



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Licenciatura en Matemáticas

La bifurcación pseudo-Hopf en sistemas Filippov en el
plano

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Valeria Campa Morán

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco Gonzalez

Hermosillo, Sonora, México, 17 de diciembre de 2024

SINODALES

Dra. Jocelyn Anaid Castro Echeverría
Tecnológico de Monterrey, Monterrey, México

Dr. Martin Aaron Carrillo Carranza
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Juan Andrés Castillo Valenzuela
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | III |
| 1. Preliminares | 1 |
| 2. Sistemas Filippov en el plano | 5 |
| 2.1. Definiciones | 5 |
| 2.2. Forma normal | 8 |
| 3. La bifurcación pseudo-Hopf | 11 |
| 3.1. La Bifurcación Pseudo-Hopf (caso genérico) | 11 |
| 3.2. La Bifurcación Pseudo-Hopf (caso no genérico) | 23 |
| 3.3. La Bifurcación Pseudo-Hopf (caso sin deslizamiento) | 28 |
| 4. Aplicación | 33 |
| 5. Conclusiones | 39 |

Introducción

Alguna vez te has preguntado ¿cómo cambian los sistemas cuando cambias sus ajustes? La teoría de bifurcaciones nos da pistas sobre eso. Nos ayuda a entender cómo los sistemas dinámicos cambian su comportamiento de manera cualitativa cuando variamos ciertos parámetros. Una de esas formas interesantes de cambio es la bifurcación pseudo-Hopf, que ocurre cuando aparecen y se estabilizan patrones periódicos en sistemas en el tiempo.

En este trabajo, nos sumergiremos en el mundo de los sistemas Filippov, ver [2], [5]. Estos sistemas son modelos matemáticos que tratan con saltos abruptos o discontinuidades. Son de un nivel más complejo y van más allá de lo que pueden predecir los modelos matemáticos tradicionales en sistemas suaves. Queremos entender cómo estas discontinuidades afectan la forma en que aparecen y se mantienen los patrones periódicos en este tipo de sistemas. Y también buscamos saber qué significa esto en el mundo real, cómo puede influir en aplicaciones prácticas. Nuestro objetivo aquí es entender el mecanismo por el cual ocurre la bifurcación pseudo-Hopf en los sistemas Filippov, ver [6].

Para lograr esto, vamos a profundizar en lo que sabemos sobre sistemas Filippov y la teoría detrás de tres casos de bifurcaciones pseudo-Hopf: el caso genérico, un caso no genérico y el sin deslizamiento. Después desarrollamos algunas técnicas matemáticas y herramientas de computación que nos permitan estudiar estos sistemas de manera efectiva. Finalmente, vamos a aplicar todo esto a un caso de estudio para ver cómo afectan estas bifurcaciones pseudo-Hopf en una situación del mundo real.

Este viaje no solo nos ayudará a entender mejor cómo funcionan estos sistemas complicados, sino que también puede tener aplicaciones prácticas en campos como la ingeniería, la física y la biología. Entender cómo las discontinuidades pueden influir en sistemas complejos es esencial para diseñar y controlar mejor todo tipo de tecnologías y procesos en el mundo real.

Capítulo 1

Preliminares

Previo al contenido principal, nos es necesario definir algunos recursos que nos serán de gran ayuda para futuros cálculos y demostraciones a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis. A continuación encontramos mencionados teoremas conocidos de teoría de sistemas suaves junto a su respectiva demostración en caso de ser necesaria.

Flujo de un sistema diferencial lineal

El flujo de un sistema diferencial lineal representa el comportamiento de las soluciones en un tiempo t , dependiendo de las propiedades y parámetros del sistema. Este flujo puede ser aproximado por el siguiente lema.

Lema 1. *Sea $\dot{x} = f(x) = Ax + b$, donde $x, b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con $x(0) = x_0$. Entonces el flujo está dado por $x(t) = x_0 + tM(t)f(x_0)$, con $M(t) = I + \frac{tA}{2!} + \frac{t^2A^2}{3!} + \frac{t^3A^3}{4!} + \dots$.*

Demostración

$\dot{x} = Ax + b$ tiene como solución

$$x(t) = e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t e^{-As} b ds \right).$$

Observe que en la integral anterior

$$\begin{aligned} e^{-sA} b &= \left(I - sA + \frac{s^2 A^2}{2!} - \frac{s^3 A^3}{3!} + \frac{s^4 A^4}{4!} - \frac{s^5 A^5}{5!} + \dots \right) b \\ &= b - sAb + \frac{s^2}{2!} A^2 b - \frac{s^3}{3!} A^3 b + \frac{s^4}{4!} A^4 b - \frac{s^5}{5!} A^5 b + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, como la función exponencial converge uniformemente tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-sA} b ds &= \int_0^t b ds - \int_0^t A b s ds + \int_0^t \frac{s^2}{2!} A^2 b ds - \int_0^t \frac{s^3}{3!} A^3 b ds + \int_0^t \frac{s^4}{4!} A^4 b ds - \int_0^t \frac{s^5}{5!} A^5 b ds + \dots \\ &= bt - Ab \frac{t^2}{2!} + A^2 b \frac{t^3}{3!} - A^3 b \frac{t^4}{4!} + A^4 b \frac{t^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{t^4 A^4}{4!} + \frac{t^5 A^5}{5!} + \dots \right) \left(x_0 + bt - Ab \frac{t^2}{2!} + A^2 b \frac{t^3}{3!} - A^3 b \frac{t^4}{4!} \right. \\ &\quad \left. + A^4 b \frac{t^5}{5!} - \dots \right) \\ &= x_0 + t(b + Ax_0) + t^2 \left(-\frac{Ab}{2} + \frac{A^2 x_0}{2} + Ab \right) + t^3 \left(\frac{A^2 b}{6} - \frac{A^2 b}{2} + \frac{A^2 b}{2} + \frac{a^3 x_0}{6} \right) \\ &\quad + t^4 \left(\frac{A^3}{4!} f(x_0) \right) + \dots, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + tf(x_0) + \frac{t^2}{2!} Af(x_0) + \frac{t^3}{3!} A^2 f(x_0) + \frac{t^4}{4!} A^3 f(x_0) + \frac{t^5}{5!} A^4 f(x_0) + \dots \\ &= x_0 + t \left(I + \frac{tA}{2!} + \frac{t^2 A^2}{3!} + \frac{t^3 A^3}{4!} + \frac{t^4 A^4}{5!} + \dots \right) f(x_0) \\ &= x_0 + tM(t)f(x_0). \end{aligned}$$

■

Teorema de la Función Implícita

El teorema de la función implícita, ver [4], es parte de la teoría básica del cálculo integral y diferencial. Este teorema busca establecer las condiciones bajo las cuales podemos despejar una variable en término de otra libre al rededor de una vecindad.

Teorema 1. (*Teorema de la función implícita*)

Sea la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas, y un punto (x_0, y_0) con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces existe una vecindad U que contiene a (x_0, y_0) tal que existe una función única $y = g(x)$ definida para $(x, y) \in U$ que satisface $F(x, g(x)) = 0$. Más aún, si $(x, y) \in U$ satisface $F(x, y) = 0$, entonces $y = g(x)$. Finalmente, $y = g(x)$ es continuamente diferenciable, con la derivada dada por

$$g'(x) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} D_x F(x, y) \Big|_{y=g(x)}.$$

Teorema de la Estabilidad de Puntos Fijos

Un punto fijo estable tiene la propiedad de que los puntos a su alrededor se acercan a él bajo la dinamica del sistema en el que estan. Para un punto fijo inestable, los puntos a su alrededor se alejan. Esta estabilidad puede determinarse gracias al siguiente teorema. Ver [1].

Teorema 2. (Teorema de la estabilidad de puntos fijos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y p un punto fijo de f , esto es $f(p) = p$.

i) Si $|f'(p)| < 1$ entonces p es un punto fijo estable.

ii) Si $|f'(p)| > 1$ entonces p es un punto fijo inestable.

Demostración

Parte i). Sea a cualquier número entre $|f'(p)|$ y 1, es decir, $|f'(p)| < a < 1$. Más específicamente, digamos que

$$a = \frac{1 + |f'(p)|}{2}.$$

Como sabemos, la derivada de $f(x)$ en p esta dada por

$$|f'(p)| = \lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|}.$$

Existe entonces una vecindad $V_\varepsilon(p)$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño con $x \in V_\varepsilon(p)$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a,$$

pues $|x - p| < \varepsilon$,

$$|f(x) - f(p)| < a|x - p| < a\varepsilon.$$

Pero p es punto fijo, por lo tanto

$$|f(x) - p| < a|x - p| < a\varepsilon.$$

Esto quiere decir que $f(x)$ está más cerca de p que x , por lo menos por algún factor de a . Por lo tanto llegamos a dos conclusiones:

a) Si $x \in V_\varepsilon(p)$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(p)$, lo mismo para $f^2(x), f^3(x), \dots$.

b) $|f^k(x) - p| < a^k|x - p| \forall k \geq 1$.

Así, como $a < 1$, p es punto fijo estable (atractor).

Parte ii). Sea a cualquier número entre 1 y $|f'(p)|$, es decir, $1 < a < |f'(p)|$. Y definimos a a igual que en la parte anterior, es decir,

$$a = \frac{1 + |f'(p)|}{2}.$$

Existe entonces una vecindad $V_\varepsilon(p)$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño con $x \in V_\varepsilon(p)$ tal que

$$\frac{|f(x) - p|}{|x - p|} > a,$$

pues

$$|f(x) - p| > a\varepsilon > \varepsilon.$$

Es decir, $f(x)$ se aleja de p .

Por lo tanto, p es un punto fijo inestable (repulsor).



Capítulo 2

Sistemas Filippov en el plano

En este capítulo encontramos teoría básica sobre los sistemas Filippov en el plano que será utilizada en el desarrollo de esta tesis.

2.1. Definiciones

Comenzamos por definir conceptos generales de los sistemas Filippov.

Sea el sistema lineal por pedazos discontinuo en \mathbb{R}^2 con dos campos separados por la recta de conmutación $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1 & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2 & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $A_{1,2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $b_{1,2} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}^2$ el vector normal a Σ y $c_0 \in \mathbb{R}$. A este sistema le llamamos sistema Filippov, ver Figura 2.1.

