]\}$, sea p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces, haciendo uso de la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}
Var(f,P;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|}{(t_j - t_{j-1})^{1/p'}} (t_j - t_{j-1})^{1/p'} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1}|^p}{(t_j - t_{j-1})^{p-1}} \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) \right)^{1/p'} \\
&\leq Var_p^R(f,P)^{1/p} (b-a)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Var(f;[a,b]) \leq Var_p^R(f,P)^{1/p}(b-a)^{1/p'} < \infty, \tag{2.2.3}$$

lo cual implica que $f \in BV[a,b]$.

□

Similarmente a lo hecho para el espacio $BV[a,b]$ y el espacio $WBV_p[a,b]$, tenemos el siguiente resultado para el espacio $RBV_p[a,b]$.

Proposición 2.2.2. *El conjunto $RBV_p[a,b]$, con la norma definida para $f \in RBV_p[a,b]$ como*

$$\|f\|_{RBV_p} := |f(a)| + Var_p^R(f;[a,b])^{1/p}, \tag{2.2.4}$$

es un espacio de Banach, el cual para $p > 1$ está incluido continuamente en el espacio de Banach $(C[a,b], \|.\|_\infty)$. También está incluido continuamente en el espacio $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$. Adicionalmente, $RBV_p[a,b]$ es un álgebra que satisface

$$Var_p^R(fg)^{1/p} \leq \|g\|_\infty Var_p^R(f)^{1/p} + \|f\|_\infty Var_p^R(g)^{1/p}, \tag{2.2.5}$$

para $f, g \in RBV_p[a,b]$.

Demostración. Probemos primero que $RBV_p[a,b]$ es un espacio vectorial. Sean $f, g \in RBV_p[a,b]$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces utilizando la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned} Var_p^R(f+g,P;[a,b])^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{|f(t_j)+g(t_j)-f(t_{j-1})-g(t_{j-1})|^p}{(t_j-t_{j-1})^{p-1}}\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \frac{|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p}{(t_j-t_{j-1})^{p-1}}\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m \frac{|g(t_j)-g(t_{j-1})|^p}{(t_j-t_{j-1})^{p-1}}\right)^{1/p} \\ &= Var_p^R(f,P;[a,b])^{1/p} + Var_p^R(g,P;[a,b])^{1/p} \\ &\leq Var_p^R(f;[a,b])^{1/p} + Var_p^R(g;[a,b])^{1/p}. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$Var_p^R(f+g,P;[a,b])^{1/p} \leq Var_p^R(f;[a,b])^{1/p} + Var_p^R(g;[a,b])^{1/p}.$$

Por lo tanto, $f+g \in RBV_p[a,b]$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in RBV_p[a,b]$ y $P=\{t_0,t_1,...,t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$
\begin{aligned}
Var_p^R(\alpha f, P; [a,b])^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|\alpha f(t_j) - \alpha f(t_{j-1})|^p}{(tj - t_{j-1})^{p-1}} \right)^{1/p} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p}{(tj - t_{j-1})^{p-1}} \right)^{1/p} \\
&= |\alpha| Var_p^R(f, P; [a,b])^{1/p}.
\end{aligned}
$$

De esto se sigue que

$$Var_p^R(\alpha f; [a,b])^{1/p} = |\alpha| Var_p^R(f; [a,b])^{1/p}.$$

Por tanto, $\alpha f \in RBV_p[a,b]$, probando así que $RBV_p[a,b]$ es un espacio lineal.

Probemos ahora que $RBV_p[a,b] \subset C[a,b]$ para $p>1$. Sean $f \in RBV_p[a,b]$ con $p>1$, $\epsilon>0$ y $x_0 \in [a,b]$ arbitraria pero fija. Para $x \in [a,b]$ tal que $x \neq x_0$, consideremos la partición $P=\{x_0,x\} \in \mathscr{P}[x_0,x]$ si $x_0<x$ y la partición $P=\{x,x_0\} \in \mathscr{P}[x,x_0]$ si $x<x_0$. Tenemos que

$$Var_p^R(f, P; [x,x_0])^{1/p} = Var_p^R(f, P; [x_0,x])^{1/p} = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{1/p'}}.$$

Entonces

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{1/p'}} \leq Var_p^R(f; [x_0,x])^{1/p} \quad \text{y} \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{1/p'}} \leq Var_p^R(f; [x,x_0])^{1/p}.$$

Tenemos entonces que si $|x-x_0|<\delta$ donde

$$\delta = \frac{\epsilon^{p'}}{Var_p^R(f; [x_0,x])^{p'-1}}$$

si $x_0<x$, y

$$\delta = \frac{\epsilon^{p'}}{Var_p^R(f; [x,x_0])^{p'-1}}$$

si $x<x_0$, entonces $|f(x)-f(x_0)| \leq \epsilon$. Notemos que $x_0 \in [a,b]$ fue tomado arbitrariamente, por lo tanto f es continua en todo el intervalo $[a,b]$. Como $[a,b]$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$, entonces

f es de hecho uniformemente continua en $[a,b]$. Hemos probado así que $RBV_p[a,b] \subset C[a,b]$.

Ahora, el espacio $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$ está continuamente incluido en el espacio $(C[a,b], \|.\|_\infty)$, ya que por (2.2.3)

$$\begin{aligned}\|f\|_{RBV_p} &:= |f(a)| + Var_p^R(f;[a,b])^{1/p}\\ &\geq |f(a)| + \frac{Var(f;[a,b])}{(b-a)^{1/p'}}\\ &\geq K\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

dónde $K = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{(b-a)^{1/p'}}\right\}$.

Análogamente, el espacio $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$ está continuamente incluido en el espacio $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$, ya que por (2.2.3)

$$\begin{aligned}\|f\|_{RBV_p} &:= |f(a)| + Var_p^R(f;[a,b])^{1/p}\\ &\geq |f(a)| + \frac{Var(f;[a,b])}{(b-a)^{1/p'}}\\ &\geq K\|f\|_{BV}.\end{aligned}$$

Finalmente, probemos que $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$ es un espacio de Banach.
Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en la norma $\|.\|_{RBV_p}$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$

$$\|f_n - f_m\|_{RBV_p} := |f_n(a) - f_m(a)| + Var_p^R(f_n - f_m;[a,b])^{1/p} \leq \epsilon.$$

Notemos que en particular, para $m, n \geq N$

$$Var_p^R(f_n - f_m;[a,b])^{1/p} \leq \epsilon.$$

Esto implica que para toda $P = \{t_0, t_1, ..., t_k\} \in \mathscr{P}[a,b]$ y $m, n \geq N$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|(f_n(t_j) - f_m(t_j)) - (f_n(t_{j-1}) - f_m(t_{j-1}))|^p}{(t_j - t_{j-1})^{p-1}} \leq \epsilon^p. \tag{2.2.6}$$

Como observamos anteriormente que $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$ está continuamente incluido en $(C[a,b], \|.\|_\infty)$, entonces la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ es también una sucesión de Cauchy en el espacio $(C[a,b], \|.\|_\infty)$.
Por la completez de este último espacio tenemos que existe una función $f \in C[a,b]$ tal que $f_n \to f$ uniformemente. Tomando límite cuando $m \to \infty$ en (2.2.6), obtenemos que para toda $P = \{t_0, t_1, ..., t_k\} \in \mathscr{P}[a,b]$ y $n \geq N$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|(f_n(t_j) - f(t_j)) - (f_n(t_{j-1}) - f(t_{j-1}))|^p}{(t_j - t_{j-1})^{p-1}} \leq \epsilon^p.$$

Esto implica que para $n \geq N$

$$Var_p^R(f_n - f; [a,b]) \leq \epsilon^p. \tag{2.2.7}$$

Tenemos entonces que $f_N - f \in RBV_p[a,b]$. Como $f_N \in RBV_p[a,b]$ y ya probamos que éste es un espacio vectorial, se sigue que $f \in RBV_p[a,b]$.
Ahora, como $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge a f uniformemente y por lo tanto puntualmente, entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N'$

$$|f_n(a) - f(a)| < \epsilon. \tag{2.2.8}$$

De (2.2.7) y (2.2.8) obtenemos que para $n \geq \text{máx}\{N, N'\}$

$$\|f_n - f\|_{RBV_p} \leq 2\epsilon.$$

Por lo tanto $f_n \xrightarrow{RBV_p} f$, probando así que $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$ es un espacio de Banach.

Para finalizar, probemos (2.2.5).
Sean $f, g \in RBV_p[a,b]$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, utilizando la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned}
Var_p^R(fg, P; [a,b])^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j)g(t_j) - f(t_{j-1})g(t_{j-1})|^p}{(tj - t_{j-1})^{p-1}} \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p |g(t_j)|^p}{(tj - t_{j-1})^{p-1}} \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|g(t_j) - g(t_{j-1})|^p |f(t_{j-1})|^p}{(tj - t_{j-1})^{p-1}} \right)^{1/p} \\
&\leq \|g\|_\infty Var_p^R(f; [a,b])^{1/p} + \|f\|_\infty Var_p^R(g; [a,b])^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la desigualdad deseada

$$Var_p^R(fg;[a,b])^{1/p} \leq \|g\|_\infty Var_p^R(f;[a,b])^{1/p} + \|f\|_\infty Var_p^R(g;[a,b])^{1/p}.$$

$\square$

Al comparar la Definición 1.1.1 del espacio clásico $BV[a,b]$ con la Definición 2.2.1 del espacio $RBV_p[a,b]$, observamos que

$$Var_1^R(f,P;[a,b]) = Var(f,P;[a,b]) \quad \text{y} \quad Var_1^R(f;[a,b]) = Var(f;[a,b]).$$

Por lo tanto $RBV_1[a,b] = BV[a,b]$.
Como conclusión, los dos espacios $RVB_p[a,b]$ y $WBV_p[a,b]$ generalizan el espacio clásico $BV[a,b]$ desde dos perspectivas diferentes. Sin embargo, la definición del espacio $RBV_p[a,b]$ es un poco más interesante ya que éste posee propiedades importantes mencionadas anteriormente y que veremos más adelante.

A diferencia del espacio $BV[a,b]$ o los espacios $WBV_p[a,b]$, todas las funciones en $RBV_p[a,b]$ tienen la propiedad de ser continuas en el caso $p > 1$.

Podemos preguntarnos, como lo hicimos en el estudio de los espacios anteriores, si los espacios $RBV_p[a,b]$ están relacionados con el espacio Lipschitz $Lip[a,b]$ o los espacios α-Lipschitz $Lip_\alpha[a,b]$. El siguiente resultado es paralelo a la cadena de inclusiones (1.2.7). En particular, muestra que RBV_p es intermedio entre los espacios $Lip[a,b]$ y $AC[a,b]$.

Proposición 2.2.3. *Las siguientes inclusiones son válidas para* $p > 1$*:*

$$Lip[a,b] \subseteq RBV_p[a,b] \subseteq AC[a,b] \subseteq BV[a,b]. \tag{2.2.9}$$

Demostración. Probemos la primera inclusión. Sea $f \in Lip[a,b]$, entonces existe $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para $a \leq x,\, y \leq b$.

Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} Var_p^R(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p}{(t_j - t_{j-1})^{p-1}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{L^p |t_j - t_{j-1}|^p}{(t_j - t_{j-1})^{p-1}} \\ &= \sum_{j=1}^{m} L^p |t_j - t_{j-1}| = L^p(b-a). \end{aligned}$$

Como esto es válido para $P \in \mathscr{P}[a,b]$ arbitraria, y $L^p(b-a)$ no depende de P, se sigue que

$$Var_p^R(f; [a,b]) = L^p(b-a). \tag{2.2.10}$$

Por lo tanto $f \in RBV_p[a,b]$.

Ahora, para la segunda inclusión, sea $f \in RBV_p[a,b]$, tal que f no sea la función idénticamente cero, $\epsilon > 0$ y $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum[a,b]$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{|b_k - a_k|^{1/p'}} |b_k - a_k|^{1/p'}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder a

$$\alpha_k := \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{|b_k - a_k|^{1/p'}} \quad , \quad \beta_k := |b_k - a_k|^{1/p'},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{|b_k - a_k|^{1/p'}} |b_k - a_k|^{1/p'} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(b_k) - f(a_k)|^p}{|b_k - a_k|^{p-1}} \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \right)^{1/p'} \\ &\leq Var_p^R(f; [a,b])^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \right)^{1/p'} \\ &\leq \|f\|_{RBV_p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \right)^{1/p'} . \end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que si
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$
donde
$$\delta \leq \frac{\epsilon^{p'}}{\|f\|_{RBV_p}^{p'}},$$
entonces
$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| \leq \epsilon.$$
Por lo tanto hemos probado que $f \in AC[a,b]$.

La contención $AC[a,b] \subseteq BV[a,b]$ fue demostrada en la Proposición 1.2.1.

□

A continuación probaremos una propiedad importante del espacio $RBV_p[a,b]$. Este espacio permite una caracterización natural por medio de funciones absolutamente continuas.