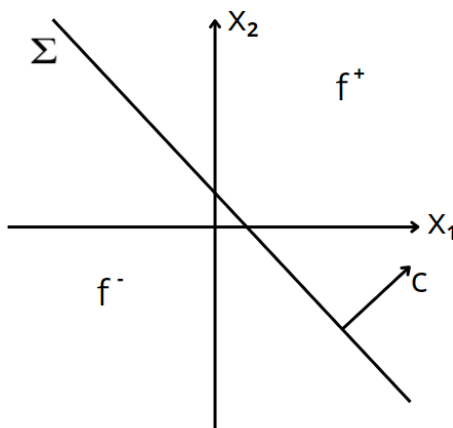


Figura 2.1: Sistema Filippov.

En la recta de conmutación Σ podemos encontrar dos tipos segmentos, el segmento de cruce

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma | c^T f^+(x) c^T f^-(x) > 0\}$$

y el segmento de deslizamiento Σ_s , el cual puede ser atractor

$$\Sigma_{as} = \{x \in \Sigma | c^T f^-(x) > 0, c^T f^+(x) < 0\}$$

o repulsor

$$\Sigma_{rs} = \{x \in \Sigma | c^T f^-(x) < 0, c^T f^+(x) > 0\},$$

y sobre estos existe una dinámica dada por la combinación convexa de Filippov, ver [5], la cual se define por $f_s(x)$

$$f_s(x) = (1 - \gamma(x))f^-(x) + \gamma(x)f^+(x),$$

donde

$$\gamma(x) = \frac{c^T f^-(x)}{c^T (f^-(x) - f^+(x))} \in (0, 1) \quad \forall x \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}, c^T (f^-(x) - f^+(x)) \neq 0$$

y es tal que $c^T f_s(x) = 0$.

Es así como tenemos una expresión explícita para la dinámica deslizante $f_s(x)$ generada por (2.1),

$$f_s(x) = \frac{(c^T f^-(x)) f^+(x) - (c^T f^+(x)) f^-(x)}{\Delta x}$$

donde $\Delta x = c^T (f^-(x) - f^+(x)) \neq 0$. Ver Figura 2.2.

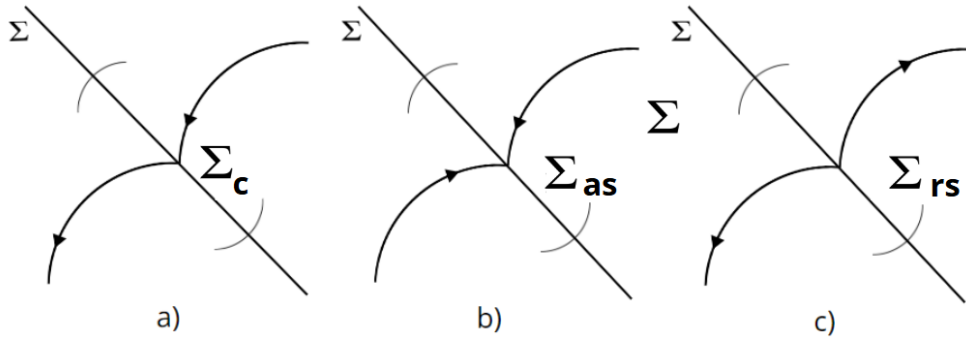


Figura 2.2: a) Segmento de cruce. b) Segmento deslizante atractor. c) Segmento deslizante repulsor.

Definición 1. i) Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio admisible de (2.1) si

$$f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0,$$

o si

$$f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0.$$

ii) $p \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio virtual de (1.1) si

$$f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0,$$

o si

$$f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0,$$

iii) Un punto $\bar{x} \in \Sigma$ es un pseudo-equilibrio de (2.1) si $f_s(p) = 0$. \bar{x} es admisible si $\bar{x} \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$. \bar{x} es virtual si $\bar{x} \in \Sigma_c$.

Definición 2. i) Un punto $q \in \Sigma$ es punto de tangencia cuadrática de (2.1) si

$$c^T f^-(q) = 0 \text{ y } r_1 = c^T A_1 f^-(q) \neq 0,$$

o si

$$c^T f^+(q) = 0 \text{ y } r_2 = c^T A_2 f^+(q) \neq 0.$$

A partir de aquí nos referimos a los puntos de tangencia cuadrática solo como puntos de tangencia.

ii) $q \in \Sigma$ es punto de tangencia invisible (visible) para f^- si

$$c^T f^-(q) = 0 \text{ y } r_1 > 0 (< 0).$$

iii) $q \in \Sigma$ es punto de tangencia invisible (visible) para f^+ si

$$c^T f^+(q) = 0 \text{ y } r_2 < 0 (> 0).$$

Ver Figura 2.3.

iv) Cuando f^- y f^+ comparten el mismo punto de tangencia q , diremos que se trata de un punto de doble tangencia, ver Figura 2.4.

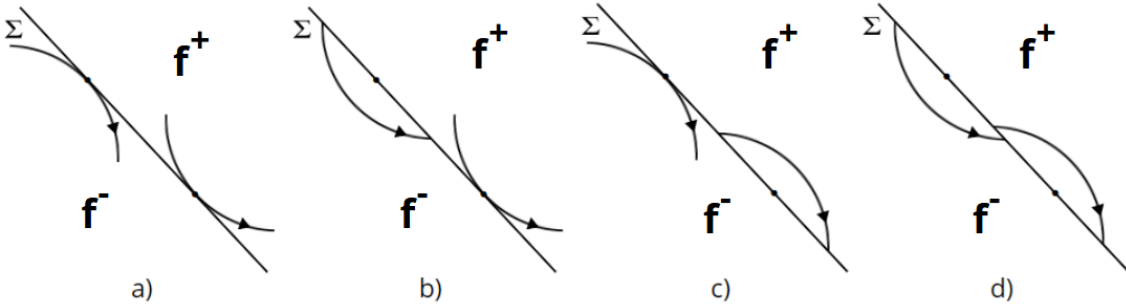


Figura 2.3: a) Puntos de tangencia visibles. b) Punto de tangencia invisible en f^- , punto de tangencia visible en f^+ . c) Punto de tangencia visible en f^- , punto de tangencia invisible en f^+ . d) Puntos de tangencia invisibles.

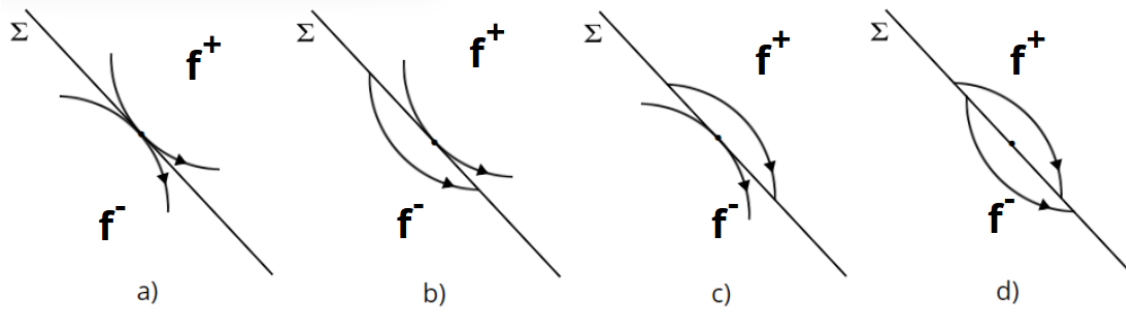


Figura 2.4: a) Punto de doble tangencia visible. b) Punto de doble tangencia, invisible en f^- , visible en f^+ . c) Punto de doble tangencia, visible en f^- , invisible en f^+ . d) Punto de doble tangencia invisible.

2.2. Forma normal

Para facilitar ciertos cálculos y aplicaciones, definimos un cambio de coordenadas que nos da como resultado la forma normal para sistemas Filippov con dos puntos de tangencia.

Suponemos que el sistema Filippov (2.1) satisface la siguiente hipótesis genérica:

(H_0) El par de vectores $\{c, A_1^T c\}$ y $\{c, A_2^T c\}$ son linealmente independientes.

Bajo la hipótesis (H_0), el sistema Filippov (1.1) tiene dos puntos de tangencia q_1 y q_2 . Esto es sencillo de ver ya que, si definimos las rectas

$$L_i : c^T(A_i x + b_i) = 0,$$

entonces $L_i \cap \Sigma = \{q_i\}$, para $i = 1, 2$. Además, existen γ_1 y γ_2 con $\gamma_2 \neq 0$ tales que

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c.$$

Teorema 3. *Bajo la hipótesis (H_0), el cambio de coordenadas*

$$y = w(x) = \begin{cases} \gamma_2 T_1(x - q_1) & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ T_2(x - q_1) & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $T_1 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \end{pmatrix}$ y $\gamma_2 > 0$, transforma al sistema (1.1) en

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\det(A_1), \\ \alpha_2 &= \operatorname{tr}(A_1), \\ \beta_1 &= -\det(A_2), \\ \beta_2 &= \operatorname{tr}(A_2), \\ r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1), \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2), \\ \mu &= c^T (A_2 q_1 + b_2).\end{aligned}$$

con

$$\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \end{pmatrix}.$$

Ver Figura 2.5.

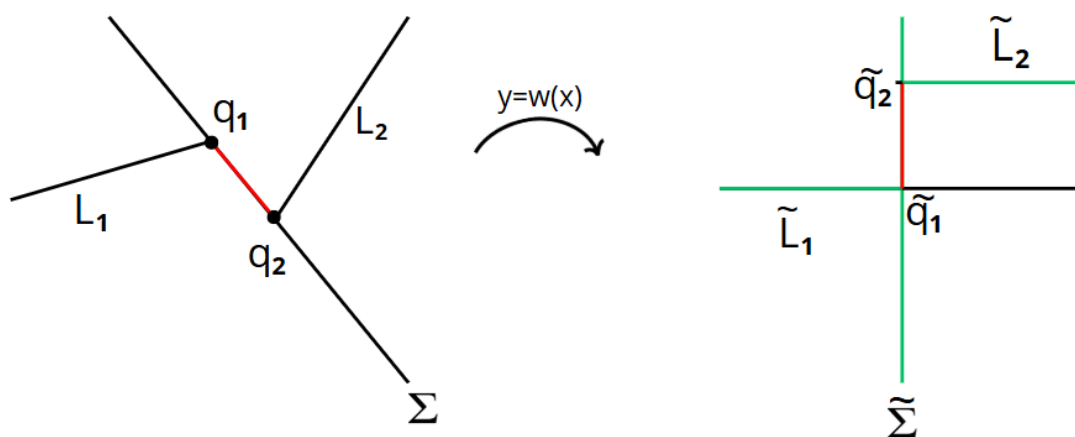


Figura 2.5: Cambio de coordenadas $y = w(x)$.

Observación 1. Es importante mencionar que el cambio de coordenadas $y = w(x)$ nos asegura la existencia de un ciclo límite de cruce en el sistema original (2.1) si este existe en el sistema en su forma normal (2.3).

En este cambio de coordenadas el signo de γ_2 nos dice si tenemos una ventana de cruce o de deslizamiento. Ver Figura 2.6.

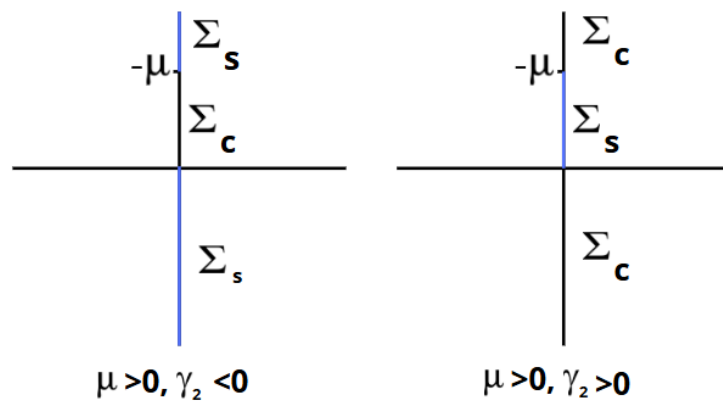


Figura 2.6: Si $\gamma_2 < 0$ el sistema (2.3) tiene una ventana de cruce. Si $\gamma_2 > 0$ el sistema (2.3) tiene una ventana de deslizamiento.

Capítulo 3

La bifurcación pseudo-Hopf

La bifurcación Pseudo-Hopf es un fenómeno de creación o destrucción de ciclos límite de cruce de gran importancia en el estudio de sistemas lineales por pedazos discontinuos, donde la estabilidad de un ciclo límite surge a partir de los parámetros del sistema. En este capítulo desarrollamos tres casos para dicha bifurcación.

Para el caso genérico, determinamos las condiciones a cumplir para la aparición de un ciclo límite de cruce y la estabilidad del mismo, y enunciamos el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf para este.

En un primer caso no genérico, fijamos el parámetro de control igual a cero, el cual define la estabilidad del ciclo límite, desarrollamos las condiciones a cumplir para la existencia de un ciclo límite de cruce y su estabilidad y adaptamos el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf para este caso.

Por último un segundo caso no genérico, el caso sin deslizamiento, donde observamos el comportamiento del ciclo límite y reescribimos el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf por tercera vez tomando como base aquellos sistemas Filippov en los que ambos puntos de tangencia se encuentran colapsados en el mismo punto.

3.1. La Bifurcación Pseudo-Hopf (caso genérico)

La bifurcación pseudo-Hopf se caracteriza por la aparición de un ciclo límite a partir del cambio de estabilidad de un segmento deslizante, cuando dos puntos de tangencia invisibles se colapsan. Este mecanismo se ilustra en la Figura 3.1.

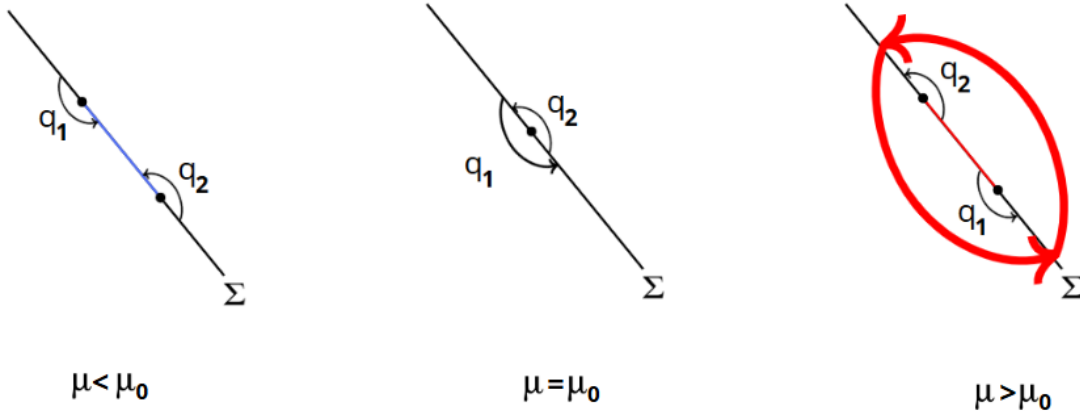


Figura 3.1: Aparición de un ciclo límite de cruce al variar el parametro μ por un valor nominal μ_0 .

3.1.1. Mapeo de Poincaré

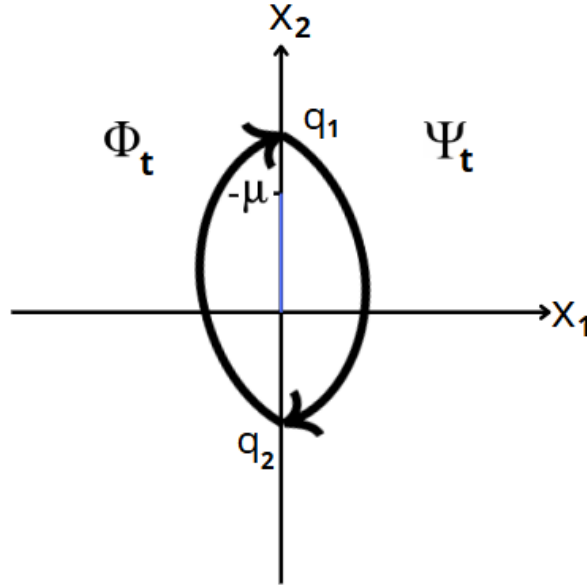
El mapeo de Poincaré es muy útil para comprender el comportamiento de soluciones a través de secciones transversales. En el contexto del desarrollo de la bifurcación pseudo-Hopf, dicho mapeo nos permite analizar las trayectorias del sistema Filippov cuando estas se proyectan en un campo fijo, lo cual nos simplifica el estudio de la dinámica cerca de puntos fijos. Es por esto que hacemos uso de esta herramienta analizando a $\mu \in V_0$ con V_0 una vecindad de 0 y $\mu < 0$. Para $\mu > 0$ este análisis es análogo.

Sea el sistema Filippov en forma normal

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \beta_2 \mu \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, $\gamma_2, r_{1,2} \in \mathbb{R}$, donde $\gamma_2 > 0$, $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$.

Sean ϕ_t y ψ_t el flujo para f^- y f^+ respectivamente. Para probar la existencia de un ciclo límite de cruce tenemos que encontrar $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ y $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, con $u > -\mu$ y $v < 0$, tales que el flujo ψ_t lleva a q_1 al punto q_2 en un tiempo de vuelo t_2 , es decir $\psi_{t_2}(q_1) = q_2$. Análogamente ϕ_t lleva a q_2 a q_1 en un tiempo de vuelo t_1 , es decir $\phi_{t_1}(q_2) = q_1$. Ver Figura 3.2.

Figura 3.2: Flujos ϕ_t y ψ_t

Por lo tanto, para obtener un ciclo límite de cruce hay que resolver el sistema

$$\psi_{t_2}(q_1) = q_2, \quad (3.2)$$

$$\phi_{t_1}(q_2) = q_1. \quad (3.3)$$

Por el Lema 1, sabemos que

$$\psi_t(q_1) = q_1 + tM(t)f^+(q_1).$$

De este modo, cuando $t = t_2$ en la ecuación (3.2)

$$q_2 = q_1 + t_2 M(t_2) f^+(q_1),$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 e_1^T M(t_2) f^+(q_1) \\ t_2 e_2^T M(t_2) f^+(q_1) \end{pmatrix},$$

donde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que de esto obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$t_2 e_1^T M(t_2) f^+(q_1) = 0, \quad (3.4)$$

$$u + t_2 e_2^T M(t_2) f^+(q_1) = v. \quad (3.5)$$

Vamos a trabajar con (3.4). Para ellos definimos

$$f(t_2, u) = e_1^T M(t_2) f^+(q_1).$$

Con el fin de calcular del tiempo de vuelo t_2 verificamos que este puede expresarse en función de u , es decir $t_2 = t_2(u)$. Para esto utilizamos el teorema de la función implícita (TFI). Observe que $f(0, -\mu) = 0$, comprobamos esto teniendo que $f^+(q_1) = \begin{pmatrix} u + \mu \\ r_2 + \beta_2(u + \mu) \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} f(0, u_0) &= e_1^T M(0) f^+(q_1) \\ &= e_1^T f^+(q_1) \\ &= (1, 0) f^+(q_1) \\ &= u_0 + \mu \end{aligned}$$

por lo tanto $f(0, u_0) = 0$ cuando $u_0 = -\mu$. Ahora, calculamos la derivada parcial de $f(t_2, u)$ con respecto a t_2 y evaluamos en $(0, -\mu)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_2}(t_2, u) &= e_1^T \dot{M}(t_2) f^+(q_1), \\ \frac{\partial f}{\partial t_2}(0, -\mu) &= e_1^T \dot{M}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} e_1^T A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1, 0) \begin{pmatrix} r_2 \\ \beta_2 r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} r_2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos despejar a t_2 en $f(t_2, u) = 0$. Para llegar a una aproximación de esta función la proponemos como función polinomial, de la siguiente forma

$$t_2(u) = a_1(u + \mu) + a_2(u + \mu)^2 + a_3(u + \mu)^3 + a_4(u + \mu)^4 + a_5(u + \mu)^5 + \dots \quad (3.6)$$

Para encontrar cada coeficiente a_k , $k = 1, \dots, 5$, procedemos con la segunda parte del TFI. Tenemos entonces que

$$f(t_2(u), u) \equiv 0 \text{ para } u \in V_{u_0}$$

con V_{u_0} vecindad de u_0 .