Teorema 2.2.4. *(Riesz) Sea $1 < p < \infty$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $f \in RBV_p[a,b]$ si y solamente si $f \in AC[a,b]$ y $f' \in L_p[a,b]$. Además, en este caso, se cumple la siguiente igualdad*
$$Var_p^R(f;[a,b]) = \|f'\|_{Lp}^p = \int_a^b |f'(x)|^p dx. \tag{2.2.11}$$
Demostración. Supongamos primero que $f \in AC[a,b]$ y $f' \in L_p[a,b]$.

Para $x, y \in [a,b], x < y$, tenemos por la desigualdad de Hölder que
$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)|^p &= \left|\int_x^y f'(t)dt\right|^p \leq \left(\int_x^y |f'(t)|dt\right)^p \\
&\leq \left[\left(\int_x^y dt\right)^{1/p'} \left(\int_x^y |f'(t)|^p dt\right)^{1/p}\right]^p \\
&= (y-x)^{p-1}\int_x^y |f'(t)|^p dt.
\end{aligned}$$
Consecuentemente
$$\frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y-x|^{p-1}} \leq \int_x^y |f'(t)|^p dt.$$

Ahora, sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} Var_p^R(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p}{|t_j - t_{j-1}|^{p-1}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|^p dt \\ &= \int_a^b |f'(t)|^p dt = \|f'\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Var_p^R(f; [a,b]) \leq \|f'\|_{L_p}^p, \tag{2.2.12}$$

mostrando así que $f \in RBV_p[a,b]$.

Recíprocamente, sea $f \in RBV_p[a,b]$. Notemos que por la Proposición 2.2.3, $RBV_p \subseteq AC[a,b]$ si $p > 1$. Esto implica que f' existe casi en todas partes en $[a,b]$. Por lo anterior, solamente debemos probar que $f' \in L_p[a,b]$.

Para esto, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos las particiones equidistantes $P_n := \{t_{0,n}, t_{1,n}, ..., t_{n,n}\} \in \mathscr{P}[a,b]$ dadas por

$$t_{0,n} := a, \quad t_{1,n} := a + \frac{1}{n}(b-a), \quad ... \quad , \quad t_{n-1,n} := a + \frac{n-1}{n}(b-a), \quad t_{n,n} := b. \tag{2.2.13}$$

Definimos las funciones constantes a trozos $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k = 0, 1, ..., n$, como

$$g_n(t) := \begin{cases} \frac{f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})}{t_{k+1,n} - t_{k,n}} & \text{si } t_{k,n} \leq t < t_{k+1,n}, \\ 0 & \text{si } t = b. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Probaremos que $g_n(t) \to f'(t)$ en los puntos $t \in [a,b]$ donde f es diferenciable y $t \neq t_{j,n}$ para $j \in \{0, 1, ..., n\}$, esto es, en el conjunto

$$A = \left\{t \in [a,b] \mid f'(t) \text{ existe}\right\} \setminus \{t_{j,n} \mid n \in \mathbb{N}, j \in \{0, 1, ..., n\}\}.$$

Sea $t \in A$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $t_{k,n} \leq t \leq t_{k+1,n}$. Entonces

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})}{t_{k+1,n} - t_{k,n}} = \frac{f(t_{k+1,n}) - f(t) + f(t) - f(t_{k,n})}{t_{k+1,n} - t_{k,n}} \\ &= \frac{t_{k+1,n} - t}{t_{k+1,n} - t_{k,n}} \frac{f(t_{k+1,n}) - f(t)}{t_{k+1,n} - t} + \frac{t - t_{k,n}}{t_{k+1,n} - t_{k,n}} \frac{f(t) - f(t_{k,n})}{t - t_{k,n}}. \end{aligned}$$

De aquí que $g_n(t)$ es una combinación convexa de

$$\frac{f(t_{k+1,n}) - f(t)}{t_{k+1,n} - t} \qquad \text{y} \qquad \frac{f(t) - f(t_{k,n})}{t - t_{k,n}}.$$

Notemos que cuando $n \to \infty$, $t_{k,n} \to t$ y $t_{k+1,n} \to t$ y f es diferenciable en t. Entonces

$$\frac{f(t_{k+1,n}) - f(t)}{t_{k+1,n} - t} \xrightarrow{n\to\infty} f'(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{f(t) - f(t_{k,n})}{t - t_{k,n}} \xrightarrow{n\to\infty} f'(t).$$

Por lo tanto para $t \in A$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = f'(t).$$

Notemos que el conjunto A^c tiene medida de Lebesgue cero, entonces tenemos que $g_n(t) \to f'(t)$ casi en todas partes en $[a, b]$. Por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \int_a^b |f'(t)|^p dt &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b |g_n(t)|^p dt \\ &= \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})|^p}{|t_{k+1,n} - t_{k,n}|^p} |t_{k+1,n} - t_{k,n}| \\ &\leq Var_p^R(f; [a, b]) < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Por lo tanto $f \in L_p[a, b]$.

De (2.2.12) y (2.2.15), obtenemos

$$Var_p^R(f; [a, b]) = \|f\|_{L_p}^p = \int_a^b |f'(t)|^p dt.$$

□

Notemos que por (2.2.4) y (2.2.10), tenemos que si $f \in Lip[a, b]$ entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_{RBV_p} &:= |f(a)| + Var_p^R(f; [a, b])^{1/p} \\ &\leq |f(a)| + L(b - a)^{1/p}. \end{aligned}$$

Como podemos tomar L arbitrariamente cerca de la mínima constante de Lipschitz $lip(f)$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{RBV_p} &\leq |f(a)| + lip(f)(b-a)^{1/p}\\ &\leq \text{máx}\{1, (b-a)^{1/p}\}\|f\|_{lip}.\end{aligned}$$

Por tanto concluimos que el espacio $(Lip[a,b], \|.\|_{lip})$ está incluido continuamente en el espacio $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$.

De forma análoga, la estimación obtenida anteriormente

$$Var(f;[a,b]) \leq (b-a)^{1/p'} Var_p^R(f;[a,b])^{1/p},$$

implica

$$\|f\|_{BV} \leq \text{máx}\{1, (b-a)^{1/p'}\}\|f\|_{RBV_p}.$$

Lo cual muestra que el espacio $(RBV_p[a,b], \|.\|_{RBV_p})$ está incluido continuamente en el espacio $(BV[a,b], \|.\|_{BV})$

Podemos preguntarnos si el resultado paralelo a la Proposición 2.1.6 se cumple para los espacios $RBV_p[a,b]$, esto es, si el espacio $RBV_p[a,b]$ está contenido o no en algún espacio $RBV_q[a,b]$ para ciertos valores de p y q. En efecto, existe dicho resultado paralelo y lo mostramos a continuación.

Proposición 2.2.5. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. Se cumple la inclusión*

$$RBV_q[a,b] \subseteq RBV_p[a,b]. \tag{2.2.16}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 < p < q < \infty$, ya que si $p = 1$, obtuvimos previamente que $RBV_q \subseteq BV[a,b]$ para $q > 1$.

Sean

$$r := \frac{q}{p} \qquad s := \frac{q}{q-p} \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Sean $f \in RBV_q[a,b]$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$. Utilizando la desigualdad de Hölder para

$$\alpha_j := \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p}{|t_j - t_{j-1}|^{p-1+1/s}} \qquad \text{y} \qquad \beta_j := |t_j - t_{j-1}|^{1/s},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
Var_p^R(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^p}{|t_j - t_{j-1}|^{p-1}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^{pr}}{|t_j - t_{j-1}|^{(p-1+1/s)r}} \right)^{1/r} \left(\sum_{j=1}^{m} |t_j - t_{j-1}| \right)^{1/s} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|^q}{|t_j - t_{j-1}|^{q-1}} \right)^{p/q} (b-a)^{(q-p)/q} \\
&\leq Var_q^R(f; [a,b])^{p/q} (b-a)^{(q-p)/q}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in RBV_p[a,b]$.

□

Como en el caso de la inclusión en la Proposición 2.1.6, la inclusión (2.2.16) es estricta si $p < q$.

Capítulo 3

Variación Acotada y Dualidad

En este capítulo trataremos un concepto básico del análisis funcional: la dualidad. El estudio de los espacios duales es de gran utilidad en matemáticas ya que propiedades importantes de un espacio X se reflejan en su espacio dual X^*. Aunado a lo anterior, en ocasiones resulta conveniente estudiar a los elementos de un espacio como elementos de algún espacio dual.

Nuestro objetivo en este capítulo es obtener un resultado de representación para los elementos de los espacios de variación acotada $BV[a, b]$ y $RBV_p[a, b]$, como elementos de espacios duales. Para ello, haremos uso del concepto de integral de Riemann-Stieltjes y sus propiedades. Éstas pueden ser consultadas en [1], [2] y [5]. Los resultados presentados en este capítulo se obtuvieron de [2] y [4].

Recordamos a continuación la definición del dual de un espacio.

Definición 3.0.1. Una transformación lineal Λ definida en un espacio normado X y que toma valores en $\mathbb{R}$ se llama *funcional lineal*. Decimos que Λ es una *funcional lineal acotada* si además existe una constante real $K > 0$, tal que para toda $x \in X$

$$|\Lambda(x)| \leq K\|x\|_X. \tag{3.0.1}$$

El espacio dual de un espacio normado X, que denotaremos como X^* está definido como

$$X^* := \{\Lambda : X \to \mathbb{R} \mid \Lambda \text{ es funcional lineal acotada}\}.$$

Este espacio es un espacio normado con la norma

$$\|\Lambda\|_{X^*} := \sup_{x\neq 0} \frac{|\Lambda(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\Lambda(x)| = \sup_{\|x\|_X = 1} |\Lambda(x)|. \tag{3.0.2}$$

Un resultado básico de análisis funcional es que debido a la completez de $\mathbb{R}$ el espacio dual de un espacio normado X es un espacio de Banach.

3.1. Variación Acotada Clásica y Dualidad

En esta sección, obtendremos una representación por medio de funciones en el espacio clásico $BV[a,b]$ para funcionales lineales acotadas en $C[a,b]$, el espacio de funciones continuas a valores reales definidas en $[a,b]$, con la norma usual

$$\|x\|_\infty := \max_{a\leq t\leq b} |x(t)| \qquad \text{para } x \in C[a,b].$$

Mostraremos que para toda $\Lambda \in C[a,b]^*$, existe una función $g \in BV[a,b]$ con la propiedad de que para cada $x \in C[a,b]$, el valor de $\Lambda(x)$ está dado por la integral de Riemann-Stieltjes

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)dg(t). \tag{3.1.1}$$

De esta forma, habremos logrado representar a cualquier funcional lineal acotada en $C[a,b]$ por medio de una función en el espacio $BV[a,b]$. Sin embargo, nuestro objetivo principal será determinar un isomorfismo isómetrico entre $C[a,b]^*$ y algún subespacio de $BV[a,b]$. Para lograrlo, introduciremos una relación de equivalencia entre funciones en $BV[a,b]$ y mostraremos que cada clase de equivalencia posee un representante de variación acotada normalizada, permitiendo así que la correspondencia dada por (3.1.1) sea inyectiva.

3.1.1. Teorema de Representación para Funcionales en el Dual de $C[a,b]$

El siguiente resultado establece una primera representación a través de funciones en el espacio $BV[a,b]$ para funcionales en el dual $C[a,b]^*$.

Teorema 3.1.1. *Sea $\Lambda \in C[a,b]^*$, entonces existe una función $g \in BV[a,b]$ tal que para toda $x \in C[a,b]$*

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \tag{3.1.2}$$

y es tal que

$$\|\Lambda\|_{C[a,b]^*} = Var(g;[a,b]). \tag{3.1.3}$$

Demostración. Por el Teorema de Hahn-Banach, si vemos a $C[a,b]$ como subespacio de $B[a,b]$, entonces existe una funcional lineal acotada $\widetilde{\Lambda} \in B[a,b]^*$, que extiende a Λ y es tal que

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{B[a,b]^*} = \|\Lambda\|_{C[a,b]^*}.$$

Ahora, para $a < s < b$, consideramos la función característica de $[a,s]$

$$\mathscr{X}_{[a,s]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,s], \\ 0 & \text{si } t \notin [a,s]. \end{cases}$$

Claramente para cada s tal que $a < s < b$, $\mathscr{X}_{[a,s]} \in B[a,b]$. Definimos entonces la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(s) := \begin{cases} \widetilde{\Lambda}\left(\mathscr{X}_{[a,s]}\right) & \text{si } a < s \leq b, \\ 0 & \text{si } s = a. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Ahora, sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$, definimos

$$\alpha_i := sgn\left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right], \tag{3.1.5}$$

donde para $t \in \mathbb{R}$

$$sgn(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \frac{t}{|t|} & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Definimos a continuación $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$y(t) := \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \alpha_i & \text{si } t_{i-1} < t \leq t_i, i \in \{2, ..., n\}. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Notemos que $y \in B[a, b]$, ya que si $t_{i-1} < t \leq t_i$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$|y(t)| = |\alpha_i| = \begin{cases} 0 & \text{si } g(t_{i-1}) = g(t_i), \\ 1 & \text{si } g(t_{i-1}) \neq g(t_i). \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Además

$$\|y\|_{B[a,b]} := \sup_{a \leq t \leq b} |y(t)| = 1. \tag{3.1.8}$$

Afirmamos que $y \in B[a, b]$ se puede escribir de la siguiente forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(y_i(t) - y_{i-1}(t) \right), \tag{3.1.9}$$

donde $y_i = \mathscr{X}_[a, t_i]$ para $i = 1, 2, ..., n$ y $y_0 = 0$.