Pero como en $f(t_2, u) = e_1^T M(t_2) f^+(q_1)$, con $M(t_2) = I + \frac{t_2 A}{2!} + \frac{t_2^2 A^2}{3!} + \frac{t_2^3 A^3}{4!} + \dots$, $M(t_2)$ es una matriz de 2x2 de la forma

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

con cada m_{ij} en función de $t_2 = t_2(u)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ y $f^+(q_1) = \begin{pmatrix} u + \mu \\ r_2 + \beta_2(u + \mu) \end{pmatrix}$, lo reescribimos como

$$\begin{aligned} f(t_2(u), u) &= e_1^T M(t_2(u)) f^+(q_1) \\ &= (1, 0) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + \mu \\ r_2 + \beta_2(u + \mu) \end{pmatrix} \\ &= (m_{11}, m_{12}) \begin{pmatrix} u + \mu \\ r_2 + \beta_2(u + \mu) \end{pmatrix} \\ &= (u + \mu)m_{11} + (r_2 + (u + \mu)\beta_2)m_{12} \end{aligned}$$

Es así como $f(t_2(u), u) \equiv 0$ si y sólo si $(u + \mu)m_{11} + (r_2 + (u + \mu)\beta_2)m_{12} \equiv 0$.

El desarrollo de esto puede ser agrupado por factores de $(u + \mu)$, resultando en un polinomio de la forma

$$c_1(u + \mu) + c_2(u + \mu)^2 + c_3(u + \mu)^3 + c_4(u + \mu)^4 + c_5(u + \mu)^5 + \dots \equiv 0$$

donde $c_k = 0$ con $k = 1, 2, 3, \dots$. Al despejar los primeros coeficientes c_k , realizamos el despeje de los coeficientes a_k :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{2}{r_2}, \\ a_2 &= \frac{2\beta_2}{3r_2^2}, \\ a_3 &= -\frac{2(3\beta_1 + 2\beta_2^2)}{9r_2^3}, \\ a_4 &= \frac{4(27\beta_1\beta_2 + 11\beta_2^3)}{135r_2^4}, \\ a_5 &= -\frac{2(81\beta_1^2 + 180\beta_1\beta_2^2 + 52\beta_2^4)}{405r_2^5}. \end{aligned}$$

Con esto tenemos la función $t_2(u)$ (3.6) la cual nos da el tiempo de vuelo que le toma al flujo ψ_t llevar a q_1 a un punto q_2 .

Ahora tomamos la ecuación (3.5)

$$u + t_2 e_2^T M(t_2) f^+(q_1) = v$$

y a partir de ella definimos una función que nos arroje los puntos en los cuales colisiona cada trayectoria del lado derecho de nuestro sistema, es decir una función $v = g_1(u, \mu)$. Ver Figura 3.3

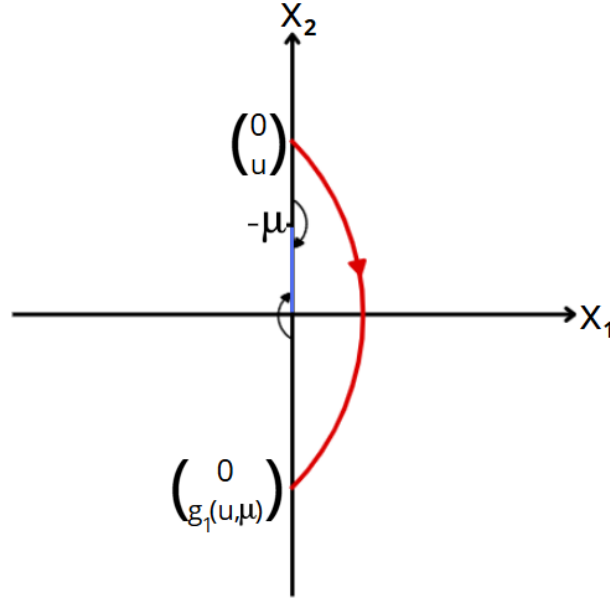


Figura 3.3: $v = g_1(u, \mu)$.

Tenemos entonces $u + te_2^T M(t_2) f^+(q_1) = g_1(u, \mu)$ y sustituimos t_2 con $t_2(u)$

$$g_1(u, \mu) = u + t_2(u) e_2^T M(t_2(u)) f^+(q_1).$$

$$g_1(u, \mu) = -u - 2\mu + \frac{2\beta_2(u+\mu)^2}{3r_2} - \frac{4\beta_2^2(u+\mu)^3}{9r_2^2} + \frac{2(9\beta_1\beta_2+22\beta_2^3)(u+\mu)^4}{135r_2^3} - \frac{4(27\beta_1\beta_2^2+26\beta_2^4)(u+\mu)^5}{405r_2^4} + \dots$$

Realizamos de forma análoga los cálculos del tiempo de vuelo $t_1 = t_1(v) = b_1v + b_2v^2 + b_3v^3 + b_4v^4 + b_5v^5 + \dots$ que toma q_2 para llegar a un punto q_1 y el sistema de ecuaciones es

$$t_1(v) e_1^T M(t_1(v)) f^-(q_2) = 0, \quad (3.7)$$

$$v + t_1(v) e_2^T M(t_1(v)) f^-(q_2) = u, \quad (3.8)$$

obteniendo las siguientes expresiones para los coeficientes para $t_1(v)$:

$$b_1 = \frac{-2}{r_1\gamma_2},$$

$$b_2 = \frac{2\alpha_2}{3r_1^2\gamma_2^2},$$

$$b_3 = -\frac{2(3\alpha_1 + 2\alpha_2^2)}{9r_1^3\gamma_2^3},$$

$$b_4 = \frac{4(27\alpha_1\alpha_2 + 11\alpha_2^3)}{135r_1^4\gamma_2^4},$$

$$b_5 = -\frac{2(81\alpha_1^2 + 180\alpha_1\alpha_2^2 + 52\alpha_2^4)}{405r_1^5\gamma_2^5}.$$

Por último realizamos los cálculos necesarios, igualmente análogos, para obtener una función $g_2(v)$, ver Figura 3.4.

$$g_2(v) = -v + \frac{2v^2\alpha_2}{3r_1\gamma_2} - \frac{4v^3\alpha_2^2}{9r_1^2\gamma_2^2} + \frac{2v^4(9\alpha_1\alpha_2 + 22\alpha_2^3)}{135r_1^3\gamma_2^3} - \frac{4v^5(27\alpha_1\alpha_2^2 + 26\alpha_2^4)}{405r_1^4\gamma_2^4} + \dots$$

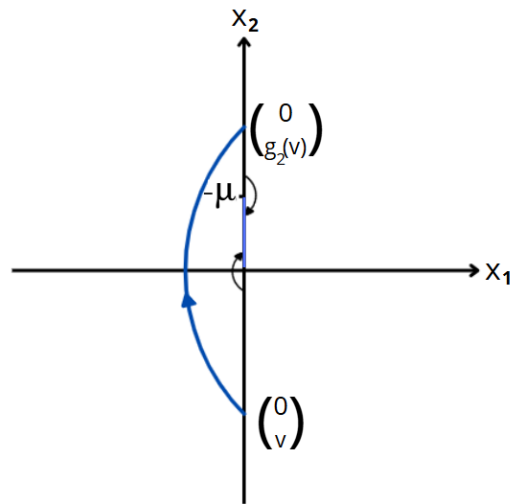


Figura 3.4: $u = g_2(v)$.

Con esto hemos obtenido los llamados mapeos laterales $v = g_1(u, \mu)$ y $u = g_2(v)$. Entonces tenemos un ciclo límite de cruce cuando $g_2(g_1(u, \mu)) = u$. Para encontrar ciclos límite de cruce, debemos primero encontrar los puntos fijos de P . Ver Figura 3.5.

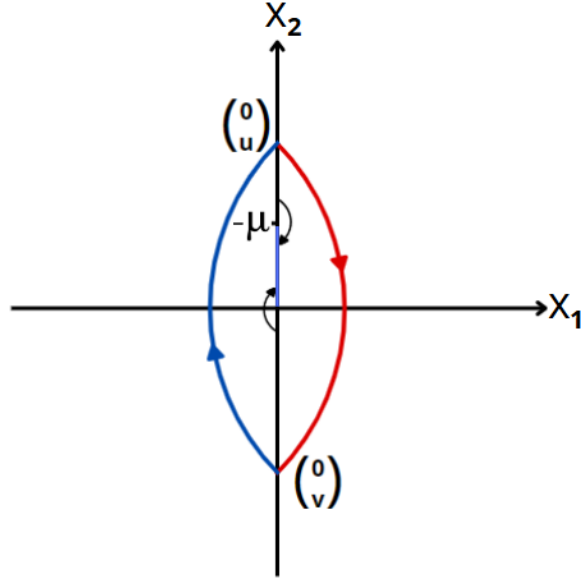


Figura 3.5: $P(u, \mu) = u$

Sea P el Mapeo de Poincaré dado por la composición de las funciones g_1 y g_2 , es decir, $P = g_2 \circ g_1$:

$$P(u, \mu) = \mu + \mathcal{O}(\mu^2) + (1 + \mathcal{O}(\mu))(u + \mu) + \left(\frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} \right) + \mathcal{O}(\mu) \right) (u + \mu)^2 + \dots$$

$P(u, \mu) = u$ si y solo si $P(u, \mu) - u = 0$. Sea H la función definida como $H(u, \mu) = P(u, \mu) - u$, donde u es punto fijo de $P(u, \mu)$ cuando $H = 0$.

$$H(u, \mu) = \mu + \mathcal{O}(\mu^2) + (1 + \mathcal{O}(\mu))(u + \mu) + \left(\frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} \right) + \mathcal{O}(\mu) \right) (u + \mu)^2 - u + \dots$$

Como vemos, tenemos una expresión en función de u y μ , así que comprobamos que existe un despeje para alguna de éstas con el TFI.

Observe que $H(0, 0) = 0$. Calculamos las derivadas parciales de H con respecto a u y μ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \mu}(0, 0) &= 2. \end{aligned}$$

Así, podemos despejar μ de la ecuación $H(u, \mu) = 0$. Proponemos

$$\mu = h(u) = d_1 u + d_2 u^2 + d_3 u^3 + d_4 u^4 + d_5 u^5 + \dots,$$

la cual representa la *curva de puntos fijos*.

De la segunda parte del TFI, la cual dice que $H(u, h(u)) \equiv 0$, calculamos los primeros cinco coeficientes d_k , $k = 1, 2, 3, \dots$.

$$\begin{aligned} d_1 &= 0, \\ d_2 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} \right), \\ d_3 &= \frac{2\alpha_2}{9r_1 \gamma_2} \left(\frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} \right), \\ d_4 &= \frac{r_2^3(9\alpha_1\alpha_2 + 22\alpha_2^2) - 25r_1r_2^2\alpha_2^2\beta_2\gamma_2 + 3r_1^3\beta_2(-3\beta_1 + \beta_2^2)\gamma_2^3}{135r_1^3r_2^3\gamma_2^3}, \\ d_5 &= \frac{2\alpha_2(r_2^3(27\alpha_1\alpha_2 + 26\alpha_2^3) - r_1r_2^2(9\alpha_1 + 32\alpha_2^2)\beta_2\gamma_2 + 6r_1^3\beta_2(-3\beta_1 + \beta_2^2)\gamma_2)}{405r_1^4r_2^3\gamma_2^4}. \end{aligned}$$

Para simplificar los coeficientes en la curva de puntos fijos definimos los parámetros

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2}, \\ \nu &= \left(\frac{\alpha_1}{r_1^2 \gamma_2^2} - \frac{\beta_1}{r_2^2} \right) \alpha_2, \quad \alpha_2 \neq 0 \end{aligned}$$

con $\alpha_2 \neq 0$. Introducimos estos parámetros despejando

$$\begin{aligned} \beta_1 &= r_2^2 \left(\frac{\alpha_1}{r_1^2 \gamma_2^2} - \frac{\nu}{\alpha_2} \right), \\ \beta_2 &= r_2 \left(\frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \eta \right). \end{aligned}$$

Entonces la curva de puntos fijos se reduce a

$$\mu = h(u, \eta) = -\frac{1}{3}\eta u^2 + \frac{2\alpha_2}{9r_1 \gamma_2} \eta u^3 - \left(\frac{\nu + \mathcal{O}(\eta)}{15r_1 \gamma_2} \right) u^4 + \left(\frac{4\alpha_2 \nu + \mathcal{O}(\eta)}{45r_1^2 \gamma_2^2} \right) u^5 + \dots, \quad (3.9)$$

y el mapeo de Poincaré

$$P(u, \mu, \eta) = \mu + \mathcal{O}(\mu^2) + (1 + \mathcal{O}(\mu))(u + \mu) + \left(\frac{2}{3}\eta + \mathcal{O}(\mu) \right) (u + \mu)^2 + \dots \quad (3.10)$$

Si $\alpha_2 = 0$, solo introducimos el parámetro η en los cálculos y la curva de puntos fijos y el mapeo de Poincaré se reducen a

$$\begin{aligned} \mu = h(u, \eta) &= -\frac{1}{3}\eta u^2 + \frac{\eta(-3\beta_1 + r_2^2 \eta^2)}{45r_2^2} u^4 + \dots \\ P(u, \mu, \eta) &= \mu + (u + \mu) + \frac{2}{3}\eta(u + \mu)^2 + \mathcal{O}(|u + \mu|^3). \end{aligned}$$

3.1.2. Teorema de la Bifurcación Pseudo-Hopf

Haciendo un análisis de relación de signos y graficando la curva de puntos fijos obtenemos los siguientes dos casos, independientemente de si $\alpha_2 \neq 0$ o $\alpha_2 = 0$. Ver Figura 3.6.

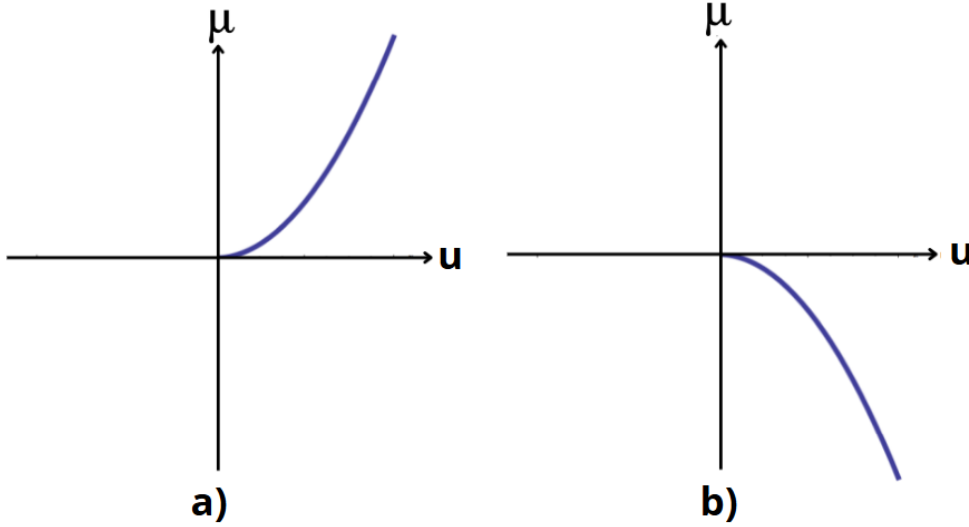


Figura 3.6: a) $\eta < 0$. b) $\eta > 0$.

Es así como procedemos a establecer el Teorema de existencia de un ciclo límite de cruce (clc).

Teorema 4. (*Teorema de existencia de un ciclo límite de cruce*)

Considere el sistema (3.1) cuya curva de puntos fijos está dada por (3.9), donde $\gamma_2 > 0$, $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. Si $\eta\mu < 0$ existe localmente alrededor, de $x = 0$, un único ciclo límite de cruce.

Determinamos entonces la estabilidad del ciclo límite de cruce utilizando el Teorema de la Estabilidad de Puntos Fijos.

$$|P'(\bar{u}, \bar{\mu}, \eta)| > 1 \Rightarrow \text{CLC inestable.}$$

$$|P'(\bar{u}, \bar{\mu}, \eta)| < 1 \Rightarrow \text{CLC estable.}$$

con $(\bar{u}, \bar{\mu})$ punto fijo.

Observe que, independientemente de α_2 ,

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, h(u), \eta) = 1 + \frac{4}{3}\eta u + \mathcal{O}(u^2) \quad (3.11)$$

Al ser u un valor muy pequeño y positivo concluimos que

Si $\eta < 0 \Rightarrow |P'(u, h(u), \eta)| < 1 \Rightarrow$ punto fijo estable (atractor).

Si $\eta > 0 \Rightarrow |P'(u, h(u), \eta)| > 1 \Rightarrow$ punto fijo inestable (repulsor).

Es de esta manera, al haber realizado todo este desarrollo que podemos establecer el teorema que le da nombre a este trabajo de tesis.

Teorema 5. (*Teorema de la Bifurcación Pseudo-Hopf*)

Considere el sistema (3.1), donde $\gamma_2 > 0$, $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. Entonces, para μ suficientemente pequeña, existe un único ciclo límite de cruce si $\eta\mu < 0$. Cuando $\eta < 0$, el ciclo límite de cruce es estable, y cuando $\eta > 0$ es inestable.

Especificamos que se trata del caso genérico debido a que en las condiciones que se establecen ningún parámetro es cero.

3.1.3. Ejemplo académico

Sea el sistema Filippov

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 + x_2 < 1, \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 + x_2 > 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

donde $c^T = (1, 1)$. De este modo verificamos si este cumple la hipótesis (H_0).

$$\begin{aligned} c^T A_1 &= (1, 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (2, -2), \\ c^T A_2 &= (1, 1) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (4, 3). \end{aligned}$$

Podemos ver que

$$\{c, A_1^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \{c, A_2^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes, por lo que la hipótesis (H_0) se cumple y estos se pueden escribir como

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$$

donde $\gamma_1 = \frac{7}{2}$ y $\gamma_2 = \frac{1}{4}$.

Ahora hay que encontrar los puntos de tangencia q_1 y q_2 del sistema (3.12) a partir de que se cumple que

$$\begin{aligned} c^T f^-(q_1) &= 0, \\ c^T f^+(q_2) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces llegamos a que

$$q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ y } q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Y ambos son de tangencia invisible pues

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1) = 3 > 0, \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2) = -3 < 0. \end{aligned}$$

Ver Figura 3.7.

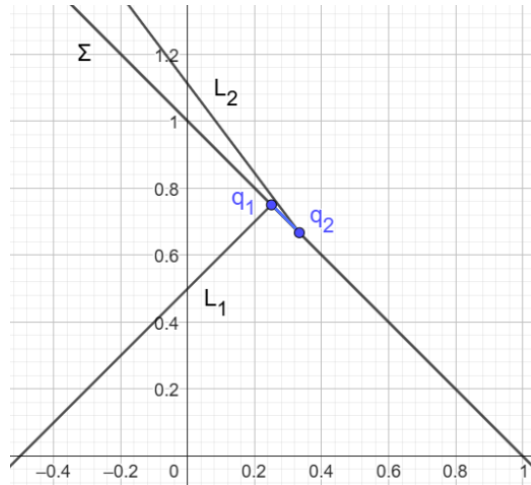


Figura 3.7: L_1 , L_2 y Σ del sistema (3.12).

Así, para poder aplicar el teorema de existencia de un ciclo límite de cruce y posteriormente el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf, usamos (2.3) para calcular α_2 , β_2 , μ y η .

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \text{tr}(A_1) = 1, \\ \beta_2 &= \text{tr}(A_2) = 7, \\ \mu &= c^T(A_2q_1 + b_2) = -\frac{1}{12}, \\ \eta &= \frac{\alpha_2}{r_1\gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} = \frac{11}{3}.\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\gamma_2 > 0, r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\eta\mu < 0$, por lo que existe localmente un único ciclo límite de cruce, y además, como $\eta > 0$, este es inestable. Ver Figura 3.8.