Probemos que (3.1.9) es válido cuando $t_0 \leq t \leq t_1$. El lado derecho de (3.1.9) en este caso es

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(y_i(t) - y_{i-1}(t) \right) = \alpha_1(1 - 0) + \alpha_2(1 - 1) + ... + \alpha_n(1 - 1) = \alpha_1,$$

y por definición $y(t) = \alpha_1$.

Ahora si $t_{i-1} < t \leq t_i$ para algún $i = 2, ..., n$ el lado derecho de (3.1.9) es

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(y_i(t) - y_{i-1}(t) \right) = \alpha_i,$$

y por definición $y(t) = \alpha_i$.

Ahora, aplicando la funcional $\widetilde{\Lambda}$ a la función $y \in B[a,b]$, utilizando la representación (3.1.9) y la linealidad de la funcional, obtenemos

$$\widetilde{\Lambda}(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\widetilde{\Lambda}(y_i) - \widetilde{\Lambda}(y_{i-1}) \right).$$

Podemos evaluar la funcional $\widetilde{\Lambda}$ en y_i para $i = 1, 2, ..., n$, pues $y_i(t) = \mathscr{X}_{[0,t_i]}(t)$ para $i = 1, 2, ..., n$ y por lo tanto $y_i \in B[a,b]$ para $i = 1, 2, ..., n$.
Por (3.1.4)

$$\widetilde{\Lambda}(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(g(t_i) - g(t_{i-1}) \right).$$

Notemos que $\alpha sgn(\alpha) = |\alpha|$, entonces por la definición de $\alpha_i = sgn\left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right]$ para $i = 1, 2, ..., n$, podemos escribir $\widetilde{\Lambda}(y)$ como

$$\widetilde{\Lambda}(y) = \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|,$$

lo cual implica, utilizando (3.1.8) y el hecho de que $\widetilde{\Lambda}$ es una funcional lineal acotada con la misma norma que Λ, que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= |\widetilde{\Lambda}(y)| \\ &\leq \|\widetilde{\Lambda}\|_{B[a,b]^*} \|y\|_{B[a,b]} \\ &= \|\widetilde{\Lambda}\|_{B[a,b]^*} \\ &= \|\Lambda\|_{C[a,b]^*}. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Es decir, para cualquier partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$

$$Var(g, P; [a,b]) = \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|\Lambda\|_{C[a,b]^*}.$$

Por lo tanto

$$Var(g; [a,b]) \leq \|\Lambda\|_{C[a,b]^*}. \tag{3.1.11}$$

De aquí que la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en (3.1.4) es tal que $g \in BV[a,b]$.

Supongamos a continuación que $x \in C[a,b]$ arbitraria, y definimos $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$z(t) := \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(y_i(t) - y_{i-1}(t) \right). \tag{3.1.12}$$

Notemos que si $t_0 \leq t \leq t_1$, entonces

$$z(t) = x(t_0).$$

Si $t_{i-1} < t \leq t_i$ para $i = 2, 3, ..., n$, entonces

$$z(t) = x(t_{i-1}).$$

Ahora, como observamos anteriormente, $\widetilde{\Lambda}(y_j) = g(t_j)$ para $j = 0, 1, 2, ..., n$. Entonces, evaluamos $\widetilde{\Lambda}$ en $z \in B[a,b]$ y utilizando la linealidad de $\widetilde{\Lambda}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}(z) &= \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(\widetilde{\Lambda}(y_i) - \widetilde{\Lambda}(y_{i-1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(g(t_i) - g(t_{i-1}) \right). \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Observemos que para $t \in [a,b]$

$$z(t) - x(t) = \begin{cases} x(t_0) - x(t) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ x(t_{i-1}) - x(t) & \text{si } t_{i-1} < t \leq t_i \end{cases}$$

Sea $\mu(P)$ la norma de la partición $P \in \mathscr{P}[a,b]$, definida como

$$\mu(P) := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |t_i - t_{i-1}|,$$

probaremos que si $\mu(P) \to 0$, entonces $\|z - x\|_{B[a,b]} \to 0$.

Supongamos que $\mu(P) \to 0$, esto es, para todo $\delta > 0$ existe $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que

$$\max_i |t_i - t_{i-1}| \leq \delta.$$

Como $x \in C[a,b]$, entonces x es uniformemente continua en $[a,b]$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe δ' tal que si $|t_{j-1} - t_j| \leq \delta'$ para cualquier $j = 1, 2, ..., n$, entonces $|x(t_{j-1}) - x(t_j)| \leq \epsilon$.

Observemos que como $\mu(P) \to 0$, para δ' existe $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} |t_i - t_{i-1}| \leq \delta',$$

lo cual implica, por la continuidad uniforme de $x \in C[a,b]$, que para toda $i \in \{1, ..., n\}$

$$|x(t_{i-1}) - x(t)| \leq \epsilon.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \|z - t\|_{B[a,b]} &= \sup_{a \leq t \leq b} |z(t) - x(t)| \\ &= \sup_{i \in \{1,\dots,n\}} |x(t_{i-1}) - x(t)| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Probando así que si $\mu(P) \to 0$, entonces

$$\|z - t\|_{B[a,b]} \to 0.$$

Ahora, como $\widetilde{\Lambda}$ es una funcional lineal acotada, es continua. Esto implica

$$\lim_{\mu(P) \to 0} \widetilde{\Lambda}(z) = \lim_{z \to x} \widetilde{\Lambda}(z) = \widetilde{\Lambda}(x), \tag{3.1.14}$$

donde con $z \to x$, nos referimos a $\|z - t\|_{B[a,b]} \to 0$, es decir $z \to x$ en el espacio $(B[a,b], \|.\|_{B[a,b]})$.

Por otro lado, por definición de integral de Riemann-Stieltjes

$$\begin{aligned} \lim_{\mu(P) \to 0} \widetilde{\Lambda}(z) &= \lim_{\mu(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(g(t_i) - g(t_{i-1}) \right) \\ &= \int_a^b x(t) dg(t). \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Podemos asegurar la existencia de esta integral, ya que $x \in C[a,b]$ y $g \in BV[a,b]$.

De (3.1.14) y (3.1.15) concluimos que

$$\widetilde{\Lambda}(x) = \int_a^b x(t) dg(t).$$

Ahora, como $x \in C[a,b]$ y $\widetilde{\Lambda}$ coincide con Λ en $C[a,b]$, entonces

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)dg(t).$$

Hemos probado la primera parte del Teorema.

Probemos a continuación

$$\|\Lambda\|_{C[a,b]^*} = Var(g;[a,b]).$$

Ya probamos en (3.1.11) que $Var(g;[a,b]) \leq \|\Lambda\|_{C[a,b]^*}$, basta probar entonces que $\|\Lambda\|_{C[a,b]^*} \leq Var(g;[a,b])$.

Por propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes, tenemos que

$$|\Lambda(x)| \leq \sup_{a\leq t\leq b} |x(t)| Var(g;[a,b]) = Var(g;[a,b])\|x\|_\infty$$

para toda $x \in C[a,b]$, ya que $g \in BV[a,b]$.

Por tanto

$$\|\Lambda\|_{C[a,b]^*} \leq Var(g;[a,b]), \tag{3.1.16}$$

y así obtenemos la igualdad

$$\|\Lambda\|_{C[a,b]^*} = Var(g;[a,b]).$$

□

3.1.2. Relación de Equivalencia en $BV[a,b]$

En el Teorema 3.1.1 logramos una correspondencia entre funcionales en el dual $C[a,b]^*$ y funciones en $BV[a,b]$. Sin embargo, esta correspondencia no es inyectiva, ya que si $g \in BV[a,b]$ satisface

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \qquad \forall x \in C[a,b],$$

entonces $g + c$, donde $c \in \mathbb{R}$, verifica también

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^b x(t)d(g(t)+c) \qquad \forall x \in C[a,b].$$

Notemos que incluso si $h \in BV[a,b]$ y es tal que $h(a) = g(a), h(b) = g(b)$ y $h(t) = g(t)$ en todos los puntos $t \in [a,b]$ donde g es continua, entonces

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^b x(t)dh(t) \qquad \forall x \in C[a,b], \tag{3.1.17}$$

sin importar como esté definida h en los puntos interiores de $[a,b]$ donde g no es continua.

Para probar (3.1.17), recordemos que la función g es continua excepto a lo sumo en un conjunto numerable $\mathscr{C} = \{c_1, c_2, c_3, ...\}$. Entonces dado $\epsilon > 0$, siempre es posible encontrar una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $\mu(P) < \epsilon$ y $P \cap \mathscr{C} = \emptyset$. Si $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, entonces

$$\begin{aligned} S_g(x, P; [a,b]) &:= \sum_{j=1}^{m} x(\tau_{j-1}) \left(g(t_j) - g(t_{j-1})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} x(\tau_{j-1}) \left(h(t_j) - h(t_{j-1})\right) = S_h(x, P; [a,b]). \end{aligned}$$

De aquí, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)dg(t) &= \lim_{\mu(P)\to 0} S_g(x, P; [a,b]) \\ &= \lim_{\mu(P)\to 0} S_h(x, P; [a,b]) = \int_a^b x(t)dh(t). \end{aligned}$$

Notemos que esto es válido ya que podemos asegurar la existencia de las integrales por el hecho de que $x \in C[a,b]$ y $g, h \in BV[a,b]$. Hemos probado entonces (3.1.17).

Para mantener algo de la correspondencia establecida en el Teorema 3.1.1, introducimos una relación de equivalencia en $BV[a,b]$.

Definición 3.1.1. Para $x_1, x_2 \in BV[a,b]$, definimos la relación $x_1 \sim x_2$ si y solamente si

$$\int_a^b y(t)dx_1(t) = \int_a^b y(t)dx_2(t) \tag{3.1.18}$$

para toda $y \in C[a,b]$.

Es fácil ver que la relación $\sim$ es efectivamente una relación de equivalencia en $BV[a,b]$. Notemos que si consideramos solo las clases de equivalencia determinadas por la relación en lugar de las funciones, la correspondencia establecida por el Teorema 3.1.1 tiene mayor posibilidad de ser inyectiva.

Estableceremos a continuación un criterio para que una función $x \in BV[a,b]$ sea tal que $x \sim 0$. Este criterio nos será muy útil más adelante.

Proposición 3.1.2. *Sea $x \in BV[a,b]$, entonces $x \sim 0$ si y solo si, para cualquier $c \in (a,b)$*

$$x(a) = x(b) = \lim_{t \to c^+} x(t) = \lim_{t \to c^-} x(t). \tag{3.1.19}$$

Demostración. Notemos que (3.1.19) no implica que x sea continua en cada punto interior de $[a,b]$. Como ejemplo presentamos la siguiente función:

$$x(t) := \begin{cases} 1 & a \leq t < c, c < t \leq b, \\ 2 & t = c. \end{cases}$$

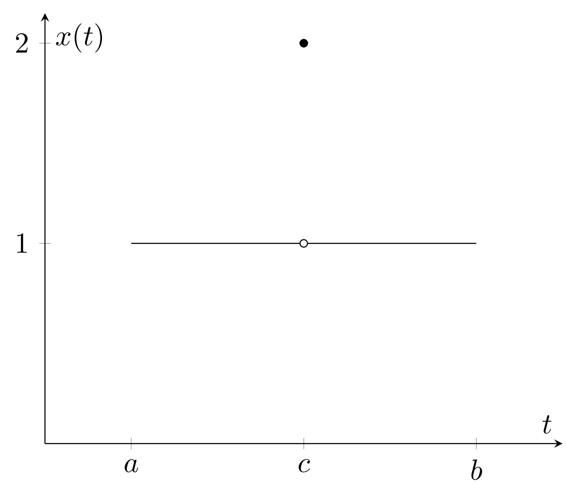

Figura 3.1: Gráfica de la función x.

La función x claramente no es continua en $t = c$, sin embargo cumple con el criterio (3.1.19).

Continuamos con la prueba de la proposición. Supongamos que $x \sim 0$, por (3.1.18), para la función $y(t) = 1$ para toda $t \in [a, b]$, tenemos

$$x(b) - x(a) = \int_a^b dx(t) = \int_a^b d0(t) = 0. \tag{3.1.20}$$

Por lo tanto $x(b) = x(a)$.