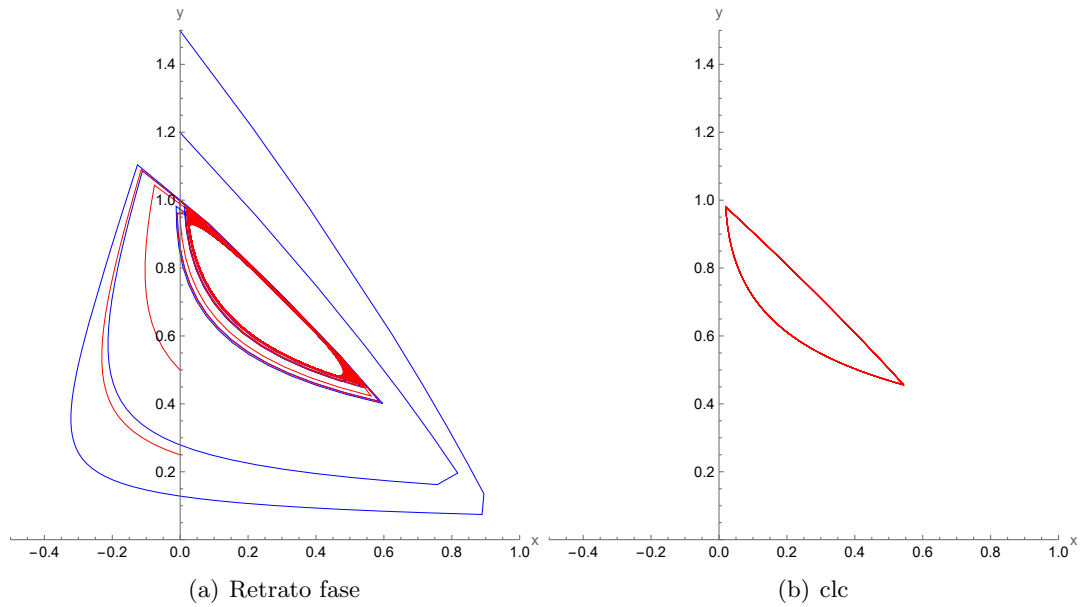


Figura 3.8: Retrato fase y ciclo límite de cruce del sistema (3.12) simulados en reversa.

3.2. La Bifurcación Pseudo-Hopf (caso no genérico)

En este primer caso no genérico fijamos el parámetro $\eta = 0$ para ver como es que esto afecta la estabilidad de los ciclos límite y establecemos un nuevo parámetro de estabilidad.

3.2.1. Teorema de la Bifurcación Pseudo-Hopf caso no genérico.

Fijamos ahora el parámetro $\eta = 0$. Entonces la curva de puntos fijos (3.9) para este nuevo caso es

$$\mu = h(u, 0) = -\frac{\nu}{15r_1\gamma_2}u^4 + \frac{4\alpha_2\nu}{45r_1^2\gamma_2^2}u^5 + \dots \quad (3.13)$$

Haciendo un análisis de signos vemos las siguientes relaciones entre la curva de puntos fijos y ν . Ver Figura 3.9.

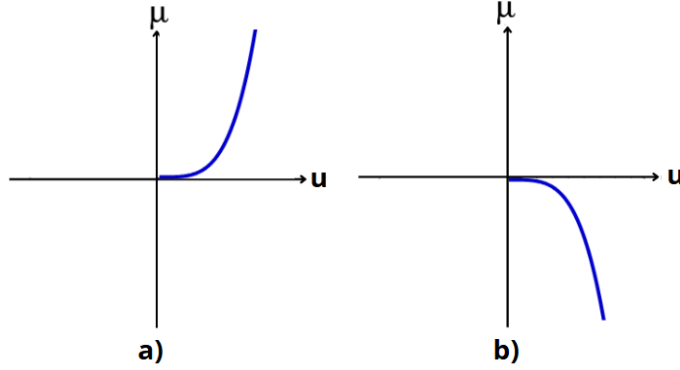


Figura 3.9: a) $\nu < 0$. b) $\nu > 0$.

Esto nos lleva a que existe un ciclo límite de cruce cuando $\nu\mu < 0$. Lo que nos resta por hacer es determinar la estabilidad de puntos fijos. De (3.11) obtenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, h(u, 0), 0) = 1 + \frac{8\nu}{15r_1\gamma_2}u^3 + \dots$$

Como u es muy pequeño y positivo, el signo que domina en el segundo coeficiente es el de ν . Procedemos entonces a enunciar el teorema para este caso no genérico.

Teorema 6. (*Teorema de la Bifurcación Pseudo-Hopf: caso no genérico*)

Considere el sistema (3.1), donde $\gamma_2 > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ y $\eta = 0$. Entonces, para μ suficientemente pequeña, existe un único ciclo límite de cruce si $\nu\mu < 0$. Cuando $\nu < 0$, el ciclo límite es estable, y cuando $\nu > 0$, este es inestable.

3.2.2. Ejemplo académico

Sea el sistema Filippov

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 - x_2 < 1, \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 - x_2 > 1, \end{cases} \quad (3.14)$$

con $a \approx 1$. De este modo verificamos si este cumple la hipótesis (H_0).

$$\begin{aligned} c^T A_1 &= (1, -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \left(1, -\frac{3}{2}\right), \\ c^T A_2 &= (1, -1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \left(-1, -\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Podemos ver que

$$\{c, A_1^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \{c, A_2^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes, por lo que la hipótesis (H_0) se cumple. Ahora, podemos escribir la siguiente combinación lineal

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$$

donde $\gamma_1 = -\frac{3}{2}$ y $\gamma_2 = \frac{1}{2}$.

A continuación calculamos los puntos de tangencia del sistema (3.14) a partir de que

$$\begin{aligned} c^T f^-(q_1) &= 0, \\ c^T f^+(q_2) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } q_2 = \begin{pmatrix} 3 - 4a \\ 4 - 4a \end{pmatrix}.$$

Y ambos son de tangencia invisible pues

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1) = 1 > 0, \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2) = -\frac{1}{4} < 0. \end{aligned}$$

Para poder asegurar la existencia de un ciclo límite de cruce y aplicar el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf usamos (2.3).

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \text{tr}(A_1) = \frac{3}{2}, \\ \beta_2 &= \text{tr}(A_2) = -\frac{1}{4}, \\ \mu &= c^T (A_2 q_1 + b_2) = 1 - a, \\ \eta &= \frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} = 0. \end{aligned}$$

Como vemos, $\eta = 0$, entonces este ejemplo se trata de un caso no genérico, por lo que procedemos con el cálculo de los parámetros faltantes

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\det(A_1) = -\frac{1}{2}, \\ \beta_1 &= -\det(A_2) = \frac{1}{4}, \\ \nu &= \left(\frac{\alpha_1}{r_1^2 \gamma_2^2} - \frac{\beta_1}{r_2^2} \right) \alpha_2 = -9.\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\gamma_2 > 0, r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\nu\mu < 0$, por lo que, para μ suficientemente pequeña, existe un único ciclo límite de cruce, y además, como $\nu < 0$, este es estable.

Este ejemplo nos es de gran utilidad para ilustrar la importancia de tener una μ lo suficientemente pequeña. Puesto que $\mu = 1 - a$, fijemos dos valores para a .

Para $a = \frac{19}{20}$, $\mu = \frac{1}{20}$ y $q_2 = \left(\frac{-4}{\frac{1}{5}} \right)$. Por lo que el retrato fase es el siguiente. Ver Figura 3.10

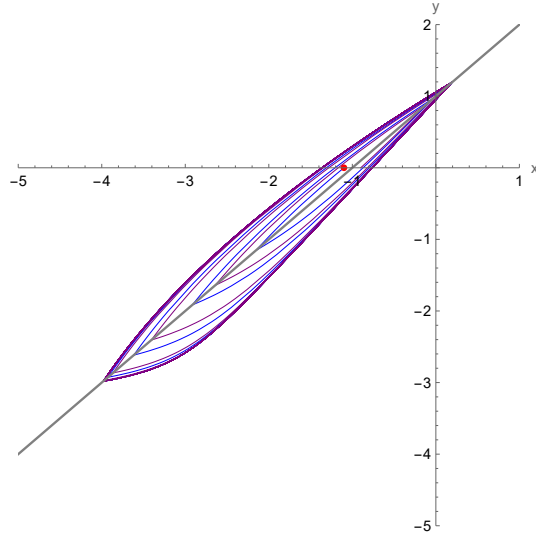


Figura 3.10: Retrato fase del sistema (3.14).

La Figura 3.11 nos muestra el ciclo límite estable.

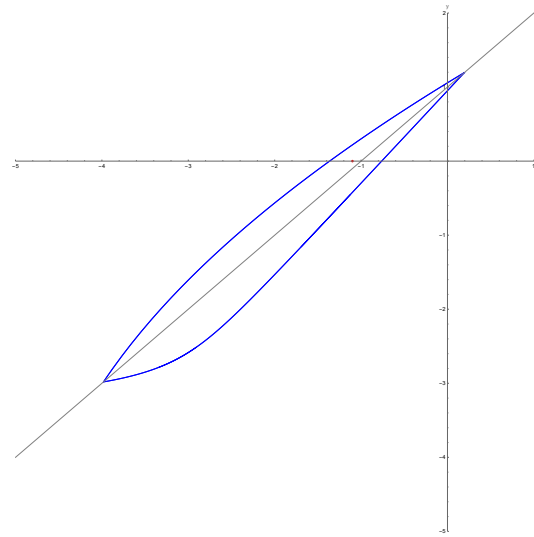


Figura 3.11: Ciclo límite de cruce estable del sistema (3.14).

Para $a = \frac{23}{25}$, $\mu = \frac{2}{25}$ y $q_2 = \left(\frac{-17}{8\frac{25}{25}}\right)$. Por lo que el retrato fase es el siguiente. Ver Figura 3.12

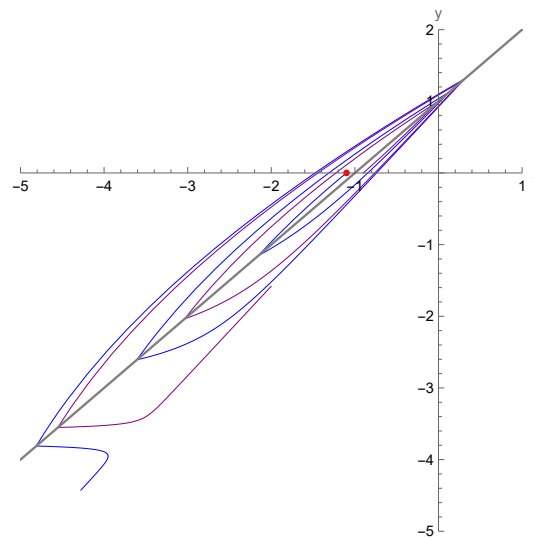


Figura 3.12: Retrato fase del sistema (3.14).

En este retrato fase vemos como no existe un ciclo límite de cruce debido a que μ no es lo suficientemente pequeña.

3.3. La Bifurcación Pseudo-Hopf (caso sin deslizamiento)

Una de las variables más esenciales en todos estos procedimientos ha sido μ ya que este es el parámetro de bifurcación. Es por esto que consideramos un tercer caso del Teorema de la Bifurcación Pseudo-Hopf, donde $\mu = 0$. Esta nueva condición impacta tanto que la forma normal de nuestro sistema se ve modificada. Así el sistema Filippov toma la forma

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

En este tercer caso nuestros puntos de tangencia se colapsan en un punto de doble tangencia, en este caso en el origen puesto que la distancia entre ellos se ve reducida a 0. Las demás condiciones se mantienen como en el caso general.