Por otro lado, tenemos los siguientes hechos:

Para $a \leq c < b$ y $h > 0$

$$\frac{1}{h} \int_c^{c+h} x(t)dt \to \lim_{t \to c^+} x(t) \qquad \text{cuando } h \to 0. \tag{3.1.21}$$

Para $a < c \leq b$ y $h > 0$

$$\frac{1}{h} \int_{c-h}^{c} x(t)dt \to \lim_{t \to c^-} x(t) \qquad \text{cuando } h \to 0. \tag{3.1.22}$$

En efecto, como toda función $x \in BV[a, b]$ es la diferencia de dos funciones crecientes, será suficiente suponer que x es creciente en $[a, b]$.

Como en este caso $\lim_{t \to c^+} x(t)$ y $\lim_{t \to c^-} x(t)$ siempre existen y de hecho

$$x(c^+) := \lim_{t \to c^+} x(t) = \inf_{c<t<c+h} x(t) \qquad a \leq c < b, h > 0,$$

$$x(c^-) := \lim_{t \to c^-} x(t) = \sup_{c-h<t<c} x(t) \qquad a < c \leq b, h > 0,$$

tenemos que

$$x(c^+) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} x(c^+) \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} x(t) \leq x(c+h)$$

luego

$$x(c^+) \leq \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} x(t) \leq \lim_{h \to 0} x(c+h) = \lim_{t \to c^+} x(t) = x(c^+).$$

Por lo tanto, hemos demostrado (3.1.21). Una prueba análoga muestra la validez de (3.1.22).

Mostraremos ahora que $x(a) = \lim_{t\to c^+} x(t)$. El argumento para mostrar que $x(a) = \lim_{t\to c^-} x(t)$ es análogo.

Para esto, consideremos la función continua $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$y(t) := \begin{cases} 1 & a \leq t \leq c, \\ 1 - \frac{t-c}{h} & c < t \leq c+h, \\ 0 & c+h < t \leq b. \end{cases} \tag{3.1.23}$$

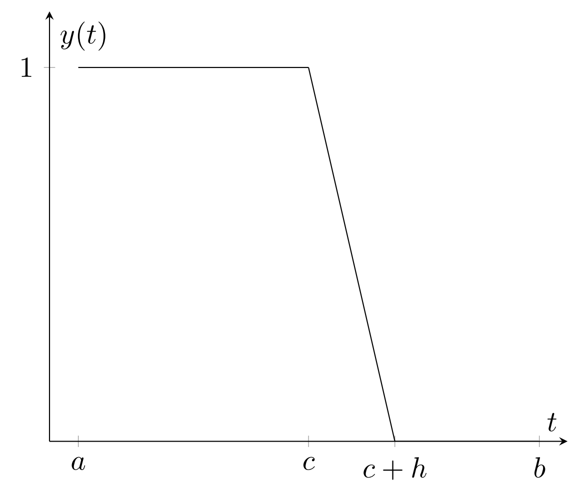

Figura 3.2: Gráfica de la función y.

Sea $x \in BV[a, b]$ tal que $x \sim 0$, entonces

$$0 = \int_a^b y(t)dx(t) = \int_a^c dx(t) + \int_c^{c+h} y(t)dx(t) = x(c) - x(a) + \int_c^{c+h} y(t)dx(t). \tag{3.1.24}$$

Por la fórmula de integración por partes de la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_c^{c+h} y(t)dx(t) = -x(c) + \frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)dt. \tag{3.1.25}$$

Entonces (3.1.24) y (3.1.25) implican

$$x(a) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)dt.$$

Por lo tanto usando (3.1.21) obtenemos

$$x(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} x(t)dt = \lim_{t\to c^+} x(t).$$

Análogamente, se puede mostrar que $x(b) = \lim_{t\to c^-} x(t)$ y hemos probado la primera implicación.

Supongamos ahora que $x \in BV[a,b]$ satisface que

$$x(a) = x(b) = \lim_{t\to c^+} x(t) = \lim_{t\to c^-} x(t)$$

para toda $c \in (a,b)$.

Definimos $\tilde{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{x}(t) := x(a)$ para toda $t \in [a,b]$. Entonces $x(b) = \tilde{x}(b)$ y $\tilde{x}(t) = x(t)$ en todos los puntos del interior de $[a,b]$ donde x es continua.

Por el mismo argumento que utilizamos para probar (3.1.17), podemos afirmar que para toda $y \in C[a,b]$

$$\int_a^b y(t)dx(t) = \int_a^b y(t)d\tilde{x}(t). \tag{3.1.26}$$

Luego, como $\tilde{x}$ es una función constante entonces para toda $y \in C[a,b]$

$$\int_a^b y(t)d\tilde{x}(t) = 0,$$

lo cual implica por (3.1.26) que para toda $y \in C[a,b]$

$$\int_a^b y(t)dx(t) = 0.$$

Por lo tanto $x \sim 0$.

□

3.1.3. Funciones Normalizadas de Variación Acotada

A continuación definimos un subespacio de $BV[a,b]$, el espacio de funciones normalizadas de variación acotada $NBV[a,b]$. A partir de este nuevo espacio podremos obtener la correspondencia inyectiva que buscamos.

Definición 3.1.2. Una función $g \in BV[a,b]$ es *normalizada*, si $g(a) = 0$ y g es continua por la derecha, esto es, para toda $c \in (a,b)$ $\lim_{t\to c^+} g(t) = g(c)$. Al conjunto de funciones normalizadas de variación acotada en $[a,b]$ lo denotamos por $NBV[a,b]$. Se puede verificar rápidamente que $NBV[a,b]$ es subespacio de $BV[a,b]$.

El siguiente lema establece que si existe una función normalizada de variación acotada en alguna de las clases de equivalencia construidas anteriormente, entonces ésta es única.

Lema 3.1.3. *Sean $x_1, x_2 \in BV[a,b]$, tales que $x_1 \sim x_2$ y $x_1, x_2 \in NBV[a,b]$. Entonces $x_1 = x_2$.*

Demostración. Para probar esto, notemos que $x_1 - x_2 \sim 0$, lo cual implica que se cumple el criterio de la Proposición 3.1.2, es decir $(x_1 - x_2)(a) = (x_1 - x_2)(b)$. Pero como x_1, x_2 son normalizadas, entonces tenemos que

$$x_1(b) = x_2(b). \tag{3.1.27}$$

Por el criterio de la Proposición 3.1.2 también tenemos que para cualquier $c \in (a,b)$

$$0 = (x_1 - x_2)(a) = \lim_{t\to c^+} (x_1 - x_2)(t) = \lim_{t\to c^+} x_1(t) - \lim_{t\to c^+} x_2(t).$$

Como x_1, x_2 son normalizadas, entonces son continuas por la derecha, por lo tanto tenemos que para todo $c \in (a,b)$

$$x_1(c) = x_2(c). \tag{3.1.28}$$

Hemos probado por (3.1.27) y (3.1.28) que

$$x_1(t) = x_2(t) \qquad \forall t \in [a,b].$$

□

Queremos ahora mostrar que para cada clase de equivalencia de $BV[a,b]$ existe un representante normalizado. Así, por el lema que acabamos de probar, sabremos que este representante existe y es único.

Entonces, dada una función $x \in BV[a,b]$, debemos definir una función $\tilde{x} \in NBV[a,b]$ tal que $x - \tilde{x} \sim 0$.

Proposición 3.1.4. *Sea $x \in BV[a,b]$. Consideremos la función $\tilde{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida como*

$$\tilde{x}(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = a, \\ x(t^+) - x(a) & \text{si } a < t < b, \\ x(b) - x(a) & \text{si } t = b. \end{cases} \tag{3.1.29}$$

Entonces, tenemos que:

(a) $Var(\tilde{x}; [a,b]) \leq Var(x; [a,b])$.

(b) $\tilde{x} \in NBV[a,b]$.

(c) $\tilde{x} \sim x$.

Demostración. (a) Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$.

Notemos que por definición de límite por la derecha, dado $\epsilon > 0$, existen $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$, con $t_i < c_i$ para $i = 1, ..., n-1$, tales que

$$|x(t_i^+) - x(c_i)| < \frac{\epsilon}{2n}. \tag{3.1.30}$$

Ahora, por la definición de la función $\tilde{x}$, podemos escribir para $i = 2, ..., n-1$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_i) - \tilde{x}(t_{i-1}) &= x(t_i^+) - x(a) - x(t_{i-1}^+) + x(a) \\ &= x(t_i^+) - x(t_{i-1}^+) \\ &= \big(x(t_i^+) - x(c_i)\big) - \big(x(t_{i-1}^+) - x(c_{i-1})\big) + \left(x(c_i) - x(c_{i-1})\right). \end{aligned}$$

Sea $c_0 = a$ y $c_n = b$, utilizando (3.1.30) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}(t_i) - \tilde{x}(t_{i-1})| &= |\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_0)| + \sum_{i=2}^{n-1} |\tilde{x}(t_i) - \tilde{x}(t_{i-1})| + |\tilde{x}(t_n) - \tilde{x}(t_{n-1})| \\
&\leq |x(t_1^+) - x(c_1)| + |x(c_1) - x(c_0)| + \sum_{i=2}^{n-1} |x(t_i^+) - x(c_i)| \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} |x(t_{i-1}^+) - x(c_{i-1})| + \sum_{i=2}^{n-1} |x(c_i) - x(c_{i-1})| \\
&+ |x(t_{n-1}^+) - x(c_{n-1})| + |x(c_n) - x(c_{n-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |x(t_i^+) - x(c_i)| + \sum_{i=2}^{n} |x(t_{i-1}^+) - x(c_{i-1})| \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |x(c_i) - x(c_{i-1})| \\
&< n\frac{\epsilon}{2n} + n\frac{\epsilon}{2n} + \sum_{i=1}^{n} |x(c_i) - x(c_{i-1})| \\
&\leq \epsilon + Var(x; [a,b]).
\end{aligned}
$$

De esto se sigue que

$$
Var(\tilde{x}; [a,b]) \leq Var(x; [a,b]) + \epsilon.
$$

Por lo tanto, como ϵ es arbitrario

$$
Var(\tilde{x}; [a,b]) \leq Var(x; [a,b]) < \infty,
$$

lo cual implica que $\tilde{x} \in BV[a,b]$.

(b) Notemos que por definición $\tilde{x}(a) = 0$ y para $t \in (a, b)$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t^+) &= \lim_{h\to 0^+} \tilde{x}(t+h) = \lim_{h\to 0^+} \big[x((t+h)^+) - x(a)\big] \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left[\lim_{k\to 0^+} x((t+h)+k)\right] - x(a) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \lim_{k\to 0^+} x((t+h)+k) - x(a) \\
&= \lim_{\delta\to 0^+} x(t+\delta) - x(a) \\
&= x(t^+) - x(a) = \tilde{x}(t).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $x \in NBV[a, b]$.

(c) Probaremos que $x - \tilde{x} \sim 0$, lo cual es equivalente a $x \sim \tilde{x}$.

Notemos que

$$x(a) - \tilde{x}(a) = x(a), \qquad x(b) - \tilde{x}(b) = x(a),$$

de aquí que

$$x(a) - \tilde{x}(a) = x(b) - \tilde{x}(b).$$

Ahora, para $t \in (a, b)$, usando (b) tenemos que

$$
\begin{aligned}
(x - \tilde{x})(t^+) &= x(t^+) - \tilde{x}(t^+) = x(t^+) - \tilde{x}(t) \\
&= x(t^+) - x(t^+) + x(a) \\
&= x(a).
\end{aligned}
$$

También tenemos

$$\begin{aligned}
(x-\tilde{x})(t^-) &= x(t^+) - \tilde{x}(t^-) = x(t^-) - \lim_{h\to 0^+} \tilde{x}(t-h) \\
&= x(t^-) - \lim_{h\to 0^+} \left[x((t-h)^+) - x(a)\right] \\
&= x(a) + x(t^-) - \lim_{h\to 0^+} x((t-h)^+) \\
&= x(a) + \lim_{h\to 0^+} \left[x(t-h) - \lim_{k\to 0^+} x(t-h+k)\right] \\
&= x(a) + \lim_{h\to 0^+} \lim_{k\to 0^+} \left[x(t-h) - x(t-h+k)\right].
\end{aligned}$$

Tomando $k = \frac{h}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
x(a) + \lim_{h\to 0^+} \lim_{k\to 0^+} \left[x(t-h) - x(t-h+k)\right] &= x(a) + \lim_{h\to 0^+} \left[x(t-h) - x\left(t - \frac{h}{2}\right)\right] \\
&= x(a) + x(t^-) - x(t^-) = x(a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x - \tilde{x} \sim 0$.

Notemos que como x y $\tilde{x}$ son funciones de variación acotada en $[a,b]$, entonces existen sus límites laterales, los cuáles hemos utilizado en esta demostración.

$\square$

3.1.4. El Espacio Dual de C[a,b]

Finalmente, probaremos el resultado principal de esta sección, haciendo uso de todo lo probado anteriormente.

Teorema 3.1.5. *El espacio dual de $C[a,b]$ es el espacio $NBV[a,b]$, es decir que $C[a,b]^*$ y $NBV[a,b]$ son isométricamente isomorfos.*
El isomorfismo está dado por

$$\psi : NBV[a,b] \to C[a,b]^*,$$

tal que

$$\psi(g) = \Lambda_g,$$

donde

$$\Lambda_g(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \qquad \forall x \in C[a,b].$$

Demostración. Probemos primero que ψ es una transformación lineal.

Sean $g_1, g_2 \in NBV[a,b]$, entonces

$$\psi(g_1 + g_2) = \Lambda_{g_1+g_2} \quad \text{y} \quad \psi(g_1) + \psi(g_2) = \Lambda_{g_1} + \Lambda_{g_2},$$

donde para $x \in C[a,b]$

$$\begin{aligned}\Lambda_{g_1+g_2}(x) &= \int_a^b x(t)d\left(g_1(t) + g_2(t)\right)\\ &= \int_a^b x(t)dg_1(t) + \int_a^b x(t)dg_2(t)\\ &= \Lambda_{g_1}(x) + \Lambda_{g_2}(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi(g_1 + g_2) = \psi(g_1) + \psi(g_2).$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $g \in NBV[a,b]$, entonces

$$\psi(\alpha g) = \Lambda_{\alpha g} \quad \text{y} \quad \alpha\psi(g) = \alpha\Lambda_g,$$

donde para $x \in C[a,b]$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha g}(x) &= \int_a^b x(t)d\left(\alpha g(t)\right)\\ &= \alpha \int_a^b x(t)dg(t)\\ &= \alpha\Lambda_g(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi(\alpha g) = \alpha\psi(g),$$

y así ψ es una transformación lineal.

Ahora, la funcional $\Lambda_g : C[a,b] \to \mathbb{R}$ definida para algún $g \in NBV[a,b]$ como

$$\Lambda_g(x) = \int_a^b x(t)dg(t),$$

es una funcional lineal, pues dadas $x_1, x_2 \in C[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_g(x_1 + \alpha x_2) &= \int_a^b \left[x_1(t) + \alpha x_2(t)\right] dg(t) \\
&= \int_a^b x_1(t)dg(t) + \alpha \int_a^b x_2(t)dg(t) \\
&= \Lambda_g(x_1) + \alpha \Lambda_g(x_2).
\end{aligned}$$

Además Λ_g es una funcional lineal acotada para toda $g \in NBV[a,b]$, ya que para $x \in C[a,b]$

$$|\Lambda_g(x)| = \left| \int_a^b x(t)dg(t) \right| \leq \|x\|_\infty Var(g;[a,b]).$$

Por lo tanto ψ está bien definida y además tenemos que

$$\|\Lambda_g\|_{C[a,b]^*} \leq Var(g;[a,b]) = \|g\|_{NBV}. \tag{3.1.31}$$

Mostraremos ahora que ψ es un mapeo sobreyectivo.

Sea $\Lambda_g \in C[a,b]^*$, por el Teorema 3.1.1 existe $h \in BV[a,b]$ tal que

$$\Lambda_g(x) = \int_a^b x(t)dh(t) \qquad \forall x \in C[a,b],$$

por el Lema 3.1.3 y la Proposición 3.1.4, existe una única función $g \in NBV[a,b]$ tal que

$$\int_a^b x(t)dh(t) = \int_a^b x(t)dg(t) \qquad \forall x \in C[a,b].$$

De aquí que existe una única función $g \in NBV[a,b]$ tal que

$$\Lambda_g(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \qquad \forall x \in C[a,b],$$

y claramente, por definición de ψ, $\psi(g) = \Lambda_g$. Por lo tanto, concluimos que ψ es sobreyectiva.

Ahora, con Λ_g, g y h dadas anteriormente, el Teorema 3.1.1 muestra también que

$$\|\Lambda_g\|_{C[a,b]^*} = Var(h; [a,b]).$$

Notemos que por la Proposición 3.1.4

$$Var(g; [a,b]) \leq Var(h; [a,b]).$$

Usando (3.1.31), obtenemos

$$\|\Lambda_g\|_{C[a,b]^*} \leq Var(g; [a,b]) \leq Var(h; [a,b]) = \|\Lambda_g\|_{C[a,b]^*}.$$

Por lo tanto

$$\|\Lambda_g\|_{C[a,b]^*} = \|g\|_{NBV[a,b]},$$

y así concluimos que ψ es un isomorfismo isométrico.

$\square$

3.2. Variación de Riesz Acotada y Dualidad

En esta sección, probaremos un resultado de representación paralelo al del capítulo anterior, reemplazando al espacio $BV[a,b]$ por el espacio $RBV_p[a,b]$ definido anteriormente para $1 < p < \infty$ y al dual $C[a,b]^*$ por el dual del espacio $L_p[a,b]$ con la norma usual

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \qquad \forall f \in L_p.$$

Para el siguiente resultado, denotamos como $RBV_p^0[a,b]$ al espacio de las funciones $f \in RBV_p[a,b]$ tales que $f(a) = 0$.

Teorema 3.2.1. *Para $1 < p < \infty$, el espacio dual de $L_p[a,b]$ es el espacio $RBV_{p'}^0[a,b]$, es decir que $L_p[a,b]^*$ es isométricamente isomorfo a $RBV_{p'}^0[a,b]$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*
El isomorfismo está dado por

$$\Phi : RBV_{p'}^0[a,b] \to L_p[a,b]^*$$

tal que

$$\Phi(\alpha) := \Lambda_\alpha$$

donde para $x \in L_p[a,b]$

$$\Lambda_\alpha(x) = \int_a^b x(t)d\alpha(t).$$

Demostración. Una ventaja es que no tenemos que normalizar α, pues las funciones en $RBV_{p'}[a,b]$ son continuas para $p' > 1$.

Notemos primero que Φ es lineal. En efecto, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in RBV_{p'}^0[a,b]$ y $\mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\Phi(\alpha_1 + \mu\alpha_2) := \Lambda_{\alpha_1+\mu\alpha_2} \quad \text{y} \quad \Phi(\alpha_1) + \mu\Phi(\alpha_2) := \Lambda_{\alpha_1} + \mu\Lambda_{\alpha_2},$$

donde para $x \in L_p[a,b]$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha_1+\mu\alpha_2} &= \int_a^b x(t)d(\alpha_1 + \mu\alpha_2)(t) \\
&= \int_a^b x(t)d\alpha_1(t) + \mu \int_a^b x(t)d\alpha_2(t) \\
&= \Lambda_{\alpha_1}(x) + \mu\Lambda_{\alpha_2}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi(\alpha_1 + \mu\alpha_2) = \Phi(\alpha_1) + \mu\Phi(\alpha_2),$$

y así Φ es una transformación lineal.

Claramente, la funcional $\Lambda_\alpha : L_p[a,b] \to \mathbb{R}$ definida para algún $\alpha \in RBV_{p'}^0$ como

$$\Lambda_\alpha(x) = \int_a^b x(t)d\alpha(t)$$

es una funcional lineal.

Ahora, dadas $x \in L_p[a,b]$, $\alpha \in RBV^0_{p'}[a,b]$ y una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$, obtenemos utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
|S_\alpha(x, P; [a,b])| &:= \left| \sum_{j=1}^{m} x(t_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} |x(t_j)||\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{|x(t_j)||\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|}{|t_j - t_{j-1}|^{1/p}} |t_j - t_{j-1}|^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|^{p'}}{|t_j - t_{j-1}|^{p'-1}} \right)^{1/p'} \left(\sum_{j=1}^{m} |x(t_j)|^p |t_j - t_{j-1}| \right)^{1/p} \\
&\leq Var^R_{p'}(\alpha; [a,b])^{1/p'} \left(\sum_{j=1}^{m} |x(t_j)|^p |t_j - t_{j-1}| \right)^{1/p} .
\end{aligned}$$

Si $x \in C[a,b]$ entonces

$$\lim_{\mu(P) \to 0} |S_\alpha(x, P; [a,b])| = \left| \int_a^b x(t) d\alpha(t) \right| . \tag{3.2.1}$$

Podemos asegurar la existencia de este límite y la igualdad dado que $\alpha \in RBV^0_{p'}[a,b] \subset BV[a,b]$. Además, como $x \in L_p[a,b]$, tenemos que

$$\lim_{\mu(P) \to 0} \left(\sum_{j=1}^{m} |x(t_j)|^p |t_j - t_{j-1}| \right)^{1/p} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} . \tag{3.2.2}$$

Por lo tanto si $x \in C[a,b]$, por (3.2.1) y (3.2.2) y dado que $\alpha(a) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b x(t) d\alpha(t) \right| &\leq Var^R_{p'}(\alpha; [a,b])^{1/p'} \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \\
&= \|\alpha\|_{RBV_{p'}} \|x\|_{L_p} .
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Entonces para $x \in C[a,b]$

$$|\Lambda_\alpha(x)| \leq \|\alpha\|_{RBV_{p'}} \|x\|_{L_p} ,$$

mostrando así que para $\alpha \in RBV^0_{p'}$, Λ_α es efectivamente una funcional lineal acotada en $C[a,b]$.

Ahora, como $C[a,b]$ es denso en $L_p[a,b]$ con respecto a la norma usual, entonces para $\alpha \in RBV^0_{p'}[a,b]$ existe una única extensión de la integral

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t)$$

al espacio $L_p[a,b]$ y esta extensión preserva la norma. Utilizamos la misma notación para dicha extensión.
Por lo tanto, hemos probado que el mapeo Φ está bien definido y satisface

$$\|\Phi(\alpha)\|_{L_p[a,b]^*} \leq \|\alpha\|_{RBV_{p'}}. \tag{3.2.4}$$

Probemos ahora que Φ es sobreyectiva.

Sea $\Lambda : L_p[a,b] \to \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada, debemos encontrar $\alpha \in RBV^0_{p'}[a,b]$ tal que

$$\|\Lambda\|_{L_p[a,b]^*} = Var^R_{p'}(\alpha; [a,b])^{1/p'}.$$

y para $x \in L_p[a,b]$

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t)d\alpha(t).$$

Para $a < s \leq b$, definimos $z_s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $z_s := \mathscr{X}_{[a,s]}$, es decir

$$z_s(t) := \begin{cases} 1 & a \leq t \leq s, \\ 0 & s < t \leq b. \end{cases}$$

Tenemos entonces que $z_s \in L_p[a,b]$ y $\|z_s\|_{L_p} = (s-a)^{1/p}$.
Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) := \Lambda(z_s)$. Fijamos una partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[a,b]$ y

obtenemos

$$\begin{aligned}
|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| &= \left|\Lambda(z_{t_j}) - \Lambda(z_{t_{j-1}})\right| \\
&\leq \|\Lambda\|_{L_p[a,b]^*} \|z_{t_j} - z_{t_{j-1}}\|_{L_p} \\
&= \|\Lambda\|_{L_p[a,b]^*} \left(\int_a^b |\mathscr{X}_{[a,t_j]}(t) - \mathscr{X}_{[a,t_{j-1}]}(t)|^p dt\right)^{1/p} \\
&= \|\Lambda\|_{L_p[a,b]^*} |t_j - t_{j-1}|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debido a que $p'/p - p' + 1 = 0$ tenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|^{p'}}{|t_j - t_{j-1}|^{p'-1}} \leq \|\Lambda\|_{L_p[a,b]^*}^{p'}$$

Esto muestra que $\alpha \in RBV_{p'}^0[a,b]$ y además satisface

$$\|\alpha\|_{RBV_{p'}} \leq \|\Lambda\|_{L_p[a,b]^*}^{p'}. \tag{3.2.5}$$

Ahora, notemos que

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S_\alpha\left(z_s, P; [a,b]\right) = \int_a^b z_s(t) d\alpha(t),$$

donde podemos considerar sin pérdida de generalidad, solamente particiones que contengan al punto s. Para tales particiones tenemos que

$$\begin{aligned}
S_\alpha\left(z_s, P; [a,b]\right) &= \sum_{j=1}^{m} z_s(t_{j-1})\left[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\right] \mathscr{X}_{[a,s]}(t_{j-1}) \\
&= (\alpha(s) - \alpha(a)) \\
&= \alpha(s),
\end{aligned}$$

y así, tomando límite cuando $\mu(P) \to 0$, tenemos

$$\int_a^b z_s(t) d\alpha(t) = \alpha(s) = \Lambda(\mathscr{X}_{[a,s]}). \tag{3.2.6}$$

Ahora, sea $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función simple tal que

$$s(t) := \sum_{j=1}^{m} \xi_j \mathscr{X}_{(t_{j-1},t_j]}(t) \qquad (\xi_j)_{j=1}^{m} \subset \mathbb{R},$$

entonces $s \in L_p[a,b]$ y por (3.2.6) y la linealidad de Λ

$$\begin{aligned}
\Lambda(s) &= \Lambda\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j \mathscr{X}_{(t_{j-1},t_j]}(t)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \xi_j \Lambda\left(\mathscr{X}_{[a,t_j]}(t) - \mathscr{X}_{[a,t_{j-1}]}(t)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \xi_j \int_a^b \left[z_{t_j}(t) - z_{t_{j-1}}(t)\right] d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \left[\xi_j \mathscr{X}_{[t_{j-1},t_j)}(t)\right] d\alpha(t) \\
&= \int_a^b s(t) d\alpha(t).
\end{aligned}$$

Enseguida sea $x \in L_p[a,b]$ una función medible no negativa, entonces existe una sucesión creciente $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples no negativas tal que converge a x en la norma del espacio $L_p[a,b]$. Entonces, por continuidad de Λ tenemos que

$$\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(s_n),$$

y por lo probado anteriormente

$$\Lambda(s_n) = \int_a^b s_n(t) d\alpha(t).$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t) d\alpha(t) = \int_a^b x(t) d\alpha(t).$$

Para finalizar, como toda función $x \in L_p[a,b]$ es la diferencia de dos funciones no negativas en $L_p[a,b]$, podemos concluir que

$$\Lambda(x) = \int_a^b x(t) d\alpha(t) \qquad \forall x \in L_p[a,b],$$

por lo tanto $\Phi(\alpha) = \Lambda$, probando así que Φ es un mapeo sobreyectivo.