Comenzamos factorizando u^2 de la curva de puntos fijos (3.9) y tenemos que

$$\begin{aligned} \mu = h(u, \eta) &= -\frac{1}{3}\eta u^2 + \frac{2\alpha_2}{9r_1\gamma_2}\eta u^3 - \left(\frac{\nu + \mathcal{O}(\eta)}{15r_1\gamma_2}\right)u^4 + \left(\frac{4\alpha_2\nu + \mathcal{O}(\eta)}{45r_1^2\gamma_2^2}\right)u^5 + \dots \\ &= u^2 \left(-\frac{1}{3}\eta + \frac{2\alpha_2}{9r_1\gamma_2}\eta u - \left(\frac{\nu + \mathcal{O}(\eta)}{15r_1\gamma_2}\right)u^2 + \left(\frac{4\alpha_2\nu + \mathcal{O}(\eta)}{45r_1^2\gamma_2^2}\right)u^3 + \dots \right) = 0 \\ &= u^2(\tilde{h}(u, \eta)) \end{aligned}$$

Así, buscamos resolver $\tilde{h} = 0$. Como vemos, ésta está en función de u y η , por lo que utilizamos el TFI para despejar alguna de éstas.

Observe que $\tilde{h}(0, 0) = 0$. Calculamos entonces las derivadas parciales de \tilde{h} con respecto a u y η .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta}(0, 0) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

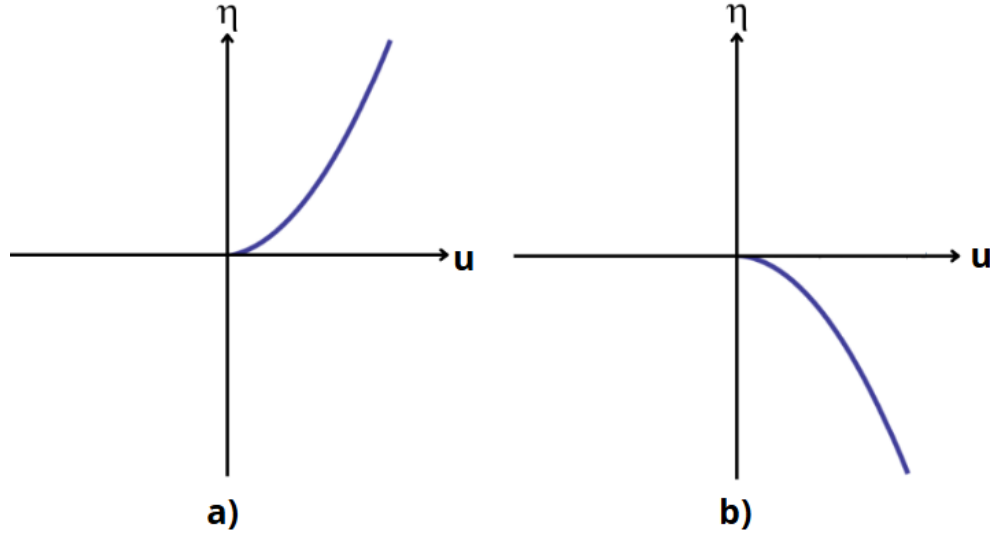
Así, podemos despejar a η de la ecuación $\tilde{h}(u, \eta) = 0$. Proponemos

$$V(u, \nu) = k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3 + k_4 u^4 + \dots$$

Calculamos cada coeficiente k análogamente a los casos anteriores y obtenemos la curva de puntos fijos

$$\eta = V(u, \nu) = -\frac{\nu}{5\gamma_2 r_1} u^2 + \frac{2\alpha_2 \nu}{15\gamma_2^2 r_1^2} u^3 + \dots \quad (3.16)$$

Haciendo el análisis de signos correspondiente y graficando la curva de puntos fijos tenemos que cuando $\eta\nu < 0$ existe un ciclo límite de cruce. Ver Figura 3.13.

Figura 3.13: a) $\nu < 0$. b) $\nu > 0$.

Lo último por realizar es establecer la estabilidad de los puntos fijos. Como en casos anteriores, calculamos la derivada de P con respecto a u .

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, 0, V(u, \nu)) = 1 + \frac{4\nu}{15\gamma_2 r_1} u^3 - \frac{4\alpha_2 \nu}{15\gamma_2^2 r_1^2} u^4 + \dots$$

Es sencillo ver que, sobre el segundo término, el signo dominante es el de ν pues u es un valor muy pequeño y positivo.

Teorema 7. (*Teorema de la Bifurcación Pseudo-Hopf, caso sin deslizamiento*)

Considere el sistema (3.15), donde $\gamma_2 > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ y $\mu = 0$. Entonces, para η suficientemente pequeña, existe un ciclo límite de cruce si $\eta\nu < 0$. Cuando $\nu < 0$, el ciclo límite es estable. Por otro lado, cuando $\nu > 0$, este es inestable.

3.3.1. Ejemplo académico

Sea el sistema Filippov

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{27}{8} \\ -\frac{87}{48} \end{pmatrix} & \text{si } x_1 + 2x_2 < 2, \\ \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 + 2x_2 > 2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Verificamos que este cumple la hipótesis (H_0).

$$c^T A_1 = (1, 2) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1, 7),$$

$$c^T A_2 = (1, 2) \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-4, -2).$$

Entonces

$$\{c, A_1^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \{c, A_2^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes, por lo que la hipótesis (H_0) se cumple. Ahora, la combinación lineal

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$$

es cierta cuando $\gamma_1 = -\frac{10}{3}$ y $\gamma_2 = \frac{2}{3}$.

Ahora calculamos los puntos de tangencia del sistema (3.17) tomando que

$$c^T f^-(q_1) = 0,$$

$$c^T f^+(q_2) = 0.$$

Entonces

$$q_1 = q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y ambos tienen tangencia invisible pues

$$r_1 = c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1) = \frac{27}{16} > 0,$$

$$r_2 = c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2) = -6 < 0.$$

Como $q_1 = q_2$, entonces $\mu = 0$, por lo que este ejemplo se trata de un caso sin deslizamiento. Para asegurar la existencia de un ciclo límite de cruce y aplicar el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf usamos (2.3).

$$\alpha_1 = -\det(A_1) = 2,$$

$$\alpha_2 = \text{tr}(A_1) = 1,$$

$$\beta_1 = -\det(A_2) = -2,$$

$$\beta_2 = \text{tr}(A_2) = -6,$$

$$\eta = \frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} = -\frac{1}{9},$$

$$\nu = \left(\frac{\alpha_1}{r_1^2 \gamma_2^2} - \frac{\beta_1}{r_2^2} \right) \alpha_2 = \frac{265}{162}.$$

Tenemos entonces que $\gamma_2 > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ y $\eta \nu < 0$ existe un único ciclo límite de cruce, y además, como $\nu > 0$, este es inestable. Ver Figuras 3.14 y 3.15

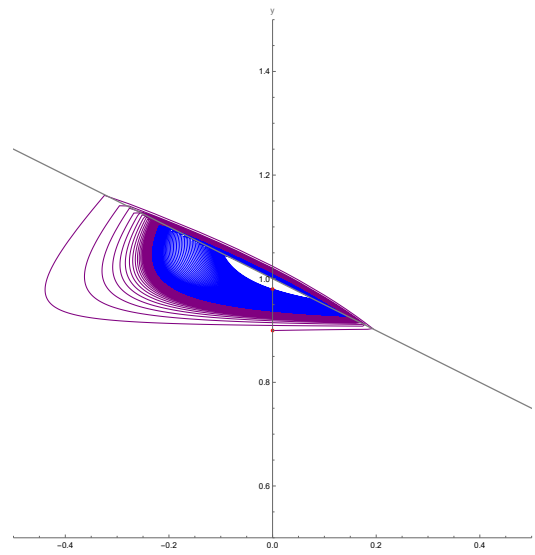


Figura 3.14: Retrato fase del sistema (3.17) simulado en reversa.

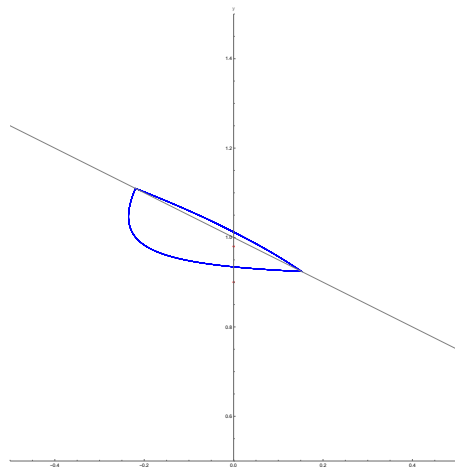


Figura 3.15: Ciclo límite de cruce inestable del sistema (3.17).

Capítulo 4

Aplicación

A pesar de ser un campo relativamente nuevo, los sistemas Filippov cuentan con aplicaciones en distintos ámbitos de la ciencia como la física, biología, etc. A continuación encontramos uno de ellos, ver [2].

Ejemplo. *Piloto automático de dos posiciones para controlador de barcos*

Sea φ la desviación de un barco con respecto a su ruta asignada, ψ es la posición de su timón y $M = M(\varphi)$ el momento generado por dicho timón.

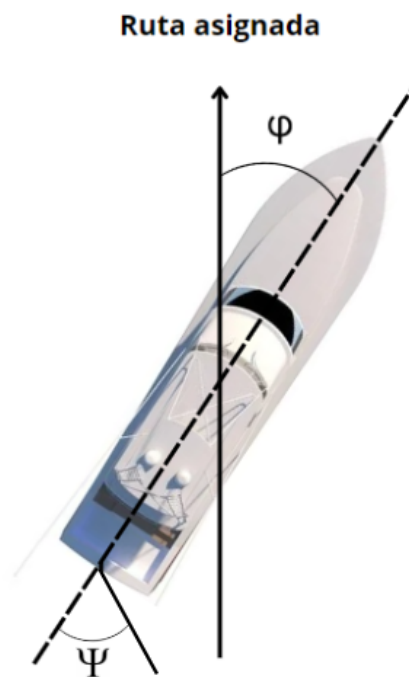


Figura 4.1: Desviación de un barco con respecto a su ruta asignada.