Ahora, de (3.2.5) obtenemos

$$\|\alpha\|_{RBV_{p'}} \leq \|\Phi(\alpha)\|_{L_p[a,b]^*}. \tag{3.2.7}$$

De esto y (3.2.4), concluimos

$$\|\alpha\|_{RBV_{p'}} = \|\Phi(\alpha)\|_{L_p[a,b]^*}.$$

De este modo Φ es un isomorfismo isométrico entre los espacios $RBV^0_{p'}$ y $L_p[a,b]$.

$\square$

Capítulo 4

Operadores de Multiplicación entre Espacios de Variación Acotada

Sean E y F espacios de funciones definidas en un conjunto X que toman valores reales. Decimos que una función g definida en X que toma valores reales es un *multiplicador* de E a F si el producto puntual de funciones fg pertenece a F para toda $f \in E$. Denotamos al conjunto de todos los multiplicadores de E a F como $M(E \to F)$.

Si E y F son espacios normados, consideramos de forma natural el operador $M_g : E \to F$ definido como

$$M_g(f) := fg. \tag{4.0.1}$$

Este operador se llama *operador de multiplicación* inducido por g, y la función g se llama *símbolo* del operador de multiplicación.

Es de interés en análisis caracterizar al conjunto $M(E \to F)$ y obtener propiedades de M_g en términos del símbolo g para espacios de funciones importantes. Un ejemplo de una caracterización de este tipo es la que obtuvieron Takagi y Yokouchi en 1999 [16] para el conjunto $M(L_p \to L_q)$.

Dedicamos este capítulo a la caracterización de operadores de multiplicación en espacios de variación acotada que hemos estudiado previamente. En la primera sección de este capítulo caracterizaremos a los operadores de multiplicación y operadores de multiplicación acotados inferiormente actuando en el espacio $BV[0,1]$, el cual estudiamos en el Capítulo 1. En la segunda sección, caracterizaremos a los operadores de multiplicación del espacio $WBV_p[0,1]$ al espacio $WBV_q[0,1]$, los cuales estudiamos en el Capítulo 2. Los resultados presentados en este capítulo se obtuvieron de [3] y [7].

4.1. Operadores de Multiplicación en BV[0,1]

Una propiedad importante del espacio $BV[0,1]$, que probamos en la Proposición 1.1.8, es el hecho de que el producto de dos funciones en $BV[0,1]$ pertenece a $BV[0,1]$. Es decir que si $f, g \in BV[0,1]$, entonces $fg \in BV[0,1]$ y tenemos la desigualdad

$$\|fg\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}\|g\|_{BV}.$$

Lo anterior implica que $BV[0,1]$ es un álgebra de Banach. Este hecho nos permite obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.1.1. *Sea $u : [0,1] \to \mathbb{R}$. Entonces $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$ si y solo si $u \in BV[0,1]$. En este caso tenemos que el operador de multiplicación inducido por u, definido en (4.0.1), tiene norma*

$$\|M_u\| = \|u\|_{BV}, \tag{4.1.1}$$

y por lo tanto M_u es un operador continuo en $BV[0,1]$.

Demostración. Supongamos primero que $u \in BV[0,1]$, entonces para cualquier $f \in BV[0,1]$ tenemos que $uf \in BV[0,1]$ por (1.1.22). Por lo tanto $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$

Supongamos ahora que $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$, esto es, para toda $f \in BV[0,1]$, $uf \in BV[0,1]$. En particular, la función $h(t) := 1$ para toda $t \in [0,1]$ es tal que $h \in BV[0,1]$, tenemos entonces que $uh \in BV[0,1]$, es decir $u \in BV[0,1]$.

Por último, probemos (4.1.1).
Si $u \in BV[0,1]$ entonces $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$ y tenemos que

$$\|M_u\| := \sup_{\|f\|_{BV} \leq 1} \|M_u(f)\|_{BV} = \sup_{\|f\|_{BV} \leq 1} \|uf\|_{BV}. \tag{4.1.2}$$

Ahora, como por (1.1.22) tenemos que para toda $f \in BV[0,1]$

$$\|uf\|_{BV} \leq \|u\|_{BV} \|f\|_{BV},$$

en particular para toda $f \in BV[0,1]$ tal que $\|f\|_{BV} \leq 1$

$$\|uf\|_{BV} \leq \|u\|_{BV}.$$

Por lo tanto

$$\sup_{\|f\|_{BV} \leq 1} \|uf\|_{BV} \leq \|u\|_{BV}. \tag{4.1.3}$$

De (4.1.2) y (4.1.3) se sigue que

$$\|M_u\| \leq \|u\|_{BV}.$$

Ahora, si tomamos a la función constante $h(t) = 1$ para toda $t \in [a,b]$, tenemos que

$$\|M_u(h)\|_{BV} = \|uh\|_{BV} = \|u\|_{BV} = \|u\|_{BV} \|h\|_{BV}.$$

De lo anterior concluimos que

$$\|M_u\| = \|u\|_{BV}.$$

$\square$

4.1.1. Operadores de Multiplicación Acotados Inferiormente en $BV[0,1]$

Hemos caracterizado previamente al conjunto $M(BV[0,1] \to BV[0,1])$, y además obtuvimos que los operadores de multiplicación inducidos por los símbolos en este conjunto son acotados. Nuestro objetivo en esta subsección es caracterizar a las símbolos $u \in BV[0,1]$ que inducen operadores de multiplicación acotados inferiormente e invertibles. Para esto, introducimos un par de conceptos.

Definición 4.1.1. Decimos que un operador lineal $\Lambda : X \to X$, donde X en un espacio de Banach es *acotado inferiormente* si existe $L > 0$ tal que para toda $x \in X$

$$\|\Lambda(x)\|_X \geq L\|x\|_X. \tag{4.1.4}$$

Definición 4.1.2. Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, el conjunto definido como

$$supp(u) := \{t \in [a,b] \mid |u(t)| > 0\}$$

se llama *soporte de la función u*.

Presentamos a continuación algunos resultados obtenidos a partir de estas definiciones y que utilizaremos para la prueba de nuestro resultado principal de caracterización.

Proposición 4.1.2. *El operador de multiplicación M_u inducido por una función $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$ es inyectivo si y solo si el soporte de la función u es todo el intervalo $[0,1]$, esto es, $supp(u) = [0,1]$.*

Demostración. Supongamos que $supp(u) \neq [0,1]$, entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $u(t_0) = 0$. Definimos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) := \begin{cases} 1 & t = t_0, \\ 0 & t \neq t_0. \end{cases}$$

Claramente $f \in BV[0,1]$, ya que $Var(f;[0,1]) \leq 2$.

Notemos que f no es la función identicamente cero en $[0,1]$ y sin embargo

$$u(t)f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

De esto último se sigue que $f \in Ker(M_u)$, y así $Ker(M_u) \neq \{0\}$, por lo que M_u no es inyectiva en $BV[0,1]$.

Concluimos entonces que si el operador $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es inyectivo entonces $supp(u) = [0,1]$.

Recíprocamente, supongamos que $supp(u) = [0,1]$ y tomemos $f \in Ker(M_u)$, entonces

$$u(t)f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

y así necesariamente f debe ser la función idénticamente cero en $[0,1]$. Por lo tanto $Ker(M_u) = \{0\}$ y M_u es un operador inyectivo en $BV[0,1]$. $\square$

Proposición 4.1.3. *Sea M_u el operador de multiplicación inducido por una función $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$. Si $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es sobreyectivo entonces es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador sobreyectivo pero no inyectivo. Entonces por la Proposición 4.1.2 esto implica que $supp(u) \neq [0,1]$, es decir que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $u(t_0) = 0$.

La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(t) := \begin{cases} 1 & t = t_0, \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

es tal que $f \in BV[0,1]$. Como por hipótesis $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador sobreyectivo entonces existe $h \in BV[0,1]$ tal que

$$f(t) = u(t)h(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

En particular, tenemos que para $t = t_0$

$$1 = f(t_0) = u(t_0)h(t_0) = 0,$$

lo cual es una contradicción que provino de suponer que M_u no es inyectivo. Por lo tanto $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador inyectivo, y así es biyectivo.

□

En la proposición previa obtuvimos que $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador biyectivo si y solo si este operador es sobreyectivo. Sin embargo, podemos obtener un resultado aún mejor.

Teorema 4.1.4. *Sea M_u el operador de multiplicación inducido por una función $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$. Entonces $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador biyectivo (con operador inverso continuo) si y solo si existe $\delta > 0$ tal que $|u(t)| > \delta$ para toda $t \in [0,1]$.*

Demostración. Supongamos primero que $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador biyectivo, entonces existe un operador lineal $T : BV[0,1] \to BV[0,1]$ tal que

$$M_u \circ T = T \circ M_u = I,$$

donde I es el operador identidad en $BV[0,1]$.
Entonces para cada $f \in BV[0,1]$

$$f = (M_u \circ T)(f) = M_u(T(f)) = uT(f). \tag{4.1.5}$$

Como M_u es biyectivo, entonces es inyectivo y por la Proposición 4.1.2 $u(t) \neq 0$ para toda $t \in [0,1]$. Se sigue entonces de (4.1.5) que para toda $f \in BV[0,1]$

$$T(f) = \frac{f}{u} = M_{\frac{1}{u}}(f).$$

Notemos que en particular, como la función constante $1 \in BV[0,1]$ y $T : BV[0,1] \to BV[0,1]$ entonces $T(1) = \frac{1}{u} \in BV[0,1]$. Esto implica por la Proposición 4.1.1 que $T = M_{\frac{1}{u}}$ es un operador continuo en $BV[0,1]$.

Adicionalmente, del hecho de que $BV[0,1] \subset B[0,1]$ y $\frac{1}{u} \in BV[0,1]$ tenemos que existe $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{u(t)}\right| < M \quad \forall t \in [0,1].$$

Entonces tomando $\delta = \frac{1}{M}$, tenemos que

$$|u(t)| > \delta \quad \forall t \in [0,1].$$

Recíprocamente, supongamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|u(t)| > \delta \quad \forall t \in [0,1].$$

Como $u \in BV[0,1]$, afirmamos que $\frac{1}{u} \in BV[0,1]$.

En efecto, sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0,1]$, entonces

$$Var(1/u, P; [0,1]) = \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{1}{u(t_j)} - \frac{1}{u(t_{j-1})} \right|.$$

Notemos que para toda $j = 1, ..., m$ tenemos

$$\left| \frac{1}{u(t_j)} - \frac{1}{u(t_{j-1})} \right| = \frac{|u(t_j) - u(t_{j-1})|}{|u(t_j)||u(t_{j-1})|} < \frac{1}{\delta^2}|u(t_j) - u(t_{j-1})|.$$

Entonces para toda $P \in \mathscr{P}[0,1]$

$$Var(1/u, P; [0,1]) < \frac{1}{\delta^2} Var(u, P; [0,1]) \leq \frac{1}{\delta^2} Var(u; [0,1]),$$

de lo cual concluimos que $\frac{1}{u} \in BV[0,1]$.

Por la Proposición 4.1.1 el operador $M_{\frac{1}{u}}$ es continuo en $BV[0,1]$ y

$$M_u \circ M_{\frac{1}{u}} = M_{\frac{1}{u}} \circ M_u = I.$$

Por lo tanto el operador $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es biyectivo con inverso continuo.

□

Estamos listos para caracterizar a los símbolos $u \in BV[0,1]$ que inducen operadores de multiplicación acotados inferiormente e invertibles.

Teorema 4.1.5. *Sea M_u el operador de multiplicación inducido por una función $u \in M(BV[0,1] \to BV[0,1])$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ *es un operador biyectivo (con inverso continuo).*

(b) $Ran(M_u) = BV[0,1]$.

(c) $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ *es un operador acotado inferiormente.*

(d) $\operatorname{ínf}_{t\in[0,1]}|u(t)| > 0$.

Demostración. Es claro que (a) implica (b). Notemos que (b) implica (a), ya que por la Proposición 4.1.3 si $Ran(M_u) = BV[0,1]$ entonces M_u es un operador biyectivo y esto implica, como vimos en la prueba del Teorema 4.1.4, que M_u tiene inverso continuo.

Ahora, probemos que (a) implica (c). Supongamos que $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ es un operador biyectivo (con inverso continuo), entonces existe $L > 0$ tal que para toda $f \in BV[0,1]$

$$\|f\|_{BV} = \|{M_u}^{-1}(M_u(f))\|_{BV} \leq L\|M_u(f)\|_{BV}.$$

De aquí que para toda $f \in BV[0,1]$

$$\|M_u(f)\|_{BV} \geq \frac{1}{L}\|f\|_{BV}.$$

Por lo tanto M_u es un operador acotado inferiormente.

Observemos que la equivalencia de (d) y (a) se sigue del Teorema 4.1.4.

Resta probar entonces que (c) implica (d) para completar la demostración. Supongamos que

$$\operatorname*{ínf}_{t\in[0,1]}|u(t)| = 0.$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $t_n \in [0,1]$ tal que $0 \leq |u(t_n)| < \frac{1}{n}$.
Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset BV[0,1]$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) := \begin{cases} 1 & t = t_n, \\ 0 & t \neq t_n. \end{cases}$$

Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq \|f_n\|_{BV} \leq 3. \tag{4.1.6}$$

Por otro lado, para $n \in \mathbb{N}$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0,1]$

$$\begin{aligned} Var(uf_n, P; [0,1]) &= \sum_{j=1}^{m} |u(t_j)f_n(t_j) - u(t_{j-1})f_n(t_{j-1})| \\ &\leq 2|u(t_n)||f_n(t_n)| = 2|u(t_n)|. \end{aligned}$$

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$

$$Var(uf_n; [0,1]) \leq 2|u(t_n)|. \tag{4.1.7}$$

Usando (4.1.6), (4.1.7) y la elección que hicimos de t_n para $n \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|u \cdot f_n\|_{BV} &= |u(0)f_n(0)| + Var(u \cdot f_n; [0,1]) \\ &\leq |u(t_n)| + 2|u(t_n)| = 3|u(t_n)| \\ &< \frac{3}{n} \leq \frac{3}{2n}\|f_n\|_{BV}. \end{aligned}$$

De lo cual se sigue que $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$ no puede ser acotado inferiormente. Por lo tanto hemos probado que (c) implica (d).

□

4.2. Operadores de Multiplicación entre $WBV_p[0,1]$ y $WBV_q[0,1]$

En esta sección caracterizaremos por completo al conjunto $M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$, es decir a los símbolos $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ que inducen operadores de multiplicación M_u tales que

$M_u(f) := uf \in WBV_q[0,1]$ para toda $f \in WBV_p[0,1]$. Para esto, dividimos nuestro estudio en dos casos:

- Caso 1: $1 \leq q < p$
- Caso 2: $1 \leq p \leq q$

Antes de proceder al estudio del caso 1, presentamos algunos resultados auxiliares que nos serán de gran utilidad más adelante.

En el Ejemplo 2.1.3, probamos que la inclusión $WBV_p[0,1] \subsetneq WBV_q[0,1]$ es estricta para el caso $q > p$ utilizando la función $Z_{1/p}$ definida en (2.1.21). A continuación presentamos una nueva función, similar a la función $Z_{1/p}$, que muestra la inclusión estricta y adicionalmente posee propiedades deseables para nuestro estudio.

Dada una sucesión creciente $(c_j)_{j=0}^{\infty} \subset [0,1]$ y $\theta > 1$, definimos la función $f_\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue

$$f_\theta(t) := \begin{cases} 0 & t < c_0 \quad \text{o} \quad t \geq C \quad \text{o} \quad t = \frac{c_j + c_{j+1}}{2}, j = 0,1,2,.., \\ \frac{1}{2^{1/p}(j+1)^\theta} & t = c_j, j = 0,1,2,..., \\ \text{lineal} & \text{o.c.} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

donde $C := \lim_{j\to\infty} c_j$.

Observación 4.2.1. *Sean $1 \leq q < p$, entonces la función $f_{1/q} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida en (4.2.1) posee las siguientes propiedades:*

(a) $f_{1/q} \in WBV_p[0,1] \setminus WBV_q[0,1]$.

(b) $\sup_{c_j < t < c_{j+1}} f_{1/q}(t) = f_{1/q}(c_j)$ *para* $j = 0,1,2,...$.

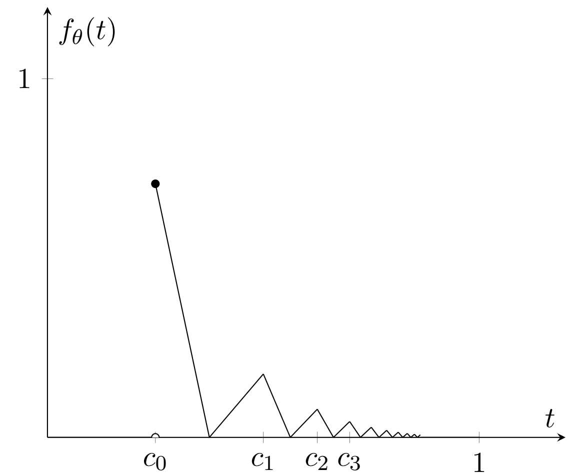

Figura 4.1: Gráfica de una función f_θ con $\theta = 2$, $p = 2$.

(c) $\inf_{c_j<t<c_{j+1}} f_{1/q}(t) = 0$ *para* $j = 0, 1, 2, ...$.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ consideremos las particiones:

$$\widetilde{P_n} = \{c_0, \frac{c_0+c_1}{2}, c_1, \frac{c_1+c_2}{2}, c_2, ..., \frac{c_{n-1}+c_n}{2}, c_n\} \in \mathscr{P}[c_0, c_n],$$

$$P_n = \{0, c_0, \frac{c_0+c_1}{2}, c_1, \frac{c_1+c_2}{2}, c_2, ..., \frac{c_{n-1}+c_n}{2}, c_n, 1\} \in \mathscr{P}[0,1].$$

Entonces para $p > q \geq 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$

$$Var_p^W(f_{1/q}, P_n; [0,1]) \geq Var_p^W(f_{1/q}, \widetilde{P_n}; [c_0, c_n]) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^{p/q}}.$$

De lo anterior obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$Var_p^W(f_{1/q}; [0,1]) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p/q}}.$$

Por lo tanto

$$Var_p^W(f_{1/q}; [0,1]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/q}}. \tag{4.2.2}$$

Ahora, sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathscr{P}[0,1]$, analicemos

$$Var_p^W(f_{1/q}, P; [0,1]) = \sum_{j=1}^{m} |f_{1/q}(t_j) - f_{1/q}(t_{j-1})|^p.$$

Notemos que para $j \in \{1, 2, ..., m\}$ fijo, $t_{j-1} \in [c_{k-1}, c_k]$ para algún $k \in \mathbb{N}$ ó $t_{j-1} \in [0, c_0] \cup [C, 1]$. Podemos observar, haciendo uso de la Figura 4.1, que en cualquier caso tenemos

$$|f_{1/q}(t_j) - f_{1/q}(t_{j-1})| \leq \frac{1}{2^{1/p} k^{1/q}}.$$

Ahora, si para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y $s \in \{1, 2, ..., m-i\}$ tenemos que $\{t_i, t_{i+1}, ..., t_{i+s}\} \in \left[c_{k-1}, \frac{c_{k-1}+c_k}{2}\right]$ para algún $k \in \mathbb{N}$ ó $\{t_i, t_{i+1}, ..., t_{i+s}\} \in \left[\frac{c_{k-1}+c_k}{2}, c_k\right]$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces como la función $f_{1/q}$ es monótona en ambos casos, tenemos

$$\sum_{j=i+1}^{i+m} |f_{1/q}(t_j) - f_{1/q}(t_{j-1})| \leq \frac{1}{2^{1/p} k^{1/q}}.$$

Por el Lema 2.1.5, obtenemos

$$\sum_{j=i+1}^{i+m} |f_{1/q}(t_j) - f_{1/q}(t_{j-1})|^p \leq \frac{1}{2k^{p/q}}.$$

Por tanto, tenemos que para cualquier partición $P \in \mathscr{P}[0, 1]$

$$Var_p^W(f_{1/q}, P; [0, 1]) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{p/q}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/q}}.$$

Concluimos entonces que

$$Var_p^W(f_{1/q}; [0, 1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/q}}. \tag{4.2.3}$$

De (4.2.2) y (4.2.3) se sigue que

$$Var_p^W(f_{1/q}; [0, 1]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/q}}. \tag{4.2.4}$$

Como $1 \leq q < p$, entonces $f_{1/q} \in WBV_p[0, 1]$. Sin embargo $f_{1/q} \notin WBV_q[0, 1]$ por la divergencia de la serie armónica.

Es claro que la función $f_{1/q}$ también satisface las condiciones (b) y (c).

□

Para cualquier función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ y $1\leq p<\infty$ definimos el número real posiblemente infinito,

$$v_p^W(f;[0,1]) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} Osc(f;I_k)^p \mid (I_k)_{k=1}^m \in \sum[0,1]\right\}. \tag{4.2.5}$$

En el siguiente lema mostramos la igualdad de los números $v_p^W(f;[0,1])$ y $Var_p^W(f;[0,1])$, ya que, para la prueba de nuestro resultado principal en esta sección, nos será conveniente utilizar la definición de $v_p^W(f;[0,1])$ en lugar de la de $Var_p^W(f;[0,1])$.

Lema 4.2.1. *Sea $f\in WBV_p[0,1]$, entonces*

$$Var_p^W(f;[0,1]) = v_p^W(f;[0,1]).$$

Demostración. Sea $P=\{t_0,t_1,...,t_m\}\in\mathscr{P}[0,1]$, definimos $(I_k)_{k=1}^m\in\sum[0,1]$ tal que

$$I_1 := (t_0,t_1),\quad I_2 := (t_1,t_2),\quad \ldots\quad ,\quad I_m := (t_{m-1},t_m).$$

Notemos que para $j=1,2,...,m$

$$|f(t_j)-f(t_{j-1})| \leq \sup_{t\in I_j} f(t) - \inf_{t\in I_j} f(t) = Osc(f,I_j).$$

De aquí que para toda $P\in\mathscr{P}[0,1]$

$$\begin{aligned} Var_p^W(f,P;[0,1]) &= \sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} Osc(f,I_j)^p \leq v_p^W(f;[0,1]). \end{aligned}$$

Entonces tenemos la desigualdad

$$Var_p^W(f;[0,1]) \leq v_p^W(f;[0,1]). \tag{4.2.6}$$

Ahora sea $(I_k)_{k=1}^m\in\sum[0,1]$. Dado $\epsilon>0$ para $j=1,2,...,m$ existe $t_j\in I_j$ y $t_{j-1}\in I_j$ tales que

$$f(t_j) > \sup_{t\in I_j} f(t) - \epsilon,\quad f(t_{j-1}) < \inf_{t\in I_j} f(t) + \epsilon.$$

Se sigue entonces que

$$|f(t_j) - f(t_{j-1})| \geq f(t_j) - f(t_{j-1}) > Osc(f, I_j) - 2\epsilon$$

y así obtenemos

$$\begin{aligned} Var_p^W(f;[0,1]) &\geq \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \\ &> \sum_{j=1}^{m} (Osc(f, I_j) - 2\epsilon)^p. \end{aligned}$$

Como ϵ fue tomado arbitrariamente, de la desigualdad previa concluimos que

$$Var_p^W(f;[0,1]) \geq v_p^W(f;[0,1]). \tag{4.2.7}$$

De las desigualdades (4.2.6) y (4.2.7) obtenemos la igualdad deseada.

□

Probamos anteriormente que para el caso $1 \leq q < p$ existe una función $u \in WBV_p[0,1] \setminus WBV_q[0,1]$. Notemos que para una función de este tipo no es posible inducir un operador de multiplicación de $WBV_p[0,1]$ a $WBV_q[0,1]$; esto se debe a que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) := 1$ para toda $t \in [0,1]$ es tal que $f \in WBV_p[0,1]$ y así,

$$M_u(f) = uf = u \notin WBV_q[0,1].$$

Por lo tanto, nos restringiremos solamente a los símbolos $u \in WBV_q[0,1]$.