También contamos con el momento de fuerza de resistencia $-H \frac{d\varphi}{dt}$ y el momento I de inercia con respecto a la vertical, es decir, la ruta asignada. La ecuación que nos da la rotación del barco es

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H \frac{d\varphi}{dt} = M. \quad (4.1)$$

Cuando el timón y el barco están alineados con el eje vertical tenemos que $\psi = 0$, $M = 0$ y el rumbo del barco está en $\varphi = 0$.

El piloto automático de dos posiciones es uno de los controladores de ruta más sencillos de utilizar. El timón puede tomar una de dos posiciones $\psi = \pm\psi_0$ generando momentos $M = \pm M_0$. La posición del timón depende de la posición del barco, φ y $\frac{d\varphi}{dt}$. El piloto automático más simple de este tipo actúa cuando el barco cruza el eje $\varphi = 0$ y podemos asumir que el redireccionamiento del timón ocurre de forma instantánea. Es natural pensar en que sería más efectivo que el movimiento del timón se dé antes del devío del barco. Ese control anticipatorio se puede conseguir por dos métodos: el llamado corrección de velocidad o por retroalimentación paralela o dura.

En el caso de la corrección de velocidad o acción derivada, el movimiento del timón ocurre cuando la siguiente combinación lineal de la desviación de rumbo φ y la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$ se reduce a cero

$$\sigma = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}.$$

Es fácil ver que para $b > 0$ el cambio de posición del timón ocurrirá antes del paso del barco por $\varphi = 0$. Dicho cambio de posición es a babor ($\psi = -\psi_0$ y $M = -M_0$) para $\sigma > 0$ y a estribor ($\psi = +\psi_0$ y $M = +M_0$) para $\sigma < 0$. Si $\sigma = 0$, el timón puede asumir una posición arbitraria entre los dos extremos: $-\psi_0 \leq \psi \leq +\psi_0$ y $-M_0 \leq M \leq +M_0$.

Podemos escribir las ecuaciones del control de dos posiciones y del motor de dirección que realiza la corrección de velocidad de la siguiente forma

$$M = M_0 Z \left(\varphi + b \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad (4.2)$$

donde

$$Z(\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{si } \sigma > 0, \\ 1 & \text{si } \sigma < 0, \end{cases}$$

y $|Z(0)| \leq 1$.

Para obtener un sistema Filippov de este problema con el cual podamos trabajar, primero debemos simplificar (4.1) y (4.2) introduciendo las variables x , t_{new} y z definidas como

$$\varphi = Ax, \quad t = T\tau, \quad M = M_0z,$$

donde

$$A = \frac{M_0 I}{H^2} \text{ y } T = \frac{I}{H}.$$

Así mismo, notamos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{d\varphi}{d\tau} = Ax', \\ \varphi'' &= Ax'' = T^2 \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\varphi''}{T^2}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = T \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\varphi'}{T} = Ax, \\ \ddot{\varphi} &= A\ddot{x}. \end{aligned}$$

Comenzamos entonces por la ecuación (4.1) y las equivalencias anteriores tenemos que

$$I\ddot{\varphi} + H\dot{\varphi} = M_0 Z(\sigma) \iff \frac{I}{T^2} \varphi'' + \frac{H}{T} \varphi' = M_0 z$$

más aún

$$\frac{I}{T^2} \varphi'' + \frac{H}{T} \varphi' = M_0 z \iff \frac{IA}{T^2} x'' + \frac{HA}{T} x' = M_0 z$$

Ahora multiplicamos esto último por $\frac{T^2}{IA}$:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{IA} \left(\frac{IA}{T^2} x'' \right) + \frac{T^2}{IA} \left(\frac{HA}{T} x' \right) &= \frac{T^2}{IA} (M_0 z) \\ x'' + \frac{TH}{I} x' &= \frac{M_0 z T^2}{IA} \end{aligned}$$

y $\frac{TH}{I} = 1$, $A = \frac{M_0 I}{H^2}$

$$x'' + x' = z$$

con $z = Z(\varphi + b\dot{\varphi})$. De aquí reajustamos σ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \varphi + b\dot{\varphi} \\ &= Ax + \frac{b}{T} \varphi' \\ &= Ax + \frac{b}{T} Ax' \\ &= A(x + \beta x') \end{aligned}$$

con $\beta = \frac{b}{T}$. Entonces $Z(\varphi + b\dot{\varphi} = Z(A(x + \beta x'))$ pero como A es fijo, solo nos interesa el signo de $x + \beta x'$ para saber el valor de Z , así $z = Z(x + \beta x')$.

Sea el plano fase ordinario x, \dot{x} donde $x' = \dot{x}$. Decimos que $\dot{x} = y$ entonces $x'' + y = z$ y

$$z = X(x + \beta y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x + \beta y > 0, \\ 1 & \text{si } x + \beta y < 0, \end{cases}$$

tenemos que $\dot{y} = \ddot{x} = -y + z$ con $\ddot{x} = x''$. Así

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + z \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - 1 \end{cases} & \text{si } x + \beta y > 0, \\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases} & \text{si } x + \beta y < 0. \end{cases}$$

Es sencillo ver que este plano fase x, y está dividido por la recta de conmutación $\Sigma = \{(x, y) | x + \beta y = 0\}$ en dos regiones que llamamos S_1 y S_2 para $x + \beta y < 0$ y $x + \beta y > 0$ respectivamente. Además es importante notar que sus trayectorias son simétricas entre sí con respecto al origen.

Esto plano fase lo expresamos como el siguiente sistema Filippov:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } x + \beta y < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } x + \beta y > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Verificamos que este cumple con la hipótesis (H_0) .

$$c^T A_1 = (1, \beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 1 - \beta) = c^T A_2.$$

Entonces

$$\{c, A_1^T c\} = \{c, A_2^T c\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \beta \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes, por lo que la hipótesis (H_0) se cumple. Ahora, la combinación lineal

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$$

es cierta cuando $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = 1$.

Ahora calculamos los puntos de tangencia del sistema (4.3) tomando que

$$\begin{aligned} c^T f^-(q_1) &= 0, \\ c^T f^+(q_2) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$q_1 = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{1-\beta} \\ -\frac{\beta}{1-\beta} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\beta^2}{1-\beta} \\ \frac{\beta}{1-\beta} \end{pmatrix}$$

Y ambos tienen tangencia invisible pues

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1) = 1 > 0, \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2) = -1 < 0. \end{aligned}$$

Para poder asegurar la existencia de un ciclo límite de cruce y aplicar el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf usamos (2.3).

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \text{tr}(A_1) = -1, \\ \beta_2 &= \text{tr}(A_2) = -1, \\ \mu &= c^T (A_2 q_1 + b_2) = -2\beta, \\ \eta &= \frac{\alpha_2}{r_1 \gamma_2} - \frac{\beta_2}{r_2} = -2. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\gamma_2 > 0, r_1 > 0, r_2 < 0$ y $\eta\mu < 0$ para $\beta < 0$, por lo que localmente existe un único ciclo límite de cruce, y además, como $\eta < 0$, este es estable. Ver Figura 4.2

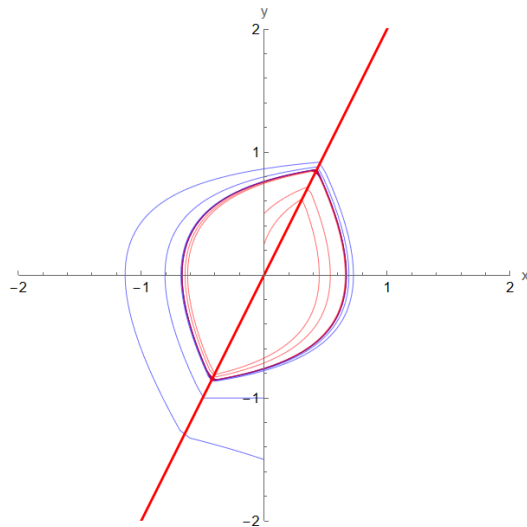


Figura 4.2: Simulación del ciclo límite de cruce estable de la aplicación.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo analizamos detalladamente las características y el comportamiento de la bifurcación pseudo-Hopf en los sistemas Filippov en el plano. Este fenómeno, relevante tanto en teoría como en aplicaciones prácticas, muestra cómo los cambios en parámetros del sistema pueden inducir la aparición de ciclos límite de cruce y modificar la estabilidad de este. A través del desarrollo de tres casos específicos ilustramos distintas dinámicas asociadas a esta bifurcación, resaltando las condiciones necesarias para su ocurrencia y la influencia de parámetros clave como el parámetro de bifurcación μ y los parámetros de control η y ν .

La metodología que utilizamos incluyó una combinación de técnicas analíticas, como la construcción de mapeos de Poincaré y curvas de puntos fijos, con ejemplos académicos que sirvieron para ilustrar los resultados teóricos y demostrar su aplicabilidad en sistemas establecidos. Además, presentamos un ejemplo práctico de aplicación en el diseño de un piloto automático para control de ruta de barcos, lo que destacó la relevancia de los sistemas Filippov en el modelado de sistemas con discontinuidades en ingeniería y física.

Los hallazgos de este trabajo no solo ampliaron nuestro entendimiento de los sistemas Filippov, sino que también abrieron la puerta a futuras investigaciones en la generalización de estos resultados para sistemas en dimensiones superiores y su implementación en campos interdisciplinarios como la biología, ingeniería, física, entre otros. De esta manera, destacamos la importancia de la teoría de bifurcaciones como herramienta para comprender y predecir comportamientos complejos en sistemas dinámicos discontinuos.

Bibliografía

- [1] Alligood, K. T., Sauer, T., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An introduction to dynamical systems*. Springer.
- [2] Andronov, A. A., Vitt, A. A., & Khaikin, S. E. (1966). *Theory of oscillators*. Pergamon Press.
- [3] Castillo Valenzuela, J. A. (2017). *Formas Normales y Bifurcaciones de Ciclos Límite en Sistemas Lineales por Pedazos Discontinuos*. Universidad de Sonora.
- [4] Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1999). *Calculo vectorial - 4b: Edicion*. Addison Wesley Longman.
- [5] Filippov, A. F. (2013). *Differential equations with discontinuous righthand sides: Control systems* (F. M. Arscott, Ed.; 1988a ed.). Kluwer Academic.
- [6] Castillo, J., Llibre, J., Verduzco, F. (2017). The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems. *Nonlinear dynamics*, 90(3), 1829â1840. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3766-9>