Para cualquier subconjunto $A \subset [0,1]$, denotamos como $\#(A)$ a la medida de contar del subconjunto A, es decir,

$$\#(A) := \begin{cases} \text{número de elementos en } A & \text{si } A \text{ es un conjunto finito,} \\ \infty & \text{si } A \text{ es un conjunto infinito.} \end{cases}$$

Ahora, para una función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $r > 0$, definimos el número real positivo posiblemente infinito

$$\rho_u(r) := \#(\{t \in [0,1] \mid |u(t)| \geq r\}). \tag{4.2.8}$$

En el siguiente teorema, veremos que la función ρ_u nos permite caracterizar al conjunto $M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$ para el caso $1 \leq q < p$.

Teorema 4.2.2. *Sea $1 \leq q < p$ y $u \in WBV_q[0,1]$. Entonces $u \in M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$ si y solo si $\rho_u(r) < \infty$ para toda $r > 0$.*

Demostración. Fijemos $u \in WBV_q[0,1]$ y supongamos que $\rho_u(r) < \infty$ para toda $r > 0$. Probaremos que $uf \in WBV_q[0,1]$ para toda $f \in WBV_p[0,1]$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que u y $f \in WBV_p[0,1]$ son funciones no negativas ya que, de lo contrario, podemos descomponerlas como

$$u = u^+ - u^-, \quad f = f^+ - f^-,$$

donde para cada $t \in [0,1]$

$$f^+(t) := \text{máx}\{f(t), 0\}, \quad f^-(t) := \text{máx}\{-f(t), 0\}.$$

De esta forma, tenemos que

$$uf = u^+f^+ - u^+f^- - u^-f^+ + u^-f^-$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} Var_q^W(uf;[0,1]) \leq\ & Var_q^W(u^+f^+;[0,1]) + Var_q^W(u^+f^-;[0,1]) \\ & + Var_q^W(u^-f^+;[0,1]) + Var_q^W(u^-f^-;[0,1]). \end{aligned}$$

De este modo es suficiente estimar cada término de manera individual para probar $uf \in WBV_q[0,1]$.

Ahora, como por hipótesis $\rho_u(r) < \infty$ para toda $r > 0$, entonces dada $(I_k)_{k=1}^m \in \sum[0,1]$, para toda $k \in \{1,...,m\}$ existe $t_k \in I_k$ tal que $u(t_k) = 0$.
Como las funciones u y f son positivas, tenemos que para $k \in \{1,...,m\}$

$$\inf_{t\in I_k} uf(t) = 0, \quad \inf_{t\in I_k} u(t) = 0. \tag{4.2.9}$$

Notemos también que para $k \in \{1,...,m\}$

$$\sup_{t\in I_k} uf(t) \leq \|f\|_\infty \sup_{t\in I_k} u(t). \tag{4.2.10}$$

De (4.2.9) y (4.2.10) concluimos que para $k \in \{1,...,m\}$

$$Osc(uf, I_k) \leq \|f\|_\infty \sup_{t\in I_k} u(t) = \|f\|_\infty Osc(u, I_k).$$

De lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m Osc(uf, I_k)^q &\leq \|f\|_\infty^q \sum_{k=1}^m Osc(u, I_k)\\ &\leq \|f\|_\infty^q Var_q^W(u;[0,1]).\end{aligned}$$

Dado que $(I_k)_{k=1}^m \in \sum[0,1]$ es arbitraria, entonces

$$Var_q^W(uf;[0,1]) \leq \|f\|_\infty^q Var_q^W(u;[0,1]) < \infty,$$

mostrando así que $uf \in WBV_q[0,1]$.

Para mostrar la otra implicación, supongamos que existe $r_0 > 0$ tal que $\rho_u(r_0) = \infty$. Entonces existe una sucesión creciente $(c_n)_{n=1}^\infty \subset [0,1]$ tal que $u(c_n) \geq r_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $f_{1/q}$ definida en (4.2.1) a partir de la sucesión $(c_n)_{n=1}^\infty$. Sabemos que $v_p^W(f_{1/q};[0,1]) < \infty$ y $v_q^W(f_{1/q};[0,1]) = \infty$.
Además, tenemos que para toda $j \in \mathbb{N}$

$$\inf_{c_j<t<c_{j+1}} f_{1/q}(t) = 0, \quad \inf_{c_j<t<c_{j+1}} u(t)f_{1/q}(t) = 0.$$

De lo anterior se sigue que para toda $j \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
Osc(uf_{1/q}, (c_j, c_{j+1})) &= \sup_{c_j < t < c_{j+1}} u(t) f_{1/q}(t) \geq u(c_j) f_{1/q}(c_j) \\
&\geq r_0 f_{1/q}(c_j) = r_0 \sup_{c_j < t < c_{j+1}} f_{1/q}(t) \\
&= r_0 Osc(f_{1/q}, (c_j, c_{j+1})).
\end{aligned}
$$

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
Var_q^W(uf_{1/q}; [0,1]) &\geq \sum_{j=1}^{n} Osc(uf_{1/q}, (c_j, c_{j+1}))^q \\
&\geq r_0 \sum_{j=1}^{n} Osc(f_{1/q}, (c_j, c_{j+1}))^q.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Var_q^W(uf_{1/q}; [0,1]) &\geq r_0 \sum_{j=1}^{\infty} Osc(f_{1/q}, (c_j, c_{j+1}))^q \\
&= r_0 Var_q^W(f_{1/q}; [0,1]) = \infty.
\end{aligned}
$$

Concluimos que $uf_{1/q} \notin WBV_q[0,1]$ y así $u \notin M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$. Hemos probado entonces que si $\rho_u(r) < \infty$ para toda $r > 0$ esto implica que $u \in M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$.

$\square$

Para finalizar esta sección, procedemos al estudio del conjunto $M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$ para el caso $1 \leq p \leq q$.

Teorema 4.2.3. *Sea $1 \leq p \leq q$. Entonces $u \in M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$ si y solo si $u \in WBV_q[0,1]$. En este caso $M_u : WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1]$, el operador de multiplicación inducido por el símbolo u es un operador lineal acotado con norma,*

$$
\|M_u\| \leq \|u\|_\infty + Var_q^W(u; [0,1])^{1/q}. \tag{4.2.11}
$$

Demostración. Supongamos que $u \in WBV_q[0,1]$ y $f \in WBV_p[0,1]$, entonces por (2.1.8)

$$\begin{aligned}
\|uf\|_{WBV_q} &= |u(0)||f(0)| + Var_q^W(uf;[0,1])^{1/q} \\
&\leq \|u\|_\infty |f(0)| + \|u\|_\infty Var_q^W(f)^{1/q} + \|f\|_\infty Var_q^W(u)^{1/q} \\
&\leq \|u\|_\infty |f(0)| + \|u\|_\infty Var_p^W(f)^{1/p} + \|f\|_\infty Var_q^W(u)^{1/q} \\
&\leq \|u\|_\infty \|f\|_{WBV_p} + \|f\|_{WBV_p} Var_q^W(u)^{1/q} \\
&= \left(\|u\|_\infty + Var_q^W(u)^{1/q}\right)\|f\|_{WBV_p}. \qquad (4.2.12)
\end{aligned}$$

Esto implica que $uf \in WBV_q[0,1]$ para toda $f \in WBV_p[0,1]$, esto es, $u \in M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$.

Recíprocamente, supongamos que $u \in M(WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1])$. La función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) := 1$ para toda $t \in [0,1]$ es tal que $h \in WBV_p[0,1]$, y entonces por hipótesis

$$u = uh \in WBV_q[0,1].$$

Finalmente, de (4.2.12) concluimos (4.2.11).

□

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado a fondo la estructura y propiedades del espacio clásico de variación acotada y dos de sus generalizaciones más importantes. Concluimos que cada uno de estos espacios posee una estructura de álgebra de Banach al dotarlos de una norma adecuada.

Para el espacio clásico $BV[a,b]$, obtuvimos el Principio de Selección de Helly, el cual nos permite asegurar que dada una sucesión de funciones con variaciones totales uniformemente acotadas, existe una subsucesión que converge puntualmente a una función en el espacio $BV[a,b]$. También concluimos que $BV[a,b]$ no es mas que el espacio vectorial generado por las funciones monótonas en el intervalo $[a,b]$, obteniendo así una forma alternativa de introducir el concepto de variación acotada.

Para el espacio de variación de Wiener acotada, construimos la familia de funciones zigzag, a partir de las cuales nos fue posible probar la inclusión propia entre espacios de Wiener $WBV_p[a,b]$ y $WBV_q[a,b]$ para $1 \leq p < q$.

Posteriormente, exhibimos el Lema de Riesz, el cual nos proporcionó una caracterización de las funciones en el espacio $RBV_p[a,b]$ como funciones absolutamente continuas cuya derivada pertenece al espacio de Lebesgue $L_p[a,b]$.

Para poder estudiar a los espacios de variación acotada desde otra perspectiva, logramos ver a los espacios $NBV[a,b]$ y $RBV^0_{p'}[a,b]$ como espacios duales conocidos en el análisis funcional. Concluimos que el espacio $NBV[a,b]$ es isométricamente isomorfo al dual del espacio de funciones continuas $C[a,b]$ y por otro lado, el espacio $RBV^0_{p'}$ es isométricamente isomorfo al dual del espacio de Lebesgue $L_p[a,b]$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

En el último capítulo de esta tesis, logramos caracterizar a los operadores de multiplicación $M_u : BV[0,1] \to BV[0,1]$, como aquellos cuya función símbolo u pertenece al espacio $BV[0,1]$. De manera más particular, utilizando el concepto de soporte de la función símbolo, obtuvimos condiciones necesarias y suficientes para que dichos operadores estén acotados inferiormente.

Finalmente, caracterizamos a los operadores de multiplicación entre espacios de variación de Wiener acotada, $M_u : WBV_p[0,1] \to WBV_q[0,1]$ a partir de su función símbolo u, utilizando una generalización del concepto de soporte de una función empleado en el caso del espacio clásico.

Aunque en esta tesis trabajamos únicamente con el concepto de variación acotada para funciones en un intervalo cerrado, es importante mencionar que existen definiciones de variación total para funciones definidas en conjuntos más generales tanto en la recta real como en dimensiones mayores. También es importante añadir que dentro del área del análisis no lineal se continuan estudiando las propiedades que poseen operadores tanto lineales como no lineales actuando en espacios de variación acotada. Algunas de las propiedades de interés son la continuidad y la compacidad de este tipo de operadores. Ésto se debe a que estos resultados son de gran utilidad en el estudio de la existencia y las propiedades topológicas de soluciones a ecuaciones no lineales en estos espacios.

Bibliografía

[1] Apostol,T. *Análisis Matemático*. Reverté. 1981.

[2] Appell, J., Banás J., Merentes, N. *Bounded Variation and Around*. De Gruyter. 2014.

[3] Astudillo-Villalba, Ramos-Fernández. Multiplication operators on the space of functions of bounded variation. *Demonstratio Mathematica* **50**, (2017), pp. 105-115.

[4] Bachman, G., Narici, L. *Functional Analysis*. Dover. 2000.

[5] Carothers, N. L. *Real Analysis.* Cambridge University Press. 2000.

[6] Castillo, R., Rafeiro, H., Trousselot, E. A Generalization for the Riesz p-variation. *Revista Colombiana de Matemáticas* **48**, (2014), pp. 165-190.

[7] Chaparro, H. On multipliers between bounded variation spaces. *Annals of Functional Analysis* **9**, (2018), pp. 376-383.

[8] Helly, E. Über lineare Funktionaloperationen. *Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss.* **121**, (1912), pp. 265-297.

[9] Jordan, C. *Sur la série de Fourier.* C.R. Acad. Sci. Paris **2**, (1881), pp. 228-230.

[10] Jordan, C. *Cours d'Analyse.* Gauthier-Villars. 1893.

[11] Kantrowitz, R. Submultiplicativity of norms for spaces of generalized BV-functions. *Real Analysis Exchange* **36**(1), (2010/2011), pp. 169-176.

[12] Natanson. *Theory of Functions of a Real Variable.* Dover. 2016.

[13] Pierce, P.B., Velleman, D. J. Some Generalizations of the Notion of Bounded Variation. *The American Mathematical Monthly* **113**, (2006), pp. 897-904.

[14] Riesz, F. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. *Math. Annalen* **69**, (1910), pp. 449-497.

[15] Riesz, F. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris* **28**, (1911), pp. 33-68.

[16] Takagi, H., Yokouchi, K. Multiplication and composition operators between two Lp-spaces. *Contemp. Math.* **232**, (1999), pp. 321-338.

[17] Wiener, N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *J. Math. Phys. MIT* **3**, (1924), pp. 73-94.

[18] Young, L. Sur une généralisation de la notion de variation de puissance pième bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier. *C.R. Acad. Sci. Paris* **204**, (1937), pp. 470-472.